Un Enfoque Variacional De La Ecuación de Povzner Estacionaria

Por

BERNARDO RAMON OROZCO HERRERA

Requisito para obtener el grado de Magister en Matemáticas.

Director del Trabajo de Grado:

RAFAEL GALEANO ANDRADES

Profesor Titular

Instituto de Matemáticas Aplicadas
Universidad de Cartagena

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.

UNIVERSIDAD

DE

CARTAGENA

Cartagena, Bolívar, Abril de 2016.

Dedicado a:

mis padres, su actitud resiliente me inspira resolver problemas.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr Rafael Galeano Andrades, quien con sus conocimientos y experiencia me guio y acompaño en todo el proceso investigativo.
También quiero agradecer a mis padres y mis hermanos (Derna, Lucy y Fabio), quienes siempre me apoyaron en el desarrollo de mi carrera.
Finalmente, quiero agradecer a la Universidad de Cartagena por ofrecer la cohorte de Maestría en Matemáticas donde pude culminar satisfactoriamente mis estudios.

Índice general

Introducción

La teoría cinética describe un gas como un sistema de muchas partículas (aproximadamente 10^3 moléculas por cm^3 en condiciones normales) moviéndose a altas velocidades de acuerdo a las leyes de la mecánica clásica. Las partículas interactúan cambiando sus velocidades por choques binarios y los efectos químicos o eléctricos no son considerados. Debido a la dificultad de realizar un estudio del comportamiento individual de cada molécula, se introduce una descripción estadística del fenómeno, en particular es interesante determinar si es posible encontrar alguna función,

$$f(x,t,v) \geq 0, t \geq 0, x, v \in \mathbb{R}^3.$$

La cual representa la función de densidad de la probabilidad de que una partícula se encuentre en el punto x , en el instante t , moviéndose con una velocidad v. Las bases para esta teoría estadística fueron establecidas en la segunda mitad del siglo XIX. James Clerk Maxwell (1831-1879) encontró la función de la distribución de velocidades de las moléculas de un gas en equilibrio térmico. Ludwig Boltzmann (1844-1906) estudió el problema de un gas partiendo de cualquier estado inicial derivado de la Distribución de Maxwell:

$$f_{eq} = \sigma[\frac{m}{2\pi kT}]^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{m|v-V|^2}{2kT})$$

donde σ, V y T son la densidad (número de moléculas por unidad de volumen), la velocidad de flujo y la temperatura absoluta del gas. De otra parte, m es la masa de una molécula y k es la constante de Boltzmann [?]. En 1872 el propio Boltzmann estableció la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x,v) + v.\nabla_x f(t,x,v) = Q(f,f) \tag{1}$$

donde $Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|w|=1} w \cdot (v-u)w[f(u')f(v') - f(u)f(v)]dwdu$ se conoce con el nombre de *Operador de Colisión.* Además, $v' = v - w \cdot (v-u)w$ y $u' = u - w \cdot (v-u)w$, representa las velocidades de las moléculas después de la colisión. Para una descripción detallada sobre el desarrollo de la teoría matemática ver [?] y [?].
Si la función f es independiente de t , la ecuación (??) se transforma en:

$$v.\nabla_x f(x,v) = Q(f,f) \tag{2}$$

la cual se conoce con el nombre de *ecuación Estacionaria de Boltzmann.* El caso estacionario es una de las múltiples variantes que se puede encontrar en la literatura, también se conoce el caso homogéneo de la ecuación de Boltzmann, lo mismo que la ecuación de Boltzmann cerca al vacío y la ecuación de Boltzmann cerca del equilibrio ver [?].
La ecuación Povzner es un modelo que describe la evolución de la función de distribución de la densidad del número de partículas (o masa) para un gas. Fue introducida por primera vez en [?], en un contexto puramente matemático en la solución de un problema de valor inicial para un tipo de ecuación de Boltzmann espacialmente no homogénea. La ecuación introduce una regularización espacial, o "smearing" de las colisiones, lo que hace que sea posible demostrar la existencia global para el problema de Cauchy por métodos desarrollados para la ecuación de Boltzmann espacialmente uniforme. Entre los pocos trabajos donde aparece la ecuacion Povzner, mencionamos el de Cercignani [?]. Lachowicz y Pulvirenti [?] obtienen un tipo de ecuación de Povzner como un paso intermedio en el proceso de la dinámica de muchas partículas a las ecuaciones de Euler.
La ecuación Povzner y otras versiones de la ecuacion de Boltzmann espacialmente regularizada aparecen también en estudios de convergencia por medio del método

Monte-Carlo en dinámica de gases enrarecidos [?, ?, ?].

Soluciones de tipo L^1 para la ecuación no lineal estacionaria de Boltzmann han sido obtenidos por técnicas de compacidad débil. Ejemplos de resultados de existencia cerca al equilibrio para la ecuación estacionaria de Povzner en dominios acotados de $\mathbb{R}^n$ son obtenidos en ([?], [?]), y soluciones L^1 para la ecuación no lineal estacionaria de Boltzmann en un "slab" o "bloque" es estudiado en ([?], [?]). También en el semiespacio para la ecuación no lineal estacionaria de Boltzmann en un "slab" o "bloque"; para un operador de colisión truncado para grandes velocidades y valores pequeños de la componente de la velocidad en la dirección del "slab" o "bloque" (ver [?]). Soluciones estacionarias al problema exterior para la ecuación de Boltzmann son estudiados en [?].

Para dominios acotados en $\mathbb{R}^n$ un resultado de existencia fué obtenido para la ecuación no lineal estacionaria de Boltzmann, bajo un truncamiento adicional para pequeñas velocidades (ver [?]).

En el presente trabajo se resuelve el siguiente problema: Hallar $u : [a,b]\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaga,

$$v\frac{\partial u(x,v)}{\partial x} = g(u,u)(v), \text{ para casi todo } (x,v) \in [a,b]\times\mathbb{R}^+;\ 0 \in (a,b),\ a+b \geq 0$$

$$u(a,v) = u(b,v)$$

mediante técnicas del cálculo variacional en algún espacio de Banach adecuado por ejemplo $L^1 - L^\infty$, se obtiene una solución generalizada para este problema; entendida esta como,

$$u \in E := \left\{u \in L^1[a,b] : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b],\ \int_0^\infty u\,dv < \infty\right\},$$

con,

$$\|u\|_E := \|u\|_{L^1[a,b]} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^\infty[a,b]},$$

que satisface,

$$-\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = \int_a^b g(u,u)w\,dx,$$

para toda

$$w \in E^{\#} := \Big\{u \in L^1[a,b] : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b],\ u(a,v) = u(b,v)\Big\}$$

Este resultado es el primero en la literatura para la ecuación no lineal estacionaria de Boltzmann con estas técnicas no triviales. Para técnicas variacionales ver [**?**] y [**?**]. Métodos variacionales se han estudiado en [**?**, **?**] para obtener soluciones no triviales de tipo L^2 para la ecuación estacionaria de Boltzmann con dato en la frontera dependiendo de un maxwelliano. Para la ecuación estacionaria de Boltzmann cerca al equilibrio en $\mathbb{R}^n$ la situación es más clara para técnicas de mapeos contractivos, existen muchos resultados de existencia (ver [**?**], [**?**], [**?**], [**?**]),[**?**]).

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a presentar algunos resultados previos que servirán de soporte a los resultados que se obtendrán en el próximo capítulo. Teniendo en cuenta, que se asumen conocimientos generales de análisis, topología y teoría de la medida por parte del lector.

