REFLEXIONES SOBRE ESTRUCTURAS TOPOLÓGICAS Y ALGEBRAICO TOPOLÓGICAS

JULIO CÉSAR HERNÁNDEZ ARZUSA

Trabajo presentado como requisito para optar al título de doctor

TUTORES:
DR. SALVADOR HERNÁNDEZ MUÑOZ. Universitat Jaume I, España.
DR. CONSTANCIO HERNÁNDEZ GARCÍA. UAM, Iztapalapa México.
DR. HUMBERTO PÉREZ GONZÁLEZ. Universidad de Cartagena, Colombia.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DOCTORADO EN CIENCIAS
CARTAGENA D.T. Y C.
2017

Índice general

INTRODUCCIÓN

Una reflexión de una categoría en otra siempre viene acompañada de una propiedad universal, que es en realidad lo que la hace importante. Es muy común en matemáticas definir nuevas estructuras a partir de unas ya existentes en donde siempre se involucran propiedades universales. Esto ocurre en topología y en álgebra cuando hacemos productos y estructuras cocientes, donde la propiedad universal que subyace simplifica las ideas y las pruebas. Los detalles concretos de una construcción derivada de un concepto dado pueden ser muy complicados, pero si la construcción satisface una propiedad universal, podemos olvidar todos estos difíciles detalles: todo lo que debemos saber sobre esa construcción está contenido en la propiedad universal. Las propiedades universales definen los objetos únicos salvo isomorfismos. Por lo tanto, una estrategia para probar que dos objetos son isomorfos es el probar que satisfacen la misma propiedad universal. Al entender las propiedades abstractas de una reflexión, obtenemos información sobre todas estas construcciones y así evitamos repetir el mismo análisis en cada ejemplo individual.

Tenemos ejemplos valiosos de reflexiones en todas las categorías de las matemáticas. Un ejemplo muy antiguo se encuentra en la *Compactificación de Stone Čech* establecida en 1937, ésta es una reflexión de los espacios de Tychonoff en los espacios compactos. Es un resultado clásico del análisis que cada espacio métrico, más generalmente cada espacio uniforme, está embebido como subespacio denso en un espacio completo, este hecho permite definir una reflexión de los espacios uniformes en los espacios uniformes completos. Si queremos combinar álgebra con topología, podemos ver que cada grupo topológico admite una completación que también es un grupo topológico, esta completación se llama *la Completación de Raykov*. Además podemos también considerar la reflexión de los espacios Tychonoff en los grupos libres que es estudiada en [5]. Pero en las categorías meramente algebraicas podemos también encontrar reflexiones, por ejemplo existe una reflexión de la categoría de los grupos en los grupos abelianos, más explícitamente, si G es un grupo, existe un homomorfismo $f_G\colon G \longrightarrow G/H$, siendo H el subgrupo de G generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. G/H es abeliano y todo homomorfismo de G en un grupo abeliano, se factoriza a través de f_G. Algunas veces G/H es llamado el abelianizado de G. Con un poco de esfuerzo se puede probar que cada semigrupo cancelativo (es decir $xy = xm$ o $yx = mx$ implica $y = m$) y abeliano genera un grupo (ver [38]), o de manera más general cada conjunto puede ser empotrado en un grupo libre, y en un grupo libre abeliano.

Aunque una buena parte de los resultados aquí obtenidos son topológicos, hemos abordado situaciones en que los espacios en cuestión tienen una estructura algebraica. Este hecho le da un vuelco impensable a las cosas y las hace un poco más sencillas. El hecho de tener una estructura algebraica continua hace que por ejemplo las reflexiones puedan ser caracterizadas en términos de homomorfismos continuos, como hemos probado en el Lema 2.6. Esta interacción entre el álgebra y la topología, es el área de las matemáticas que se conoce como *Álgebra Topológica*, que tuvo su origen en los años 20, debido a Dieudonne y Pontryagin. Un ejemplo de cómo la estructura algebraica continua influye mucho en los resultados topológicos, es el hecho de que cada grupo topológico es un espacio T_3 y si además es T_0, entonces es Tychonoff. Por eso no tiene sentido estudiar en la categoría de los grupos topológicos, las reflexiones que provienen de espacios que satisfacen axiomas de separación T_i, con $i \in \{0, 1, 2, 3, r, u, fh, t\}$, ya que con estudiar la reflexión sobre los espacios T_0, tendríamos todas las demás.

Uno de los objetivos de esta memoria es el comportamiento de algunos funtores reflexivos sobre las estructuras algebraico topológicas. En particular, abordamos la siguiente cuestión: Sea R una subcategoría reflectiva de Top y sea F_R el funtor reflectivo asociado con R. Si A denota una subcategoría algebraica (semi)topológica de Top, investigamos cuándo $F_R(A)$ es una subcategoría reflexiva de A. Esta cuestión ha atraído el interés de un buen número de investigadores recientemente, aunque con una aproximación diferente al problema ([46], [44], [45], [21], [27], [32], [41]), y en buena medida, la motivación que subyace en este trabajo es la de presentar una aproximación unificada a distintas cuestiones que habían sido consideradas separadamente, dependiendo del contexto en que eran tratadas, cuando todas ellas pueden enfocarse en el marco general de las estructuras algebraico topológicas. No obstante, como aplicación de las técnicas desarrolladas aquí, se obtienen diversos resultados que responden total o parcialmente a varias cuestiones abiertas propuestas en distintos escenarios específicos.
En este trabajo recogemos muchos resultados en torno a la productividad de reflexiones de estructuras algebraico-topológicas y de cuando la estructura algebraica se hereda en la reflexión. Por ejemplo, la productividad de la reflexión de la compactación de Bohr en estructuras discretas, estudiada por J. Hart, K. Kunnen en [14], la productividad de la compactación de Bohr para grupos más generales y la productividad de la reflexión sobre grupos $\aleph_o$-acotados estudiada en [21], la productividad de la reflexión sobre los espacios T_0, T_1 y T_2 estudiada en [44], la productividad de la completación de Hewitt estudiada en [5], la productividad de la reflexión de los grupos paratopológicos sobre espacios T_3 estudiada en [44], pueden ser vistas de manera general con los resultados aquí encontrados.
Gran parte de este trabajo está dedicado a estudiar las propiedades de las reflexiones provenientes de espacios que satisfacen axiomas de separación, mejorando en buena parte los resultados de M. Tkachenko dados en [46], [44] y [45]. El hecho de que las reflexiones provenientes de los espacios que satisfacen algún axioma de separación existen, es relativamente antiguo, y sus realizaciones ya han sido cons-

truidas. La caracterización de la reflexión sobre espacios T_0 se puede ver en [3], donde se probó que ésta se puede construir totalmente a partir del espacio de Sierpinsky. El axioma T_1 se acredita a Riesz y a Frechet. En [1956], S. Mrówka, [29], demostró que los espacios T_1 son los $\mathcal{E}$-regulares (donde $\mathcal{E}$ es la clase de todos espacios con la topología co-finita) y que la clase de todos los espacios T_1 no es simple en Top. Que la clase de los espacios T_1 es epireflexiva en Top es consecuencia de los resultados de J. F. Kennison, [25], y H. Herrlich, [17]. Como el nombre lo indica, los espacios de Hausdorff fueron definidos por Hausdorff. En 1939, P. Alexandroff, [2], construyó para cada espacio topológico T_1 un espacio de Hausdorff maximal y probó que esta construcción es una reflexión Hausdorff. Una construcción categórica la podemos encontrar en un trabajo de P. Samuel, [40]. Que los espacios Hausdorff no son simples es establecido por H. Herrlich en [20] y Ramer en [34]. En un trabajo de V. Kannan [24] encontramos una construcción de la reflexión de Hausdorff por medio de una sucesión transfinita de cocientes. Los espacios regulares son idea de Vietoris, [50], pero que forman una categoría epirreflexiva en Top fue probado por J. F. Kennison en [25] y por H. Herrlich en [17,18]. Construcciones explícitas de la reflexión regular (en el ámbito no Hausdorff) la obtuvieron E. Cech, [8], y J. P. Thomas, [43]. En 1925, Urysoh definió los espacios completamente regulares, más adelante, A. Tychonoff, [49] demostró que estos espacios son precisamente los espacios $[0,1]$-regulares. Los profesores E. Cech [8] y M. Stone [42], construyeron una reflexión completamente regular $\beta\colon X \to \beta X$ de un espacio topológico X y demostraron que para cada función continua acotada $f\colon X \to \mathbb{R}$ existe una única función continua acotada $\beta f\colon \beta X \to \mathbb{R}$ que satisface $f = \beta f \circ \beta$. Más aún, la correspondencia $f \mapsto \beta f$ induce un isomorfismo entre los anillos de las funciones acotadas y continuas de valor real, $C^*(X)$ y $C^*(\beta X)$. En la introducción de E. Cech leemos “En particular, pruebo que un espacio topológico arbitrario S determina un espacio completamente regular $\varphi(S)$ tal que una buena parte de los asuntos de S se reduce a los esos mismos asuntos de $\varphi(S)$. En particular, esto es cierto para la teoría de funciones de valores reales continuas y funciones de Baire". Luego Stone demostró que la construcción $T\colon X \to TX$, dada por Cech y él mismo, da una reflexión completamente regular. H. Herrlich, [17] y [18] probó que la categoría de los espacios completamente regulares, aunque es simple en **Haus** no es simple en Top. M. Huvsek, [22], probó que, si no existen cardinales medibles, entonces las subcategorías epireflexivas de Top son simples en $Haus$. T. Ishii, [23], escribió un ensayo sobre el reflector completamente regular, nombrado Funtor Tychonoff por Morita [28].

Este trabajo lo hemos dividido en dos capítulos. En el primero damos unos preliminares topológicos, algebraicos y categóricos. En este capítulo solo presentamos conceptos básicos y además, para fijar ideas, especificamos algunos tópicos, que aunque puedan parecer triviales, en la literatura son tratados de forma diferente por algunos autores, como por ejemplo el concepto de *compacidad*, que algunos autores exigen la condición de ser Hausdorff. Uno de los resultados propios de la investigación que sustenta este trabajo, es la condición suficiente para que una aplicación cociente entre monoides sea abierta, dada en el Teorema 1.29 y como consecuencia el Corolario 1.33. La mayoría de los resultados de este capítulo en relación a álgebra topológica, pueden ser encontrados en [5], este es un texto reciente que recopila gran parte de tópicos en el área.

En el segundo capítulo damos resultados propios de reflexiones, aquí están la mayoría de los resultados propios de nuestra investigación. Empezamos la primera sección con la prueba de la existencia de las reflexiones (Teorema 2.1) en el caso de las clases PS, la cual ya se encuentra en la literatura (Teorema 1.2.1 de [19]), damos además algunas propiedades funtoriales. Como otro de los aportes de la investigación, caracterizamos aquellas clases reflexivas en los que el morfismo canónico es cociente y aquellas en la que el morfismo canónico es la función idéntica (Teoremas 2.9 y 2.11, respectivamente). Además probamos que las operaciones separadamente continuas son reflejadas en los objetos (Teorema 2.4) y que los morfismos que preservan alguna estructura algebraica son reflejados de igual manera (Teorema 2.8), obteniendo una construcción mucho más general que la ofrecida en el Teorema 2.3 de [46], ya que no sólo contempla grupos semitopológicos, sino cualquier espacio topológico que tenga una estructura algebraica separadamente continua. En la segunda sección materializamos las reflexiones que provienen de clases PS que satisfacen los axiomas de separación T_i, con $i \in \{0, 1, 2, 3, fh, r, t\}$, en realidad todas las reflexiones provenientes de axiomas de separación ya se encuentran en la literatura, como ya lo hemos anotado, salvo la reflexión sobre espacios T_2 que la caracterizamos para el caso particular en el que el morfismo canónico es abierto, por ejemplo espacios de Maltsev, monoides semitopológicos con traslaciones abiertas (Teoremas 2.26 y 2.27) y grupos cuasitopológicos (Teorema 2.23 y Corolario 2.25). Los principales aportes en esta sección están dados en la reflexión sobre espacios T_r, en la que la mayoría de los resultados dados en [44] en la sección 2 son generalizados de grupos paratopológicos a espacios casiregulares. Por ejemplo la Proposición 2.2 de [44] acerca a la celularidad, es notablemente mejorada por el Teorema 2.42. Una de las aplicaciones más notables de este trabajo es el Teorema 2.44, en el que damos un aporte a una pregunta relativamente antigua:¿cuándo un grupo paratopológico es un grupo topológico? Este problema ha sido trabajado por varios investigadores en muchos trabajos, por ejemplo citamos a [4] y a [47], pero gran parte de ellos son recogidos en la sección 2.4 de [5]. La reflexión T_0 nos permite debilitar la propiedad de ser regular en ser solo T_3, en otros casos nos permitió debilitar la condición ser Hausdorff por ser T_3.

En la tercera sección abordamos el semigrupo semitopológico de las funciones continuas, la idea es estudiar condiciones bajos las cuales $\mathcal{C}(C(X, X)) = C(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(X))$, pero solo lo hicimos para el caso en el que $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios que satisfacen el axioma de separación T_0.

La cuarta sección fue dedicada a uno de los temas que nos propusimos abordar en este trabajo, y es cuándo la reflexión respeta subespacios. M. Tkachenko sólo centró sus estudios en el caso de los subgrupos, aquí tratamos de darle un toque más general, donde los mayores aportes están dados en las reflexiones sobre los espacios T_0, T_1 y T_2. Introdujimos para tal fin el concepto de $\mathcal{C}$-cerrado y $\mathcal{C}$-abierto, que es una modificación del concepto de τ-cerrado y τ-abierto utilizado en [28] para el Funtor de Tychonoff. Este mismo concepto fue utilizado en el Teorema 2.82 para hallar una caracterización de cuándo una reflexión respeta productos. Demostramos que la reflexión sobre espacios T_0 respeta subespacios arbitrarios (Teorema 2.54), generalizando el resultado similar de M. Tkachenko, que prueba que la reflexión sobre espacios T_0 respeta subgrupos arbitrarios. El Teorema 2.66 ofrece una condición suficiente para que la reflexión sobre espacios T_1 respete subespacios. Presentamos una caracterización para que la reflexión respete subgrupos en la categoría grupos semitopológicos sobre aquellas reflexiones que son cocientes (Lema 2.69), particularizamos los casos de la reflexión sobre espacios T_1 y T_2, (Teoremas 2.72 y 2.70). El Teorema 2.73 da una condición suficiente para que la reflexión sobre espacios T_1 respete subespacios en la categoría de grupos semitopológicos derechos o izquierdos. El Corolario 2.71 nos da una condición suficiente para que la reflexión sobre espacios T_2 respete subgrupos en la categoría de grupos cuasitopológicos. En esta misma sección introdujimos un resultado que nos dice algo acerca del comportamiento de las reflexiones y las sumas de espacios topológicos (Lema 2.61), el cual nos da los Corolarios 2.4 y 2.63, este último es mucho más general que la Proposición 2.7 de [44]. Además a partir de este mismo Lema obtenemos un teorema muy fuerte acerca de la productividad de las reflexiones (Teorema 2.88), que tiene una forma muy parecida al Corolario 4.4 de [28]. La quinta sección sólo fue introducida para dar respuesta al problema planteado por O. Echy y S. Lazaar en [11], donde preguntan las condiciones bajo las cuales $\mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}_t(X)$, el Teorema 2.75 da respuesta a esta pregunta. En esta sección damos una condición necesaria y suficiente para que en un espacio, la reflexión sobre espacios T_0 coincida con la reflexión sobre espacios T_1 (Teorema 2.76), además damos ejemplos de tales espacios, como los son los espacios de Maltsev, grupos cuasitopológicos y espacios T_3.

Estudiar propiedades de productividad de las reflexiones es un problema muy antiguo de la teoría de categorías, en [10] se dan algunos resultados al respecto. M. Tkachenko prueba que la reflexión T_0, T_1, T_2, respeta productos en la categoría de grupos semitopológicos, en este trabajo hemos generalizado tal resultado en el Lema 2.26, en el que probamos que sólo basta que los homomorfismos canónicos de las reflexiones de los espacios en cuestión sean abiertos. En los espacios de Maltsev izquierdos o derechos y en los semigrupos semitopológicos con traslaciones derechas o izquierdas abiertas (Ver Teoremas 2.90 y 2.91), los cuales constituyen una generalización de los grupos semitopológicos, esta propiedad se cumple, por tanto en estas categorías, las reflexiones sobre la clases PS de espacios topológicos cerradas por supertopologías, respeta productos.

La productividad de la reflexión sobre espacios T_3 es bien tratada por M. Tkachenko y O. Ravsky en [46] y [35] para el caso de grupos paratopológicos, donde prueban que la reflexión sobre espacios T_3 coincide con la semirregularización, y las propiedades de productividad son estudiadas en [30]. Aprovechando el concepto de semigrupos topológicos con *shift* abiertos, (shift en este trabajo lo hemos traducido como traslación) dado por T. Banakh y O. Ravsky en [6], probamos que la reflexión sobre espacios T_3 respeta productos en esta categoría (Teorema 2.94). El Teorema 2.83 es muy general, ya que prueba que todas las reflexiones sobre clases PS que contienen a los espacios T_2, respetan productos en la categoría de espacios compactos. La reflexión sobre espacios de Tychonoff es muy antigua, y estudiada en [28], donde se prueba en el Corolario 4.4 que $\mathcal{C}_t(X \times Y) = \mathcal{C}_t(X) \times \mathcal{C}_t(Y)$, para cada espacio de Tychonoff localmente compacto X y cada espacio Y. Este resultado es generalizado en el Teorema 2.87 con la ayuda de la topología compacto abierta, donde cambiamos $\mathcal{C}_t$ por una clase epirreflexiva de Top cerrada por supertopologías que contenga a los espacios de Hausdorff localmente compactos, por ejemplo $\mathcal{C}_i$, con $i \in \{0, 1, 2, fh, u\}$.

Lo bueno de aquellas reflexiones que preservan productos es que se reflejan las operaciones conjuntamente continuas, como se probó en el Teorema 2.93. Por ejemplo en $\mathcal{C}_0(X)$ se reflejan todas las operaciones continuas de cualquier espacio X, dado que la reflexión sobre los espacios T_0 respeta productos arbitrarios. Recíprocamente probamos que si la reflexión refleja operaciones conjuntamente continuas con neutro, entonces respeta productos finitos, como lo hemos probado en el Teorema 2.95. El Corolario 2.92 nos da una condición para que la reflexión sobre clases PS cerradas por supertopologías respete productos en la categoría de monoides semitopológicos.

En [26] se plantea el problema de cuándo S/R es un semigrupo topológico, siendo S un semigrupo topólogico y R una congruencia cerrada en S, en realidad se pregunta por la continuidad conjunta de la operación en S/R. Este problema fue abordado por G. González en [13], y se probó que se cumple cuando S es un semigrupo Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, el Corolario 1.33 también da una respuesta a este problema. El Teorema 2.95 es uno de los aportes más potentes de este trabajo, pues aquí se recoge la productividad de muchos reflexiones, por ejemplo la productividad de la reflexión de los grupos en los grupos ω-estrechos y en los grupos compactos estudiada en [21]. Estos dos últimos casos se ven contenidos en un resultado común según el Corolario 2.97 y el Ejemplo 2.13, al igual que la productividad en el caso finito de la compactación de Stone $\check{C}$ech sobre grupos pseudocompactos. Además este mismo teorema nos permite encontrar una aplicación de las reflexiones, manifiesta en el Teorema 2.98, en el que damos condiciones para que un moniode topológico tenga celularidad contable. En [48] está probado que cada grupo topológico Hausdorff σ-compacto tiene celularidad contable, después este mismo resultado es mejorado en [4] para grupos paratópoógicos Hausdorff σ-compactos y recientemente en el Corolario 2.3 de [44] se obtuvo el mismo resultado para grupos paratopológicos σ-compactos. Usando las reflexiones nos permite abordar el problema en monoides topológicos cancelativos con traslaciones abiertas (segúen el Ejemplo 2.11 la clase de los grupos paratopológicos es una subclase propia de la clase de los monoides cancelativos con traslaciones abiertas), pero en lugar de σ-compacidad, ponemos compacidad.

Además damos un resultado para la σ-compacidad, pero agregamos compacidad secuencial (Teorema 2.99).

A continuación presentamos los resultados obtenidos de la investigación, algunos se encuentran en [16]. Hacemos una clasificación por sección.

- Sección 1.2: Teorema 1.29 y Coralario 1.33
- Sección 2.1: Teorema 2.89, Corolario 2.5, Lema 2.6, Teorema 2.7, Teorema 2.8, Teorema 2.9, Corolario 2.10, Teorema 2.11 y Corolario 2.12.
- Subsección 2.2.1: Corolario 2.14, Lema 2.16, Teorema 2.21, Lema 2.22, Corolario 2.23, Proposición 2.24, Corolario 2.25, Teorema 2.26, Teorema 2.27, Proposición 2.29, Teorema 2.30, Lema 2.36, Teorema2.37, Teorema 2.38, Lema 2.39, Teorema 2.40, Corolario 2.41, Teorema 2.42, Lema 2.43 y Teorema 2.44.
- Sección 2.3: Proposición 2.49 y Teorema 2.50.
- Sección 2.4: Proposición 2.51, Lema 2.52, Teorema 2.53, Teorema 2.54, Lema 2.55, Proposición 2.56, Teorema 2.57, Corolario 2.59, Corolario 2.62, Corolario 2.60 Lema 2.61, Corolario 2.63, Proposición 2.64, Lema 2.65, Teorema 2.66, Teorema 2.67, Corolario 2.68, Lema 2.69, Teorema 2.70, Corolario 2.71, Teorema 2.72, Teorema 2.73 y Teorema 2.74.
- Sección 2.5: Teorema 2.75, Lema 2.77, Teorema 2.78, Corolario 2.79 y Corolario 2.80.
- Sección 2.6: Lema 2.81, Teorema 2.82, Teorema 2.83, Lema 2.84, Teorema 2.86, Teorema 2.87, Teorema 2.88, Proposición 2.89, Teorema 2.90, Teorema 2.91, Corolario 2.92, Teorema 2.93, Teorema 2.94, Teorema 2.95, Teorema 2.96, Corolario 2.97, Teorema 2.98 y Teorema 2.99.

Capítulo 1

NOCIONES BÁSICAS.

En este capítulo presentamos algunas definiciones básicas y resultados de topología, álgebra y categorías, el objeto es que el lector pueda comprender el próximo capítulo donde aparecen los resultados principales. Omitiremos las pruebas de resultados que consideremos básicas. La sección donde presentamos los axiomas de separación, aunque es demasiado corta, constituye una parte muy importante en nuestro trabajo. Los axiomas de separación es un tema muy básico para cualquier lector dedicado a la topología, sin embargo se hace necesario presentarlo, porque son tomados de diferentes maneras por los autores.

1.1. NOCIONES TOPOLÓGICAS

Presentamos en esta sección construcciones de topologías a partir de funciones, los axiomas de separación, los espacios compactos y conceptos relacionados a la compacidad y la topología compacto abierta. A menos que se indique lo contrario, siempre que hagamos referencia a un producto cartesiano de espacios topológicos, éste será dotado de la topología producto. A menudo diremos simplemente *espacio* para referirnos a un espacio topológico.

1.1.1. GENERANDO TOPOLOGÍAS

Nuestro propósito en esta sección es construir topologías a partir de otras dadas y estudiar sus propiedades. La topología que más nos interesa es la topolgía débil generada por una familia de funciones, que en realidad es una topología inicial y la topología cociente que en realidad es una topología final.

Sean X un conjunto, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y $\{f_i\colon X \longrightarrow Y_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones. Es posible dotar a X de la menor topología que hace a cada f_i una función continua, a esta topología la llamaremos *topología inicial* sobre X inducida por la familia $\{f_i\}_{i\in I}$.

Teorema 1.1. *Sean X un conjunto no vacío, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i\colon X \longrightarrow Y_i\}$ una familia de funciones. Entonces $\mathcal{B} = \{f_i^{-1}(V_i) : V_i \in \tau_i, i \in I\}$ es una subbase para una topología sobre X, la cual denotaremos por $\tau^{\mathcal{F}}$. $\tau^{\mathcal{F}}$ es la topología más pequeña sobre X que hace a cada f_i una función continua, además dado un espacio Y y una función $f\colon Y \longrightarrow (X, \tau^{\mathcal{F}})$, entonces f es continua si y solo si $f_i \circ f$ es continua para cada $i \in I$.*

Demostración. La minimalidad de $\tau^{\mathcal{F}}$ es obvia. Ahora, si f es continua, lo será cada $f_i \circ f$. Recíprocamente, supongamos que cada $f_i \circ f$ es continua y veamos que f es continua. Sea V abierto en $(X, \tau^{\mathcal{F}})$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que V es un abierto subbásico, es decir que $V = f_i^{-1}(V_i)$, donde $V_i \in \tau_i$, para algún $i \in I$. Así $f^{-1}(V) = f^{-1}(f_i^{-1}(V_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(V_i)$, el cual es abierto, por hipótesis, luego f es continua. $\square$

En el caso en el que $\mathcal{F}$ está formado por una única función f escribiremos simplemente τ^f.

