El Teorema de Tychonoff sobre varias Estructuras Topológicas

Trabajo de Grado
Presentado como Requisito para Obtener
el Título de Matemático, por

ALEXIS CARRILLO BLANQUICETT

ASESOR DE TÉSIS
ELIAS JOSÉ SALAZAR BUELVAS
Magíster en Ciencias Estadística

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
Facultad De Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas

Cartagena de Indias D.T. y C.
Colombia

Mayo de 2014

El Teorema de Tychonoff sobre varias Estructuras Topológicas

ALEXIS CARRILLO BLANQUICETT

Asesor: Elias José Salazar Buelvas
Magister en Ciencias Estadística
Universidad de Cartagena
Colombia

Dedicado a
Mami, Papi y Maocita osa:
Mi motivación

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia quiero agradecerle a Dios por interceder en mí, dándome fortaleza y determinación para volcar mi vida y orientarme hacia este camino en el que estoy a punto de lograr esta meta. Agradezco a mis padres Adolfo Carrillo Sarabia y Anabela Blanquicett Prieto porque definitivamente sin su apoyo y comprensión nada de esto seria posible. A toda la comunidad universitaria quienes hicieron de la universidad mi segundo hogar, en especial a José, Silvia, Luciana y María que además de ser mis compañeros fueron como mi familia en todo este proceso.

Como no agradecer encarecidamente a todos los profesores que contribuyeron en mi formación como matemático, particularmente a los profesores Elias José Salazar Buelvas, ya que fue quien despertó mi interés en la Topología y esta hermosa teoría en la que hoy me acompaña como asesor y a Julio Hernández Arzusa, por ser más que profesores, maestros y mis ejemplos a seguir.

Por ultimo quiero agradecer a la mujer que cambió mi vida, Estefany Pacheco Burrié, sencillamente es todo para mi.

Índice general

Introducción

En 1930 el matemático ruso Andrey Nikolayevich Tychonoff probó por primera vez el teorema que establece que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto, aunque inicialmente lo demostró para el producto del intervalo unitario cerrado $[0, 1]$, fue en 1935 cuando enunció este resultado de una manera más general, pero anotando que la demostración en este caso discurría como en el caso especial, es por esta razón que este teorema es llamado Teorema de Tychonoff, el cual depende crucialmente de las definiciones de compacidad y de la topología producto, también llamada topología producto de tychonoff, pues en el articulo que éste publicó el 1935 define esta topología por primera vez. Un aspecto a tener en cuenta en la prueba dada por Tychonoff es que la definición de compacidad más popular en los siglos XIX y XX fue el criterio de Bolzano Weierstrass que establece que un espacio es compacto si cada sucesión admite una subsuceción convergente, lo que hoy día se conoce como compacidad secuencial, ya que la definición de compacidad dada por Heine Borel, donde todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito es relativamente reciente.

El Teorema de Tychonoff ha sido descrito como el resultado individualmente, más importante de la topología general, pues debido a sus aportes es uno de los medios más poderosos para garantizar la compacidad de ciertos espacios clásicos del Análisis, como es el caso de su aplicación para construir la compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular, véase [15, pags 270 - 275] y para probar la version general del teorema de Ascoli [15, pags 331 - 333]. Con respecto a las demostraciones publicadas, se conocen tres pruebas estándares de este importante teorema de la topología general, las cuales se pueden encontrar en el libro clásico de topología de John L. Kelley [10]: la prueba usando el teorema de subbase de Alexander [10, Cap.5, T.6, T. 13]; la teoría de convergencia de filtros y ultrafiltros, debida a Henri Cartan y desarrollada en 1937 por Bourbaki, quien aportó así una nueva demostración [10, pag. 143 - 144] y la prueba en términos de la teoría de convergencia de redes universales [10, pag. 81 Ej. J]. De estas la más popular es la dada por Burbaki, pues la ayuda que proporciona la teoría de filtros hace muy sencillo el desarrollo de esta prueba.

Este conjunto de hechos es motivación suficiente para pensar en extender esta consecuencia de suma fortaleza que proporciona el Teorema de Tychonoff, sobre cualquier estructura topológica en la que se halla desarrollado la teoría de compacidad. Por esta razón el propósito de este proyecto de tesis es ser un espacio donde además de rendir homenaje a este importante teorema, se muestre una prueba del mismo sobre varias estructuras topológicas, entre las que se encuentra la topología general, la L-topología y la L-topología difusa, basados en el análisis, investigación y reestructuración de la teoría desarrollada afín en el libro "Topología General"de Gustavo N. Rubiano (ver[5]) y los artículos "*Axiomatic Foundations of Fixed-Basis Fuzzy Topology* de U. Höhle y A.P. Šostak (véase [8]) y "*Compactness in L-Fuzzy Topological Spaces* de J. Luna y E. Salazar (véase [13]), respectivo a cada estructura topológica, las cuales se desarrollarán de manera detallada en pro de establecer dicha prueba, en los capítulos 1,2 y 3; respectivamente. De forma general este trabajo está organizado de la siguiente manera: se inicia en el capítulo 1 definiendo la topología general y algunas propiedades y resultados básicos e inherente que apunten a caracterizar la compacidad a través de la teoría de filtro y a definir la topología producto, para posteriormente establecer una serie de resultados que ayuden a dar una prueba del Teorema de Tychonoff sobre la topología general. Este capítulo además de aportar una prueba de este teorema en uno de los ambientes fijados, pretende también ser quien imparta el orden a seguir en los capítulos posteriores, ya que en estos se usa como medio para establecer dicha prueba la teoría de filtros sobre el marco de cada estructura topológica, las cuales no son comúnmente tratadas en la formación matemática de un estudiante.

Capítulo 1

Teorema de Tychonoff sobre la Topología general

1.1. Introducción

En este capítulo se desarrollará una prueba del Teorema de Tychonoff teniendo como referencia la prueba dada por Bourbaki, la cual se fundamenta en la aplicación de la teoría de filtros. Inicialmente se introduce una serie de definiciones y propiedades básicas que aporten a la construcción de la definición de la topología producto, posteriormente se definen los espacios topológicos compactos, para luego ser caracterizados por medio de la convergencia de filtros y ultrafiltros, junto con algunos resultados propios de esta teoría, logrando así establecer una prueba del Teorema de Tychonoff.

1.2. Espacios topológicos

Definición 1.2.1. *Una topología sobre un conjunto X es una familia $\Im = \{U_i : i \in I\}$, donde $U_i \subseteq X$ para cada $i \in I$ e I es un conjunto de indices, que satisface las siguientes propiedades:*

i. $\emptyset \in \Im$ *y* $X \in \Im$.

ii. $\bigcap_{i\in F} U_i \in \Im$, *para cada F subconjunto finito de I.*

iii. $\bigcup_{i\in J} U_i \in \Im$, *para cada $J \subseteq I$*

El par $(X, \Im)$, formado por un conjunto X y una topología $\Im$ sobre X se llama espacio topológico, pero a menudo se omite hacer mención específica de $\Im$ si no existe confusión y se dirá que un conjunto X para el cual se ha definido una topología, se llama espacio topológico.

Nota 1.2.1. *Si X es un espacio topológico con una topología $\Im$, se dice que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a $\Im$. Los complementos de los conjuntos abiertos se llaman conjuntos cerrados.*

Véase a continuación algunos ejemplos de espacios topológicos:

Ejemplo 1.2.1 (Discreta). *Sea X un conjunto cualquiera, la familia $\Im = \mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina Topología discreta de X, esta es la topología sobre X con la mayor cantidad de abiertos posibles.*

Ejemplo 1.2.2 (Grosera). *Sea X un conjunto cualquiera, la familia $\Im = \{\phi, X\}$ es una topología sobre X y se llama Topoloía grosera de X, ya que contrario a la anterior, prácticamente no permite la presencia de abiertos. Esta es la topología con la menor cantidad de abiertos posibles.*

Ejemplo 1.2.3 (Complementos finitos). *Sea X un conjunto y sea $\Im_f = \{U \subseteq X : X - U \text{ es finito o } U = X\}$, es decir $\Im_f$ es la familia de todos los subconjuntos U de X cuyo complemento es finito o es todo X. $\Im_f$ es una topología sobre X, llamada topología de los complementos finitos.*

Entre los conjuntos abiertos de un espacio topológico, es importante especificar una familia más pequeña de estos, que sea capaz de generar el resto de los abiertos, es decir, que toda la estructura topológica se pueda recuperar a partir de una parte de ella. La noción de esta familia es lo que formalmente se llama base de una topología.

Definición 1.2.2. *Sea $(X, \Im)$ un espacio topológico, una base para $\Im$ es una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \Im$, tales que dados $U \in \Im$ y $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$.*

Teorema 1.2.1. *Sea X un conjunto. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología en X, si y sólo si se satisface:*

i. *Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B$.*

ii. *Dados cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Demostración. Asuma que $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\Im$ de X, pruebe que se cumple (i) y (ii).

i. Dado $x \in X$ existe $U \in \Im$, tal que $x \in U$ y como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U$.

ii. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, luego como $B_1 \cap B_2 \in \Im$ y por ser $\mathcal{B}$ una base, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Asuma ahora que $\mathcal{B}$ es una familia de subconjunto de X que satisface (i) y (ii), defínase una topología $\Im$ para la cual $\mathcal{B}$ es una base.

Sea $\Im = \left\{U \subseteq X : U = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ con } B_i \in \mathcal{B}, \text{ para todo } i \in I\right\}$. $\Im$ es en efecto una topología. De la condición (i) es claro que $X \in \Im$, $\emptyset \in \Im$ por ser la unión de una familia vacía.

Si $U_1, U_2 \in \Im$, entonces $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$ y $U_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$, donde $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ para todo $i \in I$, $j \in J$. Para cada $x \in U_1 \bigcap U_2$, existen $i_0 \in I$, $j_0 \in J$, tales que $x \in B_{i_0} \bigcap B_{j_0}$, luego de la condición (ii) existe $B_x \in \mathcal{B}$, tal que

$x \in B_x \subseteq B_{i_0} \cap B_{j_0} \subseteq U_1 \cap U_2$, de esta manera es claro que $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{x \in U_1 \cap U_2} B_x$. Por tanto $U_1 \cap U_2 \in \Im$.

Sea $\{U_i\} i \in I$ una familia de conjuntos de $\Im$, luego $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$, para cada $i \in I$ con $B_{ij} \in \mathcal{B}$ para todo $j \in J_i$, de esta manera se tiene

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J_i} B_{ij} \right) = \bigcup_{i \in I,\, j \in J_i} B_{ij}.$$

Luego $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Im$. Por tanto $\Im$ es una topología. Resta probar ahora que $\mathcal{B}$ es una base de $\Im$, esto es si $U, V \in \Im$ y $x \in U \cap V$, por la definición de $\Im$ existen $B_U, B_V \in \mathcal{B}$, tales que $x \in B_U \subseteq U$ y $x \in B_V \subseteq V$ y de la condición (ii) existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq (B_U \cap B_V) \subseteq U \cap V$. Lo cual prueba que $\mathcal{B}$ es una base para $\Im$. ■

Ejemplo 1.2.4. *Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de los números reales. La familia* $\mathcal{B}$ *de todos los intervalos abiertos en la recta real, esto es*

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde $(a, b) = \{x : a < x < b\}$. *Es una base, y la topología generada por* $\mathcal{B}$ *se denomina topología usual sobre la recta real y el espacio topológico es denotado por* $\mathbb{R}_u$.

Definición 1.2.3. *Sea* $(X, \Im)$ *un espacio topológico. Una subbase para la topología* $\Im$ *es una subcolección* $\mathcal{D} \subseteq \Im$ *con la propiedad que la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{D}$ *es una base para* $\Im$.

Ejemplo 1.2.5. *La colección* $\mathcal{D} = \{(a, +\infty), (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, *donde* $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$ *y* $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$ *forma una subbase para la topología usual.*

A continuación se introduce un concepto, que en el camino para lograr una prueba del Teorema de Tychonoff juega un papel crucial, debido a la motivación que ejerce la naturaleza de sus propiedades y su uso en el desarrollo de esta teoría. Sin más se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.4. *Sea* $(X, \Im)$ *un espacio topológico. Se dice que* $V \subseteq X$ *es una vecindad de* $x \in X$, *notada por* V_x, *si existe* $U \in \Im$, *tal que* $x \in U \subseteq V_x$. *Al conjunto de todas las vecindades del punto* x *se denota por* $\mathcal{V}(x)$.

Proposición 1.2.1. *Sean* $(X, \Im)$ *un espacio topológico y* $x \in X$. *La colección* $\mathcal{V}(x)$ *de las vecindades de* $x \in X$ *posee las siguientes propiedades:*

i. *Si* $V \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $x \in V$.

ii. *Si* $V, W \in \mathcal{V}(x)$, *entonces* $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

iii. *Si* $V \in \mathcal{V}(x)$ *y* $V \subseteq W$, *entonces* $W \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración.

i. Es claro por definición de vecindad.

ii. Suponga $V, W \in \mathcal{V}(x)$, luego por definición existen $U_1, U_2 \in \Im$, tales que $x \in U_1 \subseteq V$ y $x \in U_2 \subseteq W$ de modo que $x \in U_1 \cap U_2 \subseteq V \cap W$, donde $U_1 \cap U_2 \in \Im$, así $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

iii. Asuma $V \in \mathcal{V}(x)$ y $V \subseteq W$, luego existe $U \in \Im$, tal que $x \in U \subseteq V$, ahora como $V \subseteq W$, entonces $x \in U \subseteq W$, lo cual implica que $W \in \mathcal{V}(x)$. ■

1.2.1. Funciones continuas

Hasta este punto se ha definido y desarrollado de la manera en que concierne los objetos de estudio de esta teoría (espacios topológicos), ahora se necesita establecer algún tipo de comunicación entre estos objetos. Es por ello que resulta de gran utilidad el uso de las funciones entre espacios topológicos, sobre todo el de las funciones continuas, las cuales ayudan a definir espacios topológicos más generales, sobre el cual existe el objeto de este estudio, como es el caso de la topología producto, con la que se entrará en detalles más adelante.