1.1. Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1 (*Producto interno*)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, donde $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$. Un producto interno sobre V es una función $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y para todo $\alpha \in K$:*

1. $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$

2. $\Phi(\alpha u, v) = \alpha\Phi(u, v)$

3. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$

4. $\Phi(u,u) \geqslant 0$ $(\in \mathbb{R})$

5. $\Phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Notación. *Si* Φ *es un producto interno, escribiremos* $\Phi(u,v) = (u,v)$*. Además, si* V *es un espacio vectorial con producto interno escribiremos* $\big(V, (\,.\,,.)\big)$*.*

El producto interno sobre un espacio vectorial, también se conoce con el nombre de *producto interior* o *producto escalar.*

Teorema 1.1.1. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea* $\big(V, (\,.\,,.)\big)$ *un espacio vectorial con producto interno, entonces es válida la siguiente desigualdad*

$$|(u,v) \leqslant (u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } u, v \in H.$$

Demostración. Véase [**?**, pag. 5]. ■

Definición 1.1.2 (*Espacio de Hilbert*)**.** *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno* $\big(H, (\,.\,,.)\big)$ *que es completo para la norma definida por ese producto interno.*

Un teorema que establece una conexión importante entre un espacio de Hilbert H y su espacio dual H' es el *Teorema de Representación de Riesz-Fréchet*, para su demostración véase [**?**, pag. 135].

Teorema 1.1.2. *(Teorema de Representación de Riesz-Fréchet). Sea* $\big(H, (\,.\,,.)$ *un espacio de Hilbert y sea* $\|.\|$ *su correspondiente norma asociada a su producto interno. Dado* $\varphi \in H'$ *existe un único* $v \in H$ *tal que*

$$\varphi(u) = (v,u)$$

para todo $u \in H$*, además,*

$$\|v\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Este teorema nos afirma que todo funcional lineal continuo $\varphi \in H'$ se comporta como un producto interno, ya que si identificamos a φ con v, obtenemos abusando un poco de la notación,

$$\varphi(u) = (\varphi, u).$$

Esto nos da la notación de que todo funcional lineal φ evaluado en u, se escribe

$$\langle \varphi, u \rangle.$$

1.2. Derivada de Fréchet

Las definiciones dadas en esta sección son tomadas de [**?**, pags. 1, 2, 77 y 78].
Sean X, Y espacios de Banach y, sea $L(X,Y)$ el conjunto de funciones lineales continuas de X a Y. Para $A \in L(X,Y)$ frecuentemente se escribe Ax o $A[x]$ en lugar de $A(x)$. El espacio $L(X,Y)$ está dotado de la norma

$$\|A\|_{L(X,Y)} = sup\big\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \leq 1\big\}, \quad A \in L(X,Y)$$

$\big(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)}\big)$ es un espacio de Banach, para una demostración de este hecho véase [**?**, pag. 167]. Un caso particular de este espacio es el *espacio dual* de X, X'.
Si $U \subset X$ es un conjunto abierto, $C(U,Y)$ denota el espacio de todas las funciones continuas $f : U \longrightarrow Y$.

Definición 1.2.1 (*Derivada de Fréchet*)**.** *Se dice que $f : U \longrightarrow Y$ es diferenciable o Fréchet diferenciable en $u \in U$ con derivada $df(u) \in L(X,Y)$ si*

$$f(u+h) = f(u) + df(u)[h] + o(\|h\|), \text{ cuando } h \to 0.$$

Se dice que f diferenciable en U, si es diferenciable en todo punto $u \in U$.

De la definición se sigue que si f es diferenciable en $u \in U$, entonces f es continua en u.
Con el fin de encontrar la derivada de una función f, se puede calcular, para todo

$h \in X$, el limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(u+\epsilon h) - f(u)}{\epsilon} := A_u h.$$

Si $A_u \in L(X,Y)$ y, si la función $u \mapsto A_u$ es continua de U a $L(X,Y)$, entonces f es diferenciable en u y $df(u) = A_u$. Frecuentemente se usa la notación $f'(u)$ en lugar de $df(u)$.

Sea E un espacio de Banach. Un funcional sobre E es una función de valor real definida sobre E. Sea J un funcional sobre E, diferenciable Fréchet en $u \in E$ con derivada $dJ(u) \in L(E,\mathbb{R})$, para establecer una notación tengamos en cuenta que: si J es diferenciable sobre E, es decir, lo es en todo punto $u \in E$, y la aplicación $E \mapsto L(E,\mathbb{R}), u \mapsto dJ(u)$, es continua, decimos que $J \in C^1(E,\mathbb{R})$.

Definición 1.2.2 (*Punto crítico o estacionario*)**.** *Un punto crítico o estacionario de un funcional $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es un elemento $z \in E$ tal que J es diferenciable en z y $dJ(z) = 0$. Un valor crítico de J es un número $c \in \mathbb{R}$, tal que existe un punto crítico $z \in E$ satisfaciendo $J(z) = c$. Se nota con Z el conjunto de todos los puntos críticos de J y con Z_c el conjunto de todos los puntos críticos con valor c, es decir $Z_c = \{z \in Z : J(z) = c\}$.*

De acuerdo con la definición, un punto crítico z satisface

$$dJ(z)(v) = 0, \, \forall v \in E.$$

Se dice que $z \in E$ es un *mínimo local* (resp. *máximo local*) del funcional $J \in C(E,\mathbb{R})$, si existe una vecindad $\mathcal{N}$ de z tal que,

$$J(z) \leq J(u), \ \text{(resp. } J(z) \geq J(u)) \ \forall u \in \mathcal{N} \backslash \{z\}. \tag{1.1}$$

Si las desigualdades anteriores son estrictas, se dice que z es un *mínimo local estricto (resp. máximo local estricto).* Si (1.1) se cumple para todo $u \in E$ se dice que z es un *mínimo global (resp. máximo global).* Es fácil ver que si $z \in E$ es un mínimo local (resp. máximo local) y J es diferenciable en z, entonces z es un punto estacionario, esto es, $dJ(z) = 0$.

Ejemplo 1.2.1. *Este ejemplo es tomado de [**?**, pag. 99].*
Sea $E = H$ *un espacio de Hilbert con producto escalar* $(.\,,.)$ *y norma* $\|.\|$. *El funcional* $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$, *definido por* $J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}(u, u)$ *es diferenciable.*

Demostración. Observemos que,

$$\begin{aligned} J(u+h) &= \tfrac{1}{2}(u+h, u+h) \\ &= \tfrac{1}{2}(u,u) + (u,h) + (h,h) \\ &= J(u) + (u,h) + \|h\|^2, \end{aligned}$$

definamos ahora el funcional

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(h) = (u, h)$$

para todo $h \in H$ y $u \in H$ fijo. Claramente φ es lineal, además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que,

$$|\varphi(h)| = |(u,h)| \leqslant \|u\|\|h\|,$$

para todo $h \in H$, por tanto φ es acotado, y en consecuencia continuo.
Por otro lado, la función escalar

$$r : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$r(h) = \|h\|^2,$$

para todo $h \in H$ es $o(\|h\|)$ cuando $h \to 0$, ya que,

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \|h\| = 0.$$

Así, J es diferenciable y $J'(u)h = \varphi(h)$, para para todo $h \in H$, esto es,

$$J'(u) = \varphi = \varphi_u$$

para todo $u \in H$.

Ahora, si $J'(u)h = 0$ para todo $u \in H$, entonces $(u, h) = 0$ para todo $u \in H$, por tanto $h = 0$, es un punto crítico para J, y como $J(0) = 0 \leqslant J(u)$ para todo $u \in H$ corresponde a un mínimo para cualquier vecindad $\mathcal{N}$ de 0. ■

1.3. Operador cerrado

Definición 1.3.1 (*Operador Cerrado*)**.** *Sean E y F espacios normados. Un operador $T : D(T) \subseteq E \longrightarrow F$ se dice que es un operador cerrado si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(T)$ que converge a $x \in E$ y $T(x_n) \to y \in F$ cuando $n \to \infty$ implica que $x \in D(T)$ y $Tx = y$.*

Ejemplo 1.3.1. *Sean E y F dos espacios de Banach, definimos un operador $T : D(T) \subseteq E \longrightarrow F$ continuo, entonces T es un operador cerrado; en efecto, consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(T)$ que converge a $x \in E$ y $T(x_n) \to y \in F$ cuando $n \to \infty$, entonces por la continuidad de T, se tiene que,*

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y,$$

esto es, $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

1.4. Los Espacios L^p

Se asume que el lector esta familiarizado con las nociones de *funciones medibles* y *funciones integrables* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; ver por ejemplo, G.B. Folland [**?**]. Se designa por

$L^1\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$, o simplemente $L^1\big(\Omega\big)$ (o sólo L^1), el espacio de funciones integrables de Ω en $\mathbb{R}$. Además, es usual escribir $\int f$ en lugar de $\int_\Omega f\, d\mu$, y se usa la notación

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, d\mu = \int_\Omega |f|\, d\mu = \int_\Omega |f|.$$

Conviene recordar que dado un conjunto $A \in \mathcal{A}$, con $A \subseteq \Omega$, una propiedad se cumple en casi toda parte (c.t.p.) de A, si se cumple en todo A excepto en un conjunto $E \subseteq A$ tal que $\mu(E) = 0$.