Dada una familia de topologías $\{\tau_i\}_{i\in I}$ sobre un conjunto X, podemos tratar de construir la menor topología sobre X que contenga a cada τ_i, $i \in I$. El siguiente teorema garantiza la existencia de esta topología.

Teorema 1.2. *Sea $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una familia de topologías sobre un conjunto X. Existe una topología τ que es la menor topología sobre X que contiene a cada τ_i, $i \in I$, la cual notaremos por $\bigvee_{i\in I} \tau_i$. Además el espacio topológico $(X, \bigvee_{i\in I} \tau_i)$ es homeomorfo a $\triangle_{i\in I}(X, \tau_i)$, aquí $\triangle_{i\in I}(X, \tau_i)$, representa la diagonal del producto $\prod_{i\in I}(X, \tau_i)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \tau_i$. Fácilmente se tiene que $\mathcal{B}$ es una subbase para una topología sobre X, la cual es la más pequeña que contiene a cada una de las τ_i, $i \in I$. Sea $f\colon (X, \bigvee_{i\in I} \tau_i) \longrightarrow \triangle_{i\in I}(X, \tau_i)$, dada por $f(x) = (x_i)_{i\in I}$, siendo $x_i = x$ para cada $i \in I$. Claramente f es una biyección continua, si $Id_\alpha\colon (X, \bigvee_{i\in I} \tau_i) \longrightarrow (X, \tau_\alpha)$ es la aplicación idéntica, entonces $Id_\alpha = p_\alpha \circ f$, siendo p_α, la proyección de $\prod_{i\in I} X_i$ en X_α. Note que $\bigvee_{i\in I} \tau_i$ es la menor topología sobre X que hace cada Id_i continua, es decir es la topología inicial sobre X inducida por la familia $\{p_\alpha \circ f\}_{i\in I}$. Aplicando el Teorema 1.1, y el hecho de que $p_\alpha = Id_\alpha \circ f^{-1}$ es continua para cada $\alpha \in I$ tenemos que f^{-1} es continua y por tanto es un homemorfismo. □

Consideremos ahora un conjunto X, una familia de espacios topológicos $\{Y_i\}_{i\in I}$ y una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_i\colon Y_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$. La topología más fina sobre X que hace que cada f_i sea continua la llamaremos *topología final* sobre X, notada por $\tau_{\mathcal{F}}$.

Teorema 1.3. *Sean X un conjunto no vacío, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_i\colon Y_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ una familia de funciones, entonces*

$$\tau_{\mathcal{F}} = \{U \subseteq X : f_i^{-1}(U) \in \tau_i \text{ para cada } i \in I\}$$

define una topología sobre X la cual es la más fina que hace que cada f_i sea continua, la que llamaremos topología final inducida por $\mathcal{F}$. Además $g\colon (X, \tau_{\mathcal{F}}) \longrightarrow Y$, *siendo Y un espacio topológico, es continua si y solo si $g \circ f_i$ es continua para cada $i \in I$.*

Demostración. La maximalidad de $\tau_{\mathcal{F}}$ es obvia. Si $g\colon (X, \tau_{\mathcal{F}}) \longrightarrow Y$ es continua, entonces $g \circ f_i$ es continua para cada $i \in I$. Recíprocamente supongamos que $g \circ f_i$ es continua para cada $i \in I$ y sea U abierto en Y, veamos que $g^{-1}(U)$ es abierto en X. Note que $f_i^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_i)^{-1}(U)$ el cual es abierto para cada $i \in I$, esto completa la prueba. $\square$

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Dado $x \in X$ notemos con $[x]$, la clase de equivalencia x y sea $\pi\colon X \longrightarrow X/R$, la respectiva aplicación cociente. La topología final sobre X/R inducida por $\{\pi\}$, la llamaremos topología cociente inducida por R.*

Definición 1.2. *Una función continua y sobreyectiva $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \rho)$, se dice que es cociente si la topología final inducida por $\{f\}$ coincide con ρ.*

La siguiente proposición es muy estudiada en los cursos básicos de topología, por tanto omitiremos su demostración.

Proposición 1.4. *Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ funciones sobreyectivas entre espacios topológicos. Entonces*

i) Si f y g son cocientes, entonces $g \circ f$ es cociente.

ii) Si f es una biyección y cociente, entonces es un homeomorfismo.

iii) Si $g \circ f$ es cociente, entonces g es cociente.

iv) Si f es continua y, abierta o cerrada, es cociente.

v) Si f es cociente, entonces $g \circ f$ es continua si y sólo si g es continua.

Definición 1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos, $\mathcal{C}$ se dice cerrado por topologías iniciales si dada una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_i \colon X \longrightarrow Y_i\}$, con $Y_i \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I$, entonces $(X, \tau^{\mathcal{F}}) \in \mathcal{C}$.*

1.1.2. AXIOMAS DE SEPARACIÓN

Presentamos en esta sección las definiciones de los axiomas de separación y algunas caracterizaciones, las pruebas de los resultados pueden ser encontrados en su mayoría en [39].

Definición 1.4. *Sea X un espacio.*

i) *X se dice un espacio T_0, si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existe una vecindad de x que no contiene a y o una vecindad de y que no contiene a x.*

ii) *X se dice un espacio T_1 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existe una vecindad de x que no contiene a y.*

iii) *X se dice T_2 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existen una vecindad de x, V_x, y una de y, V_y tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

iv) *X se dice un espacio T_3 si dados un cerrado en X, B, y un $x \in X$, tales que $x \notin B$, podemos encontrar un abierto en X que contiene a B, V_B, un abierto que contiene a x, V_x, tales que $V_x \cap V_B = \emptyset$.*

v) *X se dice un espacio regular o T_r si es T_3 y T_1.*

vi) *X se dice un espacio funcionalmente Hausdorff, o T_{fh}, si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, existe una función continua $f \colon X \longrightarrow I = [0, 1]$, ($I$ dotado de la topología de subespacio proveniente de la topología usual de $\mathbb{R}$) tal que $f(x) \neq f(y)$.*

vi) *X se dice un espacio $T_{3.5}$ o funcionalmente T_3 si dados $x \in X$ y un cerrado B, que no contiene a x, existe una función continua $f \colon X \longrightarrow I$ tal que $f(x) \notin f(B)$.*

vii) *X se dice un espacio Tychonoff o completamente regular si es $T_{3.5}$ y T_0.*

viii) *X se dice Urysoh o T_u, si dados $x, y \in X$, puntos distintos, existen vecindades V_x y V_y, de x, e y, respectivamente, tales que $\overline{V_x} \cap \overline{V_y} = \emptyset$.*

Tenemos las siguientes implicaciones:

$$Tychonoff \Rightarrow \text{funcionalmente Hausdorff} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

$$Regular \Rightarrow T_2.$$

$$Regular \Rightarrow T_3.$$

$$Tychonoff \Rightarrow T_{3.5} \Rightarrow T_3.$$

Proposición 1.5. *Sea X un espacio, X es T_0 si y solo si $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para cada par de puntos distintos $x, y \in X$.*

Definición 1.5. *El espacio de Sierpinsky es el conjunto $X = \{0, 1\}$ dotado de la topología $\tau = \{\{0, 1\}, \{0\}, \emptyset\}$, el cual notaremos con $\mathcal{S}$.*

Note que $\mathcal{S}$ es un espacio T_0 que no es T_1.

Proposición 1.6. *Un espacio topológico X es T_0 si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe una función continua $f \colon X \longrightarrow \mathcal{S}$, tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Supongamos que X es T_0 y sean x e y puntos distintos de X. Por Proposición 1.5 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, luego sin pérdida de generalidad podemos encontrar un vecindad abierta de x, V_x, que no contiene a y. Si definimos $f \colon X \longrightarrow \mathcal{S}$, por $f(z) = 0$ si $z \in V_x$ y $f(z) = 1$, en caso contrario. Claramente f es continua y $f(x) \neq f(y)$. Recíprocamente, sean x e y dos puntos distintos de X y sea $f\colon X \longrightarrow S$ una función continua, tal que $f(x) \neq f(y)$. Si $f(x) = 0$, entonces $f^{-1}(\{0\})$ es una vecindad de x que no contiene a y, esto completa la prueba. $\square$

Dados un espacio topológico X y $x \in X$, notaremos con N_x, el conjunto de todas las vecindades de x.

Proposición 1.7. *Sea (X, τ) un espacio. Las siguientes condiciones sobre X son equivalentes:*

i) *X es T_1.*

ii) *$\bigcap_{V \in N_x} V = \{x\}$ para cada $x \in X$.*

iii) *Cada singulete de X es cerrado.*

iv) *τ contiene la topología de los cofinitos de X.*

Proposición 1.8. *En un espacio X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es T_2.*

ii) *$\{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.*

iii) *$\bigcap_{V \in N_x} \overline{V} = \{x\}$.*

Proposición 1.9. *Sea X un espacio, entonces X es T_3 si y solo si para cada abierto U en X y $x \in U$, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Proposición 1.10. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua, sobreyectiva, abierta y cerrada, entonces si X es T_3, Y es T_3.*

Demostración. Sea $V_{f(x)}$ una vecindad de $f(x)$, la continuidad de f y el hecho de que X es un espacio T_3, por la Proposición 1.9 podemos hallar una vecindad V_x de x, tal que $f(\overline{V_x}) \subseteq V_{f(x)}$. La continuidad de f, indica que $f(\overline{V_x}) \subseteq \overline{f(V_x)}$, como f es cerrada tenemos que $f(\overline{V_x}) = \overline{f(V_x)}$, así $\overline{f(V_x)} \subseteq V_{f(x)}$, como f es abierta, $f(V_x)$ es una vecindad de $f(x)$, de la Proposición 1.9 podemos inferir que Y es T_3. $\square$

Proposición 1.11. *En un espacio T_3, la propiedad T_0 implica T_1*

Demostración. Sea X un espacio T_3 y T_0, veamos que es T_1. En efecto sean x, y puntos distintos de X, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \notin \overline{\{y\}}$, por ser X T_3, podemos hallar un vecindad V_x de x y un abierto U que contiene a $\overline{\{y\}}$, tales que $V_x \cap U = \emptyset$, luego X es T_1. $\square$

1.1.3. COMPACIDAD Y ESPACIOS RELACIONADOS

Como en apartados anteriores los resultados clásicos y fáciles de probar no serán demostrados.

Definición 1.6. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en X. $\mathcal{U}$ se dice un cubrimiento abierto para X, si $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $J \subseteq I$, y $\mathcal{V} = \{U_i\}_{i\in J}$ sigue siendo un cubrimiento abierto para X, entonces a $\mathcal{V}$ se le dice un subcubrimiento, si J es finito, entonces a $\mathcal{V}$ se le llama un subcubrimiento finito. X se dice compacto, si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito. $A \subseteq X$ se dice un subconjunto compacto de X, si es compacto con la topología heredada de X.*

La compacidad no respeta subespacios, pero sí respeta subespacios cerrados.

Proposición 1.12. *Sea X un espacio compacto y $A \subseteq X$. Si A es cerrado en X, entonces es compacto, el recíproco se da si X es Hausdorff.*

La compacidad se preserva por funciones continuas.

Proposición 1.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $A \subseteq X$, es compacto en X, entonces $f(A)$ es compacto en Y.*

Proposición 1.14. *Sean X, Y espacios topológicos compactos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua. Si Y es Hausdorff, entonces f es cerrada, en particular si f es una biyección, entonces f es un homeomorfismo.*

Definición 1.7. *Un espacio topológico X se dice localmente compacto si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad compacta.*

Proposición 1.15. *Un espacio topológico X, T_2, es localmente compacto si y solo si para cada $x \in X$, existe una vecindad V_x de x, tal que $\overline{V_x}$, es compacta.*

La demostración del siguiente teorema, se puede ver en [12], Teorema 3.31.

Teorema 1.16. *Si X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, entonces X es Tychonoff.*

Presentamos ahora una serie de conceptos muy cercanos a la compacidad, el objeto fundamental es presentar a través de ellos una aplicación de las reflexiones a un problema muy antiguo en la teoría de grupos topológicos, y es la siguiente pregunta: ¿Cuándo un grupo paratopológico es un grupo topológico? En [4] y en el capítulo 2, sección 2.4 de [5] se dan una serie de respuestas a esta pregunta, todas en términos de conceptos relativos a la compacidad, más adelante daremos una serie de mejoras a estos resultados. Para estudiar estos conceptos en profundidad se recomienda estudiar a [12], salvo que aquí al igual que en [4], los espacios en cuestión, no son considerados Hausdorff.

Definición 1.8. *Una familia U de conjuntos de un espacio X, se dice localmente finita, si para cada $x \in X$, existe una vecindad de x que intersecta a lo más una cantidad finita de elementos de U. Una familia de abiertos no vacíos, U de X, se* *dice celular si cada par de elementos distintos de U son disyuntos. La celularidad de X, notada por $c(X)$ se define como*

$$c(X) = \sup\{\mid U \mid : U \text{ es una familia celular en } X\} + \aleph_0.$$

Decimos que X satisface la propiedad de Suslin o es ccc si $c(X) = \aleph_0$.

Definición 1.9. *Un espacio X, se dice*

i) *Ténuemente compacto, si toda familia localmente finita de abiertos es finita.*

ii) *Secuencialmente compacto, si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

iii) *σ-compacto si es un unión numerable de subconjuntos compactos de X.*

iv) *Numerablemente compacto, si cada cubrimiento abierto numerable de X tiene un subcubrimiento finito.*

v) *Pseudocompacto, si es Tychonoff y cada función continua de valor real definida en X es acotada.*

Ahora presentaremos la topología *compacto-abierta*, un concepto muy técnico para este trabajo pero muy útil para la sección 2.6. Todo lo que sigue de esta sección puede ser consultado en [31] y [12].

Definición 1.10. *Sean X e Y espacios topológicos y denotemos por $C(X,Y)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Dado A compacto en X y U abierto en Y, sea $S(A,U) = \{f \in C(X,Y) : f(A) \subseteq U\}$. Los conjuntos $S(A,U)$ constituyen una subbase para una topología en $C(X,Y)$ la cual llamaremos topología compacto-abierta.*

Cuando escribamos $\mathfrak{C}(X,Y)$ quedará por hecho que es $C(X,Y)$ dotado de la topología compacto-abierta.

Definición 1.11. *Dada una función* $f\colon X\times Z\longrightarrow Y$, *existe una aplicación* $F\colon Z\longrightarrow \mathfrak{C}(X,Y)$ *definida por la ecuación*

$$(F(z))(x)=f(x,z)$$

la cual llamaremos aplicación inducida por f.

Lema 1.17. *([31]) Si* f *es continua,* F *es continua, el recíproco se da si* X *es localmente compacto y Hausdorff.*

Teorema 1.18. *([12]) Si* $p\colon A\longrightarrow B$ *es una aplicación cociente y* X *es de Hausdorff localmente compacto, entonces* $i_X\times p\colon X\times A\longrightarrow X\times B$ *también es cociente, aquí* i_X *es la aplicación idéntica sobre* X.

Demostración. Definamos en $X\times A$ la siguiente relación de equivalencia, $(x,y)\sim(a,b)$ si $i_X\times p(x,y)=i_X\times p(a,b)$. Sea Y el espacio cociente inducido por esta relación de equivalencia y $\pi\colon X\times A\longrightarrow Y$, la respectiva aplicación cociente. Definamos $f\colon Y\longrightarrow X\times B$ por la fórmula $f(\pi(x,y))=i_X\times p((a,b))$. Por la forma como f está definida, es biyectiva y por el Teorema 1.3 tenemos que es continua. Sean ahora g la inversa de f y $G\colon B\longrightarrow\mathfrak{C}(X,Y)$ y $Q\colon A\longrightarrow\mathfrak{C}(X,Y)$, las funciones inducidas por g y π, respectivamente. Para cualquier $a\in A$ y $x\in X$ tenemos que $(Q(a))(x)=\pi(x,a)$ y $(G\circ p(a))(x)=g(x,p(a))=g(i_X\times p((x,a)))=\pi(x,a)$, esto prueba que $Q=G\circ p$ dado que p es cociente y Q es continua, el Teorema 1.3 garantiza que G es continua, el Lema 1.17 implica que g es continua y por tanto f es un homeomorfismo, el hecho de que π es cociente nos garantiza que $i_X\times p$ es cociente. □

1.2. NOCIONES ALGEBRAICO-TOPOLÓGICAS

Veremos ahora el comportamiento de aquellos espacios que tienen una estructura topológica y una estructura algebraica que de alguna manera se enlazan. La relación entre la estructura algebraica y la topológica algunas veces produce resultados inesperados.

1.2.1. GRUPOS Y SEMIGRUPOS CON TOPOLOGÍA

Las estructuras algebraicas más comunes son presentadas en esta sección: grupos y semigrupos. Algunos de los resultados pueden ser consultados en [5].

Definición 1.12. *Sea $(S, .)$ un semigrupo, y τ una topología en S. Decimos que S es un semigrupo semitopólogico derecho (resp. izquierdo) si la aplicación $r_s\colon S \longrightarrow S$, (resp. $l_s\colon S \longrightarrow S$) dada por $r_s(x) = xs$, las cuales llamaremos traslaciones derechas, (resp. $l_s(x) = sx$, la cual llamaremos traslaciones izquierdas) es continua para $s \in S$. Si la operación de semigrupo $\cdot\colon S \times S \longrightarrow S$, es continua, decimos que S es un semigrupo topológico. Un semigrupo que es ambos, semitopológico derecho y semiotpológico izquierdo, le llamaremos semigrupo semitopológico. En caso de que S sea un grupo hablaremos de grupo semitopólogico en lugar de semigrupo semitopólogico, y de grupo paratopólogico en lugar de semigrupo topológico. Un grupo semitopológico en el cual la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua lo llamamos grupo cuasitopólogico. Un grupo paratopólogico que es cuasitopológico lo llamamos grupo topológico. Si S tiene elemento neutro le llamaremos monoide en lugar de semigrupo.*

Empezaremos a estudiar la topología de espacios que tienen un estructura algebraica continua.

Proposición 1.19. *Si G es un grupo semitopológico derecho (resp. izquierdo) entonces las traslaciones derechas (resp. izquierdas) son homeomorfismos.*

Demostración. Note que $r_s^{-1} = r_{s^{-1}}$, por tanto la inversa de cada traslación derecha es una traslación derecha, por tanto es un homemorfismo. $\square$

Proposición 1.20. *Si G es un grupo cuasitopológico y e es su neutro, existe una base local para e, la cual notaremos por N_e^*, tal que $V = V^{-1}$, para cada $V \in N_e^*$.*

Demostración. Sea U abierto, que contiene a e, como la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo tenemos que, U^{-1} es un abierto que contiene a e, además $V = U \cap U^{-1} \subseteq U$. Note que $V = V^{-1}$ es un abierto que contiene a e. $\square$

Proposición 1.21. *Sea G un grupo semitopológico izquierdo (resp. derecho), entonces $\overline{A} = \bigcap\{AU^{-1} : U \in N_e\}$. Aquí N_e es la colección de todas las vecindades abiertas de e.*

Demostración. Consideraremos sólo el caso en el que G es un grupo semitopológico izquierdo, el caso derecho es análogo. Probemos primero que $\overline{A} \subseteq AU^{-1}$ para cada vecindad abierta del neutro, U. En efecto si $x \in \overline{A}$, dado que xU es una vecindad abierta de x, entonces $xU \cap A \neq \emptyset$, luego existe $u \in U$ tal que $xu = a$ para algún $a \in A$, por tanto $x = au^{-1} \in AU^{-1}$, por tanto $\overline{A} \subseteq \bigcap\{AU^{-1} : U \in N_e\}$. Para ver que $\bigcap\{AU^{-1} : U \in N_e\} \subseteq \overline{A}$, supongamos que $x \notin \overline{A}$, luego existe $U \in N_e$, tal que $xU \cap A = \emptyset$, se puede ver que $x \notin AU^{-1}$, por tanto $x \notin \bigcap\{AU^{-1} : U \in N_e\}$. Esto completa la prueba. $\square$

El siguiente corolario, prueba que cada grupo semitopológico derecho o izquierdo es un espacio homogéneo, por ende todas las propiedades topológicas locales, (primero numerabilidad, compacidad local, conexidad local, etc.) se estudian en un solo punto.

Corolario 1.22. *Todo grupo semitopológico derecho o izquierdo es un espacio homogéneo.*

Demostración. Sea G un grupo semitopológico derecho y $a, b \in G$. La aplicación $r_{a^{-1}b}$ es un homeomorfismo que aplica a en b. Para grupos semitopológicos izquierdo la prueba es análoga. $\square$

Proposición 1.23. *Sea U un subconjunto abierto de un grupo semitopológico derecho G (resp. izquierdo). Entonces UA (resp. AU) es abierto para cualquier subconjunto A de G.*

Demostración. Sea $a \in A$, dado que $r_a(U) = Ua$ es abierto, dado que r_a es un homeomorfismo, entonces $UA = \bigcup_{a\in A} Ua$ es abierto. $\square$

La prueba de la siguiente proposición es análoga a la prueba de la Proposición 1.23.

Proposición 1.24. *Si A es un subconjunto cerrado de un grupo semitopológico derecho G (resp. izquierdo) y B es un subconjunto finito de G, entonces AB (Resp. BA) es cerrado en G.*

Proposición 1.25. *Cada subgrupo abierto de un grupo semitopológico derecho o izquierdo, es cerrado.*

Demostración. Sea H un subgrupo abierto de un grupo semitopológico G. Note que $G \setminus H = \bigcup_{x\notin H} Hx$ el cual es abierto en G, por Proposición 1.23, luego H es cerrado. $\square$

En los grupos semitopológicos derechos o izquierdos la continuidad de los homomorfismos, es garantizada por la continuidad en el elemento neutro.

Proposición 1.26. *Sea $f \colon G \longrightarrow H$, un homomorfismo entre grupos semitopológicos derechos. Entonces f es continuo si y sólo si es continuo en el elemento neutro de G.*

Demostración. Sean e_G y e_H, los elementos neutros de G y H, respectivamente. Supongamos que G es un grupo semitopológico izquierdo, el caso derecho es análogo. Supongamos que f es continua en e_G y sean $x \in G$, un elemento cualquiera y $y = f(x)$. Dada un vecindad de y, U_y, podemos elegir una vecindad de e_H, digamos V tal que $yV \subseteq U_y$. La continuidad de f, en e_G, nos permite encontrar una vecindad de e_G, U, tal que $f(U) \subseteq V$, luego $f(xU) \subseteq yf(U) \subseteq yV \subseteq U_y$, dado que xV es una vecindad de x, tenemos que f es continua para cada $x \in X$. El recíproco es obvio. $\square$

Estudiemos algunos resultados de grupos cocientes.

Dado un grupo G y un subgrupo H de G, podemos definir la siguiente relación de equivalencia en G, $x \sim y$ si $xy^{-1} \in H$. La clase de equivalencia del elemento x de G, es Hx. Si definimos la relación por, $x \sim y$ si $y^{-1}x \in H$, las clase de equivalencia de x, será xH. Al conjunto de todas las clases de equivalencia lo notaremos por $(G/H)_r$, en el primer caso, y por $(G/H)_l$ el segundo caso. Es de saberse que G/H tendrá estructura de grupo, de forma que la aplicación cociente π sea un homomorfismo si y solo H es un subgrupo normal de G, es decir que $gH = Hg$ para cada $g \in G$.

Ahora si H es un subgrupo semitopólogico derecho usaremos, el caso en el que las clases de equivalencia son xH y para el caso izquierdo Hx. Solo probaremos resultados para el caso derecho, y el caso izquierdo resultará análogo. Si G es un grupo semitopológico derecho, y H es un subgrupo de G, dotaremos a G/H de la topología cociente inducida por π.

Proposición 1.27. *Sea G un grupo semitopológico derecho y H un subgrupo de G. Entonces*

i) $\pi\colon G \longrightarrow (G/H)_l$ *es abierta.*

ii) $(G/H)_r$ *es* T_1 *si y solo si* H *es cerrado en* G.

iii) $(G/H)_r$ *es discreto si y solo si* H *es abierto en* G.

iv) $(G/H)_r$ *es un espacio homogéneo.*

Demostración. Sea G un grupo semitopológico derecho.

i) Sea U abierto en G, luego $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH$, el cual es abierto por la Proposición 1.23.

ii) Supongamos que H es cerrado en G. Note que $\pi^{-1}(\{\pi(Hx)\}) = Hx$, el cual es cerrado por la Proposición 1.24. Luego cada singulete de $(G/H)_r$, es cerrado y la Proposición 1.7, garantiza que es T_1. Recíprocamente supongamos que $(G/H)_r$ es T_1. Si e es el elemento neutro de G, como $\{\pi(e)\}$ es cerrado en $(G/R)_r$, entonces $H = \pi^{-1}(\{\pi(e)\})$ es cerrado en G.

iii) Si H es abierto, entonces la imagen inversa por π del singulete $\{Hx\}$ es Hx, que es abierto en G, luego $(G/H)_r$ es discreto. El recíproco es análogo al recíproco de *ii*).

iv) Note que la aplicación $r_{[g]}\colon (G/H)_r \longrightarrow (G/H)_r$, dada por $r_{[g]}(Hx) = Hxg$ es continua y su inversa es $r_{[g^{-1}]}$. Ahora la aplicación $r_{[x^{-1}y]}$, es un homeomorfismo que aplica a Hx en Hy, completando la prueba.