Definición 1.2.5. *Sean $f : (X, \Im) \to (Y, \mathcal{H})$ una función entre espacios topológicos y $x \in X$ dado, se dice que f es continua en x si dada una vecindad $V_{f(x)}$ en Y, existe una vecindad U_x en X, tal que $f(U_x) \subseteq V_{f(x)}$.*

Si f es continua en cada punto de X, se dice que f es continua en X.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : (X, \Im) \to (Y, \mathcal{H})$ una función. f es continua en X si y sólo si para cada $V \in \mathcal{H}$ se tiene $f^{-1}(V) \in \Im$, esto es, $f^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq \Im$*

Demostración. Sea f es una función continua en X, se debe probar que si $V \in \mathcal{H}$, entonces $f^{-1}(V) \in \Im$. Esto se hará expresando a $f^{-1}(V)$ como unión de abiertos en $\Im$.

Sea $x \in f^{-1}(V)$, luego $f(x) \in V$, es decir, V es una vecindad de $f(x)$ y como por hipótesis f es continua, existe una vecindad U_x en X, tal que $f(U_x) \subseteq V$, de modo que $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Así las cosas sigue

$$f^{-1}(V) = \bigcup \left\{ U_x : x \in f^{-1}(V) \right\}$$

Ya que cada $U_x \in \Im$, para cada $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f^{-1}(V) \in \Im$.

Recíprocamente, suponga que para cada $V \in \mathcal{H}$, $f^{-1}(V) \in \Im$, véase que f es continua en X.

Sea $V \in \mathcal{H}$ y $x \in X$, tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V) \in \Im$, es decir, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x, de donde se tiene $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Esto prueba que f es continua en x, y como x es arbitrario se sigue que f es continua en todo X. ■

1.2.2. La topología producto

Teniendo en cuenta los espacios topológicos ya conocidos, resulta de gran interés construir nuevos espacios a partir de estos, como es el caso de definir una topología sobre el producto cartesiano de dos espacios topológicos. A continuación se introduce el concepto para el caso general, donde se define una topología sobre el producto cartesiano de una familia indexada de espacios topológicos.

Definición 1.2.6. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia indizada de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia indizada, denotado por*

$$\prod_{i\in I} X_i$$

se define como el conjunto de las funciones

$$\left\{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i\right\}$$

donde normalmente se escribe x_i en lugar de $x(i)$ y se le llama coordenada i-ésima de $x = (x_i)_{i\in I}$. El axioma de elección garantiza que este producto es no vacío si cada factor X_i no lo es.

Definición 1.2.7. *Sea $\{(X_i, \Im_i)\}_{i\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. La función*

$$p_j : \prod_{i\in J} X_i \to X_j$$

que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $j-$ésima

$$p_j\left((x_i)_{i\in J}\right) = x_j$$

se denomina aplicación proyección asociada con el indice j.

Definición 1.2.8. *Sea $\{(X_i, \Im_i)\}_{i\in I}$ una familia indexada de espacios topológicos. Se Define como topología producto la generada por la subbase $\mathcal{S}$ conformada por los cilindros abiertos $p_i^{-1}(U_i)$, esto es, la colección*

$$\mathcal{S} = \left\{p_i^{-1}(U_i) : U_i \in \Im_i, i \in I\right\}.$$

En esta topología, $\prod_{i\in I} X_i$ se denomina espacio producto. Algunas veces la topología producto es llamada topología producto de Tychonoff.

Es claro a partir de la definición de las proyecciones que cada p_j es sobreyectiva para cada $j \in J$, además la definición anterior garantiza la continuidad de cada una de estas. Los abiertos U que conforman la base, se llaman cajas abiertas, las cuales están formadas por la intersección de finitos cilindros, esto es $U = \bigcap_{k=1}^{n} p_{ik}^{-1}(U_{ik})$ o, de manera equivalente

$$U = U_{i1} \times U_{i2} \times \ldots \times U_{in} \times \prod_{i\in I} X_i, i \neq i_1, i_2, \ldots i_n.$$

Es decir, U es un producto donde todos los espacios coordenados son los X_i, salvo para un numero finito de indices i_k donde se tienen abiertos propios de cada uno de los espacios indizados.

1.3. Compacidad, filtros y ultrafiltros

La definición de compacidad es de gran importancia, en cuanto a sentar las bases de de los objetivos propuestos se refiere, ya que traerla a la luz, llena de vida a la definición de la sección anterior (topología producto), y es a través de este acoplamiento que coexiste el teorema de interés, el cual se pretende desarrollar con ayuda de la teoría de filtros, tema que se trata en esta sección.

Antes de proceder a definir la compacidad se introduce la siguiente definición.

Definición 1.3.1. *Sean $(X, \Im)$ un espacio topológico. Una colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de conjuntos abiertos en X se dice que es un cubrimiento abierto de X si*

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Si existe $J \subseteq I$, tal que $\{U_j\}_{j\in J}$ es también cubrimiento de X, a la familia $\{U_j\}_{j\in J}$ se le llama un subcubrimiento abierto de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Definición 1.3.2. *Un espacio topológico $(X, \Im)$ se dice compacto si de cada cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X se puede extraer un subcubrimiento finito.*

Ejemplo 1.3.1. *Cualquier espacio topológico $(X, \Im)$ que contenga un número finito de puntos es compacto, ya que cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.*

Ejemplo 1.3.2. *El espacio topológico $(X, \Im_f)$ dotado de la topológia $\Im_f$ de los complementos finitos es compacto. Ya que si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X y tomando $U \in \{U_i\}_{i\in I}$ se tiene que $X - U$ es finito, así que sólo basta con un número finito de miembros de $\{U_i\}_{i\in I}$ para obtener un subcubrimiento abierto.*

Proposición 1.3.1. *Sea $f : (X, \Im) \to (Y, \mathcal{H})$ una función continua y sobreyectiva. Si X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de Y. Es decir

$$Y \subseteq \bigcup_{i\in i} U_i,$$

así se tiene

$$X = f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i),$$

esto es, $X \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$, luego la colección $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto para X, ya que f es continua. Y como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^{n}$, esto es

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i).$$

Puesto que f es sobreyectiva, se tiene

$$Y = f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Así las cosas, la colección $\{U_i\}_{i\in I}$ admite un subcubrimiento finito. Por tanto, Y es compacto. ■

1.3.1. Filtros

Las propiedades (ii) y (iii) del conjunto $\mathcal{V}(x)$ de las vecindades de un punto x en un espacio topológico $(X, \Im)$, dadas en la Proposición 1.2.1, aportaron una fuerte motivación para establecer la definición de filtros, la cual se utilizará para vincular la noción de convergencia en un espacio topológico y poder caracterizar la compacidad a partir de esta.

Definición 1.3.3. *Dado un conjunto X, un filtro $\mathcal{F}$ para X es una colección, no vacía, de subconjuntos, no vacíos, de X que satisface las siguientes propiedades:*

i. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

ii. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Al conjunto de todos los filtros sobre X se denota por $Fil(X)$.

Ejemplo 1.3.3. *Sean $(X.\Im)$ un espacio topológico y un punto $x \in X$. La Proposición 1.2.1 prueba que el conjunto $\mathcal{V}(x)$ de las vecindades de x es un filtro para X.*

Definición 1.3.4. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro para X. Se dice que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$ si dado $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \subseteq F$.*

Usualmente los filtros se definen por medio de una base, donde sus elementos se obtienen a parir de los superconjuntos de los elementos de ésta.

Análogo a la definición de subbase para un espacio topológico, se define la subbse de filtro como sigue.

Definición 1.3.5. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro para X. Una subbse para un filtro $\mathcal{F}$ de X es una subcolección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ con la propiedad que la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base de filtro para $\mathcal{F}$.*

Teorema 1.3.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ es una base para un filtro en X, entonces $\mathcal{B}$ satisface las siguientes condiciones:*

i. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

ii. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ satisface (i) y (ii) existe un único filtro $\mathcal{F}$ en X, tal que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ es el filtro más pequeño que contiene a $\mathcal{B}$ y se denota por $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Demostración. Suponga que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para un único filtro $\mathcal{F}$ de X, véase que se satisfacen (i) y (ii).

i. Como $\mathcal{B}$ es una base para un único filtro $\mathcal{F}$ de X, se tiene $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y por ser $\mathcal{F}$ un filtro, de la definición, se deduce que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

ii. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, luego como $\mathcal{B}$ es una base para el filtro $\mathcal{F}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, por lo que $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, luego por definición de base, existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Para el reciproco, defínase $\mathcal{F}$ como sigue:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : B \subseteq F \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\} = \langle \mathcal{B} \rangle$$

Pruebe que $\mathcal{F}$ es un filtro. En efecto:

i. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, luego existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$, así se tiene $B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$ y por la condición (ii), existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que, $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. De esta manera se sigue que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

ii. Sea $F \in \mathcal{F}$, es fácil ver que si $F \subseteq G$, entonces $G \in \mathcal{F}$, pues como $F \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \subseteq F$ debido a que $F \subseteq G$, $B \subseteq G$ y por tanto $G \in \mathcal{F}$.

Así las cosas, $\mathcal{F}$ es un filtro. Por la condición (i) se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y de la forma en que esta definido $\mathcal{F}$, es claro que, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y para todo elemento $F \in \mathcal{F}$ dado, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \subseteq F$, así $\mathcal{B}$ es una base para el filtro $\mathcal{F}$. Resta probar que $\mathcal{F}$ es el único filtro generado por $\mathcal{B}$, para esto suponga que $\mathcal{G}$ también tiene como base a $\mathcal{B}$ y pruebe que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Sea $G \in \mathcal{G}$, luego existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \subseteq G$, esto se debe a que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{G}$, así $G \in \mathcal{F}$ y como $G \in \mathcal{G}$ es arbitrario, se tiene que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Sea ahora $F \in \mathcal{F}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \subseteq F$ y como $\mathcal{B}$ es también base de $\mathcal{G}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ así $B \in \mathcal{G}$, ya que $B \subseteq F$ se tiene $F \in \mathcal{G}$. Por esto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y por tanto $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Lo cual termina la prueba. ■

Las condiciones (i) y (ii) del Teorema 1.3.1 garantizan que si una colección $\mathcal{S}$ las satisface, entonces la intersección finita de elementos de esta colección nunca es vacía, es decir, satisface PIF. Es fácil ver a partir de la demostración del Teorema 1.3.1 que cualquier colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto X que satisfaga PIF es por definición una subbase para un filtro $\mathcal{F}$.

Ejemplo 1.3.4. *Sea X un conjunto y $A \subseteq X$, $\mathcal{B} = \{A\}$ es una base de filtro. El filtro generado por A, $\mathcal{F}_{\langle A \rangle} = \langle A \rangle$ se llama filtro principal asociado a A. El caso en que $A = \{a\}$ constituye un ejemplo de un tipo de filtro en especial, que se enunciará más adelante.*

Ejemplo 1.3.5. *Sea X un conjunto, la colección $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X - F \text{ es finito}\}$, es el filtro de los complementos finitos.*

Ejemplo 1.3.6. *Sea $\mathcal{B} \subseteq (\mathbb{N})$ el conjunto de las colas de $\mathbb{N}$, esto es,*

$$\mathcal{B} := \{S_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ donde } S_n := \{n, n+1, \ldots\}.$$

El filtro generado por $\mathcal{B}$ se llama filtro de Frèchet.

Ejemplo 1.3.7. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro para X dado, $\Im = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ es una topología, más comúnmente conocida como topología filtrosa.*

Proposición 1.3.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre conjuntos y sea $\mathcal{F}$ un filtro para X dado, la colección*

$$f(\mathcal{F}) := \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

es una base para un filtro en Y denotado por $f_*(\mathcal{F})$. si f es una función sobreyectiva, $f(\mathcal{F}) = f_*(\mathcal{F})$.

Demostración. Se probará que la colección $f(\mathcal{F})$ es una base de filtro en Y. Esto se hará mostrando que $f(\mathcal{F})$ satisface las condiciones (i) y (ii) del Teorema 1.3.1. En efecto:

i. Es claro que $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, pues $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y además $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$, ya que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y f es una función.

ii. Sean $B_1, B_2 \in f(\mathcal{F})$, véase que existe $B_3 \in f(\mathcal{F})$, tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Puesto que $B_1, B_2 \in f(\mathcal{F})$, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tal que $B_1 = f(F_1)$ y $B_2 = f(F_2)$, ahora como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $B_3 = f(B_1 \cap B_2) \in f(\mathcal{F})$. Además $f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2)$, por lo que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Como se quería probar.

   Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es sobreyectiva, pruebe que $f(\mathcal{F}) = f_*(\mathcal{F})$. Es decir, $f(\mathcal{F})$ es un filtro. Para esto pruebe primero que, si $H \subseteq Y$ y $G \in f(\mathcal{F})$, es tal que $G \subseteq H$, entonces $H \in f(\mathcal{F})$. Si $G \in f(\mathcal{F})$, existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $G = f(F)$, así se tiene $F \subseteq f^{-1}(G)$ y como $F \in \mathcal{F}$ entonces $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$, como $G \subseteq H$, $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$, y por tanto $f^{-1}(H) \in \mathcal{F}$. Puesto que por hipótesis f es sobreyectiva, $H = f(f^{-1}(H)) \in f(\mathcal{F})$, de esta manera $H \in f(\mathcal{F})$.

   Sean $G_1, G_2 \in f(\mathcal{F})$, se debe probar que $G_1 \cap G_2 \in f(\mathcal{F})$. Si $G_1, G_2 \in f(\mathcal{F})$, existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tales que $G_1 = f(F_1)$ y $G_2 = f(F_2)$, como $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $f(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{F}$ y por tanto $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = G_1 \cap G_2$, del resultado anterior se sigue que $G_1 \cap G_2 \in f(\mathcal{F})$. Así, $f(\mathcal{F})$ es un filtro para Y. ■

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son dos filtros sobre un conjunto X, tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, se dice que $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$. La relación $\subseteq$ define un orden parcial sobre el conjunto de todos los filtros sobre X, $Fil(X)$. Más precisamente $Fil(X)$ es inductivo, es decir, toda cadena tiene una cota superior.