Teorema 1.4.1. *(Lema de Fatou). Sean $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones no negativas medibles. Entonces,*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Demostración. Véase [?, pag. 52]. ■

Teorema 1.4.2. *(Teorema de Fubini). Sean $\big(X, \mathcal{A}, \mu\big)$ e $\big(Y, \mathcal{B}, \upsilon\big)$ dos espacios de medida $\sigma-$finitos y f una función integrable en el espacio de medida $\big(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \upsilon\big)$. Entonces*

(i) para casi todo x, la función $f(x, \cdot\,)$ es una función integrable en el espacio de medida $\big(Y, \mathcal{B}, \upsilon\big)$,

(ii) para casi todo y, la función $f(\,\cdot\,, y)$ es una función integrable en el espacio de medida $\big(X, \mathcal{A}, \mu\big)$,

(iii) las funciones

$$\int_Y f(\,\cdot\,, y)\, d\upsilon(y), \quad \int_X f(x, \cdot\,)\, d\mu(x)$$

son funciones integrables en X e Y respectivamente,

(iv)

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times \upsilon)(x,y) = \int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} f(x,y)\,d\upsilon(y)\right)d\mu(x)$$
$$= \int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X} f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\upsilon(y).$$

Demostración. Véase [**?**, pag. 67]. ∎

Definición 1.4.1 (*Espacios L^p*)**.** *Si $1 < p < \infty$, el espacio $L^p = L^p\big(\Omega\big) = L^p\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$ se define por el conjunto*

$$L^p\big(\Omega\big) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega) \Big\}.$$

con

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } f \in L^p\big(\Omega\big).$$

Las operaciones vectoriales sobre L^p están definidas puntualmente. Además, las propiedades básicas de estos espacios están dadas por el siguiente teorema tomado de [**?**, pag. 59].

Teorema 1.4.3. *(Propiedades de L^p). Si $1 \leqslant p < \infty$ entonces se tienen las siguientes propiedades,*

1. *L^p es un espacio vectorial.*

2. *$\|\cdot\|_p$ es una norma sobre L^P.*

3. *$\big(L^p, \|\cdot\|_p\big)$ es completo.*

Consecuentemente, $\big(L^p, \|\cdot\|_p\big)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.4.2 (*El espacio L^∞*)**.** *El espacio $L^\infty = L^\infty\big(\Omega\big) = L^\infty\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$ se* *define por el conjunto*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leqslant C \text{ c.t.p. en } \Omega \end{array} \right\}$$

con la norma

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\big\{C : |f(x)| \leqslant C \text{ c.t.p. en } \Omega\big\}.$$

Un elemento de $L^\infty(\Omega)$ se denomina ***función esencialmente acotada*** *y $\|f\|_\infty$ es denominado el* ***supremo esencial de*** *$|f|$ y se denota por essup$|f|$.*

Nota. si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ c.t.p en Ω.

L^∞ posee algunas propiedades importantes, las cuales se enuncian en el siguiente teorema tomado de [**?**, pag. 61].

Teorema 1.4.4. *(Propiedades de L^∞). L^∞ tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas sobre L^p.*
2. *$\|\cdot\|_\infty$ es una norma sobre L^∞.*
3. *$(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es completo.*

Consecuentemente, $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.4.3 (*Exponentes conjugados*)**.** *Se dice que $1 < p,\ q < \infty$ son* ***exponentes conjugados*** *si se verifica que $p + q = pq$ ó equivalentemente*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Observamos que para $p = 2$, $q = 2$, lo cual ea un caso interesante. Por otro lado, si hacemos $p \to 1$, entonces $q \to \infty$, por lo que se considera que 1 e ∞ son también exponentes conjugados.

Teorema 1.4.5. *(Desigualdad de Hölder). Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y q su exponente conjugado, esto es,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Supongamos que $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_p \|q\|_q.$$

Demostración. Véase [**?**, pag. 92]. ■

1.5. Condicion de Palais-Smale

La condición de Palais-Smale que usamos en este trabajo (tomada de [**?**, pag. 16]), es una condición de compactificación sobre funcionales. Permite extender propiedades interesantes propias de funcionales definidos en espacios finito o infinito dimensionales.

Definición 1.5.1 (*Condición de Palais-Smale*)**.** *Sea X un espacio de Banach, $\Phi \in C^1\big(X, \mathbb{R}\big)$ un funcional. Se dice que Φ satisface la condición de Palais-Smale, denotada por (PS), si cualquier sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que*

$$\begin{cases} \{\Phi(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \textit{ es acotada, y} \\ \Phi'(u_n) \to 0 \textit{ cuando } n \to \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

admite una subsucesión convergente.

*Cualquier sucesión que satisfaga (**??**) se denomina sucesión de Palais-Smale.*

Ejemplo 1.5.1. *Recordemos del ejemplo (**??**) que si $E = H$ es un espacio de Hilbert con producto escalar $(.\,,.)$ y norma $\|.\|$, el funcional*

$$J : H \longrightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 = \tfrac{1}{2}(u, u)$$

para todo $u \in H$ es diferenciable, con derivada

$$J'(u)h = (u, h)$$

para todo $h \in H$ y cualquier $u \in H$ fijo, de modo que $J \in L\big(H, \mathbb{R}\big)$ y por tanto $J'(u) \in H'$ para todo $u \in H$. Estimemos ahora $\|J'(u)\|_{H'}$, en efecto, sabemos que

$$\|J'(u)\|_{H'} = \sup\big\{|(u,h)| : \|h\| \leqslant 1\big\},$$

si $h = \frac{u}{\|u\|}$, con $u \neq 0$, entonces

$$\|J'(u)\|_{H'} = \sup\left\{\left|\left(u, \frac{u}{\|u\|}\right)\right| : u \in H\right\} = \|u\|,$$

para cualquier $u \in H$.

Veamos finalmente que J cumple la condición (PS). Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$\begin{cases} \{J(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \textit{es acotada, y} \\ J'(u_n) \to 0 \textit{ cuando } n \to \infty. \end{cases}$$

Como

$$\|J'(u_n)\|_{H'} = \|u_n\|$$

entonces $\|u_n\| \to 0$, por tanto $u_n \to 0$ en H, en consecuencia toda sucesión de Palais-Smale de J admite una subsucesión convergente.

1.6. Teorema del Paso de La Montaña

Este teorema fué publicado en 1973 por Ambrosetti y Rabinowitz (ver [?, pag. 7]). Forma parte de la teoría de puntos críticos de funcionales definidos en espacios de Banach, y además, se sitúa dentro de los resultados de minimax, es decir, sobre existencia de puntos críticos que no son extremos sino puntos de silla.

Teorema 1.6.1. *(Teorema del Paso de la Montaña) . Sea E un espacio de Banach y sea $J \in C^1\big(E, \mathbb{R}\big)$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que $J(0) = 0$,*

i. existen constantes $\rho, r > 0$, tales que $J(u) \geq \rho$, $\forall u \in S_r = \big\{u \in E : \|u\|_E = r\big\}$, *y,*

ii. existe $w \in E$, con $\|w\|_E > r$, tal que $J(w) \leq 0$.