□

Veamos algunos resultados de semigrupos con topología. En [6], T. Banakh y A. Ravsky encuentran resultados alrededor de los monoides topológicos tales que las traslaciones $x \mapsto axb$, son abiertas para cada par de elementos a, b en el monoide. Obviamente cada grupo paratopológico es un monoide topológico con traslaciones abiertas, sin embargo existen monoides topológicos que no son grupos paratopológicos (ver [6]).

Una prueba similar a la de la Proposición 1.23 nos dice que si S es un semigrupo topológico izquierdo (resp. derecho) con traslaciones izquierdas (resp. derecha) abiertas, entonces si U es abierto y B es cualquier subconjunto de S, tenemos que BU, (resp UB) es abierto. De esto y de la continuidad de la operación de semigrupo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.28. *Sea S un semigrupo y A, B subconjuntos de S. Entonces:*

i) Si S es un semigrupo topológico entonces $\overline{A}\ \overline{B} \subseteq \overline{AB}$.

ii) Si S es un semigrupo semitopológico izquierdo o derecho con traslaciones izquierdas o derechas abiertas, tenemos que $(intA)(intB) \subseteq int(AB)$.

Definición 1.13. *Sea $g\colon X^n \longrightarrow X$ una operación n-aria en un conjunto X. Una g-congruencia en X es una relación de equivalencia R en X tal que si $x_i, y_i \in X$, y $(x_i, y_i) \in R$, para $i = 1, 2, ..., n$, entonces $(g(x_1, x_2, ..., x_n), g(y_1, y_2, ..., y_n)) \in R$. Cuando no haya peligro de confusión diremos congruencia en lugar de g-congruencia.*

Teorema 1.29. *Sea S un monoide semitopólogico izquierdo (resp derecho), con traslaciones izquierdas (resp. derechas) abiertas, y R una congruencia en S. Entonces la respectiva aplicación cociente $\pi\colon S \longrightarrow S/R$ es abierta.*

Demostración. Sea U abierto en S y veamos que $\pi(U)$ es abierto en S/R, para ello basta ver que $W = \pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en S. En efecto, sea $x \in W$, luego, existe $u \in U$ tal que $(x, u) \in R$. Dado que la traslación izquierda l_u es continua y $l_u(e) = u \in U$ (aquí e es elemento neutro de S), podemos hallar V abierto en S, que contiene a e, tal que $l_u(V) \subseteq U$, es decir $uV \subseteq U$. Note que xV es una vecindad de x, ya que las traslaciones izquierdas son abiertas. Veamos que $xV \subseteq W$. Sea $t \in xV$, luego $t = xv$, siendo $v \in V$, como R es una congruencia en S, entonces $(xv, uv) \in R$, es decir $\pi(t) = \pi(xv) = \pi(uv) \in \pi(uV) \subseteq \pi(U)$, por tanto $t \in W$, luego $x \in xV \subseteq W$, es decir x es un punto interior de W, como x es un elemento cualquiera de W, tenemos que W es abierto. $\square$

1.2.2. OTRAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS CON TOPOLOGÍA

Definición 1.14. *Un espacio de Maltsev es un par (X, f) siendo X un espacio topológico y $f\colon X^3 \longrightarrow X$ una operación trinaria continua tal que $f(x, x, y) = y$ y $f(y, x, x) = y$ para cada $x, y \in X$. Diremos que es un Espacio de Maltsev semitopológico derecho (resp. izquierdo)(resp. central) si $x \mapsto f(a, b, x)$ (resp. $x \mapsto f(x, a, b)$ (resp. si $x \mapsto f(a, x, b)$) es continua para cada a, b en X.*

Todo grupo semitopológico izquierdo (resp. derecho) es un espacio de Maltsev izquierdo (resp. derecho). Sin embargo hay espacios de Maltsev que no son grupos, en [36] E. Reznichenko y V. Unspensky construyen ejemplos, más adelante presentaremos ejemplos aquí también.

La siguiente proposición nos dice que una congruencia produce una operación bien definida en el conjunto cociente.

Proposición 1.30. *Sean $g\colon X^n \longrightarrow X$ una operación n-aria en X y R una g-congruencia en X. Entonces si $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ es la aplicación cociente, existe una operación n-aria, $g_R\colon (X/R)^n \longrightarrow X/R$, tal que $g_R(\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n)) = \pi(g(x_1, x_2, ..., x_n))$.*

El siguiente lema es una clase de primer Teorema de isomorfismo para estructuras algebraicas más generales que un grupo.

Lema 1.31. *Sean $f\colon X^n \longrightarrow X$ y $g\colon Y^n \longrightarrow Y$ operaciones n-arias sobre los conjuntos X e Y, respectivamente. Sea además $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva que respeta las estructuras algebraicas, es decir que satisface la igualdad*

$$\varphi(f((x_1, x_2, ..., x_n))) = g(((\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n))).$$

Entonces existe una f-congruencia sobre X, R, y una biyección $s\colon X/R \longrightarrow Y$ tal que $s(f_R(\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n))) = g((\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n))$.

Demostración. Defina R sobre X, así: $(x, y) \in R$ si $\varphi(x) = \varphi(y)$. Claramente R es una f-congruencia. Definamos $s\colon X/R \longrightarrow Y$, por $s(\pi(x)) = \varphi(x)$, claramente s es una biyección que satisface lo requerido. $\square$

Definición 1.15. *Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $f\colon X^n \longrightarrow X$, una operación n-aria en X. Decimos que f es separadamente continua si la aplicación $x \mapsto f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ es continua para cada $i = 1, 2, .., n$ y cada familia a_k para $k = 1, 2, .., i-1, i+1, ...n$.*

Proposición 1.32. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X^n \longrightarrow X$ una operación separadamente continua en X. Si R es una f-congruencia en X, entonces existe una operación separadamente continua $f_R\colon (X/R)^n \longrightarrow X/R$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi^n"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
(X/R)^n \arrow[r, "f_R"] & X/R.
\end{tikzcd}$$

Aquí $\pi^n = \pi \times \pi \times \pi \times ... \times \pi$, n veces, y $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ es la respectiva aplicación cociente. Además si π^n es cociente y f es continua, entonces f_R es continua. En particular si π es abierta y f es continua f_R es continua.

Demostración. Si definimos $f_R((\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n))) = \pi(f((x_1, x_2, ..., x_n)))$, dado que R es una f-congruencia, tenemos que f_R está bien definido y hace el diagrama conmutativo. Además del hecho de que π es cociente tenemos que f es separadamente continua. Ahora si π^n es cociente, dado que $f_R \circ \pi^n = \pi \circ f$, tenemos que f_R es continua, siempre que f lo sea. Si π es abierta, π^n también lo es y por ende cociente. □

El Teorema 1.29 y el Lema 1.32 nos dan el siguiente resultado.

Corolario 1.33. *Si S es un monoide topológico con traslaciones derechas o izquierdas continuas y R es una congruencia en S, entonces S/R es un monoide semitopológico.*

La prueba del siguiente lema aparece en [37], aunque el resultado está dado para espacios de Maltsev con operación separadamente continua, en la prueba solo se requiere que sea izquierdo o derecho.

Lema 1.34. *Sean (X, f) un Espacio de Maltsev derecho o izquierdo y R una f-congruencia, entonces la aplicación cociente $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ es abierta.*

Demostración. Supongamos que (X, f) es un espacio de Maltsev derecho. Sea U abierto en X, debemos probar que $V = \{y \in X : (x, y) \in R \text{ para algún } x \in \pi^{-1}(\pi(U))\}$ es abierto en X. En efecto sea $y \in V$ y elijamos $x \in U$ tal que $(x, y) \in R$. Dado que $f(x, y, y) = x \in U$, la continuidad a derecha de f, nos permite encontrar un abierto U_y que contiene a y, tal que $f(x, y, z) \in U$, siempre que $z \in U_y$. Veamos que $U_y \subseteq V$, en efecto sea $z \in U_y$, como $(x, y) \in R$, y R es una f-congruencia, entonces $(f((x, x, z), f(x, y, z)) \in R$, es decir $(z, f(x, y, z)) \in R$, como $f(x, y, z) \in U$, entonces $z \in V$, esto prueba V es abierto. El caso izquierdo es análogo. □

1.3. NOCIONES CATEGÓRICAS

Daremos unas definiciones muy básicas de teoría de categorías. Aunque el concepto de reflexión es muy categórico los resultados y demostraciones de este trabajo son todos topológicos y algebraicos. Presentamos sólo los conceptos más básicos en teoría de categorías sólo para entender el lenguaje. Las definiciones y resultados de esta sección están contenidos todos en [1] y [33].

Definición 1.16. *Una categoría es una cuádrupla* $\boldsymbol{A} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *que consiste de:*

1) *Una clase* $\mathcal{O}$*, cuyos elementos los llamaremos* $\boldsymbol{A}$*-objetos.*

2) *Para cada par de* $\boldsymbol{A}$*-objetos* (A, B)*, un conjunto* $hom(A, B)$*, los cuales los llamaremos morfismos de* A *en* B*. Si* $f \in hom(A, B)$*, lo expresaremos escribiendo* $f : A \longrightarrow B$*.*

3) *Para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto,* A*, un morfismo* $id_A : A \longrightarrow A$*, llamado la* $\boldsymbol{A}$*-identidad sobre* A*.*

4) *Una ley de composición que asocia a cada par de morfismos* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$*, un morfismo* $g \circ f : A \longrightarrow C$*.*

Sujeto a las siguientes condiciones:

a) *La composición es asociativa, es decir si* $f : A \longrightarrow B$*,* $g : B \longrightarrow C$ *y* $h : C \longrightarrow D$*, son morfismos, entonces* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

b) *Si* $f : A \longrightarrow B$ *es un morfismos, entonces* $f \circ id_A = f$ *y* $id_B \circ f = f$*.*

c) $hom(A, B)$*, son disyuntos dos a dos.*

Definición 1.17. *Una Categoría* $\boldsymbol{A}$*, se dice ser una subcategoría de* $\boldsymbol{B}$*, si* *i) Los* $\boldsymbol{A}$*-objetos están contenidos en los* $\boldsymbol{B}$*-objetos.*

ii) Para cada $\boldsymbol{A}$*-objeto,* id_A*, es igual a* id_A*, viendo a* A *como un* $\boldsymbol{B}$*-objeto.*

iii) Cada morfismo de $\boldsymbol{A}$ *es un morfismo en* $\boldsymbol{B}$*.*

iv) La ley de composición de $\boldsymbol{B}$*, restringida a* $\boldsymbol{A}$ *es la ley de composición en* $\boldsymbol{A}$*.*

Las categorías que más nos interesan son las subcategorías de la categoría, Top, donde $\mathcal{O}$ es la clase de todos los espacios topológicos y para cada par de objetos espacios topológicos X, e Y, $hom(X, Y)$, consiste de todas las funciones continuas de X, en Y.

Definición 1.18. *Un morfismo* $f\colon A \longrightarrow B$*, es llamado un isomorfismo si existe un morfismo* $g\colon B \longrightarrow A$*, tal que* $f \circ g = id_B$ *y* $g \circ f = id_A$*. Tal* g *es llamado una inversa de* f*. Si existe un isomorfismo* $f\colon A \longrightarrow B$*, decimos que* A *y* B *son isomórficos.*

Se puede probar con mucha facilidad que si un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$, tiene inversa, ésta es única. Debido a esto si f tiene inversa, su inversa será notada por f^{-1}. Además si f y g tienen inversa, se cumple que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ y $(f^{-1})^{-1} = f$. Por tanto la relación ser isomorfos, define una relación de equivalencia en los objetos de $\mathbf{A}$.

Definición 1.19. *Un morfismo* f *se dice un epimorfismo, si* $g \circ f = k \circ f$*, implica* $g = k$*, para cada par de morfismos* g *y* k*, de forma que las composiciones estén definidas.*

Ahora veremos aplicaciones entre categorías.

Definición 1.20. *Sean* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *categorías. Un funtor* F *es una función que asigna a cada objeto de* $\boldsymbol{A}$ *un objeto de* $\boldsymbol{B}$ *y a cada morfismo* $f\colon A \longrightarrow A'$*, en* $\boldsymbol{A}$*, un morfismo* $F(f)\colon F(A) \longrightarrow F(A')$*, que satisface las siguientes propiedades:*

i) $F(id_A) = id_{F(A)}$, *para cada objeto* A *de* $\boldsymbol{A}$.

ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, *para cada par de morfismos* f, g *en* $\boldsymbol{A}$.

Llegamos ahora al concepto de reflexión que es el concepto categórico que más nos interesa.

Definición 1.21. *Sea* $\boldsymbol{A}$ *una subcategoría de* $\boldsymbol{B}$. *Una* $\boldsymbol{A}$*-reflexión (*$\boldsymbol{A}$*-epirreflexión) para un objeto* B *de* $\boldsymbol{B}$, *es un* $\boldsymbol{B}$*-morfismo (*$\boldsymbol{B}$*-epimorfismo)* $r\colon B \longrightarrow A$, *siendo* A *un* $\boldsymbol{A}$*-objeto, tal que para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* C *y cada* $\boldsymbol{B}$*-morfismo,* $f\colon B \longrightarrow C$, *existe un único* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $g\colon A \longrightarrow C$, *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \\ C. & \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{A}$ *es llamada una subcategoría reflexiva (epirreflexiva) de* $\boldsymbol{B}$ *si cada* $\boldsymbol{B}$*-objeto tiene una* $\boldsymbol{A}$*-reflexión (*$\boldsymbol{A}$*-epirreflexión).*

Como era de esperarse las reflexiones son únicas salvo isomorfismos.

Proposición 1.35. *Las reflexiones son esencialmente únicas, es decir:*
Si $r_1\colon B \longrightarrow A_1$ *y* $r_2\colon B \longrightarrow A_2$ *son* $\boldsymbol{A}$*-reflexiones para* B, *entonces existe un isomorfismo* $k\colon A_1 \longrightarrow A_2$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"'] & A_1 \arrow[dl, "k"] \\ A_2. & \end{tikzcd}$$

Demostración. La existencia de k tal que $k \circ r_1 = r_2$, se sigue de la definición de reflexión, similarmente existe $\hat{k}\colon A_2 \longrightarrow A_1$ tal que $\hat{k} \circ r_2 = r_1$. Ahora $(k \circ \hat{k}) \circ r_2 = r_2 = id_{A_2} \circ r_2$, por tanto el requerimiento de la unicidad en la definición garantiza que $(k \circ \hat{k}) = id_{A_2}$. Análogamente $\hat{k} \circ k = id_{A_1}$, luego k es un isomorfismo. □

La siguiente proposición garantiza que las reflexiones se preservan por objetos isomorfos.

Proposición 1.36. *Si $r\colon B \longrightarrow A$ es una $\boldsymbol{A}$-reflexión para B y $f\colon A \longrightarrow C$ es un isomorfismo, entonces $f \circ r\colon B \longrightarrow C$ es una $\boldsymbol{A}$-reflexión para B.*

Y por último tenemos que las reflexiones son idempotentes.

Proposición 1.37. *Sea $\boldsymbol{B}$ una categoría y $\boldsymbol{A}$ una subcategoría de $\boldsymbol{B}$. Si B es un $\boldsymbol{A}$-objeto, entonces $i_B\colon B \longrightarrow B$ es una $\boldsymbol{A}$-reflexión de B.*

La siguiente proposición nos dice que cada reflexión define un funtor.

Proposición 1.38. *Sea $\boldsymbol{A}$ una subcategoría reflexiva de $\boldsymbol{B}$. Para cada $\boldsymbol{B}$-objeto B, sea $r_B\colon B \longrightarrow A_B$ una reflexión. Entonces existe un único funtor $R\colon \boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{A}$, que satisface:*

i) *$R(B) = A_B$ para cada $\boldsymbol{B}$-objeto B.*

ii) *Para cada $\boldsymbol{B}$-morfismo $f\colon B \longrightarrow C$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_B"'] & C \arrow[d, "r_C"] \\ A_B \arrow[r, "R(f)"] & A_C \end{tikzcd} .$$

Demostración. Por definición, existe un único $g_f\colon A_B \longrightarrow A_C$, tal que $g_f \circ r_B = r_C \circ f$. Definamos $R(f) = g_f$. Claramente $R(id_B) = id_{R(B)}$. Ahora si $g\colon C \longrightarrow D$ es otro **B**-morfismo, note que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "r_B"'] & D \arrow[d, "r_D"] \\ A_B \arrow[r, "R(g)\circ R(f)"] & A_D \end{tikzcd}$$

es conmutativo, la unicidad, garantiza que $R(g \circ f) = R(g) \circ R(f)$. □

Capítulo 2

REFLEXIONES

En este capítulo presentamos generalidades de las reflexiones, estudiaremos el comportamiento de las reflexiones sobre estructuras algebraicas. Luego damos condiciones para que una reflexión sea productiva y respete subespacios.

2.1. EXISTENCIA Y ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS REFLEXIONES.

Iniciamos definiendo uno de los conceptos básicos de este trabajo.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de espacios topológicos. $\mathcal{C}$ se llama una clase PS si es cerrada bajo productos arbitrarios, cerrada por subespacios y contiene al menos un espacio unipuntual.*

El siguiente teorema, el cual aparece en [19] (Teorema 1.2.1), nos indica que todo espacio topológico tiene una epirreflexión en cualquier clase PS. Más específicamente nos dice que una subcategoría de los espacios topológicos es epirreflexiva si y sólo si es una clase PS. Presentamos aquí una prueba muy topológica.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS, entonces $\mathcal{C}$ es una subcategoría epirreflexiva de Top.*

Demostración. Denote por $\mathbf{F}$ la clase de todas las funciones continuas sobreyectivas de un espacio topológico X sobre espacios de $\mathcal{C}$. $\mathbf{F} \neq \emptyset$, ya que $\mathcal{C}$ tiene al menos un conjunto unipuntual. Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Z$ están en $\mathbf{F}$, decimos que f y g son equivalentes, $f \sim g$, si existe un homeomorfismo $\psi\colon Y \to Z$ tal que $g = \psi \circ f$. Sea $\kappa = |X|$. Como toda imagen continua de X se puede identificar como un subconjunto de κ, la familia de clases de equivalencia $\mathbf{E} = \mathbf{F}/\sim$ es un conjunto. Elegimos un representante de cada clase de equivalencia en $\mathbf{E}$ y denote el conjunto resultante por E.

Sea $\varphi_{(\mathcal{C},X)} = \Delta\mathbf{E}\colon X \to \prod_{f\in E} f(X)$, el producto diagonal de la familia E. Entonces $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es una función continua de X en el producto $\Pi = \prod_{f\in E} f(X)$. Observe que $\Pi \in \mathcal{C}$, por lo tanto $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(X) \in \mathcal{C}$. Por la construcción podemos ver que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es sobreyectiva. Sea $\mathcal{C}(X) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X)$. Afirmamos que $(\mathcal{C}(X), \varphi_{(\mathcal{C},X)})$, satisface la propiedad universal requerida. Suponga que $h\colon X \longrightarrow Y$ es una función continua de X en el espacio $Y \in \mathcal{C}$, dado que $h(X) \in \mathcal{C}$, podemos asumir sin pérdida de generalidad, que h es sobreyectiva. Por nuestra definición de $\mathbf{E}$, existe $f \in \mathbf{F}$, digamos $f\colon X \to Z$, tal que $f \sim h$. Denote por $\psi\colon Z \to Y$ un homeomorfismo tal que $h = \psi \circ f$. Sea π_f la proyección de Π en el factor $f(X)$. Nuestra definición de f implica que $f = \pi_f \circ \varphi_{(\mathcal{C},X)}$. Por lo tanto, $h = \psi \circ (\pi_f \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X)) = (\psi \circ \pi_f) \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X)$. Esto completa la prueba de la existencia, para ver la unicidad supongamos que existen dos funciones g_1 y g_2 tales que $g_1 \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})} = g_2 \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})}$, el hecho de que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es sobreyectiva, garantiza que tiene inversa a derecha, por tanto $g_1 = g_2$. □

Proposición 2.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ subcategorías reflexivas de Top tales que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{C}(X))$ y $\mathcal{C}(\mathcal{D}(X))$ son homeomorfos a $\mathcal{D}(X)$ para cada espacio X.*

Demostración. Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua con $Y \in \mathcal{D}$, existe entonces $g\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow Y$ tal que $g \circ \varphi_{(\mathcal{C},X)} = f$. Ahora podemos hallar $k\colon \mathcal{D}(\mathcal{C}(X)) \longrightarrow$

$\mathcal{D}(X)$ tal que $k \circ \varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}(X)} = g$, así $k \circ \varphi_{(\mathcal{C},X)} \circ \varphi_{(\mathcal{D},\mathcal{C}(X))} = f$, de la unicidad tenemos que $\mathcal{D}(\mathcal{C}(X))$ es homemorfo a $\mathcal{D}(X)$. Ahora como $\mathcal{D}(X) \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{D}(X)) = \mathcal{D}(X)$. $\square$

En lo que sigue, $\mathcal{C}$ denotará una clase reflexiva de Top y $(\mathcal{C}(X), \varphi_{(\mathcal{C},X)})$ denotará la respectiva reflexión. Cuando no haya peligro de confusión escribiremos φ_X, en lugar de $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$. $\mathcal{C}_i$ denotará la clase de los espacios topologícos que satisfacen el axioma de separación T_i, para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, fh, r, u, t, 3.5\}$. De la Proposición 1.38 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sean X e Y espacios topológicos y f una función continua de X en Y. Entonces existe una única función continua $\mathcal{C}(f)\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_Y} \\ \mathcal{C}(X) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f)} & \mathcal{C}(Y). \end{array}$$

Además, si g es una función continua de Y en un espacio topológico Z, entonces $\mathcal{C}(g \circ f) = \mathcal{C}(g) \circ \mathcal{C}(f)$, es decir la aplicación $X \mapsto \mathcal{C}(X)$ y $f \mapsto \mathcal{C}(f)$ es un funtor de la categoría de los espacios topológicos en la subcategoría $\mathcal{C}$.

Hasta el momento solo hemos considerado espacios meramente topológicos, aún no hemos tenido en cuenta el caso en el que X tiene una estructura algebraica que de alguna manera se relacione con la topología de X. El siguiente teorema nos garantiza que si X tiene una estructura algebraica separadamente continua, entonces $\varphi_{(\mathcal{C},X)}(X)$ también la tiene y además φ_X respeta esa estructura, de este modo damos un resultado unificado a todas las estructuras algebraicas, saliéndonos de los grupos semitopológicos, como es tratado en el Teorema 2.3 de [46], y tomando cualquier estructura algebraica separadamente continua.

Teorema 2.4. *Sean X e Y espacios topológicos y $*\colon X \times Y \longrightarrow X$, una operación separadamente continua. Entonces existe una única operación separadamente continua $*_{\mathcal{C}}\colon \varphi_{(\mathcal{C},X)}(X) \times \varphi_{(\mathcal{C},X)}(Y) \longrightarrow \varphi_{(\mathcal{C},X)}(X)$ tal que $\varphi_X(x) *_{\mathcal{C}} \varphi_Y(y) = \varphi_X(x * y)$.*

Demostración. Para cada $c \in Y$ fijo la aplicación $x \mapsto x * c$ es continua de X en X. Por Proposición 2.3 existe una función continua tal que $\varphi_X(x) \mapsto \varphi_X(x * c)$. Análogamente la aplicación $\varphi_Y(y) \mapsto \varphi_Y(c * y)$ es continua para cada $c \in X$. Por tanto la operación $*_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ dada por $\varphi_X(x) *_{\mathcal{C}} \varphi_Y(y) = \varphi_X(x * y)$, está bien definida, en efecto supongamos que $\varphi_X(x) = \varphi_X(a)$ y que $\varphi_Y(y) = \varphi_Y(b)$, luego por lo ya probado tenemos que $\varphi_X(x * y) = \varphi_X(a * y) = \varphi_X(a * b)$, completando la prueba. $\square$

De este teorema obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces si X es un semigrupo semitopológico, un monoide, un grupo semitopológico o un grupo cuasitopológico, entonces así mismo lo es $\varphi_X(X)$ y además φ_X es un homomorfismo.*

Hemos visto que la reflexión sobre un espacio topológico está caracterizada por una propiedad universal sobre todas las funciones continuas sobre espacios en la clase reflexiva $\mathcal{C}$ en cuestión. Ahora veremos que si el espacio tiene alguna estructura algebraica separadamente continua (lo que llamaremos Operoide semitopológico), la reflexión estará plenamente caracterizada sobre los homomorfismos continuos.