En efecto: sea $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una cadena cualquiera de $Fil(X)$, se probará que $\mathcal{A}$ posee cota superior. Considérese la colección $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, se mostrará que ésta es un filtro. Sean $A, B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, luego $A \in \mathcal{A}_j$ y $B \in \mathcal{A}_k$ para algún $j, k \in I$, ahora como $\mathcal{A}$ es una cadena se sigue que $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_k$ o $\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_j$, sin perdida de generalidad se asume que $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_k$, luego $A \in \mathcal{A}_k$ y como este es un filtro, $A \cap B \in \mathcal{A}_k$, para algún $k \in I$, de modo que $A \cap B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Se verá ahora que si $A \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Si $A \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$, $A \in \mathcal{A}_j$ para algún $j \in J$, puesto que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{A}_j$ para algún $j \in J$, por tanto $B \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Así las cosas se tiene $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es un filtro, y es tal que $\mathcal{A}_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ para todo $j \in I$. Es decir, el filtro $\bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es una cota superior para la cadena $\mathcal{A}$ y como esta a su vez es arbitraria en $Fil(X)$ se sigue que $Fil(X)$ es inductivo. Por lo tanto, es posible aplicar el lema de zorn y hablar de un elemento maximal de $Fil(x)$, lo cual motiva a la siguiente definición.

Definición 1.3.6. *Dado un conjunto X, un ultrafiltro $\mathcal{U}$ para X es un elemento maximal de $Fil(X)$; esto es, ningún filtro es más fino que $\mathcal{U}$.*

Teorema 1.3.2. *Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X, tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X dado, y

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{G} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{G} \text{ es un filtro en } X\},$$

$\mathcal{A}$ se ordena con la inclusión. Si se define $\mathcal{K} = \bigcup \mathcal{A}$, esto es, $\mathcal{K}$ es la reunión de todos los filtros que están en $\mathcal{A}$, de la discusión anterior se sabe que $\mathcal{K}$ es un filtro y es cota superior para $\mathcal{A}$; luego, aplicando el lema de zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{U}$ en $\mathcal{A}$, esto es $\mathcal{U}$ es maximal en el conjunto de los filtros que contienen a $\mathcal{F}$, por tanto es un ultrafiltro y es tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Como se quería probar. ∎

Si $A \subseteq X$ con $A = \{a\}$, el filtro generado por A es un ultrafiltro. En efecto: suponga que $\mathcal{F}$ es un filtro para X y es tal que $\langle\{a\}\rangle \subseteq \mathcal{F}$, donde $\langle\{a\}\rangle$ es el filtro generado por $A = \{a\}$, se verá que $\langle\{a\}\rangle = \mathcal{F}$. Supóngase que existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $F \notin \langle\{a\}\rangle$, entonces $\{a\} \nsubseteq F$, así $\{a\} \subset F^c$, es decir, $F^c \in \langle\{a\}\rangle$ y por tanto $F^c \in \mathcal{F}$, ahora como $\mathcal{F}$ es un filtro y $F, F^c \in \mathcal{F}$, entonces $\emptyset = F \cap F^c \in \mathcal{F}$ lo cual es absurdo. Por tanto $\langle\{a\}\rangle = \mathcal{F}$, esto prueba que $\langle\{a\}\rangle$ es un filtro maximal, es decir un ultrafiltro.

Nota 1.3.1. *El ultrafiltro $\langle\{a\}\rangle$ se llama ultrafiltro principal o fijo (los otros ultrafiltros se llaman no principales o libres). Fuera de este ejemplo no se conoce más ultrafiltro de manera concreta; los demás tendrán la garantía de existir pero no se conocen.*

La siguiente proposición ayuda a determinar cuándo un filtro dado es un ultrafiltro.

Proposición 1.3.3. *Sea X un conjunto dado y $\mathcal{U}$ un filtro en X. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro si y sólo si dado $A \subseteq X$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X, véase que si $A \subseteq X$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$. Asuma que $A \notin \mathcal{U}$ y $A^c \notin \mathcal{U}$, y llegue a una contradicción. Considere la siguiente colección

$$\mathcal{B} := \{F \cap A : F \in \mathcal{U}\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{B}$ es una base de filtro para X, ya que $\mathcal{B}$ satisface PIF, y si $F \cap A = \emptyset$, para algún $F \in \mathcal{U}$, entonces $F \subseteq A^c$ y por tanto $A^c \in \mathcal{U}$. Esto contradice lo supuesto. El filtro $\mathcal{G} = \langle\mathcal{B}\rangle$, contiene a $\mathcal{U}$, ya que si $F \in \mathcal{U}$, $F \cap A \in \mathcal{B}$ y $F \cap A \subseteq F$ por lo que $F \in \langle\mathcal{B}\rangle$, esto prueba que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G} = \langle\mathcal{B}\rangle$, ademas, $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{U}$, pues $A \notin \mathcal{U}$ y $A \cap F \subseteq A$ para algún $F \in \mathcal{U}$. Luego, $A \in \mathcal{G}$.

Esto prueba que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es un untrafiltro.

Recíprocamente, suponga que para $A \subseteq X$ dado, si se tiene $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Esto es, sea $\mathcal{F}$ un filtro en X, tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, véase que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, para esto suponga que existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $F \notin \mathcal{U}$, así $F^c \in \mathcal{U}$ (por hipótesis) y como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $F^c \in \mathcal{F}$, de esta manera $F, F^c \in \mathcal{F}$ y por tanto $\emptyset = F \cap F^c \in \mathcal{F}$ lo cual es absurdo. Por tanto $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. ■

1.4. Teorema de Tychonoff

En esta sección se introduce una noción de convergencia utilizando el concepto de filtro, con el fin de caracterizar los espacios topológicos compactos y vía esta caracterización dar una prueba del Teorema de Tychonoff.

Definición 1.4.1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $(X, \Im)$. Se dice que $\mathcal{F}$ converge al punto $x \in X$, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x. Esto es, si $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$ y se denota por $\mathcal{F} \to x$.*

Ejemplo 1.4.1. *Si $(X, \Im)$ es un espacio topológico, dotado de la topología discreta $\Im = \mathcal{P}(X)$, entonces el filtro principal $\mathcal{F}_x \to x$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.4.1. *Sea $f : (X, \Im) \to (Y, \mathcal{H})$ una función y $x \in X$. f es continua en x si y sólo si para cada filtro $\mathcal{F}$ de X, tal que $\mathcal{F} \to x$, el filtro $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \to f(x)$.*

Demostración. Suponga que f es continua en el punto $x \in X$, véase que para cada filtro $\mathcal{F}$ de X, tal que $\mathcal{F} \to x$, se tiene $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \to f(x)$, es decir $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq \langle f(\mathcal{F}) \rangle$. Sea $V \in \mathcal{V}(f(x))$, luego V es una vecindad de $f(x)$ en Y y como por hipótesis f es continua, existe una vecindad V_x en X, tal que $f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$, puesto que $\mathcal{F} \to x$, entonces $V(x) \subseteq \mathcal{F}$ así $V_x \in \mathcal{F}$ y por tanto $f(V_x) \in f(\mathcal{F})$ donde $f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$. Esto prueba que $V_{f(x)} \in \langle f(\mathcal{F}) \rangle$ y por tanto que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq \langle f(\mathcal{F}) \rangle$.

Recíprocamente, suponga que para cada filtro $\mathcal{F}$ de X, tal que $\mathcal{F} \to x$ implique $\langle f(\mathcal{F}) \rangle \to f(x)$, véase que f es continua en el punto $x \in X$. Asuma que f no es continua en x, luego existe $V_{f(x)}$ para la cual ninguna vecindad V_x en X satisface $f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$, como $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es claro que $\mathcal{V}(x) \to x$, luego $\langle f(\mathcal{V}(x)) \rangle$ debería converger a $f(x)$, lo cual no es posible, ya que ninguna vecindad V_x de $\mathcal{V}(x)$ satisface $f(V_x) \subseteq V_{f(x)}$. Por lo que $V_{f(x)} \notin \langle f(\mathcal{V}(x)) \rangle$. Por tanto f debe ser continua en x. ■

Entrando en materia nuevamente con los espacios topológicos compactos, se introduce una definición e inmediatamente un teorema que caracteriza los espacios compactos a partir de los conjuntos cerrados.

Definición 1.4.2. *Sean X un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. La familia $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita PIF, si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\{A_i\}_{i \in I}$ es no vacía, esto es si para todo $J \subseteq I$ finito se tiene $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.*

Teorema 1.4.2. *Un espacio topológico* $(X, \Im)$ *es compacto, si y sólo si cada colección* $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ *de cerrados que posee PIF, satisface que* $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Demostración. Suponga que $(X, \Im)$ es compacto, pruebe que cada colección $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ de cerrados que posee PIF, satisface que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Como cada C_i es cerrado en X para todo $i \in I$, se tiene $U_i = X - C_i$ es abierto, para cada $i \in I$. Si $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, es decir $\cap_{i\in I} C_i = \emptyset$, entonces $(\cap_{i\in I} C_i)^c = X$, y como

$$\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c = \bigcup_{i\in I} X - C_i = \bigcup_{i\in I} U_i$$

se sigue que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, es decir $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X, ya que X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_{ik}\}_{k=1}^n$, tal que $\bigcup_{k=1}^n U_{ik} = X$, luego $(\bigcup_{k=1}^n U_{ik})^c = X^c = \emptyset$, de esta manera se tiene

$$\emptyset = \left(\bigcup_{k=1}^n U_{ik}\right)^c = \bigcap_{k=1}^n U_{ik}^c = \bigcap_{k=1}^n C_{ik}.$$

Es decir, $\bigcap_{k=1}^n C_{ik} = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ cumple PIF. Por tanto $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Recíprocamente, si cada colección $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ de cerrados en X que posee PIF, satisface $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$, véase que X es compacto. Suponga que X no es compacto, es decir, existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X que no se puede reducir a uno finito, esto es, $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ pero para todo $J \subseteq I$ finito, se tiene $X \nsubseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.

Sea $C_i = X - U_i$ para cada $i \in I$. Como para cada $J \subseteq I$ finito $X \nsubseteq \bigcup_{j\in J} U_j$, entonces $X \subset \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right)^c$, puesto que

$$\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right)^c = \bigcap_{j\in J} U_j^c = \bigcap_{j\in J} X - U_j = \bigcap_{j\in J} C_i.$$

Por lo que, si $\bigcap_{j\in J} C_j = \emptyset$ para todo $J \subseteq I$ finito, se tendría $X = \emptyset$, lo cual no puede ocurrir. De esta manera se sigue que $\bigcap_{j\in J} C_j \neq \emptyset$ para todo $J \subseteq I$ finito. Es decir, $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ posee PIF, pero a su vez $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces

$$\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c \subseteq X^c = \emptyset$$

y como

$$\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c = \bigcap_{i\in I} C_i$$

se sigue que $\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset$, lo cual muestra que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$ y esto contradice la hipótesis. Por tanto X debe ser compacto. ∎

A continuación la compacidad caracterizada vía ultrafiltros.

Teorema 1.4.3. *Un espacio topológico* $(X, \Im)$ *es compacto, si y sólo si cada ultrafiltro en* X *es convergente.*

Demostración. Asuma que $(X, \Im)$ es un espacio topológico compacto, pruebe que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X, entonces $\mathcal{U} \to x$ para algún $x \in X$. Suponga que $\mathcal{U}$ no converge, es decir, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \nsubseteq \mathcal{U}$, esto es, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$, tal que $V_x \notin \mathcal{U}$ como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se sigue que $V_x^c \in \mathcal{U}$. Por otro lado, es claro que $\{V_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento abierto de X, ya que para cada $x \in X$, existe una vecindad V_x de x, por lo que $X \subseteq \bigcup_{x\in X} V_x$. Ahora como X es compacto $\{V_x\}_{x\in X}$ posee un subcubrimiento finito $\{V_{xk}\}_{k=1}^n$, así se tiene que $X \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{xk}$ de modo que $\left(\bigcup_{k=1}^n V_{xk}\right)^c \subseteq X^c = \emptyset$ luego $\emptyset = \left(\bigcup_{k=1}^n V_{xk}\right)^c = \bigcap_{k=1}^n V_{xk}^c$ y como $V_{xk}^c \in \mathcal{U}$ para $k = 1, 2, \dots n$, entonces $\emptyset = \bigcap_{k=1}^n V_{xk}^c \in \mathcal{U}$. Lo cual es absurdo.

Recíprocamente, suponga que cada ultrafiltro en X es convergente, véase que X es compacto. Esto es, del Teorema1.4.2, se debe probar que, si $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados en X con PIF, entonces $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Puesto que $\mathcal{C}$ satisface PIF, es una subbase de filtro. Sea $\langle \mathcal{C} \rangle$ el filtro generado por esta subbase, luego existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de X, tal que $\langle \mathcal{C} \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Como por hipótesis $\mathcal{U}$ es convergente, sea $x \in X$, tal que $\mathcal{U} \to x$. Se tiene entonces que $x \in \bigcap \mathcal{C}$, ya que si $x \notin \bigcap \mathcal{C}$, existe $C \in \mathcal{C}$, tal que $x \in C^c$ así $C^c \in \mathcal{U}$, ya que como C es cerrado, C^c es abierto, y como $x \in C^c$, C^c seria una vecindad de x y puesto que $\mathcal{U} \to x$, entonces $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{U}$. Así las cosas se sigue que, tanto C como C^c están en $\mathcal{U}$ lo cual no puede ocurrir debido a que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Por tanto X debe ser compacto. ■

Para dar una demostración del Teorema de Tychonoff, acorde a la teoría desarrollada, se necesita un apoyo del lema que se enuncia a continuación, el cual caracteriza la convergencia de los filtros en un espacio producto.