Entonces J posee un valor crítico $c \geq \rho$. Además, c puede ser caracterizado como

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} J(g(t)),$$

donde,

$\Gamma = \big\{ g \in C\big([0,1], E\big) : g(0) = 0, g(1) = w \big\}.$

Demostración. Véase [**?**, pag. 66]. ■

Proposición 1.6.1. *Sea X un espacio de Banach, $\Phi \in C^1\big(X, \mathbb{R}\big)$. Supongamos que*

$$\Phi'(u) = Lu + T(u), \quad \forall u \in X,$$

donde L es un operador lineal invertible y T es compacto. Supongamos además, que cualquier sucesión de Palais-Smale para Φ en X es acotada. Entonces, Φ satisface la condición de Palais-Smale.

Demostración. Véase [**?**, pag. 19].

■

1.7. Definición y Propiedades Elementales de la Topología Débil $\sigma(E, E')$

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$. Se designa por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Cuando f recorre E' se obtiene una colección $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Definimos una nueva topología (tomado de [**?**, pag. 57]) sobre el conjunto E como sigue:

Definición 1.7.1. *(La topología débil $\sigma(E, E')$). La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Nota. Si una succesión (x_n) en E converge a x en la topología débil $\sigma(E, E')$ escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Para evitar confusiones se dice "$x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')$". Con el propósito de ser aún más claros se dirá "$x_n \to$ fuertemente", lo que significa $\|x_n - x\| \to 0$.
La siguiente proposición tomada de [**?**, pag. 58] presenta algunas propiedades de la topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E:
Proposición 1.7.1. *Sea x_n una sucesión en E. Se verifica:*

1. *$[x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \ \forall f \in E']$.*

2. *Si $x_n \to x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')$.*

3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')$, entonces $\big(\|x_n\|\big)$ está acotada y $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.*

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')$ y si $f_n \to f$ fuertemente en E' (es decir, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Nota. Cuando E es de dimensión infinita existen en general sucesiones que convergen débilmente pero que no convergen fuertemente (se puede encontrar un ejemplo de esto en [**?**, pag. 60]).
Todo conjunto cerrado en la topología débil $\sigma(E, E')$ es cerrado en la topología fuerte. El recíproco es falso en dimensión infinita, sin embargo, para conjuntos convexos estas dos nociones coinciden.
Ejemplo 1.7.1. *La esfera unitaria $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, con E un espacio*

normado con dimensión infinita, no es cerrada en la topología débil $\sigma(E, E')$ *.(Véase la demostración en [?, pag. 59]).*

Teorema 1.7.1. *Sea* C *un conjunto convexo de un espacio normado* E*;* C *es cerrado en la topología débil* $\sigma(E, E')$ *si y sólo si es cerrado en la topología fuerte.*

Demostración. Véase [?, pag. 60].

■

1.8. Conjuntos débilmente compactos en L^1

Dado que los espacios L^1 no son reflexivos, los conjuntos acotados en estos espacios no tienen una notable importancia con respecto a la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$. El siguiente teorema tomado de [?, pag. 115], nos da una caraterización de los conjuntos débilmente compactos en los espacios L^1.

Teorema 1.8.1. *(Dunford-Pettis). Sea* $\mathcal{F}$ *un conjunto acotado en* $L^1(\Omega)$*. Entonces* $\mathcal{F}$ *tiene clausura compacta en la topología débil* $\sigma(L^1, L^\infty)$ *si y sólo si* $\mathcal{F}$ *es equiintegrable, esto es,*

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \textit{tal que} \\ \displaystyle\int_A |f| < \epsilon \ \forall A \subset \Omega \ \textit{medible, con } m(A) < \delta, \ \ \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

y,

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \forall \epsilon > 0 \ \exists \omega \subset \Omega \ \textit{medible, con } m(\omega) < \infty \ \ \textit{tal que} \\ \displaystyle\int_{\Omega-\omega} |f| < \epsilon \ \forall f \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Capítulo 2

Equivalencia entre el problema planteado y uno de tipo variacional

Sea $u : [a, b] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que satisfaga el siguiente problema:

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial u(x,v)}{\partial x} = g(u,u)(x,v), \text{ para casi todo } (x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+;\ 0 \in (a,b),\ a+b \geq 0 \\ u(a,v) = u(b,v). \end{cases} \tag{2.1}$$

Aquí,

$$g(u,u)(x,v) = \int_0^\infty \int_{-r}^r [p(v-z)]p[u(x,z')u(x,v') - u(x,z)u(x,v)]\, dp\, dz$$

es el operador de colisión. Además las velocidades están relacionadas mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} v' = v - [p(v-z)]p \\ z' = z + [p(v-z)]p \end{cases} \tag{2.2}$$

y, $0 < r < 1$. También se satisface la ley de conservación de momento y la ley de conservación de la energía, las cuales se expresan respectivamente mediante las ecuaciones:

$$v + z = v' + z' \tag{2.3}$$

$$v^2 + z^2 = v'^2 + z'^2 \tag{2.4}$$

Definición 2.0.1. *Una solución clásica de* (**??**)*, es una función* $u \in C^1\big([a,b]\times\mathbb{R}^+\big)$ *que satisface* (**??**) *clásicamente con* $g(u,u) \in L^1(\mathbb{R}^+)$*.*

2.1. Solución generalizada para el problema planteado

Para obtener una solución generalizada del problema (**??**) consideremos los espacios de funciones,

$$E := \Big\{ u \in L^1[a,b] : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b]\,, \int\limits_0^\infty u(x,v)\,dv < \infty \Big\}$$

con,

$$\|u\|_E := \|u\|_{L^1[a,b]} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^\infty[a,b]}$$

y,

$$E^{\#} := \Big\{ u \in L^1[a,b] : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b],\ u(a,v) = u(b,v) \Big\}$$

con,

$$\|u\|_{E^{\#}} := \|u\|_{L^1[a,b]} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^\infty[a,b]}$$

Proposición 2.1.1. $\Big(E, \|.\|_E\Big)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. 1. Probemos primero que el espacio E está bien definido. Para ver esto, sea

$$u : [a,b]\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ \text{definida por } u(x,v) = e^{-v^2},$$

para todo $x \in [a,b]$ y, para todo $v \in \mathbb{R}^+$, entonces vemos que

$$\int_a^b |e^{-v^2}|\, dx = e^{-v^2}(b-a) < \infty,$$

también,

$$\frac{\partial u(x,v)}{\partial x} = \frac{\partial(e^{-v^2})}{\partial x} = 0 < 1,$$

además,

$$\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \infty,$$

de modo que $u \in E$, por tanto, $E \neq \emptyset$.

2. Veamos ahora que $\|.\|_E$ es una norma.

   i.) Sea $u \in E$, entonces $u \in L^1[a,b]$ y además $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b]$, así, $\|u\|_{L^1[a,b]} \geqslant 0$ y $\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \geqslant 0$, luego $\|u\|_E \geqslant 0$.

   ii.) Sea $u \in E$, y supongamos que $\|u\|_E = 0$, entonces

   $$\|u\|_{L^1[a,b]} + \|\tfrac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} = 0,$$

   como los sumandos a izquierda de la ecuación anterior son términos no negativos se tiene que $\|u\|_{L^1[a,b]} = 0$ y $\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} = 0$. Pero $\|u\|_{L^1[a,b]}$ es una norma, se concluye que $u = 0$.

   iii.) Sean $u \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego,

   $$\begin{aligned} \|\lambda u\|_E &= \|\lambda u\|_{L^1[a,b]} + \|\tfrac{\partial \lambda u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \\ &= |\lambda|\|u\|_{L^1[a,b]} + |\lambda|\|\tfrac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \\ &= |\lambda|\|u\|_E \end{aligned}$$

   estas afirmaciones se dan debido a que en $\|.\|_{L^1[a,b]}$, $\|.\|_{L^\infty[a,b]}$ son normas, y $|\lambda|$ es una constante en la suma.

iv.) Probemos la desigualdad triangular, en efecto, sean $u, w \in E$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|u+w\|_E &= \|u+w\|_{L^1[a,b]} + \|\tfrac{\partial(u+w)}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \\
&= \|u+w\|_{L^1[a,b]} + \|\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial w}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \\
&\leqslant \|u\|_{L^1[a,b]} + \|w\|_{L^1[a,b]} + \|\tfrac{\partial u}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} + \|\tfrac{\partial w}{\partial x}\|_{L^\infty[a,b]} \\
&= \|u\|_E + \|w\|_E
\end{aligned}
$$

la desigualdad se da debido a que $\|.\|_{L^1[a,b]}$ y $\|.\|_{L^\infty[a,b]}$ son normas. Se concluye que $\|u+w\|_E \leqslant \|u\|_E + \|w\|_E$, quedando demostrado que $\|.\|_E$ es una norma.