Lema 2.6. *Sea $\mathcal{D}$ la clase de todos los operoides semitopológicos y $\mathcal{C}$ una subcategoría epirreflexiva de TOP. Entonces para cada $X \in \mathcal{D}$, existe un espacio $\mathcal{C}_a(X)$ en $\mathcal{C}$ dotado de una operación separadamente continua $\triangle\colon \mathcal{C}_a(X) \times \mathcal{C}_a(X) \longrightarrow \mathcal{C}_a(X)$, y un homomorfismo continuo $\psi_{(X,\mathcal{C})}\colon X \longrightarrow \mathcal{C}_a(X)$ tal que para todo homomorfismo continuo $f\colon X \longrightarrow Y$ siendo $Y \in \mathcal{C}$, existe un único homomorfismo continuo $g\colon \mathcal{C}_a(X) \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_{(\mathcal{C},X)}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{C}_a(X) \arrow[dl, "g"] \\ Y. & \end{tikzcd}$$

Demostración. La prueba es idéntica a la del Teorema 2.1, cambiaremos las funciones continuas por homomorfismos continuos. □

Teorema 2.7. *Si X es un conjunto con una operación separadamente continua, entonces $\mathcal{C}_a(X)$ es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}(X)$, para cada clase epirreflexiva $\mathcal{C}$ de Top.*

Demostración. Por Teorema 2.4 $\mathcal{C}(X)$ tiene estructura algebraica y $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es un homomorfismo continuo. Aplicando la propiedad universal dos veces, tenemos que existen g y q, continuas, tales que $g \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})} = \psi_{(X,\mathcal{C})}$ y $q \circ \psi_{(X,\mathcal{C})} = \varphi_{(X,\mathcal{C})}$. De aquí que $g \circ q$ es la aplicación idéntica y por tanto $\mathcal{C}_a(X)$ es topológicamente isomorfo a $\mathcal{C}(X)$. □

Teorema 2.8. *Sean X e Y espacios topológicos, con operaciones $*\colon X \times X \longrightarrow X$ y $\diamond\colon Y \times Y \longrightarrow Y$, separadamente continuas. Supongamos que $f\colon X \longrightarrow Y$ es una función continua que respeta tales estructuras algebraicas es decir $f(x * y) = f(x) \diamond f(y)$ para cada $x, y \in X$. Entonces $\mathcal{C}(f)$ satisface la igualdad $\mathcal{C}(f)(\varphi_X(x) *_{\mathcal{C}} \varphi_X(y)) = \mathcal{C}(f)(\varphi_X(x)) \diamond_{\mathcal{C}} \mathcal{C}(f)(\varphi_X(y))$, para todo $x, y \in X$.*

Demostración. Usaremos la Proposición 2.3 y el Teorema 2.4.

Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(f)(\varphi_X(x) *_{\mathcal{C}} \varphi_X(y)) &= \mathcal{C}(f)(\varphi_X(x * y)) \\
&= \varphi_Y(f(x * y)) \\
&= \varphi_Y(f(x) \diamond f(y)) \\
&= \varphi_Y(f(x)) \diamond_{\mathcal{C}} \varphi_Y(f(y)) \\
&= \mathcal{C}(f)(\varphi_X(x)) \diamond_{\mathcal{C}} \mathcal{C}(f)(\varphi_X(y).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

□

El Teorema 2.8 nos dice que si C es una subcategoría algebraica de la categoría de los espacios topológicos entonces el funtor dado por la reflexión sobre $\mathcal{C}$ aplica morfismos algebraicos en morfismos algebraicos.

Definición 2.2. *Una clase C de espacios topológicos se dice cerrado por supertopologías si $(X, \tau) \in C$ y para cualquier topología ρ sobre X que contiene a τ, tenemos que $(X, \rho) \in C$.*

El siguiente teorema nos dice cómo es la topología de $\mathcal{C}(X)$ en algunos casos especiales.

Teorema 2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS, entonces $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es una aplicación cociente para todo espacio topológico X, si y solo si $\mathcal{C}$ es cerrado por supertopologías.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrado por supertopologías y consideremos en $\mathcal{C}(X)$ la topología más fina que hace a φ_X continua y llamémosla ρ, por nuestra hipótesis $(\mathcal{C}(X), \rho) \in \mathcal{C}$ ya que ρ es más fina que la topología subyacente de $\mathcal{C}(X)$, como $\varphi_X : X \longrightarrow (\mathcal{C}(X), \rho)$ es continua, debe existir una función continua
$f : \mathcal{C}(X) \longrightarrow (\mathcal{C}(X), \rho)$, tal que $f \circ \varphi_X = \varphi_X$, luego f es la función idéntica, así la topología subyacente de $\mathcal{C}(X)$ contiene a ρ, es decir φ_X es una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es cociente y veamos que $\mathcal{C}$ es cerrado

por supertopologías. En efecto supongamos que $X = (X, \tau) \in \mathcal{C}$ y sea ρ una topología en X que contiene a τ, veamos que, $X^* = (X, \rho) \in \mathcal{C}$, para ello basta ver que $\mathcal{C}((X, \rho)) = (X, \rho)$. La aplicación idéntica, $i_X \colon X^* \longrightarrow X$, es continua. Por las propiedades funtoriales de la reflexión $\mathcal{C}(i_X) \colon \mathcal{C}(X^*) \longrightarrow \mathcal{C}(X) = X$, también es la idéntica. Por tanto φ_{X^*} es inyectiva y por tanto una biyección, la cual es cociente por hipótesis, la Proposición 1.4 garantiza que φ_{X^*} es un homeomorfismo, por tanto $X^* \in \mathcal{C}$. $\square$

Corolario 2.10. *Si $\mathcal{C}$ es la clase de los espacios topológicos que satisfacen el axioma de separación T_0, T_1, T_2, funcionalmente Hausdorff o Urysoh, entonces $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es una aplicación cociente para cada espacio topológico X.*

Demostración. Las clases de espacios topológicos que satisfacen cada uno de estos axiomas de separación es cerrado por supertopologías. $\square$

El siguiente teorema es una mejor versión del Lema 3.9 de [46] que solo es presentado en la categoría de grupos, y del Teorema B de [25], que solo nos dice cuando $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es una biyección continua para un espacio topológico X.

Teorema 2.11. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS que contiene a cada espacio indiscreto, entonces $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es una biyección continua para cada espacio topológico X. Si además $\mathcal{C}$ es cerrada por topologías iniciales, entonces $\mathcal{C}(X)$ es X dotado de cierta topología, y $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es la aplicación idéntica. Recíprocamente, si $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es una biyección continua para cada espacio X, entonces $\mathcal{C}$ contiene a cada espacio indiscreto y si además $\varphi_{(X,\mathcal{C})} = id$, para cada espacio X, entonces $\mathcal{C}$ es cerrada por topologías iniciales.*

Demostración. La demostración de la primera parte es análoga a la del Lema 3.9 de [46]. Para la segunda parte sea (X, τ) un espacio topológico y $B_{\mathcal{C}}$ la familia de todas las topologías ρ sobre X contenidas en τ, tal que $(X, \rho) \in \mathcal{C}$. $B_{\mathcal{C}}$ es no vacío ya que contiene al espacio indiscreto X. Sea $\tau_{\mathcal{C}} = \bigvee_{\rho \in B_{\mathcal{C}}} \rho$. El Teorema 1.2 garantiza que $(X, \tau_{\mathcal{C}}) \in \mathcal{C}$. Sea ahora $f \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación continua siendo $Y \in \mathcal{C}$. Sea ρ la topología inicial sobre X inducida por f, luego $\rho \in B_{\mathcal{C}}$, y por ende $\rho \subseteq \tau_{\mathcal{C}}$ por tanto $f \colon (X, \tau_{\mathcal{C}}) \longrightarrow Y$ es continua. Pero $f = f \circ i_X$, esto prueba que $\mathcal{C}(X) = (X, \tau_{\mathcal{C}})$ y $\varphi_{(\mathcal{C},X)} = i_X$, completando la primera parte de la prueba. Para ver el recíproco, sea X un espacio indiscreto, como $\varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es una biyección continua, tenemos que $\mathcal{C}(X)$ también es un espacio indiscreto, por tanto $X \cong \mathcal{C}(X) \in \mathcal{C}$. Finalmente supongamos que $\varphi_{(X,\mathcal{C})} = id$, para cada espacio X y sea $f \colon (X, \tau) \longrightarrow Y$ una aplicación continua, tal que $Y \in \mathcal{C}$. Veremos que $X_f = (X, \tau^f) \in \mathcal{C}$. En efecto, como $\varphi_{X_f} = id$, vemos que la topología de $\mathcal{C}(X_f)$ es más gruesa que τ^f. La propiedad universal de la proyección garantiza que $f \colon \mathcal{C}(X_f) \longrightarrow Y$, sigue siendo continua, pero τ^f es la topología más gruesa en X que hace a f continua, por tanto τ^f está contenida en la topología de $\mathcal{C}(X_f)$, por tanto $\mathcal{C}(X_f) = (X, \tau_f)$. Esto completa la prueba. $\square$

Dado que la las clases $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_{3.5}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 2.11, el siguiente corolario resulta inmediato.

Corolario 2.12. *Para cada espacio topológico X, $\varphi_{(\mathcal{C}_{3.5},X)} = \varphi_{(\mathcal{C}_3,X)} = i_X$.*

2.2. REFLEXIONES Y AXIOMAS DE SEPARACIÓN.

En esta sección construiremos algunas reflexiones asociadas a las clases PS, que satisfacen los axiomas de separación T_0, T_1, T_2, T_3, Funcionalmente Hausdorff, $T_{3.5}$, Regular y Tychonoff.

2.2.1. La reflexión sobre espacios T_0

Una caracterización algo categórica de la reflexión $\mathcal{C}_0(X)$, fue dada por P. Alexandroff en [3], sin embargo aquí presentamos una prueba más detallada y teniendo en cuenta la clausura.

Proposición 2.13. *Sea X un espacio topológico. Definamos en X, la siguiente relación $x \sim y$ si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Entonces se cumple que:*

i) *$\sim$ es una relación de equivalencia en X.*

ii) *Si $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ es la respectiva aplicación cociente, entonces $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ para cada U abierto o cerrado en X. En particular π es abierta y cerrada.*

iii) *$\mathcal{C}_0(X) = X/\sim$ y $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)} = \pi$.*

Demostración. Fácilmente obtenemos i). Probaremos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ para cada U abierto en X. Para ello basta ver que $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq U$, en efecto supongamos que $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, y para llegar a una contradicción supongamos que $x \notin U$. $\pi(x) = \pi(u)$ para algún $u \in U$, como $x \notin U$, entonces $x \notin \overline{\{u\}}$ lo que contradice el supuesto de que $\pi(x) = \pi(u)$. Ahora sea U es cerrado, si $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, luego $\pi(x) = \pi(u)$ para algún $u \in U$. Si $x \notin U$, dado que U es cerrado, $x \notin \overline{\{u\}} \subseteq U$, esto contradice el hecho de que $\pi(x) = \pi(u)$.
Veremos ahora que $X/\sim$ es un espacio T_0. En efecto supongamos que $\pi(x) \neq \pi(y)$, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, por tanto $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$. Si se da la primera condición existe un abierto U que contiene a x y no contiene a y, luego $\pi(U)$ es un abierto en $X/\sim$ que contiene a $\pi(x)$ y no contiene a $\pi(y)$. Análogamente si $y \notin \overline{\{x\}}$, entonces podemos encontrar una vecindad de $\pi(y)$ que no contiene a $\pi(x)$. Esto prueba ii).
Para ver iii) consideremos una función continua $f\colon X \longrightarrow Y$, siendo Y un espacio T_0, debemos encontrar una función continua $g\colon X/\sim \longrightarrow Y$ tal que $g \circ \pi = f$. Obviamente g debe definirse como $g(\pi(x)) = f(x)$ para cada $x \in X$. Veamos que

g está bien definida, en efecto consideremos que $\pi(x) = \pi(y)$ y supongamos que $f(x) \neq f(y)$, luego por ser Y un espacio T_0, sin pérdida de generalidad supongamos que existe una vecindad abierta de $f(x)$ que no contiene a $f(y)$, la continuidad de f, nos permite encontrar una vecindad de x que no contiene a y, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ contradiciendo el hecho de que $\pi(x) = \pi(y)$, por tanto g está bien definida. Ahora dada que π es cociente y f es continua tenemos que g es continua. $\square$

Corolario 2.14. *Cualquier inversa a la derecha de $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}$ es continua para cada espacio topológico X.*

Demostración. Sea $f\colon \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow X$ una inversa a derecha de $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}$ y sea U abierto en X. Por la prueba de la proposición anterior $f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi^{-1}(\pi(U))) = (\pi \circ f)^{-1}(\pi(U)) = \pi(U)$, el cual es abierto. $\square$

La siguiente proposición prueba que la reflexión sobre los espacios T_0 se puede obtener solamente sobre las funciones continuas en un espacio especial y que no es necesario considerar toda la clase $\mathcal{C}_0$.

Proposición 2.15. *Sea X un espacio topológico. Entonces $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(y)$ si y sólo si existe una función continua $g\colon X \longrightarrow \mathcal{S}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Si $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(y)$, por Proposición 1.6, podemos encontrar un función continua $f\colon \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathcal{S}$, tal que $f(\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(x)) \neq f(\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(y))$, si tomamos $g = f \circ \varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}$, tenemos el resultado. El recíproco es obvio del hecho de que $\mathcal{S}$ es un espacio T_0. $\square$

Por último en esta sección un lema en relación con la celularidad, útil para aplicaciones de las reflexiones.

Lema 2.16. *Para cada espacio X, se cumple que $c(X) = c(\mathcal{C}_0(X))$.*

Demostración. Como existe una función continua sobreyectiva de X en $\mathcal{C}_0(X)$, tenemos que $c(\mathcal{C}_0(X)) \leq c(X)$. Para ver el recíproco, note que si U es una familia celular de X, la Proposición 2.13 *ii*), garantiza que $\{\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(V) : V \in U\}$ es una familia celular de $\mathcal{C}_0(X)$, por tanto $| U |\leq c(\mathcal{C}_0(X))$, así $c(X) \leq c(\mathcal{C}_0(X))$, completando la prueba. □

2.2.2. La reflexión sobre espacios T_1

Lema 2.17. *Sean X un conjunto e Y un espacio T_1. Entonces toda función inyectiva de Y en X_{cof} es continua.*

Demostración. Sea f una función inyectiva de Y en X_{cof}. Sea $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto cerrado en X_{cof}, entonces por la inyectividad de f tenemos que $f^{-1}(B)$ es un subconjunto finito de Y y como Y es T_1 tenemos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en Y, luego f es continua. □

Al igual que para $\mathcal{C}_0$, veremos que para construir $\mathcal{C}_1(X)$ no es necesario considerar todas las funciones continuas de X en los espacios de $\mathcal{C}_1$, sino uno en especial, que a diferencia de la clase $\mathcal{C}_0$ si depende de X.

Teorema 2.18. *Sea X un espacio topológico, entonces $\varphi_{(\mathcal{C}_1,X)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_1,X)}(y)$ si y solo si existe una función continua $f\colon X \longrightarrow X_{cof}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Si $\varphi_{(\mathcal{C}_1,X)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_1,X)}(y)$, entonces existe una función continua sobreyectiva $g\colon X \longrightarrow Y$, con $Y \in \mathcal{C}_1$, tal que $g(x) \neq g(y)$. Por ser g sobreyectiva existe una inversa por la derecha $k\colon Y \longrightarrow X_{cof}$, la cual por ser inyectiva es continua por el Lema 2.17. Sea $f = k \circ g$, la cual es continua, la inyectividad de k garantiza que $f(x) \neq f(y)$. El recíproco es fácil teniendo en cuenta que X_{cof} es un espacio T_1. □

De este teorema obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.19. *Sea* $E = \{f : f\colon X \longrightarrow X_{cof}$ *es continua*$\}$. *Entonces* $\mathcal{C}_1(X) = (\Delta_{f\in E} f)(X)$ *y* $\varphi_{(\mathcal{C}_1,X)} = \Delta_{f\in E} f$.

El siguiente lema nos da otra forma de realizar la reflexión T_1 de un espacio topológico.

Lema 2.20. *([11]) Sea* X *un espacio topológico y* R *la menor relación de equivalencia en* X *que hace que* X/R *sea* T_1*, entonces* $X/R = \mathcal{C}_1(X)$.

El siguiente teorema generaliza el Teorema 3.4 de [45], el cual está dado para grupos semitopólogicos y aquí lo presentamos en grupos semitopólogicos derechos o izquierdos. El Corolario 2.5 no puede ser aplicado aquí ya que en él se están considerando estructuras algebraicas separadamente continuas bilaterales.

Teorema 2.21. *Sea* G *un grupo semitopólogico derecho (resp. izquierdo), entonces* $\mathcal{C}_1(G) = G/H$*, siendo* H *el subgrupo cerrado más pequeño de* G.

Demostración. Sea G un grupo semitopológico izquierdo, notemos con φ la respectiva aplicación canónica de la reflexión. Para cada $y \in G$, la aplicación continua de G en G definida por $x \mapsto yx$, induce una aplicación continua $s_y\colon \mathcal{C}_1(G) \longrightarrow \mathcal{C}_1(G)$, tal que $s_y(\varphi(x)) = \varphi(yx)$. Veremos ahora que $\varphi(e)$ es un subgrupo de G. Claramente $\varphi(e)$ es no vacío. Sea ahora $x, y \in \varphi(e)$. Luego $\varphi(x) = \varphi(y)$, aplicando $s_{y^{-1}}$ a ambos lados vemos que $\varphi(y^{-1}x) = \varphi(e)$, es decir $y^{-1}x \in \varphi(e)$, luego $\varphi(e) \leq G$. Implícitamente hemos probado que $\varphi(x) = \varphi(y)$ si y sólo si $y^{-1}x \in \varphi(e)$, por tanto $\mathcal{C}_1(G) = (G/\varphi(e))_l$. Sea H el subgrupo cerrado más pequeño de G, la Proposición 1.27 nos garantiza que $(G/H)_l$ es T_1, por tanto existe una función continua $k\colon \mathcal{C}_1(X) \longrightarrow (G/H)_l$ tal que $k(\varphi(x)) = xH$, la cual está bien definida si $\varphi(e) \subseteq H$. Como $\varphi(e)$ es un subgrupo cerrado de G, entonces $H \subseteq \varphi(e)$, completando la prueba. $\square$

A continuación presentamos un ejemplo que separa la clase de los grupos semitopológicos derechos y la clase de los grupos semitopológicos, además damos en él un un subgrupo cerrado no trivial.

Ejemplo 2.1. *Sea X un conjunto no vacío infinito dotado de la topología τ^p definida en el ejemplo 2.6. Sea G el grupo de todas las funciones bieyectivas de de X dotado de la topología de la convergencia puntual y de la operación composición de funciones. El Teorema 1.2.3 de [5] garantiza que este es un grupo en el que las traslaciones izquierdas no son continuas. Sea H el subgrupo de G definido por $H = \{f \in G : f(p) = p\}$. Claramente $H \neq G$, veamos que H es cerrado, en efecto sea $g \in \overline{H}$ y supongamos que $g(x) = p$, como $\boldsymbol{O}(x, \{p\})$ es una vecindad de g, entonces intersecta a H, así que existe $f \in H$ tal que $f(x) = p$, pero como $f \in H$ es una biyección, tenemos que $f(p) = p$ y por tanto $x = p$, así $g \in H$.*

2.2.3. La reflexión sobre espacios T_2

Ya hemos visto que la reflexión sobre los espacios T_0 está concentrada sobre el espacio de Sierpinsky y la reflexión sobre los espacios T_1 está concentrada sobre los espacios cofinitos, sin embargo no se ha encontrado una forma simple de estudiar la reflexión sobre los espacios T_2. Presentamos algunas consideraciones particulares.

Como hemos visto cualquier grupo cociente de un grupo paratopológico es un grupo paratopológico, es decir una operación de grupo conjuntamente continua, se refleja de forma conjuntamente continua en un grupo cociente, no ocurre lo mismo con los semigrupos.

Iniciamos con un concepto técnico, el concepto de ultracerrado.

Definición 2.3. *Sea X un espacio topológico y A cerrado en X. A se dice ultracerrado en X, si dado $x \notin A$, $x \in X$, existen abiertos disyuntos U y V que* *contienen a x y a A, respectivamente.*

Lema 2.22. *Sea X un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Si X/R es Hausdorff, entonces R es cerrada en $X \times X$ y cada clase de equivalencia de X es ultracerrada. Recíprocamente, si la aplicación cociente $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ es abierta y R es cerrada, entonces X/R es Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que X/R es T_2 y veamos que R es cerrada en $X \times X$. Para llegar a una contradicción supongamos que existe $(x, y) \in \overline{R}$ tal que $(x, y) \notin R$. De aquí que $\pi(x) \neq \pi(y)$ siendo $\pi\colon X \longrightarrow X/R$, la respectiva aplicación cociente. Dado que X/R es T_2 podemos hallar vecindades disyuntas $V_{\pi(x)}$ y $V_{\pi(y)}$ de $\pi(x)$ e $\pi(y)$, respectivamente. Por la continuidad de π podemos hallar vecindades V_x y V_y de x e y, respectivamente tales que $\pi(V_x) \subseteq V_{\pi(x)}$ y $\pi(V_y) \subseteq V_{\pi(y)}$. Afirmamos que $(V_x \times V_y) \cap R = \emptyset$. Supongamos que existe $(x, y) \in (V_x \times V_y) \cap R$, luego existe $(z, t) \in (V_x \times V_y) \cap R$, así $\pi(z) = \pi(t) \in V_{\pi(x)} \cap V_{\pi(y)}$, las cuales son disyuntas, por tanto $V_x \times V_y \cap R = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $(x, y) \in \overline{R}$. Veamos que cada clase de equivalencia de X es ultracerrada. Sea $y \notin \pi(x)$, como X/R es Hausdorff, existen vecindades disyuntas $V_{\pi(x)}$ y $V_{\pi(y)}$ de $\pi(x)$ e $\pi(y)$, respectivamente. La continuidad de π nos permiten encontrar vecindades disyuntas V_x y V_y de x e y, respectivamente tales que $\pi(V_x) \subseteq V_{\pi(x)}$ y $\pi(V_y) \subseteq V_{\pi(y)}$. Afirmamos que $V_y \cap \pi^{-1}(V_{\pi(x)}) = \emptyset$. En efecto si $t \in V_y \cap \pi^{-1}(V_{\pi(x)})$, entonces $\pi(t) \in \pi(V_y) \cap V_{\pi(x)} \subseteq V_{\pi(y)} \cap V_{\pi(x)} = \emptyset$. Note que $\pi(x) \subseteq \pi^{-1}(V_{\pi(x)})$, esto prueba que $\pi(x)$ es ultracerrado en X para cada $x \in X$.

Recíprocamente supongamos que R es cerrado en $X \times X$ y veamos que X/R es T_2. Sean $\pi(x) \neq \pi(y)$ elementos de X/R. Luego $(x, y) \notin \overline{R}$ así, podemos encontrar vecindades de x e y, V_x y V_y, respectivamente, tales que $(V_x \times V_y) \cap R = \emptyset$. Por la hipótesis, $\pi(V_x)$ y $\pi(V_y)$ son vecindades de $\pi(x)$ y $\pi(y)$, respectivamente, además se puede probar que $\pi(V_x) \cap \pi(V_y) = \emptyset$, esto prueba que X/R es T_2. □

Corolario 2.23. *Sea G un grupo semitopológico derecho o izquierdo, entonces si G/H es Hausdorff, entonces H es ultracerrado.*

Demostración. Supongamos que G/H es Hausdorff, si $\pi : G \longrightarrow H$ es la respectiva aplicación cociente, entonces por Lema 2.22 tenemos que $\pi(e) = H$ es ultracerrado. □

Proposición 2.24. *Sea G un grupo cuasitopológico y H un subgrupo de G, entonces si H es ultracerrado $H = \bigcap\{H\overline{U} : U \in N_e^*\}$.*

Demostración. Ya tenemos que $H \subseteq \bigcap\{H\overline{U} : U \in N_e^*\}$, veamos la contenencia inversa. Para ello supongamos que $x \notin H$, dado que H es ultracerrado podemos encontrar $U \in N_e^*$, tal que $xU \cap V_H = \emptyset$, siendo V_H un abierto que contiene H, luego $\overline{xU} \cap V_H = x(\overline{U}) \cap V_H = \emptyset$, por tanto $x(\overline{U}) \cap H = \emptyset$. Afirmamos que $x \notin H\overline{U}$, en efecto, de no ser así $xu^{-1} = h$ para cierto $u \in \overline{U}$ y $h \in H$. Pero dado que U es simétrica y la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo, tenemos que $\overline{U^{-1}} = (\overline{U})^{-1}$, por tanto $x(\overline{U}) \cap H \neq \emptyset$, contradiciendo lo supuesto, de donde $x \notin \bigcap\{H\overline{U} : U \in N_e^*\}$, esto completa la prueba. □

La Proposición 2.24 nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.25. *Sea G un grupo cuasitopológico, entonces $\mathcal{C}_2(G) = G/H$, siendo H el subgrupo ultracerrado más pequeño de G.*

Demostración. Como $\mathcal{C}_2(G)$ es un grupo cuasitpológico cociente, tiene la forma G/K, que por Corolario 2.23, K es ultracerrado y por [41] $K = \bigcap\{\overline{U} : U \in N_e\}$. Veamos que es el subgrupo ultracerrado más pequeño de G, en efecto sea H un subgrupo ultracerrado de G, por Proposición 2.24, $H = \bigcap\{H\overline{U} : U \in N_e^*\}$, claramente H contiene a K, esto completa la prueba. □

La hipótesis de que la aplicación cociente sea abierta es necesaria en el Lema 2.22, el siguiente ejemplo lo confirma.