Lema 1.4.1. *Sean* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *un espacio topológico con la topología producto,* $x = (x_i)_{i\in I}$ *un punto en* X *y* $\mathcal{F}$ *un filtro en* X. $\mathcal{F} \to x$ *si y sólo si, para cada* $i \in I$ *el filtro dado por la proyección* $p_i(\mathcal{F}) \to x_i$ *en* X_i.

Demostración. Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in X$y $\mathcal{F}$ un filtro en X, se probará que si $\mathcal{F} \to x$, entonces $p_i(\mathcal{F}) \to x_i$ en X_i. Como para cada $i \in I$, p_i es continua y $\mathcal{F} \to x$, se tienes que $p_i(\mathcal{F}) \to p_i(x) = x_i \in X_i$.

Recíprocamente, suponga que para cada filtro $\mathcal{F}$ en X, $p_i(\mathcal{F}) \to x_i$ en X_i, véase que $\mathcal{F} \to x$, es decir, $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Sea $V_x \in \mathcal{V}(x)$, no se pierde generalidad al suponer que V_x es un abierto básico, por lo que

$$V_x = U_{i1} \times U_{i2} \times \ldots \times U_{in} \times \prod_{i\in I} X_i, \;\; \text{para } i \neq i_1, i_2 \ldots i_n.$$

Puesto que las proyecciones son abiertas (esto es fácil de probar), $p_{ik}(V_x) = U_{ik}$ es una vecindad de x_{ik}. Por hipótesis se sigue que $p_{ik}(\mathcal{F}) \to x_{ik}$, es decir, $\mathcal{V}(x_{ik}) \subseteq p_{ik}(\mathcal{F})$, por lo que $U_{ik} = p_{ik}(V_x) \in p_{ik}(\mathcal{F})$, luego existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $p_{ik}(F) \subseteq p_{ik}(V_x) = U_{ik}$ para $k = 1, 2, \dots n$, esto implica que

$$F \subseteq p_{ik}^{-1}(U_{ik}) = U_{ik} \times \prod_{i\neq i_k} X_i, \;\; \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Como $\mathcal{F}$ es un filtro, $U_{ik} \times \prod_{i \neq i_k} X_i$ esta en $\mathcal{F}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$ y por tanto

$$\bigcap_{k=1}^{n} \left(U_{ik} \times \prod_{i \neq i_k} X_i \right)$$

esta en $\mathcal{F}$, pero $\bigcap_{k=1}^{n} \left(U_{ik} \times \prod_{i \neq i_k} X_i \right) = U_{i1} \times U_{i2} \times \ldots \times U_{in} \times \prod_{i \in I} X_i$, así $V_x = \bigcap_{k=1}^{n} \left(U_{ik} \times \prod_{i \neq i_k} X_i \right)$, para $k = 1, 2, \ldots n$, lo cual prueba que $V_x \in \mathcal{F}$ y como V_x es arbitrario en $\mathcal{V}(x)$, se sigue $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, lo que a su vez significa que $\mathcal{F} \to x$. ■

Teorema 1.4.4 (Tychonoff)**.** *Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un espacio con la topología producto. Entonces X es compacto si y sólo si cada espacio coordenado X_i es compacto.*

Demostración. Suponga que X es compacto, véase que cada X_i es compacto para cada $i \in I$. Puesto que cada proyección p_i es continua, sobreyectiva y X es compacto, de la Proposición 1.3.1 se sigue que $p_i(X) = X_i$ es compacto para cada $i \in I$.

Asuma que cada espacio coordenado X_i es compacto, pruebe que X es compacto. Para ello se utiliza el Teorema 1.4.3 y se prueba que todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X es convergente. Como cada proyección p_i es sobreyectiva, se tiene que $p_i(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro en X_i y puesto que por hipótesis , cada X_i es compacto, $p_i(\mathcal{U}) \to x_i$ para algún $x_i \in X_i$, luego por Lema 1.4.1 se sigue que $\mathcal{U} \to x$, donde $x = (x_i)_{i \in I}$ de X. Esto prueba que X es compacto. ■

Capítulo 2

Teorema de Tychonoff sobre la L-Topología

2.1. Introducción

El concepto de espacio L-topológico (originalmente llamado espacio topológico difuso) fue introducido por primera vez por C.L. Chang en 1968, ver [4], quien inicialmente define los axiomas referente a estos espacios y funciones L-continuas, para el caso de Heyting álgebras L (Ejemplo 2.2.6). En 1980, Höhle sugiere que una topología puede ser vista como un L-subconjunto de un conjunto potencias, idea que sirvió de motivación para Kubiak [11] y Šostack [18], los cuales en 1985, de manera independiente extendieron esta idea a un concepto más general de L-subconjunto de un L-conjunto potencia, donde L es una Heyting álgebra completa con cuasi completación [11]. Así mismo, Höhle y Šostack [7], Kubiak y Šostack [12] desarrollaron el concepto de espacio tológico L-difuso (véase capítulo 3), incluso para el caso donde L es más general que $[0, 1]$, en 1995 y 1997, respectivamente. La evolución de esta teoría en algunos conceptos tratados en éste y el capítulo siguiente puede verse de manera más detallada en [8, pags 259-264].

Debido al auge que ha tomado la teoría difusa por el intento de extender propiedades de la topología conjuntista a espacios construidos sobre los conjuntos difusos de un conjunto dado, lo cual puede variar acorde con la estructura de retículo L que subyace en cada caso. Es notable la aparición en los últimos años de un número considerable de descripciones de la compacidad en los espacios topológicos difusos y puesto que independientemente de la estructura topológica sobre la cual esté sostenida la teoría de compacidad, es inevitable pensar en la idea de extender el Teorema de Tychonoff, por este hecho resulta entonces un propósito natural investigar la posibilidad de extender este importante teorema a las categorías que se obtienen en los espacios topológicos difusos, esto enmarca el objetivo de este trabajo, más explicitamente sobre las categorías L-Top y L-FTop tratadas en este capítulo y el siguiente, respectivamente. Para esto se inicia en la sección 2.2 con una serie de requisitos respecto a la teoría de retículos, luego se describe brevemente los cqm-retículos, GL-monoides y GL-comonoides, junto con algunas implicaciones que traen consigo, para posteriormente hacer una muy breve introducción a los conjuntos L-difusos y algunas propiedades básicas, cuyo aporte para la construcción de esta teoría es crucial en éste y el capítulo próximo.

En la sección 2.3 se definen los conceptos de espacios L-topológicos y funciones L-continuas, definiendo así la categoría L-Top, para luego en la sección 2.4 introducir el concepto de L-filtro, L-ultrafiltro y una serie de consecuencias que conjuntamente con las estructuras de sistema de L-vecindades, operador L-interior (sección 2.5) y algunas propiedades a fines, ayudan a que en la sección 2.6 se dé la definición de espacios L-topológicos compactos y a partir de ésta, la L-topología producto y algunos lemas principales se establece una prueba del Teorema de Tychonoff sobre la categoría L-Top.

2.2. Preliminares

A continuación se presentan algunas definiciones y propiedades básicas, respecto a la teoría de retículos (véase [1]) y a los conjuntos L-difusos, las cuales son esenciales para el desarrollo y comprensión de los espacios L-topológicos, topológicos L-difusos y toda la teoría necesaria para definir y caracterizar la compacidad en estos ambientes.

Definición 2.2.1. *Sea L un conjunto no vació. Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$, tal que, para todo $x, y \in L$, $inf\{x, y\}$ y $sup\{x, y\}$ existen y se denota por $x \wedge y$ y $x \vee y$, respectivamente.*

Definición 2.2.2. *Un retículo $(L, \leq)$, se dice completo, si para cada $A \subseteq L$, el ínfimo $\bigwedge A$ y el supremo $\bigvee A$ están definidos en A.*

En particular, $\bigwedge L = \perp$ y $\bigvee L = \top$ son respectivamente las cotas universales inferior y superior en L. Se asume que $\perp \neq \top$, es decir, que L tiene por lo menos dos elementos.

Ejemplo 2.2.1. *Sea X un conjunto cualquiera no vacío, el par $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo completo, ya que, $\perp = \emptyset$, $\top = X$ y para cualquier familia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X, se tiene*

$$\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} A_i \quad y \quad \bigvee \mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Ejemplo 2.2.2. *Sea Γ el conjunto de todos los subgrupos de un grupo G. El par $(\Gamma, \subseteq)$ es un retículo completo, donde $H \wedge K = H \cap K$ y $H \vee K$ se define como el menor subgrupo que contiene a H y K, para todo $H, K \in \Gamma$.*

Nota 2.2.1. *No todo retículo es completo, ya que, los retículos $(\mathbb{Q}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ no los son.*

Definición 2.2.3. *Un retículo $(L, \leq)$ es distributivo si y sólo si, para todo $x, y, z \in L$ se cumple*

i. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definición 2.2.4. *Un retículo $(L, \leq)$ se dice infinitamente distributivo, si para todo $A \subseteq L$ y $\alpha \in L$ se satisface*

$$\Big(\bigwedge A\Big) \vee \alpha = \bigwedge\{(a \vee \alpha) : a \in A\}, \qquad \Big(\bigvee A\Big) \wedge \alpha = \bigvee\{(a \wedge \alpha) : a \in A\}.$$

Las definiciones que a continuación se introducen, hacen uso de los retículos completos, para dotarlos de una operación binaria y construir así los conceptos de retículos cuasi monoides completos, más conocidos en su forma corta como cqm-retículos (Introducidos por Rodabaugh en [17]); GL- monoides y GL-comonoides.

Definición 2.2.5 (cqm-retículo)**.** *Un retículo cuasi-monoide completo o cqm-retículo, es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades:*

i. *$(L, \leq)$ es un retículo completo con cota superior $\top$ y cota inferior $\bot$.*

ii. *$\otimes : L \times L \longrightarrow L$ es una operación binaria que satisface los siguientes axiomas:*

  a. *$\otimes$ es monótona en ambos argumentos, esto es, si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces, $\alpha_1 \otimes \beta_1 \leq \alpha_2 \otimes \beta_2$. Donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in L$.*

  b. *$\top$ es idempotente, es decir, $\top \otimes \top = \top$.*

Definición 2.2.6 (GL-monoide)**.** *Un GL-monoide (ver [6]) es un retículo completo enriquecido con otra operación binaria $\otimes$, esto es, una tripleta $(L, \leq, \otimes)$, tal que, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in L$ satisface las siguientes propiedades:*

i. *$\otimes$ es monótona. Si $\alpha \leq \beta$, entonces, $\alpha \otimes \gamma \leq \beta \otimes \gamma$.*

ii. *$\otimes$ es conmutativa. $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$.*

iii. *$\otimes$ es asociativa. $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$.*

iv. *La tripleta $(L, \leq, \otimes)$ es entero, esto es, $\top$ actúa como elemento neutro, es decir $\alpha \otimes \top = \alpha$.*

v. *$\bot$ actúa como elemento cero en $(L, \leq, \otimes)$, $\alpha \otimes \bot = \bot$.*

vi. *$\otimes$ es distributiva con respecto a extremos superiores arbitrarios, esto es, sea I un conjunto de indices y $\{\beta_i\}_{i \in I} \subseteq L$, se debe cumplir*

$$\alpha \otimes (\bigvee_{i \in I} \beta_i) = \bigvee_{i \in I} (\alpha \otimes \beta_i), \quad \text{para todo} \quad \beta_i, \text{ con } i \in I.$$

vii. *$(L, \leq, \otimes)$ es divisible, esto es, si $\alpha \leq \beta$, existe $\gamma \in L$, tal que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.*

Nota 2.2.2. *Se puede probar que todo GL-monoide es residuado, esto es, que existe una nueva operación binaria $\longmapsto: L \times L \to L$ sobre L, llamada implicación, que cumple la siguiente condición:*

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma), \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Cuando se define explicitamente la operación implicación por

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee\{\lambda \in L : \alpha \otimes \lambda \leq \beta\}.$$

Definición 2.2.7 (GL-comonoide)**.** *Un GL-comonoide es un retículo con una operación binaria adicional $\oplus$, es decir, una tripleta $(L, \leq, \oplus)$, tal que, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in L$, satisface las siguientes propiedades:*

i. *$\oplus$ es monótona. Si $\alpha \leq \beta$, entonces, $\alpha \oplus \gamma \leq \beta \oplus \gamma$.*

ii. *$\oplus$ es conmutativa. $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$.*

iii. *$\oplus$ es asociativa. $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$.*

iv. *La tripleta $(L, \leq, \oplus)$ es co-entero, esto es, $\perp$ actúa como elemento neutro, es decir $\alpha \oplus \perp = \alpha$.*

v. *$\top$ actúa como elemento co-cero en $(L, \leq, \oplus)$, $\alpha \oplus \top = \top$.*

vi. *$\oplus$ es distributiva respecto a extremos inferiores arbitrarios, esto es, sea I un conjunto de indices y $\{\beta_i\}_{i \in I} \subseteq L$, se debe cumplir*

$$\alpha \oplus (\bigwedge_{i \in I} \beta_i) = \bigwedge_{i \in I} (\alpha \oplus \beta_i), \quad \textit{para todo} \quad \beta_i, \quad \textit{con } i \in I.$$

vii. *$(L, \leq, \otimes)$ es co-divisible, esto es, si $\alpha \leq \beta$, existe $\gamma \in L$, tal que $\alpha \oplus \gamma = \beta$.*

Nota 2.2.3. *De manera análoga a los GL-monoide, todo GL-comonoide es co-residuado, esto es, existe otra operación binaria $\leftarrow\!\!\prec : L \times L \to L$ sobre L, llamada co-implicación, que satisface la siguiente condición:*

$$\alpha \leq (\beta \oplus \gamma) \quad \textit{si y sólo si} \quad \alpha \leftarrow\!\!\prec \beta \leq \gamma, \quad \textit{para todo} \quad \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

De manera explicita, la co-implicación se define por

$$\alpha \leftarrow\!\!\prec \beta = \bigwedge \{\lambda \in L : \alpha \leq \lambda \oplus \beta\}.$$

Observación 2.2.1. *En el transcurso de este trabajo, se utiliza el caso particular en el que $\oplus = \vee$ y la co-implicación es*

$$\alpha \rhd \beta = \bigwedge \{\lambda \in L : \alpha \leq \lambda \vee \beta\}.$$

En lo que sigue, $(L, \leq, \otimes)$ denota un GL-monoide arbitrario y $(L, \leq, \vee)$ denota un GL-comonoide, a no ser que se indique lo contrario.