3. Veamos que E es completo.

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\frac{\partial u_n}{\partial x})_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $L^1[a,b]$ y en $L^\infty[a,b]$ respectivamente.

Como $L^1[a,b]$ es un espacio de Banach, existe $u \in L^1[a,b]$ tal que:

$$u_n \to u.$$

Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E, entonces $\dfrac{\partial u_n}{\partial x} \in L^\infty[a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} \leqslant C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para casi todo $x \in [a,b]$.

Ahora,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u_n(x+h,v) - u_n(x,v)}{h}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x} &= \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{h\to 0}\frac{u_n(x+h,v)-u_n(x,v)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x+h,v)-u_n(x,v)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,v)-u(x,v)}{h}\\ &=\frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\leqslant C$$

para casi todo $x\in[a,b]$, de donde $\dfrac{\partial u}{\partial x}\in L^{\infty}[a,b]$. Como $u_n\in E$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces el lema de Fatou implica que

$$\int_0^\infty u\,dv=\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} u_n\,dv=\int_0^\infty \liminf u_n\,dv\leqslant \liminf\int_0^\infty u_n\,dv. \tag{2.5}$$

Por otro lado, como

$$\int_0^\infty u_n\,dv<\infty,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\limsup\int_0^\infty u_n\,dv=\inf_n\sup_{k\geqslant n}\int_0^\infty u_k\,dv<\infty,$$

pero,

$$\liminf\int_0^\infty u_n\,dv\leqslant\limsup\int_0^\infty u_n\,dv$$

entonces, considerando la desigualdad (**??**), se tiene que

$$\int_0^\infty u\,dv\leqslant\liminf\int_0^\infty u_n\,dv\leqslant\limsup\int_0^\infty u_n\,dv<\infty,$$

luego, $u\in E$, por tanto E es completo.

De 1., 2., y 3. se concluye que $\left(E,\|.\|_E\right)$ es un espacio de Banach. ■

Nota. De manera análoga a la demostración de la proposición inmediatamente anterior, se prueba que $\left(E^{\#}, \|.\|_{E^{\#}}\right)$ es un espacio de Banach.
Si $u \in E$ es solución clásica de (**??**), $w \in E^{\#}$ y $v \in \mathbb{R}^{+}$ fijo, entonces $v\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^{\infty}[a,b]$ y $w \in L^{1}[a,b]$. Luego, por el teorema de la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$v\frac{\partial u}{\partial x}w = g(u,u)w \in L^{1}[a,b]$$

de donde,

$$\int_a^b v\frac{\partial u}{\partial x}w\,dx = \int_a^b g(u,u)w\,dx.$$

Ahora, aplicando el método de integración por partes a $\displaystyle\int_a^b v\frac{\partial u}{\partial x}w\,dx$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_a^b v\frac{\partial u}{\partial x}w\,dx &= v\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}w\,dx \\
&= v\big[\,uw\,|_a^b\big] - v\int_a^b u\frac{\partial w}{\partial x}\,dx \\
&= v\big[u(b,v)w(b,v) - u(a,v)w(a,v)\big] - v\int_a^b u\frac{\partial w}{\partial x}\,dx \\
&= -v\int_a^b u\frac{\partial w}{\partial x}\,dx
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$-\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = \int_a^b g(u,u)w\,dx \tag{2.6}$$

Definición 2.1.1. *Una solución generalizada para* (**??**) *es una función* $u \in E$ *tal que se satisface* (**??**) *para todo* $w \in E^{\#}$

Se define sobre E el siguiente funcional:

$$J(u) := \int\limits_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

Proposición 2.1.2. *J es diferenciable en E.*

Demostración. Sea $u \in E$. Para todo $w \in E$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
J(u+w) - J(u) &= \int\limits_a^b v(u+w)\frac{\partial (u+w)}{\partial x}\,dx - \int\limits_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx \\
&= \int\limits_a^b vu\frac{\partial (u+w)}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial (u+w)}{\partial x}\,dx - \int\limits_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx \\
&= \int\limits_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial w}{\partial x}\,dx \\
&\quad - \int\limits_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx \\
&= \int\limits_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial w}{\partial x}\,dx.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el funcional

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\varphi(w) = \int\limits_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \int\limits_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

para todo $w \in E$, con $u \in E$ fijo cualquiera. Claramente φ es lineal, además,

$$\begin{aligned}
|\varphi(w)| &\leqslant |v|\Big(\int_a^b |u\frac{\partial w}{\partial x}|\,dx + \int_a^b |w\frac{\partial u}{\partial x}|\,dx\Big) \\
&\leqslant |v|\big(\|u\|_E\|w\|_E + \|w\|_E\|u\|_E\big) \\
&= 2|v|\|u\|_E\|w\|_E,
\end{aligned}$$

estas desigualdades se dan en virtud de la desigualdad triangular para el valor absoluto y la desigualdad de Hölder respectivamente. Así, φ es un operador lineal acotado y por tanto continuo en E.

Ahora, la función escalar

$$r : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$r(w) = \int_a^b vw\frac{\partial w}{\partial x}\,dx,$$

para todo $w \in E$ es $o(\|w\|_E)$ cuando $w \to 0$, ya que por la desigualdad de Hölder podemos concluir que

$$0 \leqslant |r(w)| \leqslant \int_a^b |vw\frac{\partial w}{\partial x}|\,dx, \leqslant |v|\|w\|_E\|w\|_E,$$

de donde,

$$\lim_{w\to 0} \frac{r(w)}{\|w\|} = 0.$$

Así, J es diferenciable y $J'(u)w = \varphi(w)$, para para todo $w \in E$, esto es,

$$J'(u) = \varphi = \varphi_u$$

para todo $u \in E$.

■

Proposición 2.1.3. *$J'(u)$ es continuo en E.*

Demostración. Para todo $w, h \in E$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left|J'(u)w - J'(u)h\right| &= \left|\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx - \int_a^b vu\frac{\partial h}{\partial x}\,dx - \int_a^b vh\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right| \\
&= \left|\int_a^b vu\frac{\partial (w-h)}{\partial x}\,dx + \int_a^b v(w-h)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_a^b vu\frac{\partial (w-h)}{\partial x}\,dx\right| + \left|\int_a^b v(w-h)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right| \\
&\leq \left|v\right|\big(2\|u\|_E\big)\|w-h\|_E.
\end{aligned}$$

Luego, si $w \to h$, entonces $J'(u)w \to J'(u)h$, y por tanto, $J'(u)$ es continuo en E.

■

Ahora, si $J'(u)w = 0$ entonces,

$$\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 0$$

es decir,

$$-\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

Si u es solución de (**??**) entonces,

$$-\int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = \int_a^b g(u,u)w\,dx,$$

luego,

$$\int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \int_a^b g(u,u)w\,dx$$

para todo $w \in E^{\#}$, entonces

$$\int_a^b \left[v\frac{\partial u}{\partial x} - g(u,u) \right] w\, dx = 0$$

para todo $w \in E^{\#}$, de donde

$$v\frac{\partial u}{\partial x} - g(u,u) = 0, \text{ para casi todo } (x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^{+}$$

esto es,

$$v\frac{\partial u}{\partial x} = g(u,u), \text{ para casi todo } (x,v) \in [a,b] \times \mathbb{R}^{+}.$$

Así, $J \in C^1\big(E,\mathbb{R}\big)$ y, un punto crítico de J es solución de (**??**) y viceversa. En lo que sigue del trabajo, se hallarán técnicas para calcular puntos críticos del funcional J que es el problema equivalente a (**??**).