Ejemplo 2.2. *([13]) Sea S un espacio Hausdorff que no sea Tychonoff y definamos en S la operación $(x, y) \mapsto x$. S es un semigrupo. Como S no es Tychonoff, tampoco es normal, por tanto podemos encontrar dos subconjuntos cerrados A y B de S, disyuntos tales que cada subconjunto abierto que contiene a A intersecta a cada subconjunto abierto que contiene a B. Sea $R = \triangle S \cup (A \times A) \cup (B \times B)$. Se puede probar que R es una congruencia cerrada en S, pero que S/R no es Hausdorff.*

En [46] M. Tkachenko (Teorema 3.4) da una caracterización interna de $\mathcal{C}_1(G)$, siendo G un grupo semitopológico, se prueba que $\mathcal{C}_1(G) = G/K$, siendo K el subgrupo cerrado más pequeño de G. Ahora daremos una caracterización análoga para $\mathcal{C}_2(X)$, siendo X un espacio de Maltsev, izquierdo o derecho.

Teorema 2.26. *Sea (X, f) un espacio de Maltsev izquierdo o derecho, entonces $\mathcal{C}_2(X) = X/R$, siendo R la f-congruencia cerrada más pequeña de X.*

Demostración. Consideremos la aplicación cociente $\pi \colon X \longrightarrow X/R$, siendo R la congruencia cerrada más pequeña. Dado que $\varphi_{(\mathcal{C}_2, X)}$ es cociente, entonces $\mathcal{C}_2(X) = X/K$, siendo K una f-congruencia en X, la cual es cerrada por Lema 2.22. Ahora, dado que por Lema 2.22, X/R es T_2, existe una función continua $s \colon \mathcal{C}_2(X) \longrightarrow X/R$ tal que $s \circ \varphi_{(\mathcal{C}_2, X)} = \pi$. Dado que $R \subseteq K$, podemos hallar una función continua $k \colon X/R \longrightarrow X/K$, tal que $k \circ \pi = \varphi_{(\mathcal{C}_2, X)}$, por tanto s es inversa de k y así $\mathcal{C}_2(X) = X/R$, como se quería demostrar. □

La prueba del siguiente teorema es análoga a la del Teorema 2.26 si utilizamos el Teorema 1.29.

Teorema 2.27. *Sea S un monoide semitopológico izquierdo (resp. derecho) con traslaciones izquierdas (resp. derechas) abiertas, entonces $\mathcal{C}_2(S) = S/R$, siendo R la congruencia cerrada más pequeña de S.*

El Lema 1.32 y el Teorema 1.29 me dicen que si S es un monoide topológico con traslaciones derechas o izquierdas continuas y R es congruencia en S, entonces S/R es un monoide topológico, es decir la operación es conjuntamente continua. Un problema muy antiguo es encontrar condiciones bajo las cuales, dado un semigrupo topológico S y R una congruencia cerrada en S, S/R sigue siendo un semigrupo topológico. Este problema fue abordado por G. González y B. Khosravi en [13] y [26], respectivamente, donde se dan soluciones parciales en términos de la σ-compacidad y compacidad local, aquí se da una solución parcial asumiendo que las traslaciones derechas o izquierdas son continuas.

El siguiente resultado es obvio, así que no presentaremos la demostración.

Proposición 2.28. *Sea R una relación de equivalencia cerrada en un espacio topológico X, entonces si $\Delta(X)$ es la diagonal de X, entonces $\overline{\Delta(X)} \subseteq R$. En particular si $\overline{\Delta(X)}$ es una relación de equivalencia en X, entonces $\overline{\Delta(X)}$ es la relación de equivalencia cerrada más pequeña de X.*

Proposición 2.29. *Si X es un espacio topológico T_3 entonces $\overline{\Delta(X)}$ es un relación de equivalencia en X cerrada en $X \times X$.*

Demostración. Para probar que es una relación de equivalencia solo probaremos que es transitiva, ya que las otras propiedades son obvias. Inicialmente afirmamos que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ si y solo si $(x, y) \in \overline{\Delta X}$. En efecto, supongamos que $(x, y) \in \overline{\Delta X}$ pero que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, así sin pérdida de generalidad podemos afirmar que existe una vecindad de x, V_x que no contiene a y. Dada que X es T_3 podemos asumir que $y \notin \overline{V_x}$, luego existe una vecindad de y, V_y tal que $V_y \cap V_x = \emptyset$, por tanto $(V_x \times V_y)) \cap \Delta(X) = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $(x, y) \in \overline{\Delta(X)}$. Recíprocamente si $(x, y) \notin \overline{\Delta X}$, existen vecindades V_x, V_y, de x e y, respectivamente tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$, luego $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. De esto se tiene que $\overline{\Delta X}$ es una relación de equivalencia. □

Teorema 2.30. *Sea X un espacio topológico que satisface el axioma de separación T_3, entonces $\mathcal{C}_r(X) = X/\overline{\Delta(X)}$.*

Demostración. Por Proposición 2.29, $R = \overline{\Delta(X)}$ es una relación de equivalencia en X, sea entonces $\pi\colon X \longrightarrow X/R$ la respectiva aplicación cociente. Sea U abierto en X, probaremos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$, solo basta probar que $\pi^{-1}(\pi(U)) \subseteq U$. Para llegar a una contradicción supongamos lo contrario, es decir que existe $x \in X$ tal que $\pi(x) = \pi(u)$ para cierto $u \in U$, pero que $x \notin U$. De aquí se sigue que $(x, u) \in \overline{\Delta(X)}$. Como $u \notin U^c$, el hecho de X satisface el axioma T_3 de separación, nos permite encontrar abiertos disyuntos V_{U^c}, y V_u, que contienen a U^c y u, respectivamente. Note que V_{U^c} es un abierto que contiene a x, luego $V_{U^c} \times V_u$ es una vecindad de (x, u) que no corta a $\Delta(x)$, contradiciendo el hecho de que $(x, u) \in \overline{\Delta(X)}$, por tanto $\pi^{-1}\pi(U) = U$. Esto garantiza que π es abierta y por tanto por el Lema 2.22 y el Lema 2.29, tenemos que $X/\overline{\Delta(X)}$ es T_2.
Ahora veamos que $\mathcal{C}_2(X) = X/\overline{\Delta(X)}$. En efecto sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua siendo Y un espacio T_2. Definamos $g\colon X/\overline{\Delta(X)} \longrightarrow Y$ por la fórmula, $g(\pi(x)) = f(x)$. g está bien definida, supongamos que $\pi(x) = \pi(y)$, o equivalentemente que $(x, y) \in \overline{\Delta(X)}$ pero que $f(x) \neq f(y)$. La continuidad de f y el hecho de que Y es T_2, nos permite encontrar vecindades disyuntas V_x y V_y de x e y, respectivamente. Luego $(V_x \times V_y) \cap \Delta(X) = \emptyset$, esto contradice el hecho de que $(x, y) \in \overline{\Delta(X)}$, esto prueba que g es bien definida. Por ser π una aplicación cociente y $g \circ \pi = f$ continua garantiza que g es continua, probando así que $\mathcal{C}_r(X) = \mathcal{C}_2(\mathcal{C}_3(X)) = \mathcal{C}_2(X) = X/\overline{\Delta(X)}$. □

Ejemplo 2.3. *Apliquemos el Teorema 2.30 a grupos semitopológicos izquierdos o derechos. Sea G un grupo semitopolópogico izquierdo que satisface el axioma T_3 de separación, luego por Teorema 2.30 tenemos que $\mathcal{C}_r(G) = G/\overline{\triangle G}$. Si π es la aplicación cociente y e es el elemento neutro de G, entonces $G/\overline{\triangle G}$ no es más que el grupo cociente $G/\pi(e)$. Es fácil probar que $\pi(e) = \overline{\{e\}}$, lo cual generaliza el Lema 3.6 de [46] que dice que $Reg(G) = G/N$, siendo N la clausura del elemento* *neutro de G.*

2.2.4. La reflexión sobre espacios T_{fh}

Sea X un espacio topológico y definamos en X la siguiente relación, $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$ para cada función continua $f\colon X \longrightarrow I$.

Proposición 2.31. *Dado un espacio topológico X, se tiene que:*

i) $\sim$ es una relación de equivalencia y $X/\sim$ es funcionalmente Hausdorff.

ii) Si π es la aplicación cociente de X en $X/\sim$ entonces $\mathcal{C}_{fh}(X) = X/\sim$ y $\varphi_{(\mathcal{C}_{fh},X)} = \pi$.

Demostración.

i) Fácilmente $\sim$ es de equivalencia. Para ver que $X/\sim$ es funcionalmente Hausdorff, tome $\pi(x) \neq \pi(y)$, en $X/\sim$. Luego existe $f\colon X \longrightarrow I$ tal que $f(x) \neq f(y)$, defina $g\colon X/\sim \longrightarrow I$ por $g(\pi(t)) = f(t)$, para cada $t \in X$. Por la definición de $\sim$ tenemos que g está bien definida, y además $g(\pi(x)) \neq g(\pi(y))$, esto prueba que $X/\sim$ es funcionalmente Hausdorff.

ii) Si $f\colon X \longrightarrow Y$ siendo $Y \in \mathcal{C}_{fh}$ es una función continua, defina g como en i), g satisface $g \circ \pi = f$, esto completa la prueba.

□

2.2.5. La reflexión sobre espacios T_3

Exhibiremos dos formas de obtener la reflexión de un espacio topológico sobre espacios que satisfacen el axioma de separación T_3. La primera que es indicada por el Teorema 2.11 y la otra es presentada por J. Thomas en [43]. Antes damos la definición de semirregularización de un espacio.

Definición 2.4. *Dado un espacio topológico (X,τ). Los conjuntos de la forma int($\overline{U}$), siendo U un subconjunto de X, constituyen una base para una topología en X, la cual llamaremos semirregularización de X y la notaremos por X_{sr}. A los abierto de X_{sr} los llamaremos abiertos regulares de X. X se dice casiregular, cuando X_{sr} es T_3.*

Teorema 2.32. *Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces $\tau_3 = \bigvee\{\rho : \rho \subset \tau$ y (X,ρ) es $T_3\}$ es una topología T_3 sobre X, además $\mathcal{C}_3(X) = (X,\tau_3)$.*

Demostración. Usar los Teoremas 2.11 y 1.2. □

Definición 2.5. *Sean X un espacio topológico y B cerrado en X. Decimos que B satisface la condición de regularidad en X, si dado $x \in X - B$ existen abiertos disyuntos en X U_x y U_B que contienen a x y B, respectivamente.*
Definimos la ultraclausura de $A \subseteq X$, notada por $Ucl_{(X,\tau)}(A)$ como la intersección de todos los cerrados en X que satisfacen la condición de regularidad y contienen a A.

La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 2.33. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $B \subseteq X$. Entonces $x \in ulc_{(X,\tau)}(B)$ si y sólo si para toda vecindad de x, V_x, y toda vecindad de B, V_B se tiene que $V_x \cap V_B \neq \emptyset$.*

Consideremos ahora el operador $ulc : 2^X \longrightarrow 2^X$. Este operador es un operador de Kuratosky, por tanto genera una topología sobre X, más gruesa que τ, la cual notaremos por τ_1. Se puede probar muy fácilmente que X es T_3 si y solo si $\tau_1 = \tau$. Definiremos τ_β, para cualquier ordinal β, inductivamente así, $\tau_\beta = (\bigcap_{\alpha<\beta} \tau_\alpha)_1$. En [43] J. Thomas probó que existe un ordinal β, tal que $\tau_\beta = \tau_{\beta+1}$, por tanto debe ser (X, τ_β) un espacio T_3. Además (X, τ_β) es la reflexión sobre los espacios T_3 de X. Si (X, τ) es un espacio topológico, cuando no haya peligro de confusión, escribiremos X_β en lugar de (X, τ_β) para cada ordinal β.

Proposición 2.34. *Sean X e Y espacios topológicos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua . Entonces $f\colon X_\beta \longrightarrow Y_\beta$ sigue siendo continua para cada ordinal β, en particular si Y es un espacio T_3, $f\colon \mathcal{C}_3(X) \longrightarrow Y$, es continua y además $f\colon X_{sr} \longrightarrow Y$ es continua.*

Demostración. Para ver esto basta probar $f(ucl_{(X,\tau)}(A)) \subseteq ucl_{(Y,\rho)}(f(A))$ para cada $A \subseteq X$. En efecto supongamos que $x \in f(Ucl_{(X,\tau)}(A)$ y que $x \notin ucl_{(Y,\tau)}f(A)$. Sea $x = f(t)$ con $t \in Ucl_{(X,\tau)}(A)$. Existe B cerrado en Y, que satisface la condición de regularidad tal que $x \notin B$ y $f(A) \subseteq B$. Por la continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X, que además satisface la condición de regularidad, en efecto si $c \in X - f^{-1}(B)$, luego $f(c) \notin B$, luego existen vecindades disyuntas V_B y $V_{f(c)}$, existe V_c abierto en X, con $c \in V_c$ tal que $f(V_c) \subseteq V_{f(c)}$, luego $f(V_c) \cap V_B = \emptyset$, por tanto $V_c \cap f^{-1}(V_B) = \emptyset$, note que $f^{-1}(V_B)$ es una vecindad de $f^{-1}(B)$. Esto prueba que $f^{-1}(B)$ satsiface la condición de regularidad, además $t \notin f^{-1}(B)$ y $A \subseteq f^{-1}(B)$, esto contradice el hecho de que $x \in ucl_{(X,\tau)}(A)$. $\square$

Establezcamos relaciones entre X_{sr} y X_1.

Proposición 2.35. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces $\tau_1 \subseteq \tau_{sr}$, siendo τ_{sr} la semirregularizacón de τ.*

Demostración. Sea U abierto en (X, τ_1) y $x \in U$. Luego $x \notin U^c$, el cual es cerrado en (X, τ_1), luego existen abiertos disyuntos en (X, τ), V_x y W, que contienen a x y U^c, respectivamente. Así $x \in V_x \subseteq W^c$. Por tanto

$$x \in V \subseteq cl_{(X,\tau)}(W^c) = W^c \subseteq U.$$

Esto prueba que $x \in int_{(X,\tau)}(cl_{(X,\tau)}(V) \subseteq U$, luego U es abierto en (X, τ_{sr}). $\square$

Lema 2.36. *X es casi regular si y solo si $X_{sr} = X_1 = \mathcal{C}_3(X)$.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es casi regular y veamos que $\tau_1 = \tau_{sr}$, para ello basta probar que $\tau_{sr} \subseteq \tau_1$. Sea U un abierto regular en (X, τ), luego U^c es cerrado regular en (X, τ), por ser (X, τ) casi regular, tenemos que existen U^c satisface la condición de regularizador en (X, τ), luego es cerrado en (X, τ_1). Para ver el recíproco note que un espacio es casi regular si y sólo si cada cerrado regular satisface la condición de regularidad. □

El siguiente resultado está dado en [35] para grupos paratopológicos. Ahora lo damos para monoides topológicos con traslaciones abiertas.

Teorema 2.37. *Sea S un semigrupo topológico con traslaciones izquierdas o derechas abiertas. Entonces S_{sr} también es un semigrupo topológico, además si S es un monoide, entonces S_{sr} es T_3.*

Demostración. Supongamos que S es un semigrupo topológico, sin pérdida de generalidad supongamos que las traslaciones derechas son abiertas. Sea V_{xy} una vecindad abierta regular básica de xy, siendo $x, y \in S$. La continuidad de la operación garantiza que existen vecindades abiertas V_x y V_y, de x e y, respectivamente tales que $V_x V_y \subseteq V_{xy}$. La proposición 1.28 garantiza que $int\overline{V_x} int\overline{V_y} \subseteq int\overline{V_{xy}} = V_{xy}$, esto prueba que S_{sr} es un semigrupo topológico. Supongamos que S es un monoide y sea U_x un abierto regular que contiene a x, siendo x un elemento cualquiera en S. Si e es el neutro de S, del hecho de que $x = ex$, existen vecindades abiertas V_x y V_e de x y e, respectivamente tales que $V_x V_e \subseteq V_x$. Del hecho de que las traslaciones izquierdas son abiertas, tenemos lo siguiente

$$\overline{V_x} \subseteq \overline{V_x} V_e = int(\overline{V_x} V_e) \subseteq int(\overline{V_x V_e}) \subseteq int\overline{U_x} = U_x.$$

Esto prueba que S_{sr} es T_3. □

La Proposición 2.35, el Lema 2.36 y el Teorema 2.37, nos llevan al siguiente teorema, que generaliza el dado por Ravsky para grupos paratopológicos.

Teorema 2.38. *Si S es un monoide topológico con traslaciones derechas o izquierdas abiertas, entonces $\mathcal{C}_3(S) = S_{sr}$.*

Es posible construir monoides topológicos (simitopológicos derechos o izquierdos) con traslaciones abiertas, a partir de monoides topológicos (resp. semitopológicos derechos o izquierdos), como lo haremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *Sea S un monoide semitopológico ya sea derecho o izquierdo no necesariamente con traslaciones abiertas. Sea ξ_e el filtro de todas las vecindades del neutro e. Para cada $a \in S$, sea $\xi_a = \{Va : V \in \xi_e\}$. Construyamos en S, la siguiente topología, τ: $U \in \tau$ si para cada $a \in U$, existe $F \subseteq \xi_a$, tal que $F \subseteq U$. Vemos que (S, τ) es un monoide semitopológico derecho y además tiene traslaciones derechas abiertas. Si S fuese un monoide topológico, así mismo será (S, τ). Esta construcción anterior es posible aunque S sea un monoide sin topología, basta tomar ξ_e como una familia de subconjuntos no vacíos de S, que satisfaga la siguientes propiedades:*

- $S \in \xi_e$.
- *Si* $B_1, B_2 \in \xi_e$, *existe* $B_3 \in \xi_e$, *tal que* $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- $e \in \bigcap \xi_e$.

De igual manera τ seguirá siendo una topología de monoide semitopológico derecho para S con traslaciones derechas abiertas.

Al igual que la reflexión sobre espacios T_0 (Lema 2.16), la semirregularización no cambia la celularidad.

Lema 2.39. *$c(X) = c(X_{sr})$ para todo espacio X.*

Demostración. Fácilmente se obtiene que $c(X_{sr}) \leq c(X)$. Para ver el recíproco, sea U una familia celular de X, veamos que $R = \{int\overline{V} : V \in U\}$ es una familia celular de X_{sr}. En efecto sean V y W, elementos distintos de U, luego $V \cap W = \emptyset$, así $\overline{V} \cap W = \emptyset$, por tanto $int\overline{V} \cap W = \emptyset$, por tanto $int\overline{V} \cap \overline{W} = \emptyset$ y finalmente $int\overline{V} \cap int\overline{W} = \emptyset$. Ahora como $V \subseteq int\overline{V}$ para cada $V \in U$, tenemos que los elementos de R, son no vacíos y por ende una familia celular en X_{sr}, luego se cumple que $\mid U \mid = \mid R \mid \leq c(X_{sr})$. Como U es una familia celular cualquiera que X, tenemos que $c(X) \leq c(X_{sr})$, completando la prueba. □

2.2.6. La reflexión sobre espacios T_r

Construiremos $\mathcal{C}_r(X)$ a partir de reflexiones ya conocidas.

Teorema 2.40. *Dado un espacio topológico tenemos que $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_3(X)) = \mathcal{C}_r(X)$. En particular si X es casiregular, tenemos que $\mathcal{C}_r(X) = \mathcal{C}_0(X_{sr})$.*

Demostración. Dado que $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}$ es abierta y cerrada, entonces la Proposición 1.10, nos dice que $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_3(X))$ es T_3 y dado que es T_0, entonces por Proposición 1.11, es T_1 y por ende regular. Sea ahora Y un espacio regular y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua. Dado que por el Teorema 2.11 $\varphi_{(X,\mathcal{C}_3)}$ es la aplicación idéntica sobre X, entonces $f\colon \mathcal{C}_3(X) \longrightarrow Y$ es continua, como Y es un espacio T_0, existe $g\colon \mathcal{C}_0(\mathcal{C}_3(X)) \longrightarrow Y$, tal que $g \circ \varphi_{(\mathcal{C}_0,X)} = f$, esto prueba que $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_3(X)) = \mathcal{C}_r(X)$. □

El siguiente ejemplo muestra que $\mathcal{C}_0$, no conmuta con $\mathcal{C}_3$.

Ejemplo 2.5. *Consideremos el espacio (X, τ_p) tratado en el ejemplo 2.6, claramente este espacio es T_0 y $\mathcal{C}_3(X)$ es X dotado de la topología indiscreta, luego $\mathcal{C}_3(\mathcal{C}_0(X))$ es un espacio indiscreto, que no es regular.*

Corolario 2.41. *Para cualquier clase PS, $\mathcal{C}$ contendida en $\mathcal{C}_0$, y que contenga a $\mathcal{C}_r$ se cumple que $\mathcal{C}(\mathcal{C}_3(X)) = \mathcal{C}_r(X)$.*

Demostración. De la Proposición 2.2 y el Teorema 2.40 tenemos que $\mathcal{C}(\mathcal{C}_3(X)) = \mathcal{C}(\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_3(X))) = \mathcal{C}(\mathcal{C}_r(X)) = \mathcal{C}_r(X)$. □

La Proposición 2.2 de [44] es un caso particular del siguiente Teorema.

Teorema 2.42. *Para cada espacio casiregular X se cumple que $c(\mathcal{C}_i(X)) = c(X)$ para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, u, r\}$, en particular si X es un grupo paratopológico, o un monoide topológico con traslaciones derechas o izquierdas continuas.*

Demostración. Es claro que $c(\mathcal{C}_i(X)) \leq c(X)$ para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, r, u\}$. Además $c(\mathcal{C}_r(X)) \leq c(\mathcal{C}_i(X))$, para cada $i \in \{0, 1, 2, 3, u\}$, para obtener la igualdad deseada, basta ver que $c(\mathcal{C}_r(X)) = c(X)$, pero esta igualdad es trivial para los espacios casiregulares, si aplicamos el Teorema 2.40 y los Lemas 2.16 y 2.39. Para completar la prueba aplique los Teoremas 2.37 y la Proposición 1.5 de [35]. □

Las proposiciones 2.4, 2.6, 2.9, 2.11 y 2.12 pueden ser todas escritas para la categoría de monoides topológicos con traslaciones abiertas, en lugar de la categoría de grupos paratopológicos, las pruebas en su mayoría son muy parecidas a la del Teorema 2.42.

Un problema muy antiguo en grupos topológicos es encontrar condiciones bajo las cuales un grupo paratopológico es un grupo topológico. En [4] y en [5] sección 2.4 se dan respuestas a esta pregunta. Mostraremos como el estudio de la reflexión sobre los espacios $\mathcal{C}_r$ nos permite debilitar las hipótesis de los resultados ya conocidos. El Teorema 2.4.1 de [5] (es el mismo Teorema 1.7 de [4]) nos indica que todo grupo paratopológico regular ténuemente compacto regular es un grupo topológico, aquí debilitaremos la hipótesis de regular por T_3.

La prueba del siguiente lema es parecida a la de los lemas 2.16 y 2.39, por tal razón no presentamos sus pruebas.

Lema 2.43. *Si X es ténuemente compacto así mismo es $\mathcal{C}_0(X)$, X_{sr} y $\mathcal{C}_r(X)$.*

Teorema 2.44. *Todo grupo paratopológico T_3 que sea ténuemente compacto, contablemente compacto o secuencialmente compacto, es un grupo topológico.*

Demostración. Sea G un grupo paratopológico ténuemente compacto y T_3, luego por el Corolario 2.41 tenemos que $\mathcal{C}_r(G) = \mathcal{C}_0(G)$, el cual es un grupo paratopológico ya que los grupos cociente de grupos paratopológicos son grupos paratopológicos. Por tanto el Lema 2.43 garantiza que $\mathcal{C}_r(G)$ es un grupo paratopológico regular ténuemente compacto, que por el Teorema 2.4.1 de [5], $\mathcal{C}_0(G)$ es un grupo topológico. La Proposición 2.13 parte *ii*) nos dice que la topología de G coincide con la topología inicial inducida por $\varphi_{(\mathcal{C}_0,G)}$, el cual es un homomorfismo según el Teorema 2.4. Según el Ejercicio 1.32 de [15], tenemos que G es un grupo topológico. La prueba para los casos secuencialmente compacto y contablemente compacto es análoga si tomamos el Problema 2.4.A y el Corolario 2.4.4 de [5]. $\square$

2.2.7. La reflexión sobre espacios $T_{3.5}$

A diferencia de la reflexión T_3 solo necesitamos las funciones continuas sobre I para obtener la reflexión sobre los espacios que satisfacen el axioma de separación $T_{3.5}$.