Algunas propiedades de los GL-monoide y GL-comonoide se hacen notar en el siguiente lema, donde L hace referencia a un GL-monoide o un GL-comonoide, según sea el caso.

Lema 2.2.1. *Para $\alpha, \beta, \gamma \in L$, se cumplen las siguientes propiedades*

i. *Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha \rhd \gamma \leq \beta \rhd \gamma$*

ii. *Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\beta \longmapsto \gamma \leq \alpha \longmapsto \gamma$*

iii. *$\gamma \otimes (\alpha \longmapsto \beta) \leq \alpha \longmapsto (\gamma \otimes \beta)$*

iv. *$\alpha \longmapsto \alpha = \top$.*

Demostración.

i. Sea $\alpha \leq \beta$, ya que $\alpha \rhd \gamma = \bigwedge\{\lambda : \alpha \leq \gamma \vee \lambda\}$ y $\beta \rhd \gamma = \bigwedge\{\delta : \beta \leq \gamma \vee \delta\} := \delta'$, se tiene $\alpha \leq \beta \leq \gamma \vee \delta'$, luego $\delta' \in \{\lambda : \alpha \leq \gamma \vee \lambda\}$ y por tanto $\bigwedge\{\lambda : \alpha \leq \gamma \vee \lambda\} \leq \delta'$, esto es $\alpha \rhd \gamma \leq \beta \rhd \gamma$.

ii. Sea $\alpha \leq \beta$, puesto que $\alpha \longmapsto \gamma = \bigvee\{\lambda : \alpha \otimes \lambda \leq \gamma\}$ y $\beta \longmapsto \gamma = \bigvee\{\delta : \beta \otimes \delta \leq \gamma\} := \delta'$, se sigue $\alpha \otimes \delta' \leq \beta \otimes \delta' \leq \gamma$, es decir $\delta' \in \{\delta : \beta \otimes \delta \leq \gamma\}$, por lo que $\delta' \leq \bigvee\{\delta : \beta \otimes \delta \leq \gamma\}$. Esto es, $\beta \longmapsto \gamma \leq \alpha \longmapsto \gamma$.

iii. Se tiene que

$$\gamma \otimes (\alpha \longmapsto \beta) = \bigvee\{\lambda : \alpha \otimes \lambda \leq \gamma \otimes \beta\} \quad \text{y}$$

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee\{\delta : \alpha \otimes \delta \leq \beta\} := \delta',$$

luego, $(\gamma \otimes \delta') \otimes \alpha = \gamma \otimes (\alpha \otimes \delta') \leq \gamma \otimes \beta$, de modo que $\gamma \otimes \delta' \in \{\lambda : \alpha \otimes \lambda \leq \gamma \otimes \beta\}$ y por tanto, $\gamma \otimes \delta' \leq \bigvee\{\lambda : \alpha \otimes \lambda \leq \gamma \otimes \beta\} = \alpha \longmapsto (\gamma \otimes \beta)$. Así, $\gamma \otimes (\alpha \longmapsto \beta) \leq \alpha \longmapsto (\gamma \otimes \beta)$.

iv. Se obtiene a partir de la definición de $\alpha \longmapsto \alpha$. ■

Ejemplo 2.2.3. *Todo retículo completo $(L, \leq)$, trae consigo de manera intrínseca una estructura de cqm-retículo determinado por la operación binaria $\wedge$. Es decir, que la tripleta $(L, \leq, \wedge)$ es un cqm-retículo*

Ejemplo 2.2.4. *El retículo completo $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ dado en el Ejemplo 2.2.1, junto con la operación binaria $\otimes = \bigcup$, es un cqm-retículo, esto es, la tripleta $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cup)$.*

Ejemplo 2.2.5. *Dado un espacio topológico (X, τ), la colección $\mathfrak{C}_\tau$ de los subconjuntos cerrados de X es un GL-monoide, en el que*

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigvee_{i \in I} A_i = cl\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \quad y \quad A \otimes B = cl(int(A \cap B)),$$

donde int y cl denota los operadores interior y clausura, respectivamente.

Ejemplo 2.2.6. *Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y MV-álgebras. Específicamente, un álgebras de Heyting es un GL-monoide del tipo $(L, \leq, \vee, \wedge, \vee)$, (en el caso de álgebras de Heyting, $\wedge = \otimes$), ver [9]. Por otro lado, un GL-monoide se llama una MV-algebra si $(\alpha \longmapsto \perp) \longmapsto \perp = \alpha$ para todo $\alpha \in L$, [3].*

2.2.1. Conjuntos L-difusos

En este apartado se darán algunas nociones básicas de los conjuntos L-difusos (ver[16]).

Definición 2.2.8. *Sea X un conjunto y L un retículo completo. Un conjunto L-difuso sobre X (L-subconjunto de X) es una función $A : X \to L$. Esto es, si A es un subconjunto L-difuso de X, entonces $A \in L^X$, donde L^X denota la colección de todas las funciones de X en L. En lo que sigue, se denotaran los conjunto L-fiusos por f, g, h, etc.*

En el caso cuando L es el intervalo unitario $I = [0, 1]$, entonces, se refiere a los conjuntos L-difusos simplemente como conjuntos difusos.

Observación 2.2.2. *Si X es un conjunto y L es un GL-monoide, entonces el conjunto potencia difuso L^X queda obviamente dotado de una estructura de GL-monide, si se extienden las operaciones puntualmente. Esto es, para todo $f, g \in L^X$ se define*

- *Los conjunto L-difusos 0_X y 1_X definidos por $0_X(x) = \perp$ y $1_X(x) = \top$ para todo $x \in X$ son, respectivamente, las cotas universales inferior y superior en L^X.*
- $(f \otimes g)(x) \equiv f(x) \otimes g(x)$, $x \in X$.
  $f = g$ *si y sólo si* $f(x) = g(x)$, *para todo* $x \in X$.
  $f \leq g$ *si y sólo si* $f(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in X$.
  $(f \wedge g)(x) \equiv f(x) \wedge g(x)$, $x \in X$.
  $(\bigwedge_{i \in I} f_i)(x) \equiv \bigwedge_{i \in I} f(x)$, $x \in X$.

De manera análoga se definen las operaciones del extremo superior $\bigvee$.

A continuación se muestran conjuntos L-difusos inducidos por una función, esto es, una extension de la imagen directa e inversa de la teoría de conjunto clásica en los conjuntos L-difusos.

Definición 2.2.9. *Sean X e Y conjuntos, $\phi : X \to Y$ una función, para todo conjunto L-difuso en Y, $g \in L^Y$, se define el conjunto L-difuso en X $\phi^{\leftarrow}(g)$ por*

$$[\phi^{\leftarrow}(g)](x) = (g \circ \phi)(x), \quad \textit{para todo}, \quad x \in X.$$

Esto es, $\phi^{\leftarrow}(g)$ es justo la composición de ϕ y g.

Por otro lado, si $f \in L^X$, entonces el conjunto L-difuso $\phi^{\rightarrow}(f)$ en Y, se define por

$$\phi^{\rightarrow}(f)(y) = \begin{cases} \bigvee\{f(x) : x \in \phi^{-1}(y)\}, & \textit{si} \quad \phi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \perp & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Para todo $y \in Y$, donde $\phi^{-1}(y) = \{x \in X : \phi(x) = y\}$.

2.3. Espacios L-topológicos

A continuación se definen los espacios L-topológicos y se dan algunos ejemplos sencillos de estos, además de introducir el concepto de función L-continua.

Definición 2.3.1. *Sean $(L, \leq, \otimes)$ un cqm-retículo, y X un conjunto no vacío dado. Una L-topología sobre X es un subconjunto τ de L^X que satisface las siguientes condiciones*

i. $1_X,\ 1_\emptyset \in \tau$.

ii. Si $f, g \in \tau$, entonces $f \otimes g \in \tau$.

iii. Si $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigvee_{i\in I} f_i \in \tau$.

Donde I es un conjunto de indices.

El par (X, τ), formado por un conjunto X y una L-topología τ sobre X se llama espacio L-topológico.

Algunos ejemplos de L-topologías se dan a continuación

Ejemplo 2.3.1. *Sea X un conjunto arbitrario distinto de vacío y $(L, \leq, \otimes)$ un cqm-retículo. El conjunto $\tau = L^X$ de todas las funciones de X a L es una L-topología sobre X, llamada L-topología discreta de X.*

Ejemplo 2.3.2. *Sea L^X un conjunto definido como en el ejemplo anterior, el subconjunto $\tau = \{1_\emptyset, 1_X\}$ de L^X es una L-topología sobre X, llamada L-topología indiscreta de X.*

Ejemplo 2.3.3. *Sea $(L, \leq, \otimes)$ un cqm-reticulo y $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una familia de L-topologías sobre un conjunto X. La intersección de las L-topologías sobre X, $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ es una L-topología sobre X.*

Observación 2.3.1. *En el conjunto $\mathbb{T}_L(X)$ de todas las L-topologías sobre X, se introduce un orden parcial determinado por la inclusión de conjuntos $\subseteq$. Esto es, si $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}_L(X)$, entonces se dice que τ_2 es más fina que τ_1 o τ_1 es más gruesa que τ_2, si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

De esta manera se tiene, de los ejemplos anteriores que el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{T}_L(X), \subseteq)$ es un retículo completo, donde $\tau_{ind} = \{1_X, 1_\emptyset\}$ y $\tau_{dis} = L^X$ son las cotas inferior y superior universales.

Definición 2.3.2 (Funciones L-continuas)**.** *Sean (X, τ) y (Y, ϱ) espacios L-topológicos y $\varphi : X \to Y$ una función. Se dice que φ es L-continua, si y sólo si se satisface que*

$$\{g \circ \varphi : g \in \varrho\} \subseteq \tau.$$

De esta manera se obtiene la categoría L-Top, cuyos objetos son los espacios L-topológicos y cuyos morfismos son las funciones L-continuas.

2.4. L-filtros y L-ultrafiltros

Los conceptos de L-filtro y L-ultrafiltro son de gran utilidad en el momento de introducir los espacios L-topológicos compactos y algunas propiedades que aportan al desarrollo del Teorema de Tychonoff.

Definición 2.4.1 (L-Filtros)**.** *Sea X un conjunto. Un L-filtro sobre X es una función $\nu : L^X \to L$, tal que para $f, g \in L^X$ satisface las siguientes propiedades:*

F_1. $\nu(1_X) = \top$.

F_2. $f \leq g$, *entonces* $\nu(f) \leq \nu(g)$.

F_3. $\nu(f) \otimes \nu(g) \leq \nu(f \otimes g)$.

F_4. $\nu(1_\varnothing) = \bot$.

El conjunto de todos los L-filtros sobre X se denota por $\mathfrak{F}_L(X)$.

Sean $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{F}_L(X)$, se introduce un orden parcial $\preccurlyeq$ en $\mathfrak{F}_L(X)$ definido por

$$\nu_1 \preccurlyeq \nu_2, \quad \text{si y sólo si} \quad \nu_1(f) \leq \nu_2(f),$$

para todo $f \in L^X$.

A continuación se prueba que toda cadena en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{F}_L(X), \preccurlyeq)$ tiene cota superior, de donde naturalmente se zornifica para garantizar la existencia de elementos maximales y a partir de estos definir los L-ultrafiltros.

Proposición 2.4.1. *El conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{F}_L(X), \preccurlyeq)$ tiene elementos maximales.*

Demostración. con el fin de aplicar el lema de zorn sobre el conjunto $(\mathfrak{F}_L(X), \preccurlyeq)$ se debe probar que toda cadena $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{F}_L(X)$ tiene una cota superior en $\mathfrak{F}_{LF}(X)$. En efecto, sea $\mathcal{C} = \{\nu_i\}_{i\in I}$, donde I es un conjunto de indices, una cadena no vacía de $\mathfrak{F}_L(X)$. Se define una función $\nu_\infty : L^X \to L$, por medio de

$$\nu_\infty(f) = \bigvee_{i\in I} \nu_i(f).$$

Se debe probar que ν_∞ es un L-filtro sobre X. Esto es

F_1. $\nu_\infty(1_X) = \bigvee_{i\in I} \nu_i(1_X) = \bigvee_{i\in I} \top = \top$.

F_2. Si $f \leq g$, entonces

$$\nu_\infty(f) = \bigvee_{i\in I} \nu_i(f) \leq \bigvee_{i\in I} \nu_i(g) = \nu_\infty(g).$$

F_3.

$$\begin{aligned}
\nu_\infty(f) \otimes \nu_\infty(g) &= \bigvee_{i\in I} \nu_i(f) \otimes \bigvee_{i\in I} \nu_i(g) \\
&= \bigvee_{i\in I} [\nu_i(f) \otimes \nu_i(g)] \\
&\leq \bigvee_{i\in I} [\nu_i (f \otimes g)] \\
&= \nu_\infty (f \otimes g)
\end{aligned}.$$

F_4. $\nu_\infty(0_X) = \bigvee_{i\in I} \nu_i(0_X) = \bigvee_{i\in I} \perp = \perp$.