2.2. Obtención de un punto crítico vía Teorema del Paso de la Montaña

Del apartado anterior se puede observar que resolver el problema (**??**), es equivalente a obtener un punto crítico para el funcional J. Aplicando el Teorema del Paso de la Montaña (**??**) se resuelve tal situación; lo cual se desarrolla en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.2.1. *$J(0) = 0$ y,*

(i.) existen constantes $\rho, r > 0$, tales que $J(u) \geq \rho$, $\forall u \in S_r = \big\{ u \in E : \|u\|_E = r \big\}$

(ii.) existe $w \in E$, con $\|w\|_E > r$, tal que $J(w) \leq 0$

Demostración. $J(0) = \displaystyle\int_a^b v \cdot 0 \cdot \frac{\partial(0)}{\partial x}\, dx = 0.$

Sea

$$u(x,v) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+v^2},$$

para todo $x \in [a,b]$ y para todo $v \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b |u(x,v)|\, dx &= \int_a^b \left|\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+v^2}\right| dx \\
&= \frac{1}{(1+v^2)} \int_a^b e^{\frac{x}{2}}\, dx \\
&= \frac{2(e^{\frac{b}{2}} - e^{\frac{a}{2}})}{1+v^2} < \infty,
\end{aligned}$$

luego, $u \in L^1[a,b]$.

Ahora,

$$\frac{\partial u(x,v)}{\partial x} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+v^2)},$$

de donde,

$$\left|\frac{\partial u(x,v)}{\partial x}\right| = \left|\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+v^2)}\right| = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+v^2)} \leqslant e^{\frac{b}{2}},$$

para todo $x \in [a,b]$, de modo que $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b]$.

Por otro lado,

$$\int_0^\infty u(x,v)\, dv = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+v^2}\, dv = e^{\frac{x}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\, dv = \frac{\pi e^{\frac{x}{2}}}{2} \leqslant \frac{\pi e^{\frac{b}{2}}}{2} < \infty,$$

en consecuencia $u \in E$.

Además,

$$\begin{aligned}
J[u(x,v)] &= J\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+v^2}\right) \\
&= \int_a^b v \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+v^2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+v^2)}\,dx \\
&= \frac{v}{2(1+v^2)^2}\int_a^b e^x\,dx \\
&= \frac{v(e^b - e^a)}{2(1+v^2)^2},
\end{aligned}$$

pero, $a < b$ y $a + b \geqslant 0$, entonces

$$J[u(x,v)] > \frac{v(e^{-a} - e^{-b})}{2(1+v^2)^2} = \delta > 0.$$

Luego, el conjunto $A = \{J(u) : J(u) > \delta\} \neq \emptyset$ y esta acotado inferiormente, por tanto existe $\rho = inf A$. En consecuencia, por la propiedad arquimediana existe un número natural N, tal que $\rho > \delta > \frac{1}{N}$. Así, existen constantes $\rho, r = \frac{1}{N} > 0$, tales que $J(u) \geq \rho$, si $\|u\|_E = r$, con lo cual se demuestra *(i.)*.

Sea,

$$w(x,v) = \frac{e^{-x}}{1+v^2},$$

para todo $x \in [a,b]$ y para todo $v \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{e^{-x}}{1+v^2} \leqslant 1, \tag{2.7}$$

luego, $\frac{\partial w}{\partial x} \in L^\infty[a,b]$. Ahora,

$$\int_a^b |w|\,dx = \int_a^b \left|\frac{e^{-x}}{1+v^2}\right| dx = \frac{1}{1+v^2}\int_a^b e^{-x}\,dx = \frac{1}{1+v^2}(e^{-a} - e^{-b}), \tag{2.8}$$

por tanto, $u \in L^1[a,b]$. También,

$$\int_0^\infty w\,dv = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+v^2}\,dv = e^{-x}\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{\pi e^{-x}}{2} \leqslant \frac{\pi e^{-a}}{2} < \infty. \tag{2.9}$$

De (**??**), (**??**) y (**??**) se concluye que $w \in E$. Además,

$$\begin{aligned} J[w(x,v)] &= J\left(\frac{e^{-x}}{1+v^2}\right) \\ &= -\int_a^b v \cdot \frac{e^{-x}}{1+v^2} \cdot \frac{e^{-x}}{1+v^2}\, dx \\ &= -\frac{v}{(1+v^2)^2} \int_a^b e^{-2x}\, dx \\ &= \frac{v(e^{-2b}-e^{-2a})}{2(1+v^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

A continuación, calculemos $\|w\|_E$, en efecto, de (**??**) se tiene que

$$\|w\|_{L^1[a,b]} = \frac{e^{-a}-e^{-b}}{1+v^2}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|_{L^\infty[a,b]} &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\right\} \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{\left| -\frac{e^{-x}}{1+v^2}\right|\right\} \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \left\{\frac{e^{-x}}{1+v^2}\right\} \\ &= \frac{e^{-a}}{1+v^2}, \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|w\|_E = \|w\|_{L^1[a,b]} + \left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|_{L^\infty[a,b]} = \frac{(2e^{-a}-e^{-b})}{1+v^2} > \delta > r;$$

consecuentemente queda demostrado *(ii.)*.

■

Proposición 2.2.2. *Para todo $u \in E$ y $w \in E$ fijo, el funcional*

$$I(u) := \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

es lineal, cerrado e invertible.

Demostración. I es lineal, ya que,

i.) para todo $u, h \in E$, se tiene que,

$$I(u+h) = \int_a^b vw\frac{\partial(u+h)}{\partial x}\,dx = \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \int_a^b vw\frac{\partial h}{\partial x}\,dx = I(u) + I(h)$$

además,

ii.) para todo $u \in E$ y, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que,

$$I(\lambda u) = \int_a^b vw\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x}\,dx = \lambda\int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \lambda I(u).$$

Observemos que,

$$\big|I(u)\big| \leqslant |v|\int_a^b \left|w\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx \leqslant |v|\|w\|_E\|u\|_E, \tag{2.10}$$

para todo $u \in E$ y $w \in E$ fijo. Si $\|w\|_E \leqslant 1$, la desigualdad (**??**) nos queda así,

$$\big|I(u)\big| \leqslant |v|\|u\|_E, \; \textit{para todo } u \in E, \tag{2.11}$$

luego, la desigualdad (**??**) implica que el funcional I, es un operador lineal acotado, por tanto, continuo. En consecuencia I es un operador cerrado.
Por otro lado, si $I(u) = 0$, entonces

$$\int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 0, \; \textit{para todo } w \in E,$$

luego, si $w = u$, se tiene que,

$$\int_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = 0, \; \textit{para todo } u \in E,$$

entonces $u = 0$ o $u(x,z) = C$, donde $C \in \mathbb{R}$ o $u(x,z) = \varphi(z)$.

a. Si $u(x,z) = C$, donde $C \in \mathbb{R}^+$, entonces, como $u \in E$, se tendría que

$$\int\limits_0^\infty u\,dv < \infty$$

pero,

$$\int\limits_0^\infty u\,dv = \int\limits_0^\infty C\,dv = C \times \infty = \infty < \infty,$$

lo cual es absurdo, por tanto no puede darse que $u = C$, donde $C \in \mathbb{R}^+$.

b. Supongamos ahora que $u(x,z) = \varphi(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$, para todo $x \in [a,b]$ y para todo $z \in \mathbb{R}^+$, entonces,

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = 0, \tag{2.12}$$

luego, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^\infty[a,b]$. Ahora,

$$\int\limits_a^b |u|\,dx = \int\limits_a^b \left|\frac{1}{e^z + e^{-z}}\right| dx = \frac{1}{e^z + e^{-z}} \int\limits_a^b dx = \frac{1}{e^z + e^{-z}}(b-a), \tag{2.13}$$

por tanto, $u \in L^1[a,b]$. También,

$$\int\limits_0^\infty u\,dz = \int\limits_0^\infty \frac{1}{e^z + e^{-z}}\,dz = \int\limits_0^\infty \frac{e^z}{1 + e^{2z}}\,dv = \frac{\pi}{2} \leqslant < \infty. \tag{2.14}$$

De (**??**), (**??**) y (**??**) se concluye que $u \in E$.