Proposición 2.45. *Sea X un espacio topológico y X_I la familia de todas las funciones continuas de X en $I = [0,1]$. Notemos con $\tau_{3.5}$ la topología inicial inducida por X_I sobre X y $T(X) = (X, \tau_{3.5})$. Entonces $\mathcal{C}_{3.5}(X) = T(X)$ y $\varphi_{(X,\mathcal{C}_{3.5})} = id_X$.*

Demostración. Primero veamos que $T(X)$ es $T_{3.5}$. En efecto sean B cerrado en $T(X)$ y $x \notin B$, luego existen $V_1, V_2, ..., V_n$ abiertos en I y funciones continuas

$f_i : X \longrightarrow I$, $i = 1, 2, ..., n$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subseteq B^c$. Luego $x \notin f^{-1}(V_i^c)$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Dado que I es $T_{3.5}$, existen funciones continuas $g_i : G \longrightarrow I$ tales que $g_i(x) = 0$ y $g_i(f_i^{-1}(V_i^c)) \subseteq \{1\}$. Sea $g : G \longrightarrow I$ definida por $g(t) = max\{f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)\}$, g es continua. Note que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i^c)$, por tanto si $t \in B$, luego $g_i(t) = 1$ para algún $i = 1, 2, ..., n$, y por tanto $g(t) = 1$, por tanto $g(B) \subseteq \{1\}$. De la definición $g(x) = 0$. Esto prueba que $T(X)$ es funcionalmente T_3. Sea $f \colon X \longrightarrow Y$, una función continua donde $Y \in \mathcal{C}_{3.5}$, dado que la topología de Y es generada por las funciones continuas de Y en I, entonces $f \colon T(X) \longrightarrow Y$ sigue siendo continua, esto completa la prueba. □

Proposición 2.46. *Para cada espacio topológico X se tiene que $\mathcal{C}_{3.5}(X)$ es Tychonoff si y solo si X es funcionalmente Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que X es funcionalmente Hausdorff, y veamos que $\mathcal{C}_{3.5}(X)$ es Tychonoff, bastará con probar que es funcionalmente Hausdorff. En efecto sean $x \neq y$ dos puntos distintos de $\mathcal{C}_{3.5}(X)$, que como conjunto es X. Dado que X es funcionalmente Hausdorff, podemos hallar una función $f \colon X \longrightarrow I$, tal que $f(x) \neq f(y)$. Sabemos que $f \colon \mathcal{C}_{3.5}(X) \longrightarrow I$ sigue siendo continua, luego $\mathcal{C}_{3.5}$ es Tychonoff. Recíprocamente supongamos que $\mathcal{C}_{3.5}(X)$ es Tychonoff, y sea $x \neq y$ en X, luego existe una función continua $f \colon \mathcal{C}_{3.5}(X) \longrightarrow I$ tal que $f(x) \neq f(y)$, pero $f \colon X \longrightarrow I$ sisgue siendo continua, luego X es funcionalmente Hausdorff. □

2.2.8. La reflexión sobre espacios T_t

La reflexión sobre $\mathcal{C}_t$ es estudiada en profundidad en [28].

Proposición 2.47. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS contenida en $\mathcal{C}_0$ tal que el intervalo $I = [0, 1] \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{C}_{3.5}(X)) = \mathcal{C}_t(X)$.*

Demostración. Veremos primero que si X es $T_{3.5}$, entonces $\mathcal{C}_0(X)$ es $T_{3.5}$. En efecto sea B cerrado en $\mathcal{C}_0(X)$ y $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x) \notin B$, así $x \notin \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C}_0)}(B)$. Por ser X

$T_{3.5}$ podemos hallar $r\colon X \longrightarrow I$, tal que $f(x) = 0$ y $r(\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C}_0)}(B)) \subseteq \{1\}$. Por Corolario 2.14, cualquier inversa a derecha de $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}$, digamos $f\colon \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow X$ es continua. Note que $r \circ f(B) \subseteq \{1\}$ y $r \circ f(\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x)) = 0$, esto prueba que $\mathcal{C}_0(X)$ es $T_{3.5}$. Dado que ser $T_{3.5}$ implica ser T_3, la Proposición 1.11 nos dice que $\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_{3.5}(X))$ es Tychonoff y fácilmente se puede probar que es la reflexión sobre los espacios Tychonoff. Ahora sea $\mathcal{C}$ una clase PS contenida en $\mathcal{C}_0$ y que contiene a I. Sea $f\colon X \longrightarrow I$ una función continua, la Proposición 2.45, nos permite tomar funciones continuas de X en I, en lugar de funciones de X en cualquier espacios Tychonoff. Por la Proposición 2.45 $f\colon \mathcal{C}_{3.5}(X) \longrightarrow I$ sigue siendo continua, como $I \in \mathcal{C}$ existe un función continua $g\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow I$ tal que $g \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})} = f$, dado que $\mathcal{C}(\mathcal{C}_{3.5}(X)) = \mathcal{C}(\mathcal{C}_0((\mathcal{C}_{3.5}(X))) = \mathcal{C}(\mathcal{C}_t(X)) = \mathcal{C}_t(X)$, esto completa la prueba. $\square$

De las proposiciones 2.46 y 2.47 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.48. *Para cada espacio topológico X, se tiene que $\mathcal{C}_{3.5}(\mathcal{C}_{fh}(X)) = \mathcal{C}_{fh}(\mathcal{C}_{3.5}(X)) = \mathcal{C}_t(X)$.*

2.3. LA RELEXIÓN DE UN MONOIDE SEMI-TOPOLÓGICO ESPECIAL.

Sea X un espacio topológico y sea $C(X,X)$ el semigrupo de todas las funciones continuas de X en X. Sean $U_1, U_2, ..., U_n$ conjuntos abiertos de X y $x_1, x_2, ..., x_n$ puntos de X, hagamos

$$\mathbf{O}(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n) = \{f \in C(X,X) : \text{ tales que } f(x_i) \in U_1, i = 1, 2, ..., n\}$$

Esta es una subbase para una topología, la topología generada por esta subbase se le llama convergencia puntual.

En [5] (Teorema 1.2.3) se demuestra que este es un monoide semitopológico con la operación composición.

Si $X \in \mathcal{C}$, entonces $C(X,X) \in \mathcal{C}$ ya que este no es más que un subespacio del producto X^X.

En esta sección probaremos que $\mathcal{C}_0(C(X,X)) = C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$.

Proposición 2.49. *Sea* $K\colon C(X,X) \longrightarrow C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$, *tal que* $f \mapsto \mathcal{C}(f)$. *Entonces* K *es un homomorfismo continuo, para todo espacio topológico* X *y cada clase* PS, $\mathcal{C}$.

Demostración. El hecho de que K es un homomorfismo se deduce de la Proposición 2.3, falta probar la continuidad. Para ello consideremos un abierto subbásico de $C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$, de la forma $W = \mathbf{O}(\varphi_X(x), V)$, con V abierto en $\mathcal{C}(X)$. Es fácil probar que $K^{-1}(W) = \mathbf{O}(x, \varphi_X^{-1}(V))$, el cual es abierto en $C(X,X)$. Esto completa la prueba. □

De esta proposición podemos asegurar que existe un homomorfismo continuo $S\colon \mathcal{C}(C(X,X)) \longrightarrow C(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(X))$ tal que $S(\varphi_{C(X,X)}(f)) = \mathcal{C}(f)$ para toda $f \in C(X,X)$.

Teorema 2.50. $S\colon \mathcal{C}_0(C(X,X)) \longrightarrow C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$ *es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Veamos que K, como se definió en la Proposición 2.49, es abierta, esto probaría que S es abierta. En efecto, note que si $W = \mathbf{O}(x_1, x_2, ..., x_n, U_1, U_2, ..., U_n)$ es un abierto básico de $C(X,X)$, entonces

$$K(W) = \mathbf{O}(\varphi_X(x_1), \varphi_X(x_2), ...\varphi_X(x_n), \varphi_X(U_1), \varphi_X(U_2), ...\varphi_X(U_n))$$

el cual es abierto en $C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$.

Por último veamos que S es inyectiva y sobreyectiva. Para la inyectividad supongamos $\mathcal{C}_0(f) = \mathcal{C}_0(f)$, pero que $\varphi_{C(X,X)}(f) \neq \varphi_{C(X,X)}(g)$, así tenemos que

$\overline{\{f\}} \neq \overline{\{g\}}$, y podemos hallar, sin pérdida de generalidad, un abierto de la forma $\mathbf{O}(x, U)$ que contiene a f y no contiene a g, luego $\overline{\{f(x)\}} \neq \overline{\{g(x)\}}$ o equivalentemente $\varphi_X(f(x)) \neq \varphi_X(g(x))$, que es $\mathcal{C}_0(f)(\varphi_X(x)) \neq \mathcal{C}_0(g)(\varphi_X(x)$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{C}_0(f) = \mathcal{C}_0(g)$, por tanto S es inyectiva. Para ver la sobreyectividad sea $g \in C(\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_0(X))$, por Corolario 2.14, cualquier inversa a la derecha de φ_X es continua, si k es una inversa a derecha de φ_X, sea $f = k \circ g \circ \varphi_X$, $f \colon X \longrightarrow X$ es continua y además $\mathcal{C}_0(f) = g$, esto completa la prueba. $\square$

2.4. REFLEXIONES QUE PRESERVAN SUBESPACIOS

.

En esta sección estudiaremos algunas condiciones bajo las cuales las reflexiones preservan subestructuras. En [44] M. Tkachenko obtiene muchos resultados acerca de qué funtores respetan subgrupos en la categoría de grupos semitopológicos aquí abordamos el problema de una manera más general.

Dado un subespacio A de un espacio X, tenemos la función inclusión $A \hookrightarrow X$. Esta induce una función $g\colon \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$, tal que $g(\varphi_{(\mathcal{C},A)}(a) = \varphi_{(\mathcal{C},X)}(a)$, para cada $a \in A$. Cuando g es un embebimiento, decimos que la reflexión de X sobre $\mathcal{C}$, respeta al subespacio A. En caso de $\mathcal{C}$ sea una clase epirreflexiva de Top, entonces g es un homeomorfismo. En otras palabras decimos que la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta al subespacio A de X, si $\mathcal{C}(A)$ es homeomorfo a un subespacio de X.

Ejemplo 2.6. *La reflexión $\mathcal{C}_i$, donde $i \in \{1, 2, 3, fh, r, t\}$ no respeta subespacios densos, ni abiertos ni cerrados.*

Demostración. Sea X un conjunto y p un punto de X. Definamos en X las siguientes topologías

$$\tau_p = \{U \subseteq X : p \notin U\} \cup \{X\}$$

$$\tau^p = \{U \subseteq X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Consideremos un punto x en X, $x \neq p$. Dado que no existe una vecindad de p en (X, τ_p) que no contenga a x, entonces debe ser $\varphi_{(\mathcal{C}_i,X)}(x) = \varphi_{(\mathcal{C}_i,X)}(p)$ para $i \in \{1, 2, fh, u, r, t\}$, es decir $\varphi_{(\mathcal{C}_i,X)}$ es una función constante y por tanto $\mathcal{C}_i(X)$ es un conjunto unipuntual. Ahora consideremos el subespacio $A = X - \{p\}$, obviamente A es abierto y denso en (X, τ_p), además discreto, luego $\mathcal{C}_i(A) = A$ y $\varphi_{(\mathcal{C}_i,X)}(A)$ es un conjunto unipuntual, luego $\mathcal{C}_i(A)$ está muy lejos de ser homemomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}(X)$.

Para ver $\mathcal{C}_3$, note que no existe la posibilidad de que un cerrado esté contenido en un abierto distinto de X, luego $\mathcal{C}_3(X)$ es un espacio indiscreto y $\mathcal{C}_3(A) = A$, como todo subespacio de $\mathcal{C}(A)$ es también indiscreto, tenemos que $\mathcal{C}(A)$ no puede ser homeomorfo a ningún subespacio de $\mathcal{C}(X)$. Esto prueba lo requerido para el caso de subespacios abiertos y densos, para ver el caso de subespacios cerrados tome A de igual manera y el espacio (X, τ^p). $\square$

Ahora daremos una condición suficiente para que la reflexión $\mathcal{C}(X)$ de un espacio topológico X, respete subespacios.

Definición 2.6. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una subclase de Top. Un subconjunto A de X se dice $\mathcal{C}$-abierto si existe un espacio $Y \in \mathcal{C}$ y una función continua $f\colon X \longrightarrow Y$, tal que $A = f^{-1}(U)$ para un subconjunto abierto U de Y. Para el caso en el que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$ para algún $i \in \{0, 1, 2, 3, r, fh, t, u\}$, escribiremos T_i-abierto, en lugar de $\mathcal{C}_i$-abierto. Un subconjunto de X se dice $\mathcal{C}$-cerrado, si su complemento es $\mathcal{C}$-abierto.*

Proposición 2.51. *Sean X un espacio y $\mathcal{C}$ una clase reflexiva de Top. Un subconjunto A de X es $\mathcal{C}$- abierto (resp. $\mathcal{C}$-cerrado) si y solo si $A = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U)$, para cierto U abierto (resp. cerrado)en $\mathcal{C}(X)$.*

Demostración. Sea A, $\mathcal{C}$-abierto en X. Sean además $Y \in \mathcal{C}$, V abierto en Y y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función continua, tal que $f^{-1}(V) = A$. Por la propiedad de reflexión, existe $g\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow Y$ continua, tal que $g \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})} = f$, así $A = f^{-1}(V) = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(g^{-1}(V))$, tome $U = g^{-1}(V)$, esto prueba la necesidad de la condición, la suficiencia es obvia. El caso $\mathcal{C}$-cerrado es análogo. $\square$

El siguiente lema nos garantiza que los T_0-abiertos y los abiertos coinciden.

Lema 2.52. *Sea X un espacio topológico, entonces todo abierto de X es T_0-abierto.*

Demostración. Sea U abierto en X y $\mathcal{S}$ el espacio de Sierpinsky. Definamos $f\colon X \longrightarrow \mathcal{S}$ por $f(x) = 0$ si $x \in U$ y $f(x) = 1$, en caso contrario. Claramente f es continua y $f^{-1}(\{0\}) = U$, por tanto U es T_0-abierto. □

Definición 2.7. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\mathcal{C}$ una subclase de Top. Decimos que A está $\mathcal{C}$-embebido en X, si cada $\mathcal{C}$-abierto de A es de la forma $U \cap A$, siendo U $\mathcal{C}$-abierto en X.*

El Lema 2.52 nos dice que cada subespacio de un espacio en X está $\mathcal{C}_0$-embebido.

Se puede probar con mucha facilidad que un subesapacio A, de un espacio X, está $\mathcal{C}$-embebido si y solo si todo $\mathcal{C}$-cerrado de A es de la forma $B \cap A$, siendo B $\mathcal{C}$-cerrado en X.

Teorema 2.53. *Sean $\mathcal{C}$ una clase PS contenida en $\mathcal{C}_1$, X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A está $\mathcal{C}$-embebido en X si y solo si $\mathcal{C}(A) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $\varphi_{(X,\mathcal{C})} \mid_A\colon A \longrightarrow \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$. Por la propiedad de la reflexión podemos encontrar una función continua $g\colon \mathcal{C}(A) \longrightarrow \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$ tal que $g(\varphi_{(A,\mathcal{C})}(x)) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X)$, para cada $x \in A$. Supongamos que cada $\mathcal{C}-$cerrado de A es de la forma $D \cap H$ siendo D un $\mathcal{C}$-cerrado de X y veamos que g un homeomorfismo, para ello basta ver que g es inyectiva y abierta. Supongamos que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(y)$ pero que $\varphi_{(A,\mathcal{C})}(x) \neq \varphi_{(A,\mathcal{C})}(y)$. Luego $x \notin \varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}\{(\varphi_{(A,\mathcal{C})}(y)\})$. Dado que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_1$, entonces $\varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}\{(\varphi_{(A,\mathcal{C})}(y)\})$ es $\mathcal{C}$-cerrado en A y por tanto, tenemos que $\varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}\{(\varphi_{(A,\mathcal{C})}(y)\}) = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(B) \cap A$, para algún B cerrado en $\mathcal{C}(X)$, de aquí que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x) \neq \varphi_{(X,\mathcal{C})}(y)$, contradiciendo nuestro supuesto, por tanto g es inyectiva. Para ver que es abierta sea U abierto en $\mathcal{C}(A)$, luego $g(U) = g(\varphi_{(A,\mathcal{C})}(\varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}(U))$. Por el Teorema 2.51 $\varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}(U) = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(W) \cap A$ para algún W abierto en $\mathcal{C}(X)$, luego $g(U) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(W) \cap A)) = W \cap \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$, por tanto $g(U)$ es abierto en $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$, esto completa la primera parte de la prueba.

Recíprocamente supongamos que g es un homeomorfismo y sea W cerrado en $\mathcal{C}(A)$, por ser g un homeomorfismo $k(W)$ es cerrado en $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$, luego existe U cerrado en $\mathcal{C}(X)$ tal que $g(W) = U \cap \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$. Es fácil ver que $\varphi^{-1}_{(A,\mathcal{C})}(W) = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U) \cap A$. Esto último junto con la Proposición 2.51 prueba que todo $\mathcal{C}$-cerrado de A tiene la forma requerida. $\square$

El siguiente teorema, que generaliza de manera total la Proposición 3.11 de [45], en la que M. Tkachenko prueba que la reflexión sobre los espacios T_0 respeta subgrupos arbitrarios.

Teorema 2.54. *Para cualquier subespacio A de un espacio topológico X tenemos que $\mathcal{C}_0(A) = \varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(A)$, es decir la reflexión sobre los espacios que satisfacen el axioma de separación T_0 respeta subespacios arbitrarios.*

Demostración. Sea g como en la prueba del Teorema 2.53, poniendo $\mathcal{C}_0$, en lugar de $\mathcal{C}$, veremos que g es inyectiva. En efecto, supongamos que $\varphi_{(\mathcal{C}_0,A)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,A)}(y)$, con $x, y \in A$. Por Proposición 2.15 podemos encontrar $f\colon A \longrightarrow \mathcal{S}$, tal que $0 = f(x) \neq f(y) = 1$. Como $f^{-1}(\{0\})$ es T_0-abierto en X y cada subespacio de X está $\mathcal{C}_0$-embebido, podemos hallar $F\colon X \longrightarrow \mathcal{S}$ continua, tal que $f^{-1}(\{0\}) = F^{-1}(\{0\}) \cap A$, por tanto $F(x) \neq F(y)$, así $\varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,X)}(y)$, esto prueba la inyectividad de g. La prueba de que g es abierta es igual a la del Teorema 2.53, ya que A está $\mathcal{C}_0$-embebido. $\square$

Lema 2.55. *Sean X un espacio topológico, A un subespacio de X y $\mathcal{C}$ una clase PS. Supongamos que para cada función $f\colon A \longrightarrow Y$, siendo $Y \in \mathcal{C}$, existe $F\colon X \longrightarrow Z$, con $Z \in \mathcal{C}$ y $Y \subseteq Z$, tal que $F\mid_A = f$. Entonces $\mathcal{C}(A) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$.*

Demostración. Sea B un subespacio $\mathcal{C}$-cerrado en A, luego existe $f\colon A \longrightarrow Y$, con $Y \in \mathcal{C}$, tal que $A = f^{-1}(C)$, para algún C cerrado en Y. Por hipótesis podemos encontrar una función continua $F\colon X \longrightarrow Z$, con $Y \subseteq Z$ tal que $F\mid_A = f$. Dado que $B = F^{-1}(C) \cap A$ y como $F^{-1}(C)$ es $\mathcal{C}$-cerrado en X, entonces A está $\mathcal{C}$-embebido en X. Sea g como en la prueba del Teorema 2.53, veamos que g es inyectiva. En efecto, supongamos que $\varphi_{(A,\mathcal{C})}(x) \neq \varphi_{(A,\mathcal{C})}(y)$, para $x, y \in A$. Existe, por hipótesis $F\colon X \longrightarrow Y$, con $Y \in \mathcal{C}(A)$, tal que $F\mid_A = f$, por tanto $F(x) \neq F(y)$ y así $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x) \neq \varphi_{(X,\mathcal{C})}(y)$, esto prueba que g es inyectiva. Probar que g es abierta es igual a la prueba del Teorema 2.53, dado que A está $\mathcal{C}$-embebido en X. □

Proposición 2.56. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una clase PS. Todo retracto de X está $\mathcal{C}$-embebido.*

Demostración. Sea $r\colon X \longrightarrow A$ una retracción siendo $A \subseteq X$. Sea $f\colon A \longrightarrow Y$, con $Y \in \mathcal{C}$ una función continua. Sea $F = f \circ r$, note que $F\mid_A = f$, luego por Lema 2.55, A está $\mathcal{C}$-embebido. □

La Proposición 2.56 y el Lema 2.55 nos llevan al siguiente teorema.

Teorema 2.57. *Si A es un retracto de un espacio X, entonces $\mathcal{C}(A) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$ para toda clase PS, $\mathcal{C}$.*

Proposición 2.58. *Cada subespacio abierto y cerrado de un espacio X es un retracto.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto y cerrado de un espacio X. Si $A = X$, es obviamente un retracto, en caso contrario se $y \in X \setminus A$, y definamos $f\colon X \longrightarrow A$ por $f(x) = x$ si $x \in A$ y $f(x) = y$ en caso contrario. f es una retracción de X. □

Corolario 2.59. *Si A es un subespacio abierto y cerrado de un espacio X, entonces $\mathcal{C}(A) = \varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)$ para toda clase PS, $\mathcal{C}$.*

En un grupo semitopológico derecho o izquierdo, cada subgrupo abierto es cerrado, Proposición 1.25, y por tanto un retracto, esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.60. *Si H es un subgrupo abierto de un grupo semitopológico izquierdo o derecho G, entonces $\mathcal{C}(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(H)$ para toda clase PS, $\mathcal{C}$.*

Es muy fácil construir retractos. Dada una familia de espacios topológicos, $\{X_i\}_{i\in I}$, si tomamos la suma de estos espacios $\bigoplus_{i\in I} X_i$ (Ver [12] sección 2.2). En términos categóricos la suma de espacios constituye un coproducto en Top ([33] Ejemplo 0.2.11). Usaremos este concepto para obtener un resultado en relación con la conexidad.

Lema 2.61. *Sean $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$, y $\mathcal{C}$ una subcategoría reflexiva de Top, tal que $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(X_i) \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}(X) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(X_i)$ y $\varphi_{(\mathcal{C},X)} = \bigoplus_{i\in I} \varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$.*

Demostración. Sea $f\colon X \longrightarrow Y$, una función continua, donde $Y \in \mathcal{C}$. Pongamos como f_i la restricción de f a X_i. Así que podemos hallar una función continua $g_i\colon \mathcal{C}(X_i) \longrightarrow Y$, tal que $g \circ \varphi_{(\mathcal{C},X_i)} = f_i$. Pongamos $\gamma = \bigoplus_{i\in I} \varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$, luego $\gamma\colon X \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(X_i)$ es continua. Si tomamos g de $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{C}(X_i)$ en Y, definida por $g(x) = g_i(x)$ si $x \in \mathcal{C}(X_i)$, tenemos que g es continua y satisface que $g\circ\gamma = f$. Dado que por nuestro supuesto $\bigoplus_{i\in I} \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X_i) \in \mathcal{C}$, completamos la prueba. □

El Lema 2.61, nos dice que si A es un subespacio abierto y cerrado de un espacio X, entonces $\mathcal{C}(A)$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}(X)$, luego el Corolario 2.59 es válido para aquellas subcategorías $\mathcal{C}$ de Top, cerradas por coproductos finitos. Sin embargo extender los otros resultados en los que se respeta subespacios para clases PS, a subcategorías reflexivas de Top más generales, no es tan fácil. La sobreyectividad del morfismo canónico juega un papel fundamental en las pruebas.

Del Lema 2.61 obtenemos los dos siguientes corolarios.

Corolario 2.62. *Cualquier subcategoría reflexiva $\mathcal{C}$ de Top, cerrada por coproductos en $\mathcal{C}_0$, contiene todos los espacios discretos. Además para cada espacio discreto Y, existe un espacio X tal que $\mathcal{C}(X) = Y$.*

Demostración. Probaremos la segunda parte del corolario y la primera parte quedará implícita en la prueba. Para cada $y \in Y$, sea X_y un espacio indiscreto y hagamos $X = \bigoplus_{y\in Y} X_y$. Dado que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_0$ tenemos que $\mathcal{C}(X_y)$ es un espacio unipuntual digamos y. Por el Lema 2.61 tenemos que $\mathcal{C}(X) = \bigoplus_{y\in Y}\{y\}$ y este último es homeomorfo al espacio discreto Y. □

Dado que cada clase C_i, donde $i \in \{0, 1, 2, 3, 3.5, u, fh, t\}$ son cerradas por coproductos (Teorema 2.2.7 [12]), podemos decir que el siguiente corolario tiene mucho más alcance que la Proposición 2.7 de [44]. Por otro lado el Corolario 3.6.5 de [12], nos da garantías de que un espacio Tychonoff X, es disconexo si y sólo si su compactación de Stone Čech, $\beta(X)$, es disconexo, esto también es un caso particular de nuestro próximo corolario, ya que la suma topológica de una cantidad finita de espacios compactos y Hausdorff, es compacto y Hausdorff.