De esta manera, se tiene que ν_∞ es un L-filtro sobre X, donde $\nu_i \preccurlyeq \nu_\infty$, para todo $i \in I$. Por tanto, ν_∞ es una cota superior para la cadena $\mathcal{C}$, luego del lema de zorn se obtiene que $\mathfrak{F}_L(X)$ tiene elementos maximales. ■

Definición 2.4.2. *Sea X un conjunto, un L-ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, es un elemento maximal en $(\mathfrak{F}_L(X), \preccurlyeq)$.*

La proposición que sigue caracteriza los L-ultrafiltros

Proposición 2.4.2. *Para cada L-filtro $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ en X, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i. $\mathcal{U}$ *es un L-ultrafiltro .*

ii. $\mathcal{U} = [\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp$, *para todo* $f \in L^X$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un L-ultrafiltro, se debe probar (ii.), lo cual se hará de la siguiente manera

a. $\mathcal{U}(f) \leq [\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp$.

b. $[\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp \leq \mathcal{U}(f)$,

para todo $f \in L^X L$. En efecto,

a. Puesto que
$$f \longmapsto 0_X = \bigvee\{h : f \otimes h \leq 0_X\} := h'$$
se tiene que $\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X) = \mathcal{U}(h')$, es tal que $f \otimes h \leq 0_X$, luego
$$\mathcal{U}(f) \otimes \mathcal{U}(h') \leq \mathcal{U}(f \otimes h') =\leq \mathcal{U}(0_X) = \perp,$$
como por hipótesis $\mathcal{U}$ es un L-ultrafiltro, se obtiene que $\mathcal{U}(f) \in \{\lambda : \mathcal{U}(h') \otimes \lambda \leq \perp\}$ y por tanto
$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f) \leq \bigvee\{\lambda : \mathcal{U}(h') \otimes \lambda \leq \perp\} &= \mathcal{U}(h') \longmapsto \perp \\
&= [\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp.
\end{aligned}$$
De esta manera, se obtiene que $\mathcal{U}(f) \leq [\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp$.

Para probar que (i.) implica (ii.), resta probar que la maximalidad de $\mathcal{U}$ implica (b.), para tal propósito se fija un elemento $g \in L^X L$, con dicho elemento se construye

$$\mathcal{G} := [\mathcal{U}(g \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp$$

y se define una función $\hat{\mathcal{U}} : L^X \to L$ por medio de

$$\hat{\mathcal{U}}(f) = \mathcal{U}(f) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto f) \otimes \mathcal{G}] .$$

Se debe probar primero que $\hat{\mathcal{U}}$ es un L-ultrafiltro . Esto es,

F_1. $\hat{\mathcal{U}}(1_X) = \perp$, ya que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}(1_X) &= \mathcal{U}(1_X) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto 1_X) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \top \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto 1_X) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \top. \end{aligned}$$

F_2. Si $f \leq h$, se debe probar que $\hat{\mathcal{U}}(f) \leq \hat{\mathcal{U}}(h)$. Se tiene que

$$\hat{\mathcal{U}}(f) = \mathcal{U}(f) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto f) \otimes \mathcal{G}] \quad \text{y}$$

$$\hat{\mathcal{U}}(h) = \mathcal{U}(h) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto h) \otimes \mathcal{G}] .$$

Puesto que $\mathcal{U}$ es un L-ultrafiltro, $\mathcal{U}(f) \leq \mathcal{U}(h)$. Además

$$\begin{aligned} g \longmapsto f &= \bigvee \{k \in L^X : g \otimes k \leq f\} \\ &\leq \bigvee \{k \in L^X : g \otimes k \leq h\} \\ &= g \longmapsto h \end{aligned}$$

así, $\mathcal{U}(g \longmapsto f) \leq \mathcal{U}(g \longmapsto h)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}(f) &= \mathcal{U}(f) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto f) \otimes \mathcal{G}] \\ &\leq \mathcal{U}(h) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto h) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \hat{\mathcal{U}}(h). \end{aligned}$$

Luego, $\hat{\mathcal{U}}(f) \leq \hat{\mathcal{U}}(h)$, cuando $f \leq h$.

F_3. Se debe probar que $\hat{\mathcal{U}}(f)\otimes\hat{\mathcal{U}}(h)\leq\hat{\mathcal{U}}(f\otimes h)$. Esto es,

$\hat{\mathcal{U}}(f)\otimes\mathcal{U}(h)$

$= \Big(\mathcal{U}(f)\bigvee[\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes\mathcal{G}]\Big)\otimes\Big(\mathcal{U}(h)\bigvee[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\Big)$

$=\mathcal{U}(f)\otimes\Big\{\mathcal{U}(h)\bigvee[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\Big\}$

$\bigvee\Big\{[\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes\mathcal{G}]\otimes\Big(\mathcal{U}(h)\bigvee[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\Big)\Big\}$

$=\mathcal{U}(f)\otimes\mathcal{U}(h)\bigvee\{\mathcal{U}(f)\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\}\bigvee\{\mathcal{U}(h)\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes\mathcal{G}]$

$\bigvee\ [\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes\mathcal{G}]\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\}$

$=\mathcal{U}(f)\otimes\mathcal{U}(h)\bigvee\{\mathcal{U}(f)\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto h)\otimes\mathcal{G}]\}\bigvee\{\mathcal{U}(h)\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes\mathcal{G}]\}$

$\bigvee\{[\mathcal{U}(g\longmapsto f)]\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$=\mathcal{U}(f)\otimes\mathcal{U}(h)\bigvee\{[\mathcal{U}(f)\otimes\mathcal{U}(g\longmapsto h)]\otimes\mathcal{G}_\beta\}\bigvee\{[\mathcal{U}(h)\otimes\mathcal{U}(g\longmapsto f)]\otimes\mathcal{G}\}$

$\bigvee\{[\mathcal{U}(g\longmapsto f)]\otimes[\mathcal{U}(g\longmapsto h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$\leq\mathcal{U}(f\otimes h)\bigvee\{\mathcal{U}[(f\otimes g)\longmapsto h]\otimes\mathcal{G}\}\bigvee\{\mathcal{U}[(h\otimes g)\longmapsto f]\otimes\mathcal{G}\}$

$\bigvee\{[\mathcal{U}(g\longmapsto f)\otimes(g\longmapsto h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$\leq\mathcal{U}(f\otimes h)\bigvee\{\mathcal{U}[g\longmapsto(f\otimes h)]\otimes\mathcal{G}\}\bigvee\{\mathcal{U}[g\longmapsto(f\otimes h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$\bigvee\{\mathcal{U}[g\longmapsto(f\otimes h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$=\mathcal{U}(f\otimes h)\bigvee\{\mathcal{U}[g\longmapsto(f\otimes h)]\otimes\mathcal{G}\}$

$=\hat{\mathcal{U}}(f\otimes h)$.

Por tanto, $\hat{\mathcal{U}}(f)\otimes\hat{\mathcal{U}}(h)\leq\hat{\mathcal{U}}(f\otimes h)$.

F_4. $\hat{\mathcal{U}}(0_X) = \perp$. Puesto que

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(0_X) &= \mathcal{U}(0_X) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \perp \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \otimes \mathcal{G}.\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{G} = \mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \longmapsto \perp$ y esto ocurre, si y sólo si $\mathcal{G} \otimes \mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \leq \perp$, se tiene que

$$\hat{\mathcal{U}}(0_X) = [\mathcal{U}(g \longmapsto 0_X) \otimes \mathcal{G}] = \perp$$

así, $\hat{\mathcal{U}}(0_X) = \perp$.

Esto prueba que $\hat{\mathcal{U}}$ es un L-filtro sobre X. Ahora se probará que $\hat{\mathcal{U}}$ es un L-ultrafiltro sobre X. Ya que

$$\hat{\mathcal{U}}(f) = \mathcal{U}(f) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto f) \otimes \mathcal{G}],$$

es claro que $\mathcal{U}(f) \leq \hat{\mathcal{U}}(f)$, para todo $f \in L^X$. Como por hipótesis $\mathcal{U}$ es un L-ultrafiltro, se tiene que $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. De esta manera

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(g) = \hat{\mathcal{U}}(g) &= \mathcal{U}(g) \bigvee [\mathcal{U}(g \longmapsto g) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \mathcal{U}(g) \bigvee [\mathcal{U}(1_X) \otimes \mathcal{G}] \\ &= \mathcal{U}(g) \bigvee (\top \otimes \mathcal{G}) \\ &= \mathcal{U}(g) \vee \mathcal{G}.\end{aligned}$$

Esto es, $\mathcal{U}(g) = \mathcal{U}(g) \bigvee \mathcal{G}$, esto ocurre si y sólo si, $\mathcal{G} \leq \mathcal{U}(g)$ y como $\mathcal{G} := [\mathcal{U}(g \longmapsto 0_X)] \longmapsto \perp$, para algún $g \in L^X$ arbitrario, se tiene que

$$(\mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X)) \longmapsto \perp \leq \mathcal{U}(f),$$

lo cual prueba (b.), y esto a su vez prueba que $\mathcal{U} = \mathcal{U}\,(f \longmapsto 0_X) \longmapsto \perp$, y por tanto que (i.) implica (ii.).

Se debe demostrar ahora que (ii.) implica (i.), para esto se asume que $\mathcal{U} \preccurlyeq \hat{\mathcal{U}}$, donde $\hat{\mathcal{U}}$ es un L-filtro en X, luego $\mathcal{U}(f) \leq \hat{\mathcal{U}}(f)$, para todo $f \in L^X$, así

$$\mathcal{U}(f \longmapsto 0_X) \leq \hat{\mathcal{U}}(f \longmapsto 0_X).$$

Por tanto,

$$\left[\hat{\mathcal{U}}(f \longmapsto 0_X) \longmapsto \perp\right] \leq [\mathcal{U}(f \longmapsto 0_X) \longmapsto \perp]$$

lo cual prueba que $\hat{\mathcal{U}} \preccurlyeq \mathcal{U}$ y por consiguiente $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. Es decir, $\mathcal{U}$ es un L-ultrafiltro sobre X. ■

Proposición 2.4.3. *Sea $\varphi : X \to Y$ una función y sea $\nu : L^X \to L$ un L-filtro sobre X. Entonces*

i. La función $\varphi(\nu) : L^Y \to L$ definida por

$$[\varphi(\nu)](g) = \nu(g \circ \varphi), \quad \textit{para todo } g \in L^Y$$

es un L-filtro sobre Y.

ii. La función $\varphi(\mathcal{U}) : L^Y \to L$ es un L-ultrafiltro en Y, siempre que $\mathcal{U}$ sea un L-ultrafiltro en X.

Demostración.

i. $\varphi(\nu)$ satisface las propiedades de un L-filtro. En efecto

F_1. $[\varphi(\nu)](1_Y) = \nu(1_Y \circ \varphi) = \nu(1_X) = \top$.

F_2. Si $f \leq g$, se tiene que $[\varphi(\nu)](f) = \nu(f \circ \varphi) \leq \nu(g \circ \varphi) = [\varphi(\nu)](g)$, ya que $(f \circ \varphi) \leq (g \circ \varphi)$.

F_3.
$$\begin{aligned}[\varphi(\nu)](f) \otimes \varphi(\nu)(g) = \quad & \nu(f \circ \phi) \otimes \nu(g \circ \varphi) \\ & \leq \nu\left((f \otimes g) \circ \varphi\right) \\ & = \varphi(\nu)\left(f \otimes g\right)\end{aligned}$$

Así, $[\varphi(\nu)](f) \otimes [\varphi(\nu)](g) \leq \varphi(\nu)(f \otimes g)$.

Ya que, $(f \circ \phi) \otimes (g \circ \phi) = [(f \otimes g) \circ \phi]$.

F_4. $[\varphi(\nu)](0_Y) = \nu(0_Y \circ \phi) = \nu(0_x) = \perp$.

Por tanto, $\varphi(\nu)$ es un L-filtro en X.

ii. Sea $\mathcal{U} : L^X \to L$ un L-ultrafiltro en X, $g \in L^Y$. Se debe probar que $\nu(\mathcal{U})$ es un L-ultrafiiltro en Y. De la Proposición 2.4.2 sólo hay que probar que

$$[\nu(\mathcal{U})](g) = [\nu(\mathcal{U})](g \longmapsto 0_Y) \longmapsto \perp.$$

Para todo $g \in L^Y$. Se tiene

$$\begin{aligned}
[\nu(\mathcal{U})](g) &= \mathcal{U}(g \circ \phi)\\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto 0_X] \longmapsto \bot\\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto 0_X] \longmapsto \bot\\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto (0_Y \circ \phi)] \longmapsto \bot\\
&= \mathcal{U}[(g \longmapsto 0_Y) \circ \phi] \longmapsto \bot\\
&= [\nu(\mathcal{U})][(g \longmapsto 0_Y)] \longmapsto \bot\\
&= [\nu(\mathcal{U})][(g \longmapsto 0_Y)] \longmapsto \bot
\end{aligned}$$

Por tanto, $\nu(\mathcal{U})$ es un L-ultrafiltro en Y. ■

Proposición 2.4.4. *Sea $\varphi : X \to Y$ una función sobreyectiva y sea $\nu : L^Y \to L$ un L-filtro en Y. Entonces la función $\varphi_\nu^{-1} : L^X \to L$ definida por*

$$\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f) = \bigvee\{\nu(g) : g \circ \varphi \leq f\}.$$

Para todo $f \in L^X$ es un L-filtro en X.

Demostración. Se debe probar que φ_ν satisface los axiomas de un L-filtro. En efecto

F_1.

$$\begin{aligned}
\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](1_X) &= \bigvee\{\nu(g) : g \circ \phi \leq 1_X\}\\
&= \nu(1_Y)\\
&= \top.
\end{aligned}$$

F_2. Si $f \leq h$, entonces

$$\begin{aligned}
\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f) &= \bigvee\{\nu(g) : g \circ \phi \leq f\}\\
&\leq \bigvee\{\nu(g) : g \circ \phi \leq h\}\\
&= \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](h)
\end{aligned}$$

Así, $\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f) \leq \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](h)$.