Por otro lado, este elemento $u(x,z) = \varphi(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$, satisface trivialmente a (**??**), esto es,

$$v\frac{\partial u(x,v)}{\partial x} = g(u,u)(x,v) = 0,$$

por tanto,

$$g(u,u)(x,v) = 0,$$

es decir,

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-r}^r [p(v-z)]p[u(x,z')u(x,v') - u(x,z)u(x,v)]\,dp\,dz = 0,$$

luego,

$$[p(v-z)]p[u(x,z')u(x,v')-u(x,z)u(x,v)]=0 \ c.t.p.,$$

como, $[p(v-z)]p \neq 0$, se tiene que

$$u(x,z')u(x,v')-u(x,z)u(x,v)=0,$$

o lo que es lo mismo,

$$u(x,z')u(x,v')=u(x,z)u(x,v),$$

esto es,

$$\frac{1}{(e^{z'}+e^{-z'})(e^{v'}+e^{-v'})}=\frac{1}{(e^{z}+e^{-z})(e^{v}+e^{-v})},$$

haciendo operaciones elementales obtenemos

$$e^{v'+z'}+e^{z'-v'}+e^{-(z'-v')}+e^{-(v'+z')}=e^{z+v}+e^{z-v}+e^{-(z-v)}+e^{-(v+z)}, \tag{2.15}$$

pero, la ley de conservación de momento (**??**) afirma que

$$v+z=v'+z',$$

luego, la equación (**??**) se reduce a

$$e^{z'-v'}+e^{-(z'-v')}=e^{z-v}+e^{-(z-v)},$$

lo cual implica que

$$cosh(v-z)=cosh(v'-z'),$$

tomando $v-z>0$ y, sabiendo que la función $f(x)=coshx$ es creciente en $[0,\infty]$, se concluye que $v-z=v'-z'$, combinándola con la ecuación, $v+z=v'+z'$, se llega a que $v=v'$, lo cual es absurdo, pués, para choques perfectamente elásticos se tiene que $v\neq v'$. Así no puede suceder que $u(x,v)=\varphi(z)$, para todo $x\in[a,b]$ y para todo $z\in\mathbb{R}^+$. En consecuencia, si $I(u)=0$, entonces $u=0$, de donde $Ker(I)=\{0\}$, de modo que I es invertible.

■

Corolario 2.2.1. *Existe una constante $C > 0$, tal que*

$$\big|I(u)\big| \geq C\|u\|_E,\ \textit{para todo}\ u \in E. \tag{2.16}$$

Demostración. Si la proposición no es cierta entonces, existe $u_0 \in E, u_0 \neq 0$ tal que

$$0 \leqslant \big|I(u_0)\big| < C\|u_0\|_E,\ \textit{para todo}\ C \in \mathbb{R}^+,$$

si $C = \dfrac{\epsilon}{\|u_0\|}$, entonces

$$0 \leqslant \big|I(u_0)\big| < \epsilon,\ \textit{para todo}\ \epsilon \in \mathbb{R}^+,$$

luego, por la propiedad de aproximación de los números reales, $\big|I(u_0)\big| = 0$, esto es, $I(u_0) = 0$, de donde $u_0 \in Ker(I)$, por tanto $u_0 = 0$, lo cual es una contradicción, pués, $u_0 \neq 0$. Consecuentemente se cumple la proposición. ■

Corolario 2.2.2. *Cualquier sucesión de Palais-Smale para J es acotada*

Demostración. Sabemos que

$$J(u) = \int_a^b vu\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\ \forall u \in E,$$

y

$$I(u) = \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\ \forall u \in E \text{ y } \forall w \in E,$$

luego, si $w = u$ entonces $J(u) = I(u)$. Por tanto, existe una constante $C > 0$, tal que

$$\big|J(u)\big| \geq C\|u\|_E\ \forall u \in E,$$

luego,

$$C\|u\|_E \leqslant \|J\|,\ \forall u \in E,$$

esto es,

$$\|u\|_E \leqslant \frac{\|J\|}{C},\ \forall u \in E,$$

además, como $J \in C^1\big(E, \mathbb{R}\big)$, entonces cualquier sucesión de Palais-Smale para J en E es acotada. ■

Proposición 2.2.3. *Existe una constante $K > 0$, tal que*

$$\int_a^b \big|g(u,u)(x,v)\big|\,dx \leq K\|u\|_E, \text{ para todo } u \in E$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\big|g(u,u)(x,v)\big| &= \Big|\int_0^\infty\int_{-r}^r [p(v-z)]p[u(x,z')u(x,v') - u(x,z)u(x,v)]\,dp\,dz\Big| \\
&\leq \int_0^\infty\int_{-r}^r \big|[p(v-z)]p[u(x,z')u(x,v') - u(x,z)u(x,v)]\big|\,dp\,dz,
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|g(u,u)(x,v)\big|\,dx &\leq \int_a^b\int_0^\infty\int_{-r}^r \big|[p^2(v-z)][u(x,z')u(x,v')]\big|\,dp\,dz\,dx, \\
&+ \int_a^b\int_0^\infty\int_{-r}^r \big|[p^2(v-z)][u(x,z)u(x,v)]\big|\,dp\,dz\,dx \\
&= g(u,u)^+(v) + g(u,u)^-(v);
\end{aligned}$$

donde,

$$g(u,u)^+(v) = \int_a^b\int_0^\infty\int_{-r}^r \big|[p^2(v-z)][u(x,z')u(x,v')]\big|\,dp\,dz\,dx$$

y,

$$g(u,u)^-(v) = \int_a^b\int_0^\infty\int_{-r}^r \big|[p^2(v-z)][u(x,z)u(x,v)]\big|\,dp\,dz\,dx.$$

Ahora, teniendo en cuenta las relaciones (**??**), se tienen los siguientes cambios de variables:

$$
\begin{aligned}
v - z =& \frac{v - v'}{p^2}, \; con \; p \neq 0, \\
dz =& \frac{dz'}{1 - p^2}, \; con \; p^2 \neq 1,
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
g(u,u)^+(v) = \int_a^b \int_0^\infty \int_{-r}^r \left| \frac{v - v'}{1 - p^2} [u(x, z')u(x, v')] \right| dp \, dz' \, dx.
$$

Por otro lado, existe un número natural N_0, tal que $\left| \frac{v-v'}{1-p^2} \right| < N_0$, luego, por el teorema de Fubini se tiene que,

$$
\begin{aligned}
g(u,u)^+(v) <& N_0 \int_a^b |u(x, v')| \, dx \int_0^\infty |u(x, z')| \, dz' \int_{-r}^r dp \\
=& N_0 \|u\|_{L^1_{[a,b]}} M(2r) \\
<& 2N_0 M r \|u\|_E.
\end{aligned}
$$

De manera análoga, para algún número natural N_1 se tiene que,

$$
\begin{aligned}
g(u,u)^-(v) <& N_1 \int_a^b |u(x, v)| \, dx \int_0^\infty |u(x, z)| \, dz \int_{-r}^r dp \\
=& N_1 \|u\|_{L^1_{[a,b]}} M(2r) \\
<& 2N_1 M r \|u\|_E.
\end{aligned}
$$

En consecuencia existe una constante $K > 0$, tal que

$$
\int_a^b \left| g(u,u)(x, v) \right| dx \leq K \|u\|_E, \; para \; todo \; u \in E.
$$

$\blacksquare$

Proposición 2.2.4. *El operador* $T(u) = -\int\limits_a^b g(u,u)w\,dx$, *definido en* E, *con* $w \in E$ *fijo, es compacto en la topología débil* $\sigma\big(L^1, L^\infty\big)$

Demostración. En esta prueba se aplica el teorema de Dunford-Pettis (**??**). En efecto,

i.) Sea $A \subseteq [a,b]$ un conjunto medible lebesgue, considerando la medida lebesgue μ en la recta real se tiene,

$$\int\limits_A \big|T(u)\big|\,d\mu \leq \int\limits_A \int\limits_a^b |g(u,u)||w|\,dx\,d\mu \leq K\|u\|_E|w|m(A).$$