Corolario 2.63. *Sea $\mathcal{C}$ una clase reflexiva de Top cerrada por coproductos finitos. Entonces si X es un espacio disconexo, $\mathcal{C}(X)$ es disconexo. El recíproco se da si $\varphi_{(\mathcal{C},X)}(X)$ es denso en $\mathcal{C}(X)$.*

Demostración. Si X es disconexo, se puede expresar como $X = A \oplus B$, para algunos espacios A y B. El Lema 2.61 nos dice que $\mathcal{C}(X)$ es disconexo. El recíproco surge de los hechos de que la imagen directa y continua de un espacio conexo es conexo y que la clausura preserva conexidad. □

Ahora probaremos que los subespacios T_1-cerrados satisfacen la hipótesis del Teorema 2.53, por tanto la reflexión sobre los espacios T_1, respeta subespacios T_1-cerrados.

Proposición 2.64. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces A es T_1-cerrado si y solo si $A = f^{-1}(a)$ siendo a un punto de X y $f\colon X \longrightarrow X_{cof}$ una función continua.*

Demostración. Sea A un subconjunto T_1-cerrado de X, luego $A = f^{-1}(B)$ siendo Y un espacio topológico T_1, $f\colon X \longrightarrow Y$ continua sobreyectiva y B cerrado en Y. Sea $M = (Y - B) \cup \{a_B\}$, siendo a_B un punto que no está en M, y $g\colon X \longrightarrow M_{cof}$ definida por $g(x) = a_B$ si $x \in B$ y $g(x) = f(x)$ en caso contrario. g es continua y sobreyectiva, luego su inversa a derecha $k\colon M_{cof} \longrightarrow X_{cof}$ es continua e inyectiva. Note que $(k \circ g)^{-1}(k(a_b)) = g^{-1}(k^{-1}k(a_b)) = g^{-1}(a_b) = B$. Esto prueba una implicación, la otra es obvia. $\square$

Lema 2.65. *Sea A un subespacio T_1-cerrado de un espacio X. Entonces cada subconjunto T_1-cerrado de A, es de la forma $U \cap A$, siendo U T_1-cerrado en X.*

Demostración. De la Proposición 2.64 $A = f^{-1}(\{a\})$, siendo $f\colon X \longrightarrow X_{cof}$ una función continua y $a \in X$. Sea V un T_1-cerrado de A, $V = g^{-1}(\{b\})$, con $b \in A$ y $f\colon A \longrightarrow A_{cof}$ una función continua. Sea $Y = A \sqcup X$, la unión disyunta de A y X. Definamos $G\colon X \longrightarrow Y_{cof}$, por $G(x) = g(x)$, si $x \in A$ y $G(x) = f(x)$ en caso contrario. G, es continua y además $G\mid_A = g$, por tanto $V = g^{-1}(\{b\}) = A \cap G^{-1}(\{b\})$, como se quería probar. $\square$

El Teorema 2.53 y el Lema 2.65 nos garantizan el siguiente resultado.

Teorema 2.66. *La reflexión sobre los espacio que satisfacen el axioma de separación T_1, respeta subespacios T_1-cerrados.*

Ejemplo 2.7. *En un grupo semitopológico derecho o izquierdo, G, cada subgrupo cerrado es T_1-cerrado, en efecto, si H es un subgrupo cerrado de G, entonces G/H es un espacio T_1, y además $H = \pi^{-1}(\{\pi(e_G\})$, siendo e_G, el neutro de G y $\pi\colon G \longrightarrow G/H$, la aplicación cociente. Por tanto la reflexión sobre espacios T_1, respeta subgrupos cerrados en la categoría de grupos semitopológicos derechos o izquierdos.*

Ejemplo 2.8. *Sea X un espacio. Es bien sabido que las componentes conexas (conjuntos conexos maximales) de X inducen una partición en X y por tanto una* *relación de equivalencia dada así: $x \sim y$ si x e y están en la misma componente conexa. Consideremos el espacio cociente $X/\sim$ y la respectiva aplicación cociente $\pi\colon X \longrightarrow X/\sim$. Dado que cada componente conexa es cerrada tenemos que $X/\sim$ es T_1 y además $\pi^1(\pi(C)) = C$, para cada componente conexa de X. Por tanto cada componente conexa de X es T_1-cerrado, el Teorema 2.66 nos dice que la reflexión sobre espacios T_1, respeta subespacios conexos maximales en cualquier espacio topológico X.*

La prueba del siguiente teorema es análoga a la del Teorema 2.66.

Teorema 2.67. *La reflexión sobre los espacio que satisfacen el axioma de separación T_1, respeta subespacios T_1-abiertos.*

Finalmente caracterizamos aquellos subgrupos que son respetados por la reflexión sobre espacios T_1 y T_2.

Corolario 2.68. *Sean G un grupo semitopólogico y H un subgrupo de G. Si $\mathcal{C}(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(H)$, entonces $ker\varphi_{(H,\mathcal{C})} = ker\varphi_{(G,\mathcal{C})} \cap H$.*

Demostración. Sea g como en la prueba del Teorema 2.53. La inyectividad de g garantiza el resultado. □

Lema 2.69. *Sean H un subgrupo de un grupo semitopólogico G y $\mathcal{C}$ una clase PS cerrada por supertopologías contenidas en $\mathcal{C}_1$. Entonces $ker\varphi_{(H,\mathcal{C})} = ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$, si y solo si $\mathcal{C}(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(H)$.*

Demostración. Un $\mathcal{C}$-abierto de H es de la forma $U \ker \varphi_{(H,\mathcal{C})}$, siendo G semitopólogico, y U abierto en H. $U = W \cap H$, siendo W abierto en G. Se puede probar que $U \ker \varphi_{(H,\mathcal{C})} = W \ker \varphi_{(G,\mathcal{C})} \cap H$. Note que $W \ker \varphi_{(G,\mathcal{C})}$ es un $\mathcal{C}$-abierto en G, por el Teorema 2.53 se tiene que $\mathcal{C}(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(H)$. Recíprocamente si $\mathcal{C}(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(H) = H/ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$, entonces $H/ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$ es un subgrupo de

$\mathcal{C}(G) = G/ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$, luego H contiene al $ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$, y por Corolario 2.68, se tiene que $ker\varphi_{(H,\mathcal{C})} = ker\varphi_{(G,\mathcal{C})}$. $\square$

Teorema 2.70. *Sea H un subgrupo de un grupo semitopológico G. Entonces $\varphi_{(G,\mathcal{C}_2)}(H) = \mathcal{C}_2(H)$ si y solo si H contiene $\bigcap_{V\in N_e} \overline{V}$.*

Demostración. De [41], [27] y [32], sabemos que $\mathcal{C}_2(G) = G/\bigcap_{V\in N_e} \overline{V}$, para cada grupo semitopológico G, luego

$$ker\varphi_{(H,\mathcal{C}_2)} = \bigcap\{Cl_H(W) : W \text{ es una vecindad del neutro en } H\} = H \cap \bigcap_{V\in N_e} \overline{V},$$

luego $ker\varphi_{(H,\mathcal{C}_2)} = ker\varphi_{(G,\mathcal{C}_2)}$ si y solo si H contiene a $\bigcap_{V\in N_e} \overline{V}$. $\square$

El Corolario 2.25 y el Teorema 2.70 nos dan el siguiente corolario.

Corolario 2.71. *La reflexión sobre espacios T_2 respeta subgrupos ultracerrados en la categoría de grupos cuasitopológicos.*

En [45], Lema 3.7, M. Tkachenko demostró que la Reflexión sobre los espacios T_1 preserva subgrupos cerrados en la categoría de grupos semitopológicos, aquí damos una caracterización de aquellos subgrupos en los cuales se respeta la reflexión sobre espacios T_1.

Teorema 2.72. *Sean G un grupo semitopológico y H un subgrupo de G. Entonces $\mathcal{C}_1(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(H)$ si y solo si H contiene un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Sean G un grupo semitopológico y K un subgrupo cerrado de G y H un subgrupo de G que contiene a K, $K = H \cap K$ implica que K es cerrado en H. Consideremos la aplicación cociente $\pi\colon H \longrightarrow H/K$, este último es T_1 por ser K cerrado, además $H = \pi^{-1}(K)$, es decir H es T_1-cerrado y por tanto por Teorema 2.66 tenemos que $\mathcal{C}_1(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(H)$.
Recíprocamente si $\mathcal{C}_1(H) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(H)$ por Lema 2.69 tenemos que $ker\varphi_{(H,\mathcal{C}_1)} = ker\varphi_{(H,\mathcal{C}_1)}$ así H contiene un subgrupo cerrado de G. $\square$

Pero existen subespacios en grupos que se respetan por la reflexión sobre espacios T_1.

Teorema 2.73. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo semitopológico derecho (resp. izquierdo) G. Entonces*

i) si U es abierto entonces $\mathcal{C}_1(UH) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(UH)$ (resp. $\mathcal{C}(HU) = \varphi_{(G,\mathcal{C})}(HU)$).

ii) Si B es finito $\mathcal{C}_1(HB) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(HB)$.

iii) Si G es un grupo semitopológico abeliano, H es un subgrupo cerrado de G y K es un subgrupo arbitrario, entonces $\mathcal{C}_1(HK) = \varphi_{(G,\mathcal{C}_1)}(HK)$.

Demostración. Sea G un grupo semitopológico derecho y H un subgrupo cerrado de G. Si $\pi\colon G \longrightarrow (G/H)_l$ es la respectiva aplicación cociente, note que $\pi\pi^{-1}(UH) = UH$, por tanto UH es T_1-abierto, por Teorema 2.67 se tiene el resultado. Análogamente se prueba ii). Para ver iii), note que HK es un subgrupo de G que contiene al subgrupo cerrado H. □

El Lema 4 de [30] garantiza que la semirregularización de un espacio topológico X respeta subespacios abiertos y densos, por tanto, el Teorema 2.38 nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 2.74. *La reflexión sobre espacios T_3 respeta subespacios abiertos o densos en la categoría de monoides topológicos con traslaciones izquierdas o derechas abiertas.*

2.5. COINCIDENCIA DE REFLEXIONES

En [11] se plantea el problema de caracterizar los espacios X que satisfacen la propiedad $\mathcal{C}_i(X) \in \mathcal{C}_j$, cuando $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son clases PS que satisfacen $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{C}_i$.

Aquí se estudia las condiciones bajo las cuales $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_1(X)$ y $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_t(X)$ y además se da una condición suficiente para que un para que $\mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}_t(X)$ y se plantea como problema (Problema 1.6) caracterizar los espacios X que satisfacen esta igualdad. Damos una respuesta a tal problema, en términos del concepto de conjunto $\mathcal{C}$-cerrado.

Definición 2.8. *Un subconjunto A de un espacio X se dice regularmente separado, si para cada $x \in X$, tal que $x \notin A$, existe una función continua $f \colon X \longrightarrow I$, tal que $f(A) \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$.*

Teorema 2.75. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una clase PS que contiene a $\mathcal{C}_0$. Entonces $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_t(X)$ si y solo si cada $\mathcal{C}$-cerrado de X es regularmente separado.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_t(X)$, y sea $B = \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(A)$ siendo A cerrado en $\mathcal{C}(X)$ y $x \notin B$, luego $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x) \notin A$, como $\mathcal{C}(X)$ es Tychonoff, podemos hallar una función $f \colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow I$ tal que $f(\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x)) = 0$ y $f(\varphi_{(X,\mathcal{C})}(A)) \subseteq \{1\}$. Sea $g = f \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})}$, luego $g(x) = 0$ y $g(A) \subseteq \{1\}$, es decir A es regularmente separado. Recíprocamente sea B cerrado en $\mathcal{C}(X)$ y $\varphi(x) \notin B$, luego $\varphi^{-1}(B)$ es $\mathcal{C}-$cerrado en X, podemos entonces hallar una función $f \colon X \longrightarrow I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(B)) \subseteq \{1\}$, como $I \in \mathcal{C}$, entonces existe $g \colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow I$ tal que $g \circ \varphi_{(X,\mathcal{C})} = f$, luego $g(B) \subseteq \{1\}$ y $g(\varphi(x)) = 0$, es decir $\mathcal{C}(X)$ es Tychonoff y $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_t(X)$. $\square$

En un espacio $T_{3.5}$, cada cerrado es obviamente regularmente separado. El Corolario 4 de [6], garantiza que lo mismo ocurre para monoides topológicos con traslaciones abiertas.

Definición 2.9. *Un espacio X se dice simétrico si para cada $x, y \in X$ se cumple que $x \in \overline{\{y\}}$ implica $y \in \overline{\{x\}}$.*

El siguiente Teorema es ya conocido.

Teorema 2.76. *Sea X un espacio topológico, entonces $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_1(X)$ si y solo si X es simétrico.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_1(X)$ y sea $x \in X$, luego $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x)$ es cerrado en X, por la la Proposición 2.13 sabemos que $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x) \subseteq \overline{\{x\}}$, pero dado que $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x)$ es cerrado, tenemos que $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x) = \overline{\{x\}}$, por tanto si $y \in \overline{\{x\}}$, tenemos que $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$, es decir X es simétrico. Recíprocamente si X es simétrico tenemos que $\varphi_{(X,\mathcal{C}_0)}(x) = \overline{\{x\}}$,, luego $\mathcal{C}_0(X)$ es T_1, por la Proposición 2.2 tenemos que $\mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}_1(\mathcal{C}_0(X)) = \mathcal{C}_0(X)$, completando la prueba. □

Lema 2.77. *Todo espacio de Maltsev semitopológico central es simétrico.*

Demostración. Sea (X, f) un espacio de Maltsev semitoplógico central, y $x, y \in X$. Supongamos que $y \in \overline{\{x\}}$ y veamos que $x \in \overline{\{y\}}$, para ello basta probar que toda vecindad de x contiene a y. Sea V_x una vecindad de x, como $f(y, y, x) = x$, entonces existe una vecindad de y, V_y tal que $f(y, z, x) \in V_x$, siempre que z esté en V_y. Como $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $x \in V_y$, luego $y = f(y, x, x) \in V_x$, esto completa la prueba. □

Del Teorema 2.76 y el Lema 2.77 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.78. *Si X es un espacio de Maltsev semitopológico en el centro, tenemos que $\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_1(X)$.*

Dado que todo grupo cuasitopológico es un espacio de Maltsev central, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.79. *Si G es un grupo cuasitopológico entonces $\mathcal{C}_0(G) = \mathcal{C}_1(G)$.*

Dado que la reflexión sobre espacios T_0 respeta subespacios arbitrarios, tenemos que un espacio simétrico la reflexión sobre espacios T_1 respeta subespacios arbitrarios.

El Teorema 2.40 y el Corolario 2.41 nos dan el siguiente resultado.

Corolario 2.80. *Todo espacio T_3 es simétrico.*

En realidad el Lema 3.6 de [46] no solo es válido para espacios T_3, sino para cualquier grupo semitopológico simétrico.

2.6. REFLEXIONES QUE PRESERVAN PRODUCTOS.

En esta sección comentaremos condiciones bajo las cuales una reflexión preserva productos. Aunque no es fácil construir contraejemplos, no todas las reflexiones sobre clases PS respetan productos en espacios arbitrarios.

Sean $\{X\}_{i\in I}$ una familia espacios en una subclase $\mathcal{D}$ de Top cerrada por productos y $\mathcal{C}$ una subcategoría reflexiva de $\mathcal{D}$, la aplicación $\prod_{i\in I}\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}\colon \prod_{i\in I}X_i \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{C}(X_i)$ es continua, y si cada $\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$ es abierta, entonces $\prod_{i\in I}\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$ será también abierta.

Sea $X=\prod_{i\in I}X_i$, podemos hallar $\boldsymbol{k}\colon \mathcal{C}(X)\longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{C}(X_i)$ tal que $\boldsymbol{k}\circ\varphi_{(X,\mathcal{C})} = \prod_{i\in I}\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$

Definición 2.10. *Decimos que la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta el producto $\prod_{i\in I}X_i$, cuando $\boldsymbol{k}$ es un isomorfismo.*

Lema 2.81. $\boldsymbol{k}\,|_{\varphi_{(X,\mathcal{C})}}(X)\colon \varphi_{(X,\mathcal{C})}(X)\longrightarrow \prod_{i\in I}\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(X_i)$ *es sobreyectiva y uno a uno.*

Demostración. Supongamos que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}(x_i)_{i\in I} \neq \varphi_{(X,\mathcal{C})}(y_i)_{i\in I}$, donde $x_i, y_i \in X_i$, para cada $i \in I$, pero que $(\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(x_i))_{i\in I} = (\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(y_i))_{i\in I}$. Por el principio de la buena ordenación I puede ser bien ordenado y sea i_0 su primer elemento. Existe una función continua $h\colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow Y$ siendo $Y \in \mathcal{C}$ tal que $h((x_i)_{i\in I}) \neq h((y_i)_{\in I})$. Definamos $h_{i_0}\colon X_{i_0} \longrightarrow Y$ por $h_{i_0}(x) = h(x \times (x_i)_{i\neq i_0})$, claramente h_{i_0} es continua, y por nuestro supuesto debe ser $h_{i_0}(x_0) = h_{i_0}(y_0)$, es decir $h(x_{i_0} \times (x_i)_{i>i_0}) = h(y_{i_0} \times (x_i)_{i>i_0})$. Supongamos, como hipótesis de inducción transfinita, que $h((x_i)_{i<\beta} \times (x_i)_{i\geq\beta}) = h((y_i)_{i\geq\beta} \times (x_i)_{i\geq\beta})$ y definamos $h_\beta\colon X_\beta \longrightarrow Y$, por $h_\beta(x) = h((x_i)_{i<\beta} \times x \times (x_i)_{i>\beta})$. Por el supuesto $h_\beta(x_\beta) = h_\beta(y_\beta)$ luego, haciendo uso de la hipótesis de inducción, tenemos que $h((y_i)_{i<\beta} \times x_\beta \times (x_i)_{i>\beta}) = h((x_i)_{i<\beta} \times x_\beta \times (x_i)_{i>\beta}) = h((x_i)_{i<\beta} \times y_\beta \times (x_i)_{i>\beta})$, esto prueba que la igualdad $h((x_i)_{i\leqslant\beta} \times (x_i)_{i>\beta}) = h((y_i)_{i\leqslant\beta} \times (x_i)_{i>\beta})$, luego por el principio de inducción transfinita tenemos que $h((x_i)_{i\in I}) = h((y_i)_{\in I})$, contradiciendo lo supuesto, por tanto $\boldsymbol{k}$ es inyectiva. La sobreyectividad es obvia. $\square$

Teorema 2.82. *Sean $\{X_1\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{C}$ una clase epirreflexiva de Top. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} X_i) = \prod_{i\in I} \mathcal{C}(X_i)$.

ii) *Para cada U, $\mathcal{C}$-abierto de $\prod_{i\in I} X_i$, y $(x_i)_{i\in I} \in U$ existe una cantidad finita de índices $i_1, i_2, ..., i_n$ en I, y un $\mathcal{C}$-abierto, U_i en X_i, que contiene a x_i para cada $i = i_1, i_2, ..., i_n$ tal que $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{k=1}^{n} U_{i_k} \times \prod_{i\neq i_1,i_2,...,i_n} X_i \subseteq U$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{k}$ como en el Lema 2.81, supongamos que se cumple (ii) y veamos que $\mathbf{k}$ es un homeomorfismo, para ello basta probar que es abierta. En efecto sea U abierto en $X = \prod_{i\in I} X_i$, siendo $X = \prod_{i\in I} X_i$. Luego $\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U)$ es $\mathcal{C}$-abierto en X. Note que $\mathbf{k}(U) = (\prod_{i\in I} \varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U))$. Sea $(\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(x_i))_{i\in I}$ un punto de $\boldsymbol{k}(U)$, luego $(x_i)_{i\in I} \in \varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U)$, el cual es $\mathcal{C}$-abierto en X. Por hipótesis podemos encontrar un abierto, U_i, en $\mathcal{C}(X_i)$ para cada $i = i_i, i_2, ..., i_n$, tal que $(x_i)_{i\in I} \in$

$\prod_{k=1}^{n}\varphi^{-1}_{(X_k,\mathcal{C})}U_k\times\prod_{i\neq i_1,i_2,\ldots,i_n}X_i\subseteq\varphi^{-1}_{(X,\mathcal{C})}(U)$, es decir $(\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}(x_i))_{i\in I}\in\prod_{i=1}^{n}U_{i_k}\times\prod_{i=1}^{n}\times\prod_{i\neq i_1,i_2,\ldots,i_n}\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}\subseteq K(U)$, luego $\boldsymbol{k}(U)$ es abierto en $\prod_{i\in I}^{n}\mathcal{C}(X_i)$. En realidad se ha probado la equivalencia. $\square$

Teorema 2.83. *Si $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{C}_2$, es una clase epirreflexiva de Top, entonces la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta productos en la categoría de los espacios compactos.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{k}$ como en el Lema 2.81. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios compactos, luego $\mathcal{C}(\prod_{i\in I}X_i)$ es compacto y $\prod_{i\in I}\mathcal{C}(X_i)$ es T_2 por tanto, dado que $\boldsymbol{k}$ es biyectiva, por Proposición 1.14 es un homeomorfismo. $\square$

El siguiente Lema está muy relacionado con el Corolario 2, página 181 de [10], salvo que en lugar de productos finitos, los productos son arbitrarios. Además dado que en la categoría de grupos todas los homomorfismos cocientes entre grupos son abiertos, el Corolario 2.5 nos indica que el próximo lema es un resultado que encierra las proposiciones 3.3, 3.4 y 3.5 de [44].

Lema 2.84. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{C}$ una clase epirreflexiva de Top tales que $\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}$ es cociente para cada $i\in I$ y el producto $\prod_{i\in I}\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}$ también es cociente, entonces $\boldsymbol{k}$ es un homeomorfismo, en particular si cada $\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}$ es abierta, entonces $\boldsymbol{k}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para la primera parte note que $\varphi_{(X,\mathcal{C})}=\boldsymbol{k}^{-1}\circ\prod_{i\in I}\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}.$, la Proposición 1.4 v), probaría que $\mathbf{k}^{-1}$ es continua. Para la segunda parte, note que cada función abierta y sobreyectiva es cociente, además que si cada $\varphi_{(X_i,\mathcal{C})}$ es abierta, así mismo es $\prod_{i\in I}\varphi_{(\mathcal{C},X_i)}$. $\square$

Corolario 2.85. *Si $\mathcal{C}$ es cerrado por supertopologías, entonces la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta productos arbitrarios en la categoría de grupos semitopológicos derechos o izquierdos.*

Demostración. Según el Teorema 2.9, el homomorfismo canónico es cociente, pero por el Teorema 1.5.1 de [5], cada homomorfismo cociente en la categoría de grupos es abierto, por tanto el Teorema 2.86 completa la prueba. $\square$

Del Lema 2.84 y la Proposición 2.13 *ii*) obtenemos el siguiente resultado, que es mucho más general que el dado en la Proposición 3.3 de [44].

Teorema 2.86. *La reflexión sobre $\mathcal{C}_0$ respeta productos arbitrarios de espacios topológicos.*

El Teorema 2.76, junto con el Teorema 2.86, nos dicen que la reflexión sobre espacios T_1, respeta productos arbitrarios en la categoría de espacios simétricos, lo que mejora notablemente el comentario hecho en [10], Ejemplo 4, página 173, donde afirma que la T_1-modificación respeta productos finitos en la categoría de espacios simétricos.
El siguiente teorema es una generalización del Corolario 4.4 de [28], que está escrito solo para el Funtor Tychonoff, este mismo resultado es expuesto en [10], ejemplo 4, página 173.

Teorema 2.87. *Sean $\mathcal{C}$ una clase PS cerrada por supertopologías que contiene a la clase de los espacios localmente compactos y Hausdorff, Y un espacio Hausdorff localmente compacto y X un espacio topológico cualquiera. Entonces $\mathcal{C}(Y \times X) = Y \times \mathcal{C}(X)$.*

Demostración. Dado que $Y \in \mathcal{C}$, Por Proposición 1.37, $\mathcal{C}(Y) = Y$, luego $\varphi_{(Y,\mathcal{C})} = i_Y$. Por Teorema 1.18 la aplicación $i_Y \times \varphi_{(X,\mathcal{C})}$ es cociente, y por el Lema 2.84, obtenemos el resultado. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de que Y sea Hausdorff localmente compacto es necesaria en el Teorema 2.87

Ejemplo 2.9. *(Ejemplo 4 de [10], pag. 173) Sea* $X = \omega \times (\omega + 1)$*, con la siguiente topología, todos los puntos de* $\omega \times \omega$ *son discretos y los puntos de la forma* (n, ω) *tiene una base de la forma* $\{(i, k) : i \leq n, m \leq m \leq w\}$*.* $\mathcal{C}_2(X)$ *no es más que el espacio cociente de* X *identificando el subconjunto* $\{(n, \omega) : n \in \omega\}$ *con un punto, sin embargo* $\mathcal{C}_2(\mathbb{Q} \times X)$ *no es* $\mathbb{Q} \times \mathcal{C}_2(X)$*. Por la construcción tenemos que* $\{(n, \omega) : n \in \omega\}$ *es un subconjunto ultracerrado de* X*.*

El siguiente teorema es una aplicación del Lema 2.61, y es un resultado muy parecido al Teorema 2.87.