F_3. $\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f) \otimes \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](h)$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee\{\nu(g) : g \circ \phi \leq f\} \otimes \bigvee\{\nu(k) : k \circ \phi \leq h\} \\
&\leq \bigvee\{\nu(g) \otimes \nu(k) : (g \otimes k) \circ \phi \leq f \otimes h\} \\
&\leq \bigvee\{\nu(g \otimes k) : (g \otimes k) \circ \phi \leq f \otimes h\} \\
&= \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f \otimes g).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f) \otimes \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](h) \leq \left[\varphi^{-1}(\nu)\right](f \otimes g)$.

F_4.

$$\begin{aligned}
\left[\varphi^{-1}(\nu)\right](0_X) &= \bigvee\{\nu(g) : g \circ \phi \leq 0_X\} \\
&= \nu(0_Y) \quad \text{ya que } \varphi \text{ es sobreyectiva} \\
&= \top.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\left[\varphi^{-1}(\nu)\right]$ es un L-filtro en X. ■

2.5. Sistemas de L-vecindades y Operador L-interior.

A continuación se introducen las definiciones de sistemas de L-vecindades y Operador L-interior, cuyo aporte al desarrollo de esta teoría consiste en proporcionar las propiedades necesarias que faciliten caracterizar los espacios L-topológicos compactos y posteriormente establecer una prueba del Teorema de Tychonoff.

Definición 2.5.1 (Sistema de L-vecindades)**.** *Sea X un conjunto. Una función $\mathfrak{U} : X \to L^{L^X}$ es llamada un sistema de L-vecindades en X, si y sólo si para cada $p \in X$, la imagen de p bajo $\mathfrak{U}$ denotada por μ_p, satisface las siguientes propiedades, para $f, g \in L^X$.*

U$_1$. $\mu_p(1_X) = \top$.

U$_2$. *Si $f \leq g$, entonces $\mu_p(f) \leq \mu_p(g)$.*

U$_3$. $(\mu_{p(f)}) \otimes (\mu_p(g)) \leq \mu_p(f \otimes g)$.

U$_4$. $\mu_p(f) \leq f(p)$.

U$_5$. $\mu_p(f) \leq \bigvee\{\mu_p(h) : h(q) \leq \mu_q(f)\ \forall q \in X\}$.

Definición 2.5.2 (Operador L-interior)**.** *Sea X un conjunto, una función $\mathcal{K}: L^X \to L^X$ se llama un operador L-interior en X, si y sólo si, para $f, g \in L^X$, $\mathcal{K}$ satisface las siguientes propiedades:*

K$_1$. $\mathcal{K}(1_X) = 1_X$.

K$_2$. *Si $f \leq g$, entonces $\mathcal{K}(f) \leq \mathcal{K}(g)$.*

K$_3$. $\mathcal{K}(f) \otimes \mathcal{K}(g) \leq \mathcal{K}(f \otimes g)$.

K$_4$. $\mathcal{K}(f) \leq f$.

K$_5$. $\mathcal{K}(f) \leq \mathcal{K}(\mathcal{K}(f))$.

Lema 2.5.1. *Sea X un conjunto y τ una L-topología sobre X. La función $\mathcal{K}_\tau : L^X \to L^X$ definida por*

$$\mathcal{K}_\tau(f) = \bigvee \{g \in \tau : g \leq f)\},$$

es un operador L-interior en X.

Demostración. Se debe probar que $\mathcal{K}_\tau$ satisface las propiedades de un operador L-interior. En efecto,

K$_1$.
$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\tau(1_X) &= \bigvee \{g \in \tau : g \leq 1_X\} \\ &= 1_X \end{aligned}$$

K$_2$. Si $f \leq h$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\tau(f) &= \bigvee \{g \in \tau : g \leq f\} \\ &\leq \bigvee \{g \in \tau : g \leq h\} \ \cdot \\ &= \mathcal{K}_\tau(h) \end{aligned}$$

Esto es, $\mathcal{K}_\tau(f) \leq \mathcal{K}_\tau(h)$

K$_3$.
$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\tau(f) \otimes \mathcal{K}_\tau(h) &= \bigvee \{g \in \tau : g \leq f\} \otimes \bigvee \{j \in \tau : j \leq h\} \\ &\leq \bigvee \{g \otimes j \in \tau : g \otimes j \leq f \otimes h\} \\ &= \mathcal{K}_\tau(f \otimes h). \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_\tau(f) \otimes \mathcal{K}_\tau(h) \leq \mathcal{K}_\tau(f \otimes h)$.

K_4.
$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\tau(f) &= \bigvee\{g\in\tau : g\le f\}\\ &\le f.\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{K}_\tau(f)\le f$.

K_5. Se debe probar que $\mathcal{K}_\tau(f)\le\mathcal{K}_\tau(\mathcal{K}_\tau(f))$. Puesto que $\{g\in\tau : g\le f\}\subseteq\tau$, del axioma (iii.) de la definición de L-topología, se obtiene

$$\mathcal{K}_\tau(f)=\bigvee\{g\in\tau : g\le f\}\in\tau.$$

De esta manera se tiene que $\mathcal{K}_\tau(f)\in\tau$ y como $\mathcal{K}_\tau(f)\le K_\tau(f)$, es claro que $\mathcal{K}_\tau(f)\in\{g\in\tau : g\le\mathcal{K}_\tau(f)\}$ y por tanto

$$\mathcal{K}_\tau(f)\le\bigvee\{g\in\tau : g\le\mathcal{K}_\tau(f)\}=\mathcal{K}_\tau(\mathcal{K}_\tau(f)).$$

Es decir, que $\mathcal{K}_\tau(f)\le\mathcal{K}_\tau(\mathcal{K}_\tau(f))$.

Así las cosas, se ha probado que $\mathcal{K}_\tau$ es un operador L-interior en X. ■

Lema 2.5.2. *Todo operador L-interior $\mathcal{K}:L^X\to L^X$ induce, para cada $p\in X$, un sistema de L-vecindades $\mathfrak{U}^{(\mathcal{K})}:X\to L^{(L^X)}$ definido por*

$$[\mathfrak{U}^{(\mathcal{K})}(p)](f)=\mu_p^{(\mathcal{K})}(f)=[\mathcal{K}(f)](p).$$

Demostración. Se debe probar que $\mu_p^{(\mathcal{K})}$ satisface las propiedades de un sistema de L-vecindades. En efecto

U_1. $\mu_p^{(\mathcal{K})}(1_X)=[\mathcal{K}(1_X)](p)=[1_X](p)=\top$. Así, $\mu_p^{(\mathcal{K})}(1_X)=\top$.

U_2. Si $f\le g$, entonces

$$\mu_p^{(\mathcal{K})}(f)=[\mathcal{K}(f)](p)\le[\mathcal{K}(g)](p)=\mu_p^{(\mathcal{K})}(g).$$

De esta manera, $\mu_p^{(\mathcal{K})}(f)\le\mu_p^{(\mathcal{K})}(g)$.

U_3.
$$\begin{aligned}\mu_p^{(\mathcal{K})}(f)\otimes\mu_p^{(\mathcal{K})}(g) &= [\mathcal{K}(f)](p)\otimes[\mathcal{K}(g)](p)\\ &= [\mathcal{K}(f)\otimes\mathcal{K}(g)]\,(p)\\ &\le[\mathcal{K}(f\otimes g)]\,(p)\\ &=\mu_p^{(\mathcal{K})}(f\otimes g).\end{aligned}$$

Por tanto, $\mu_p^{(\mathcal{K})}(f) \otimes \mu_p^{(\mathcal{K})}(g) \leq \mu_p^{(\mathcal{K})}(f \otimes g)$.

U_4. Es fácil ver que $\mu_p^{(\mathcal{K})}(f) \leq f(p)$, ya que $\mathcal{K}(f) \leq f$, por ser un operador L-interior.

U_5. Se debe probar que

$$\mu_p^{(\mathcal{K})}(f) \leq \bigvee\{\mu_p^{(\mathcal{K})}(h) : h(q) \leq \mu_q^{(\mathcal{K})}(f) \; \forall q \in X\}.$$

Puesto que $\mathcal{K} : L^X \to L^X$, sea $f \in L^X$ fijo, y sea $h = \mathcal{K}(f)$. En particular, $h(q) = [\mathcal{K}(f)](q) = \mu_q^{(\mathcal{K})}(f)$, para todo $q \in X$, luego de la propiedad (K_5) se tiene que

$$\mu_p^{(\mathcal{K})}(f) = [\mathcal{K}(f)](p) \leq [\mathcal{K}(\mathcal{K}(f))](p) = \mu_p^{(\mathcal{K})}(h).$$

Por consiguiente $\mu_p^{(\mathcal{K})}(f) \leq \bigvee\{\mu_p^{(\mathcal{K})}(h) : h(q) \leq \mu_q^{(\mathcal{K})}(f) \; \forall q \in X\}$.

Por lo tanto, $\mu_p^{(\mathcal{K})}$ es un sistema de L-vecindades. ■

Proposición 2.5.1. *Sean $(X, \tau), (Y, \varrho)$ espacios L-topológicos, $\varphi : X \to Y$ una función L-continua y sobreyectiva, $\mu_p : L^X \to L$ el sistema de L-vecindades de un punto $p \in X$, inducido por τ y $\mu_{\varphi(p)} : L^Y \to L$ el sistema de L-vecindades correspondiente de $\varphi(p)$ en Y, inducido por ϱ. Entonces*

$$\mu_{\varphi(p)} \leq \varphi(\mu_p),$$

donde $\varphi(\mu_p) : L^Y \to L$ está definido por

$$[\varphi(\mu_p)](g) = \mu_p(g \circ \varphi), \text{ para todo } g \in L^Y.$$

Demostración. Como toda L-topología induce un operador L-interior (Lema2.5.1), se tiene que

$$\mathcal{K}_\varrho(g) = \bigvee\{h \in \varrho : h \leq g\}, \quad \text{para todo } g \in L^Y$$

es un operador L-interior en Y, puesto que por hipótesis φ es L-continua, entonces

$$\{j \circ \varphi : j \in \varrho\} \subseteq \tau.$$

Por otro lado,

$$[\varphi(\mu_p)](g) = \mu_p(g \circ \varphi) = [\mathcal{K}_\tau(g \circ \varphi)](p) = \left[\bigvee\{l \in \tau : l \leq g \circ \varphi\}\right](p).$$

Ahora como $\{h \in \varrho : h \leq g\} \subseteq \varrho$, entonces $\mathcal{K}_\varrho(g) = \bigvee\{h \in \varrho : h \leq g\} \in \varrho$, esto es $\mathcal{K}_\varrho(g) \in \varrho$, para todo $g \in L^Y$, luego de la continuidad de φ se tiene que $(\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi) \in \tau$, pero como $\mathcal{K}_\varrho(g) \leq g$, se sigue que $\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi \leq g \circ \varphi$, de esta manera $(\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi) \in \{l \in \tau : l \leq g \circ \varphi\}$ y por tanto,

$$(\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi) \leq \bigvee\{l \in \tau : l \leq g \circ \varphi\} = \mathcal{K}_\tau(g \circ \varphi).$$

Es decir, que $(\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi) \leq \mathcal{K}_\tau(g \circ \varphi)$. Así las cosas, para cada $p \in X$ se tiene

$$\mu_{\varphi(p)}(g) = [\mathcal{K}_\varrho(g)](\varphi(p)) = [\mathcal{K}_\varrho(g) \circ \varphi]\,(p) \leq [\mathcal{K}_\tau(g \circ \varphi)](p) = \mu_p(g \circ \varphi) = [\varphi(\mu_p)](g)$$

Lo cual prueba que $\mu_{\varphi(p)} \leq \varphi(\mu_p)$. ■

2.6. Compacidad y Teorema de Tychonoff

Teniendo en cuenta el enfoque que se le ha dado a esta teoría, se procede a definir la compacidad en los espacios L-topológicos por medio de los puntos adherentes de un filtro definido sobre este espacio, concepto que a continuación se define.

Definición 2.6.1. *Sea (X, τ) un espacio L-topológico y $\mu : X \to L^{L^X}$ el sistema de L-vecindades correspondiente. Además, sea $\nu : L^X \to L$ un L-filtro sobre X. Un punto $p \in X$ se llama punto adherente de ν si y sólo si, existe otro L-filtro $\bar{\nu}$ sobre X, provisto de las siguientes propiedades:*

i. $\bar{\nu}((\perp \otimes \top) \cdot 1_X) \leq \perp \otimes \top$.

ii. $\mu_p \leq \bar{\nu}$, $\nu \leq \bar{\nu}$.

Donde $(\perp \otimes \top) \cdot 1_X(x) = \perp \otimes \top$, *para todo* $x \in X$.

Definición 2.6.2. *Un espacio L-topológico (X, τ) es compacto si y sólo si, cada L-filtro en X tiene al menos un punto adherente.*

Observación 2.6.1. *De la Definición 2.6.1, es claro que todo L-filtro sobre X satisface la condición (i), ya que como L es un GL-monoide, se tiene que $\perp \otimes \top = \perp$, luego $(\perp \otimes \top) \cdot 1_X(x) = \perp = 0_X(x)$, para todo $x \in X$, de modo que si ν es un L-filtro sobre X, se sigue que*

$$\nu((\perp \otimes \top) \cdot 1_X) = \nu(0_X) = \perp.$$

Por tanto, para probar que un L-filtro ν tiene un punto adherente, es suficiente probar la condición (ii) de la definición de punto adherente.

Proposición 2.6.1. *Sean (X, τ) un espacio L-topológico compacto, (Y, ϱ) un espacio L-topológico y $\varphi : X \to Y$ una función L-continua y sobreyectiva. Entonces (Y, ϱ) es compacto.*

Demostración. Sea $\nu : L^Y \to L$ un L-filtro en Y, se debe probar que ν tiene al menos un punto adherente.

De la Proposición 2.4.4 se tiene que $\varphi^{-1}(\nu)$ es un L-filtro sobre X. Ya que por hipótesis (X, τ) es compacto, $\varphi^{-1}(\nu)$ tiene al menos un punto adherente $p \in X$, esto es existe un L-filtro $\bar{\nu}$ sobre X, tal que $\mu_p \leq \bar{\nu}$ y $\varphi^{-1}(\nu) \leq \bar{\nu}$.