Luego, si $|w| \leqslant 1$, entonces

$$\int\limits_A \big|T(u)\big|\,d\mu \leq \int\limits_A \int\limits_a^b |g(u,u)||w|\,dx\,d\mu \leq K\|u\|_E m(A).$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta \leq \dfrac{\epsilon}{KR}$, con $\|u\|_E \leq R$, tal que si $m(A) < \delta$, entonces $\int\limits_A \big|T(u)\big|\,d\mu \ < \epsilon$.

ii. Como $[a,b]$ es un conjunto medible en $\mathbb{R}$, entonces por propiedad de aproximación de conjuntos medibles se tiene que: Dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F con $m\big([a,b] - F\big) < \dfrac{\epsilon}{KR}$, tal que

$$\int\limits_{[a,b]-F} \big|T(u)\big|\,d\mu \leq K\|u\|_E m\big([a,b]-F\big) < \epsilon.$$

De *i.)* y *ii.)* se concluye por el teorema (**??**) de Dunford-Pettis, que el operador T es compacto en la topología débil $\sigma\big(L^1, L^\infty\big)$. ■

Nota 2.2.1. *Sabemos que* $J \in C^1\big(E, \mathbb{R}\big)$,

$$\begin{aligned} J'(u)w &= \int_a^b vw\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \int_a^b vu\frac{\partial w}{\partial x}\,dx, \\ &= I(u) + T(u), \end{aligned}$$

para todo $u \in E$, *con* $u(a, v) = u(b, v)$.

Ahora, como I *es un operador lineal e invertible por proposición (**??**),* $T(u)$ *es un operador compacto por proposición (**??**) y por corolario (**??**) cualquier sucesión de Palais-Smale para* J *en* E *es acotada, entonces por proposición (**??**)* J *satisface la condición de Palais-Smale.*

*Por otro lado, por proposición (**??**) se tiene que:*

i.) J(0)=0,

ii.) existen constantes $\rho, r > 0$, *tales que* $J(u) \geq \rho$,
$\forall u \in S_r = \big\{u \in E : \|u\|_E = r\big\}$, *y*

iii.) existe $w \in E$, *con* $\|w\|_E > r$, *tal que* $J(w) \leq 0$,

*en consecuencia por el teorema del paso de la montaña (**??**)* J *tiene un punto crítico no trivial que es solución del problema* (**??**).

Conclusiones

Una vez terminado el presente trabajo se pudo concluir que es posible obtener resultados de existencia de soluciones para la Ecuación de Povzner estacionaria por métodos variacionales bajo hipótesis apropiadas.

Este resultado es el inicio del estudio de la Ecuación de Boltzmann estacionaria, por los métodos de la teoría de Morse, teoría fundamentada en grupos de homología. Rama de la topología algebraica, que nos permite diferenciar topológicamente un punto crítico de otro, y desarrollar o exponer el número de soluciones de la ecuación de Boltzmann.

Bibliografía

[1] ALMANZA M. and GALEANO R., *A Variational Approach of Stationary Boltzmann Equation*, Revista Técnica de Ingeniería U.Zulia,**vol. 36**, Nº 3, 2013, pp. 272–276.

[2] AMBROSETTI A. and MALCHIODI A., *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2007.

[3] ARKERYD L. and NOURI A., *The stationary Boltzmann equation in the Slab with given weighted masss for hard and soft forces*, Annals Scuola Normal Superior. PISA Cl. Sci., **vol. 27**, 1998, pp. 533–556.

[4] ARKERYD L. and NOURI A., *On the stationary Povzner equation in* $\mathbb{R}^n$, Journal of Mathematics Kyoto University, **vol. 39**, No 1, 1999, pp.115–153.

[5] ARKERYD L. and NOURI A., L^1 *solutions to the stationary Boltzmann equation in a slab*, Annals Faculty Science of Toulose math., **vol. 9**, 2000, pp. 375–413.

[6] ARKERYD L. and NOURI A., *On the Milne Problem and the hydrodynamic Limit for a Steady Boltzmann Equation Model*, Journal of Stat. Phys., **vol. 99**, 2000, pp. 993–1019.

[7] ARKERYD L. and NOURI A., *The Stationary Boltzmann Equation in* $\mathbb{R}^n$

with Given Indata, Annals Scuola Normal Sup. Pisa, **vol. 31**, 2002, pp. 1–28.

[8] BARTLE R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Jhon Wiley & Sons, 1995.

[9] BERBERIAN, S. K., *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[10] BREZIS H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 2010.

[11] CAICEDO J.F., *Cálculo Avanzado. Introducción*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá 2005.

[12] CAPRINO S., PULVIRENTI M. and WAGNER., *Stationary Particle Systems Approximating Stationary Solutions to the Boltzmann Equation*, SIAM J. Math. Anal., **vol. 29**, 1998, pp. 913–934 (electronic).

[13] COSTA DAVID G., *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, 2007.

[14] CERCIGNANI C., *The Grad limit for a system of soft spheres*, Comm. Pure Appl. Math., **vol. 36**, 1983, pp. 479–494.

[15] CERCIGNANI, C., ILLNER, R. and PULVIRENTI, M., *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer Verlag. 1994, pp. 1–123.

[16] FOLLAND, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Second Edition. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts. Monographs and Tracts. 1999.

[17] GALEANO R., ORTEGA P. and ALMANZA M., *Stationary Boltzmann equation with boundary data depending on the Maxwellian*, Revista

Matemáticas: Enseñanza Universitaria, **vol. XX**, Nº 2, 2012, pp. 25–33.

[18] GLASSEY ROBERT R., *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, SIAM. 1996.

[19] GRAD H., *High Frequency Sound Recording According to Boltzmann equation*, SIAM J. Appl. Math., **vol. 14**, 1966, pp. 935–955.

[20] GUIRAND J. P., *Probléme Aux Limites intérieur pour L'equation de Boltzmann en régime Stationaire, faiblement non lineaire*, J. Mécanique, **vol. 11**, 1972, pp. 183–231.

[21] HEINTZ A., *Solvability of a boundary value problems for the non linear Boltzmann equation in a bounded domain*, in molecular gas dynamics (in Russian). Aerodynamics of rarefied gases, **vol. 10**, 1980, pp. 16–24, Leningrado.

[22] JABRI Y., *The Mountain Pass Theorem. Variants, Generalizations and Some Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **vol. 95**, Cambridge University Press, Cambrige 2003.

[23] KHISAMUTDINOV A. I., *A simulation method for statistical modeling of rarefied gases*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **vol. 291**, 1986, pp. 1300–1304.

[24] LACHOWICZ M. and PULVIRENTI M., *A stochastis system of particles modelling the Euler equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 119 (1992).

[25] MASLOVA N., *Nonlinear Evolution Equations: Kinetic Approach*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **vol. 10**, World Scientific.

[26] PANFEROV V., *On the Existence of Stationary solutions to the Povzner Equation in a Bounded Domain*, Deparment of Mathematics, Chalmers Uni-

versity of Technology and Göteborg University, S-412 96 Göteborg, Sweden, (2000), submitted.

[27] POVZNER A.Y., *The Boltzmann equation in the kinetic theory of gases*, Amer.Math. Soc. Trans., Ser. 2, **vol. 47**, 1962, pp. 193–216.

[28] PRECUP R., *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Deparment of Applied Mathematics, Babes-Bolyai University, Cluj, Romania. Springer-Science+Business, B.V.

[29] RABINOWITZ P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. 65, AMS, 1986.

[30] RJASANOW, S. and WAGNER, W. *Stochastic Numerics for the Boltzmann Equations.* Springer Series in Computational Mathematics. 2005.

[31] UKAI S. and ASANO K., *Steady solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle, I. Existence*, Arch. Rat. Mech. Anal., **vol. 84**, 1983, pp. 249–291.

[32] UKAI S., YANG T. and ZHAO H., *Stationary solutions to the exterior problems for the Boltzmann equation, I. Existence*, Discrete and Continuous Dynamical Systems., **vol. 23**, No.152, 2009, pp. 495-520, January and February .

[33] WAGNER W.,*A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation*, J. Statist. Phys., **vol 66**, 1992, pp. 1011–1044.