Teorema 2.88. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase reflexiva de* Top *cerrada por coproductos. Si* Y *es un espacio discreto, entonces* $\mathcal{C}(X \times Y) = \mathcal{C}(X) \times Y$*, para cualquier espacio* X*.*

Demostración. Se puede probar muy fácilmente que $X \times Y = \bigoplus_{y \in Y} X \times \{y\}$. Cada uno de los espacios $X \times \{y\}$ es homeomorfo a X, luego aplicando el Lema 2.61, tenemos que $\mathcal{C}(X \times Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathcal{C}(X) \times \{y\} = \mathcal{C}(X) \times Y$. □

Ejemplo 2.10. *Sea* X *un espacio Tychonoff e* Y *un espacio discreto infinito, entonces* $\beta(X) \times Y$*, siendo* $\beta(X)$ *la compactación de Stone Čech de* X*, no es la compactación de Stone Čech de* $X \times Y$*. Aquí el Teorema 2.88 no resulta ya que los espacios compactos no constituyen una clase cerrada por coproductos, por tanto la hipótesis de ser cerrado por coproductos se necesita.*

Proposición 2.89. *Sea* (X, f) *un espacio de Maltsev derecho o izquierdo y* $\mathcal{C}$ *una clase* PS *cerrada por supertopologías, entonces* $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ *es abierta.*

Demostración. Sea (X, f) un espacio de Maltsev derecho. Por el Teorema 2.8, $\mathcal{C}(X)$ también es un espacio de Maltsev derecho, digamos $(\mathcal{C}(X), f_{\mathcal{C}})$, además $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ respeta las estructuras algebraicas. Por el Lema 1.31 existe una f-congruencia en X, R y una biyección $s \colon X/R \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $s \circ \pi = \varphi_{(\mathcal{C},X)}$, siendo

$\pi\colon X \longrightarrow X/R$, la aplicación cociente. Por Teorema 2.9, $\varphi_{(\mathcal{C},X)}$ es una aplicación cociente, dado que π también lo es, entonces s es un homeormorfismo, luego $\mathcal{C}(X) = X/R$ y $\varphi_{(\mathcal{C},X)} = \pi$, el cual es abierto por el Lema 1.34. $\square$

La proposición 2.89, nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 2.90. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS, cerrada por supertopologías, entonces la reflexión sobre $\mathcal{C}$, respeta productos en la categoría de espacios de Maltsev derechos o izquierdos.*

Una prueba similar a la del Teorema 2.90 nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 2.91. *Sea $\mathcal{C}$ una clase PS cerrada por superopologías, entonces la reflexión sobre $\mathcal{C}$, respeta productos en la categoría de monoides semitopológicos izquierdos (resp. derecho) con traslaciones izquierdas (resp. derechas) abiertas.*

Dado que si S es un submoniode abierto de un grupo semitopológico derecho o izquierdo, entonces las traslaciones izquierdas o derechas de S son abiertas, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.92. *Sean $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de submonoides abiertos de grupos semitopológicos derechos o izquierdos y $\mathcal{C}$ una clase PS cerrada por supertopologías, entonces $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} S_i) = \prod_{i\in I} \mathcal{C}(S_i)$.*

Es fácil construir submonoides abiertos tanto en grupos paratopológicos como grupo semitopológicos, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. *Sea G un grupo semitopológico, y U una vecindad abierta del neutro. Entonces $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$ es un submonide abierto de G, que en general no es un grupo. En particular si G es la recta de Sorgenfrey, y tomamos una vecindad del neutro $U = [0, 1)$, vemos que $[0, \infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$, es un submonoide topológico abierto de G, que no es un subgrupo.*

El siguiente teorema es una variación del Teorema 2.4, nos indica que si la reflexión respeta productos finitos, las operaciones conjuntamente continuas se reflejan de forma conjuntamente continuas.

Teorema 2.93. *Supongamos que la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta productos finitos, entonces dada una operación continua $*\colon X\times Y \longrightarrow X$, existe una única operación continua $*_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}(X)\times\mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\varphi_X(x) *_{\mathcal{C}} \varphi_Y(y) = \varphi_X(x*y)$.*

Demostración. Escribamos la reflexión de $X\times Y$ en términos de la reflexión de X, e Y. Dado que $\mathcal{C}(X\times Y) = \mathcal{C}(X)\times\mathcal{C}(Y)$, podemos decir que $\varphi_{(\mathcal{C},X\times Y)} = \varphi_{(\mathcal{C},X)} \times \varphi_{(\mathcal{C},X)}$. Si $*\colon X\times Y \longrightarrow X$ es continua, la propiedad universal de la reflexión nos dice que podemos hallar una función continua $\mathcal{C}(*)\colon \mathcal{C}(X)\times\mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$, tal que $(\mathcal{C}(*)\circ(\varphi_{(\mathcal{C},X)}\times\varphi_{(\mathcal{C},Y)})(x,y) = \varphi_{(\mathcal{C},X)}(x*y)$. Basta tomar $*_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(*)$ para completar la prueba. $\square$

El teorema anterior garantiza que aquellas reflexiones que respetan productos respetan estructuras algebraica topológicas arbitrarias. Por ejemplo en [35], O. V. Ravsky, probó que la semiregularización de un grupo paratopológico es un grupo paratopológico, pero dado que la semirregularización respeta productos, entonces tenemos que la semirregularización de un grupo paratopológico respeta otras estructuras algebraicas diferentes a grupos, como espacios vectoriales, anillos,...,etc. además conservando la continuidad conjunta de las operaciones. La reflexión sobre la clase PS de los espacios que satisfacen el axioma de reflexión T_0 se comporta mejor, puesto que siempre respeta productos, tenemos que cualquier operación conjuntamente continua es reflejada también en la respectiva reflexión.

El Lema 3 de [30] garantiza que la semiregularización respeta productos, por tanto de los teoremas 2.38, 2.40 y 2.86 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.94. *La reflexión sobre espacios topológicos T_3 y T_r respeta productos en la categoría de monoides topológicos con traslaciones derechas o izquierdas* *abiertas.*

Ejemplo 2.12. *Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos semitopológicos y H un grupo algebraico no trivial. Podemos dotar a H de la topología discreta, obteniendo estructura de grupo topológico para H. Para cada $i \in I$, sea A_i un subconjunto no vacío de H, que no sea un subgrupo de G. Hagamos $H_i = G \times A_i$. Es claro que H_i es un conjunto abierto y cerrado $G_i \times H$, por tanto es un retracto de $G_i \times H$. Si r_i es la respectiva retracción, entonces la aplicación $f\colon H_i \times H_i \times H_i \longrightarrow H_i$, dada por $f(x, y, z) = r_i(x, y, z)$, hace de H_i un espacio de Maltsev semitopológico a izquierda y a derecha, que no es un grupo. El Teorema 2.90 nos dice que $\mathcal{C}(\prod_{i\in I} H_i) = \prod_{i\in I} \mathcal{C}(H_i)$, para cada clase $\mathcal{C}$ cerrada por supertopologías.*

Si una reflexión respeta productos entonces las operaciones conjuntamente continua de un espacio topológico X se reflejan de igual manera en la reflexión (Teorema 2.93). Ahora si una reflexión refleja operaciones conjuntamente continuas con neutro, entonces la reflexión respeta producto finitos, como lo veremos en el próximo teorema.

Teorema 2.95. *Sean $\mathcal{C}$ una subcategoría reflexiva cerrada por productos, de una clase $\mathcal{D}$ de Top y X e Y en $\mathcal{D}$, cada uno con una operación conjuntamente continua y con neutro. Si estas operaciones se reflejan conjuntamente continua en $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{C}(X \times Y)$, entonces $\varphi_{X\times Y}(X \times Y) = \varphi_X(X) \times \varphi_Y(Y)$. Si además $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_2$ y $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$ y $\varphi(X \times Y)$ son densos en $\mathcal{C}(X)$,$\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{C}(X \times Y)$, respectivamente, entonces $\mathcal{C}(X \times Y) = \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y)$.*

Demostración. Notaremos con e el neutro de X e Y. La operación de $(X \times Y) \times (X \times Y)$ en $X \times Y$, dada por $(x, y)(a, b) = (xa, yb)$ es conjuntamente continua. Las aplicaciones $x \mapsto (x, e)$ y $y \mapsto (e, y)$, inducen funciones continuas, $f_1\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X \times Y)$ y $f_2\colon \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X \times Y)$, tales que $f_1(\varphi_X(x)) = \varphi_{X\times Y}((x, e))$ y $f_2(\varphi_Y(y)) = \varphi_{X\times Y}((e, y))$. De la hipótesis, la operación inducida de $\mathcal{C}((X \times Y)) \times$

$\mathcal{C}((X \times Y))$ en $\mathcal{C}((X \times Y))$, es conjuntamente continua, por tanto la aplicación $f\colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X \times Y)$, dada por $f(a,b) = f_1(a)f_2(b)$ es continua. Note que $f\mid_{\varphi(X)\times\varphi(Y)}$ es la inversa de la función $\mathbf{k}\mid_{\varphi(X\times Y)}$ definida en el Lema 2.81 para el caso en el que $I = \{1,2\}$, probando así la primera parte. La segunda parte se sigue del hecho de la densidad de $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$ y $\varphi(X \times Y)$ y del hecho de que $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{C}(X \times Y)$, son todos T_2. □

Usaremos el Teorema 2.7 para construir la reflexión de los grupos paratopológicos en los grupos paratopológicos ω-estrechos, la cual es presentada en [21] pero de una forma muy categórica, presentaremos aquí una idea más topológica. Además usaremos el Teorema 2.95 para ver que esta respeta productos, dando una mejora del Teorema 4.14 de [21], que solo es dado para grupos abelianos.

Definición 2.11. *Un grupo semitopológico G, se dice ω-estrecho o $\aleph_0$-acotado (resp. totalmente acotado), si para toda $U \in N_e$, siendo e el elemento neutro de G, existe un subconjunto numerable (resp. finito) K de G, tal que $KU = G$.*

Teorema 2.96. *La clase de los grupos semitopológicos (resp. paratopológicos) $\aleph_0$-acotados, es una categoría epireflexiva de los grupos semitopológicos (resp. paratopológicos)*

Demostración. Haremos la prueba solo para grupos paratopológicos, para los semitopológicos se procede igual. Sea (G,τ) un grupo paratopológico y sea Γ la familia de todas las topologías de grupos paratopológico $\aleph_0$-acotado contenidas en τ. $\Gamma \neq \emptyset$, ya que la topología indiscreta está en Γ. Sea ρ la topología en G generada por $\bigcup \Gamma$, el Teorema 1.2 y la Proposición 5.5 de [15] garantizan que (G,ρ) es un grupo paratopológico $\aleph_0$-acotado, además dado que τ es más fina que ρ, tenemos que $id\colon (G,\tau) \longrightarrow (G,\rho)$ es continua. Veremos que $((G,\rho), id)$ es la reflexión de (G,τ) sobre la clase de los grupos paratopológicos $\aleph_0$-acotados. Probaremos la propiedad universal, que por el Teorema 2.7, podemos considerar un homomorfismo continuo de grupos, $f\colon G \longrightarrow H$, siendo H un grupo paratopológico $\aleph_0$-acotado. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es sobreyectiva. Usando la propiedad de Pontrjagin dada en [35], podemos probar que τ^f es una topología de grupo paratopológico para G (Ejercicio 1.32 de [15]). Veamos que (G, τ^f) es $\aleph_0$-acotado, en efecto, sea V una vecindad del neutro en H, luego existe $K \subseteq G$, siendo K numerable, tal que $KU = H$, para cada $k \in K$, elijamos x_k en X, tal que $f(x_k) = k$. Sea $L = \{x_k : k \in K\}$, es fácil ver que $G = Lf^{-1}(U)$, dado que L es numerable, tenemos que (G, τ^f) es $\aleph_0$-acotado. Por la forma como se eligió ρ, tenemos que $\tau^f \subseteq \rho$ y por ende $f\colon (G, \rho) \longrightarrow H$, sigue siendo continua. Por tanto (G, id) es la reflexión deseada. $\square$

Ahora si $\mathcal{C}_\omega$ es la clase de los grupos paratopológicos ω-estrechos, según el Teorema tenemos que para cualquier grupo paratopológico G, la operación de grupo se refleja de forma conjuntamente continua en $\mathcal{C}_\omega(G)$, luego el Teorema 2.96 podemos obtener el siguiente Corolario.

Corolario 2.97. *Sean G y H grupos paratopológicos, entonces $\mathcal{C}_\omega(G \times H) \cong \mathcal{C}_\omega(G) \times \mathcal{C}_\omega(H)$.*

Ejemplo 2.13. ***(La productividad de la compactación de Bohr.*** *) Dado un grupo G, podemos hallar su compactación de Bohr, bG (ver [14] pag. 322). Donde bG es un grupo compacto y Hausdorff $b\colon G \longrightarrow bG$ es un homomorfismo. Además cada homomorfismo $f\colon G \longrightarrow H$, siendo H un grupo compacto, se factoriza a través de b y $b(G)$ es denso en bG. Si aplicamos el Teorema 2.95, vemos $b(G\times H) = bG \times bH$, para cualquier par de grupos topológicos G y H. Por tanto tenemos una versión mucho más general que el Teorema 4.9 de [21].*

El Ejemplo 2.11 nos prueba que la clase de los grupos paratopológicos es una clase propia de los monoides topológicos cancelativos con traslaciones abiertas. El Corolario 2.3 de [44] nos dice que todo grupo paratopológico σ-compacto tiene celularidad contable, aquí presentamos un resultado análogo para monoides topológicos cancelativos con traslaciones abiertas, pero en lugar de la σ-compacidad usamos compacidad. Además damos un resultado análogo para σ-compacidad, pero agregando compacidad secuencial.

Teorema 2.98. *Todo monoide topológico cancelativo, compacto y con traslaciones abiertas tiene celularidad contable.*

Demostración. Sea S un monoide topológico cancelativo, con traslaciones abiertas y compacto. Los teoremas 2.40 y 2.37, garantizan que $\mathcal{C}_r(S) = \mathcal{C}_0(S_{sr})$. Veremos que $\mathcal{C}_0(S_{sr})$ sigue siendo cancelativo, para ello supongamos que $\varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(cx) = \varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(cy)$, pero que $\varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(y)$, para algunos $x, y, c \in S_{sr}$. La aplicación $t \mapsto ct$ es una biyección abierta y continua de S en cS, por tanto un homemomorfismo, luego envía abiertos regulares de S en abiertos regulares de cS. Como $\varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(x) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(y)$, sin pérdida de generalidad podemos hallar un abierto regular de S, V_y, que contiene a y, pero que no contiene a x, por ser S cancelativo, $cx \notin cV_y$. Por lo ya dicho cV_y es un abierto regular de cS y este último es abierto en S. El Teorema 2.74, garantiza que la semiregularización se respeta en espacios abiertos se S, por tanto $cV_y = cS \cap W$, siendo W un abierto regular en S. Como $cx \notin cV_y$, luego $cx \notin W$. Por tanto W es un abierto en S_{sr} que contiene a cy pero no contiene a cx, luego ii) de la Proposición 2.13 nos dice que $\varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(cx) \neq \varphi_{(\mathcal{C}_0,S_{sr})}(cy)$, contradiciendo lo supuesto. Esto prueba que es cancelativo a izquierda, análogamente se prueba que lo es también a derecha. Los Teorema 2.94 y 2.93 nos dicen que la operación conjuntamente continua de S se refleja de forma conjuntamente continua a $\mathcal{C}_r(S)$, por tanto $\mathcal{C}_r(S)$ es un monoide topológico cancelativo, Hausdorff y compacto, el Teorema 2.5.2 de [5] nos dice que $\mathcal{C}_r(S)$ es un grupo topológico, y por el Corolario 2.3 de [44], tiene celularidad contable, el Teorema 2.42, nos indica que S tiene celularidad contable. $\square$

Teorema 2.99. *Todo monoide topológico cancelativo con traslaciones abiertas σ-compacto y secuencialmente compacto tiene celularidad contable.*

Demostración. Sea S un monoide topológico cancelativo con traslaciones abiertas. Dado que $\mathcal{C}_r(S) = \mathcal{C}_0(S_{sr})$, la prueba del Teorema 2.98, nos indica que $\mathcal{C}_r(S)$ sigue siendo cancelativo, además coma la σ-compacidad y la compacidad secuencial se preserva bajo imágenes de funciones continuas, tenemos que $\mathcal{C}_r(S)$ es un semigrupo topológico cancelativo secuencialmente compacto y σ-compacto, que por Teorema 6 de [7] es un grupo topológico. El Corolario 2.3 de [44] nos indica que $\mathcal{C}_r(S)$ tiene celularidad contable y por Teorema 2.42 así mismo la tiene S. $\square$

Con el siguiente ejemplo vemos que la condición de ser compacto en el Teorema 2.98 es necesaria.

Ejemplo 2.14. *Sea $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Obviamente G es un monoide cancelativo dotado de la suma usual en $\mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $V_x = \{(x, y) : y \geq 0\}$. Se puede ver que $\{V_x : x \in \mathbb{R}\}$, constituyen una base para una topología en G, que hace de G un monoide topológico con traslaciones abiertas. Además $B = \{V_x : x \in \mathbb{R}\}$, constituyen un cubrimiento abierto para G, que no admite subcubrimiento finito, por tanto G no es compacto. Además B es una familia celular de G no contable, luego G no tiene celularidad contable.*

PROBLEMAS ABIERTOS

Después de desarrollar esta investigación quedan los siguientes problemas para futuras investigaciones en el área.

Problema 2.1. *¿Es $\mathcal{C}(C(X,X)) = C(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(X))$ para cada clase PS, $\mathcal{C}$ y cada espacio X?*

Problema 2.2. *Si S un semigrupo topológico ¿es $\mathcal{C}(S)$ un semigrupo topológico?*

Problema 2.3. *Caracterizar a la familia de espacios $\{X_i\}_{i\in I}$ y la clase $\mathcal{C}$, tal que la reflexión sobre $\mathcal{C}$ respeta el producto de los X_i.*

Problema 2.4. *Encontrar una condición necesaria y suficiente para la reflexión sobre $\mathcal{C}_1$ respete subespacios.*

Problema 2.5. *¿Bajo qué condiciones es $\mathcal{C}_1(X) = \mathcal{C}_2(X)$?*

Problema 2.6. *¿Bajo qué condiciones la reflexión sobre $\mathcal{C}_2$ respeta subespacios?*

Problema 2.7. *Caracterizar la reflexión sobre $\mathcal{C}_{fh}$ y $\mathcal{C}_u$.*

Problema 2.8. *¿Cada monoide topológico cancelativo con traslaciones abiertas y σ-compacto tiene celularidad contable?*

Bibliografía

[1] Ademek J., Herrlich H. y Strecker G. *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats* , Free Software Foundation(2004).

[2] Alexandroff P. *Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume*, Russ., German Summary Mat. Sbornik (N.S.) (47)(1939), 403-423.

[3] Alexandroff P. *On the concept of a topological space*, Uspehi Matern. Nauk (NS) 2, no 1 (17)(1947), 5-57.

[4] Arhangelskii A. y Reznichenko E. *Paratopological and semitopological groups versus topological groups*, Topology and its applications 151 (2005)107-119.

[5] Arhangelskii A. y Tkachenko M. *Topological groups and related structures*, Atlantis Studies in Mathematics(2008).

[6] Banakh T. y Ravsky A. *Each paratopological group regular is completely regular*, Procedings of the american mathematical society 145 (2016) 1373-1382.

[7] Bokolo B. y Guran I. *Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group.* , Matematychni Studii 6 (1996) 39-40.

[8] Cech E. *Topological Spaces. (Revised ed. by Z. Frolik and M. Katetov) 1.*, Wiley, London (1966) .

[9] Comfort W., Hernández S. y Trigos J. *Relating a Locally Compact Abelian Group to Its Bohr Compactification*, advances in mathematics 120, 145 (1996) 322-344.

[10] De Vries J. y Husek M. *Preservation of products by functors close to reflectors*, Topology and its applications 27 (1987) 171-189.

[11] Echi O. y Lazaar S. *Universal Spaces, Tychonoff and spectral spaces*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy Abril 2009 (2009)35-48

[12] Engelking R. y *General Topology Vol. 6*, Heldelmann Verlag Berlin (1989).

[13] González G., *Closed Congruences on semigroups*, Divulgaciones Matemáticas 9 (2001) 117–121.

[14] Hart J., Kunnen K., *Bohr compactifications of discrete structures*, Fundam. Math 160 (2) (1999) 101–151.

[15] Hernández C., Rendón O., Tkachenko M. y Villegas L. y *Grupos Topológicos*, Departamento de Matemáticas UAM-I (1997).

[16] Hernández J. y Hernández S. *Reflections in topological algebraic structures*, Periodica Mathematica Hungarica. En proceso de correcciones sugeridas por el evaluador.

[17] Herrlich H. *$\mathcal{E}$-kompakte Räume*, Habil. Schrift, Free Univ. Berlin. (1965).

[18] Herrlich H. *$\mathcal{E}$-kompakte Räume*, Math. Z. 96 (1967) 228-255.

[19] Herrlich H. *On the concept of reflections in general topology*, Contrib. Extens. Theory topol. Struct., Proc. Sympos. Berlin 1967 (1969) 105-114.

[20] HERRLICH H. *Wann sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant?*, MATH. Z. 90 (1965b) 152-154.

[21] HUANG S Y LIANG H *Existence of reflections and its applications*, TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS 218 (2017) 30-41.

[22] HUVSEK M.*Perfect images of E-compact spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci.* MATH .. ASTR. PHYS. 20 (1972) 41-45.

[23] ISHII T. *The Tychonofffunctor and related topics. In: Topics in General Topology,*, EDS. K. MORITA AND J. NAGATA NORTH HOLLAND, AMSTERDAM (1989) 203-243.

[24] KANNAN V., *Coreflective subcategories in topology.*, THESIS, MADURAI UNIV (1970).

[25] KENNISON J., *Reflective funtors in general topology and elsewhere*, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY 18 (1965) 303-315.

[26] KHOSRAVI B., *On Topological Congruences of a Topological Semigroup*, BULLETIN OF THE MALASYAN MATEHMATICAL SCIENCE SOCIETY 35 (2012) 257–262.

[27] LIN F. Y ZHANG K.*A problem of M.Tkachenko on semitopological groups*, TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS 172 (2014) 10–13.

[28] MORITA K. Y NAGATA J. *Topics in General Topology, Vol. 41* . NORTH-HOLLAND MATHEMATICAL LIBRARY(1989).

[29] MRÓWKA, S. *On universal spaces.* . BULL. ACAD. POLON. SCI., CL. III (1956)479-481.

[30] MRSEVIC M., REILLY L. Y VAMANAMURTHY M. *On semiregularitation topoligies*, AUSTRAL. MATH. SOC. SERIES A 38 (1985) 40-54.

[31] Munkres J. *Topología 2 edición*. Pearson Prentice Hall(2002).

[32] Peng L. *A note on semitopological groups and paratopological groups,* Topology and its Applications 191 (2015) 143–152.

[33] Preuss G. *Theory of Topological Structures. An Approach to Categorical Topology*. D. Reidel Publishing Company(1987).

[34] Ramer A. *Some problems on universal spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys 13 (1965) 291-294.

[35] Ravsky O. *Paratopological Groups II*, Matematichny studii 17 (2002) 93-101.

[36] Reznichenko E.y V. Uspensky *Maltsev and retral sapces*, Topology and its applications(1997) 115–129.

[37] Reznichenko E y Uspensky V., *Pseudocompact Maltsev spaces*, Topology and its applications(1998) 83–104.

[38] Rothman M. *Homomorphisms and Topological Semigroups*, Louisiana State University LSU Historical Dissertations and Theses (1958).

[39] Rubiano G. *Topología General* , Universidad Nacional de Colombia(1997).

[40] Samuel P., *On universal mappings and free topological groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 591–598.

[41] Sánchez I., *A note on the T_2-reflection of semitopological groups*, Topology and its Applications 182 (2015) 103–107.

[42] Stone M., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) 375-481.

[43] THOMAS P., *Associated Regular spaces*, WESTERN CAROLINA UNIVERSITY, CULLOWHEE, NORTH CAROLINA(1968) 1087–1092.

[44] TKACHENKO M. *Applications of the reflection functors in paratopological groups* TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS 192 (2015) 176-187

[45] TKACHENKO M. *Axioms of separation in paratopological groups and related functors* TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS 179 (2014) 200-214

[46] TKACHENKO M. *Axioms of separation in semitopological groups and related functors* TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS 161 (2014) 364-376

[47] TKACHENKO M. *Paratopological groups and semitopological groups versus topological groups.* RECENT PROGRESS IN GENERAL TOPOLOGY III SPRINGER (2014)

[48] TKACHENKO M. *The Souslin property in free paratopological groups over compact spaces* MAT. ZAMETKY 34 (4) (1983) 601-607 IN RUSSIAN ENGLISH TRANSALAT: MATH NOTES 34(1983) 790-793.

[49] TYCHONOFF A. *Über die topologische Erweiterung von Räumen* MATH. ANN. 102 (1930) 544–561.

[50] VIETORIS L. *Stetige Mengen* MONATSH. F. MATHEM. U. PHYSIK 31 (1921) 173–204.