Aplicando la Proposición 2.4.3, se obtiene

$$[\varphi\,(\mu_p)](g) = \mu_p(g \circ \phi) \leq \bar{\nu}(g \circ \phi) = [\varphi\,(\bar{\nu})](g),$$

para todo $g \in L^Y$, esto es, $\varphi(\mu_p) \leq \varphi(\bar{\nu})$.

Como por hipótesis φ es L-continua y sobreyectiva, de la Proposición 2.5.1 se tiene que $\mu_{\varphi(p)} \leq \varphi(\mu_p)$, y como $\varphi(\mu_p) \leq \varphi(\bar{\nu})$, se obtiene

$$\mu_{\varphi(p)} \leq \varphi(\bar{\nu}) \qquad (a)$$

Donde $\mu_{\varphi(p)}$ es un sistema de L-vecindades en Y, y $\varphi(\bar{\nu})$ un L-filtro en Y.

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi\left([\varphi^{-1}(\nu)](g)\right) &= [\varphi^{-1}(\nu)](g \circ \varphi) \\ &= \bigvee \{\nu(h) : \ h \circ \varphi \leq g \circ \varphi\} \\ &= \nu(g). \end{aligned}$$

Puesto que $\varphi^{-1}(\nu) \leq \bar{\nu}$, se tiene

$$\nu(g) = \varphi\left([\varphi^{-1}(\nu)](g)\right) = [\varphi^{-1}(\nu)](g \circ \varphi) \leq \bar{\nu}(g \circ \varphi) = [\varphi(\bar{\nu})](g),$$

para todo $g \in L^Y$. Por tanto,

$$\nu \leq \varphi(\bar{\nu}) \qquad (b)$$

Así, de (a) y (b) se obtiene que $\varphi(p)$ es un punto adherente del L-filtro ν de Y. Luego, (Y, ϱ) es compacto. ■

2.6.1. L-Topología producto

Es claro a partir de la naturaleza del Teorema de Tychonoff el tener que definir una topología sobre el producto cartesiano arbitrario de espacios topológicos, independientemente de la estructura topológica que se este tratando. Para el caso de la L-topología, la L-topología producto se define utilizando los conceptos de base y subbase, los cuales no se definieron al inicio de este capítulo porque sólo se usarán en este apartado para definir la L-topología producto como aquella que es generada por una subbase.

Definición 2.6.3. *Sea (X, τ) un espacio L-topológico, un conjunto $\mathcal{B} \subseteq L^X$ es una base para τ si y sólo si, cada elemento de τ se puede expresar como supremo de elementos de $\mathcal{B}$.*

Definición 2.6.4. *Sea (X, τ) un espacio L-topológico, un conjunto $\mathcal{S} \subseteq L^X$ es una subbase para τ si y sólo si, la familia de todos los ínfimos finitos de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para τ.*

Lema 2.6.1. *Sea L un GL-monoide y $\mathcal{S} \subseteq L^X$, la topología generada por $\mathcal{S}$, denotada por $\langle \mathcal{S} \rangle$ se define:*

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \bigvee_{J \in K} \bigwedge_{j \in J} g_j : g_j \in \mathcal{S}, \ \forall J \in K, \ J \text{ finito} \right\} \bigcup \{1_X, 0_X\}.$$

Demostración. Véase [16, 14]. ■

Proposición 2.6.2 (L-topología producto)**.** *Sean $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios L-topológicos, donde $X = \prod_{i\in I} X_i$ y $p_i : X \to X_i$ la proyeccion i-ésima, definida por $p_i(x) = x_i$, donde $x = (x_i)_{i\in I}$. Se define la L-topología producto sobre X por la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ dada por*

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(g_i) : g_i \in \tau_i,\ i \in I\}.$$

Demostración. Para detalles de esta prueba, ver [16, 14]. ■

Antes de establecer una prueba del Teorema de Tychonoff se introducen los siguientes lemas.

Lema 2.6.2. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos L-difusos, donde $X = \prod_{i\in I} X_i$. Para cada $f \in L^X$, se define*

$$\Gamma_f = \left\{ k \in \prod_{i\in I} L^{X_i} :\ k_i = 1_{X_i},\ \textit{para un número finito de indices } i,\ \textit{y} \bigotimes_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(k_i) \leq f \right\}.$$

Entonces, se cumplen las siguientes condiciones

i. Sea $1_\Delta \in \prod_{i\in I} L^{X_i}$ definido por $(1_\Delta)_i = 1_{X_i}$, para cada $i \in I$. entonces $1_\Delta \in \Gamma_{1_X}$.

ii. Si $h \in \Gamma_f$ y $k \in \Gamma_g$, entonces $h \otimes k \in \Gamma_{f\otimes g}$.

Demostración. i. Puesto que $1_\Delta \in \prod_{i\in I} L^{X_i}$, esta definida por $(1_\Delta)_i = 1_{X_i}$, para cada $i \in I$ se tiene que $\bigotimes_{i\in I}(1_{X_i} \circ p_i) \leq 1_X$, ya que

$$(1_{X_i} \circ p_i)(x) = 1_{X_i}(p_i(x)) = 1_{X_i}(x_i) = \top.$$

De modo que

$$\bigotimes_{i\in I}(1_{X_i} \circ p_i)(x) = \bigotimes_{i\in I} \top = \top = 1_X(x).$$

Por tanto $1_\Delta \in \Gamma_{1_X}$.

ii. Se probará primero que si $h \in \prod_{i\in I} L^{X_i}$, entonces

$$\bigotimes_{i\in I}(h_i \circ p_i) = \left(\bigotimes_{i\in I} h_i\right) \circ p_i.$$

En efecto, ya que

$$\begin{aligned}\left[\left(\bigotimes_{i\in I} h_i\right) \circ p_i\right](x) = \left[\left(\bigotimes_{i\in I} h_i\right)\right](p_i(x)) &= \left(\textstyle\bigotimes_{i\in I} h_i\right)(x_i)\\ &= \bigotimes_{i\in I}(h_i(x_i))\\ &= \bigotimes_{i\in I}(h_i(p_i(x))),\end{aligned}$$

se tiene que $[(\bigotimes_{i\in I} h_i)\circ p_i](x) = \bigotimes_{i\in I}(h_i\circ p_i)(x)$, es decir, que

$$\bigotimes_{i\in I}(h_i\circ p_i) = \left(\bigotimes_{i\in I} h_i\right)\circ p_i.$$

Ahora, se probará que si $h\in\Gamma_f$ y $k\in\Gamma_g$, entonces $h\otimes k\in\Gamma_{f\otimes g}$. En efecto, ya que $h\in\Gamma_f$ y $k\in\Gamma_g$, entonces $h,k\in\prod_{i\in I} L^{X_i}$ y

$$\bigotimes_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(h_i)\leq f \quad \text{y} \quad \bigotimes_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(k_i)\leq g$$

Por tanto,

$$\left[\bigotimes_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(h_i)\right]\otimes\left[\bigotimes_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(k_i)\right]\leq f\otimes g.$$

Esto es,

$$\left[\bigotimes_{i\in I}(h_i\circ p_i)\right]\otimes\left[\bigotimes_{i\in I}(p_i\circ k_i)\right]\leq f\otimes g.$$

Ya que $\otimes$ es asociativa y conmutativa, se tiene que

$$\bigotimes_{i\in I}\left[(h_i\circ p_i)\otimes(p_i\circ k_i)\right]\leq f\otimes g.$$

Del resultado anterior se sigue

$$\bigotimes_{i\in I}\left[(h_i\otimes k_i)\circ p_i\right]\leq f\otimes g.$$

Por lo tanto, $h\otimes k\in\Gamma_{f\otimes g}$. ■

Lema 2.6.3. *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios L-topológicos y sea (X,τ) el espacio dotado de la L-topología producto. Entonces para cada $p\in X$, la aplicación $\mu_p : L^X\to L$ definida por*

$$\mu_p(f) = \bigvee\left\{\bigotimes_{i\in I}\mu_{p_i}(h_i) :\ h\in\Gamma_f\right\},$$

es un sistema de L-vecindades sobre X.

Demostración. Se debe probar que μ_p satisface los axiomas de un sistema de L-vecindades.

U$_1$. $\mu_p(1_X)=\top$. Del Lema 2.6.2 (i.) se sabe que $1_\Delta\in\Gamma_{1_X}$, donde $(1_\Delta)_i = 1_{X_i}$, para cada $i\in I$. Luego, como $\mu_{p_i}((1_\Delta)_i) = \mu_{p_i}(1_{X_i}) = \top$, para todo $i\in I$, se obtiene que

$$\bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}((1_\Delta)_i) = \top.$$

De esta manera,

$$\mu_p(1_X) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}((1_\Delta)_i) : \ 1_\Delta \in \Gamma_{1_X} \right\} = \top.$$

Por tanto, $\mu_p(1_X) = \top$.

U$_2$. Si $f \leq g$ en L^X, entonces $\Gamma_f \subseteq \Gamma_g$, así

$$\bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(h_i) : \ h \in \Gamma_f \right\}$$

$$\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(h_i) : \ h \in \Gamma_g \right\},$$

y por tanto $\mu_p(f) \leq \mu_p(g)$.

U$_3$. Se debe verificar que $\mu_p(f) \otimes \mu_p(g) \leq \mu_p(f \otimes g)$, para $f, g \in L^X$. Puesto que

$$\mu_p(f) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(h_i) : \ h \in \Gamma_f \right\},$$

$$\mu_p(g) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(k_i) : \ k \in \Gamma_g \right\},$$

$\otimes$ es conmutativa, respecto a extremos superiores y del Lema 2.6.2 (ii.) se tiene

$$\begin{aligned}
&\mu_p(f) \otimes \mu_p(g) \\
&\quad = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(h_i) \otimes \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(k_i) : \ h \in \Gamma_f, \ k \in \Gamma_g \right\} \\
&\quad = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} [\mu_{p_i}(h_i) \otimes \mu_{p_i}(k_i)] : \ h \in \Gamma_f, \ k \in \Gamma_g \right\} \\
&\quad \leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mu_{p_i}(h_i \otimes k_i) : \ h \otimes k \in \Gamma_{f\otimes g} \right\} \\
&\quad = \mu_p(f \otimes g).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mu_p(f) \otimes \mu_p(g) \leq \mu_p(f \otimes g)$.

U_4. Se debe ver que $\mu_p(f) \leq f(p)$, para cada $f \in L^X$. Puesto que μ_{p_i} es un sistema de L-vecindades sobre X_i, se tiene que $\mu_{p_i}(h_i) \leq h_i(p_i)$, para todo $i \in I$ y todo $h_i \in L^{X_i}$.

Sea $h \in \Gamma_f$, luego $h \in \prod_{i \in I} L^{X_i}$, $\; h_i = 1_{X_i}$, para un número finito de indices $i \in I$ y

$$\bigotimes_{i \in I}(h_i \circ p_i) \leq f,$$

así

$$\bigotimes_{i \in I}(h_i \circ p_i)(p) \leq \bigotimes_{i \in I} h_i(p_i) \leq f(p).$$

Ahora, como $\mu_{p_i}(h_i) \leq h_i(p_i)$, para todo $i \in I$,

$$\bigotimes_{i \in I} \mu_{p_i}(h_i) \leq \bigotimes_{i \in I} h_i(p_i) \leq f(p).$$

Esto implica que

$$\mu_p(f) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i \in I} \mu_{p_i}(h_i) : \; h \in \Gamma_f \right\} \leq f(p).$$

Es decir, $\mu_p(f) \leq f(p)$.

U_5. Se debe probar que

$$\mu_p(f) \leq \bigvee \{\mu_p(g) : g(q) \leq \mu_q(f), \forall q \in X\}.$$

Como cada μ_{p_i} es un sistema de L-vecindades sobre X_i, se tiene que

$$\mu_{p_i}(k_i) \leq \bigvee \{\mu_{p_i}(h_i) : \; h_i(q_i) \leq \mu_{q_i}(k_i), \forall q_i \in X_i\}.$$

Luego, para $k \in \Gamma_f$ y $h \in \Gamma_g$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i \in I} \mu_{p_i}(k_i) \quad & \leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i \in I} \mu_{p_i}(h_i) : h_i(q_i) \leq \mu_{q_i}(k_i), \forall q_i \in X_i \right\} \\
& \leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i \in I} \mu_{p_i}(h_i \circ p_i) : h_i(q_i) \leq \mu_{q_i}(k_i), \forall q_i \in X_i \right\}
\end{aligned}$$

Así las cosas, se obtiene que

$$\mu_p(f) \leq \bigvee\{\mu_p(g) : g(q) \leq \mu_q(f), \forall q \in X\}.$$

Por tanto, se ha probado que μ_p es un sistema de L-vecindades sobre X. ∎

Lema 2.6.4. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios L-topológicos y sea (X, τ) el espacio dotado de la L-topología producto. Sean $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ y $\mu_q : L^X \times L \to L$ un L-ultrafiltro y un sistema de L-vecindades sobre X, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

i. $\mu_q \leq \mathcal{U}$, *donde* $q = (q_i)_{i\in I} \in X$.

ii. Para cada $i \in I$, $\mu_{q_i} \leq p_i(\mathcal{U})$.

Demostración. Suponga que $\mu_q \leq \mathcal{U}$, donde $q = (q_i)_{i\in I} \in X$, como p_i es continua y sobreyectiva, para cada $i \in I$, se tiene que

$$p_i(\mu_q) \leq p_i(\mathcal{U}),$$

donde $p_i(\mu_q)$ y $p_i(\mathcal{U})$ son un sistema de L-vecindades y un L-ultrafiltro sobre X_i, respectivamente. De la Proposición 3.4.1, se obtiene que

$$\mu_{q_i} = \mu_{p_i(q)} \leq p_i(\mu_q) \leq p_i(\mathcal{U}).$$

Por tanto $\mu_{q_i} \leq p_i(\mathcal{U})$, para cada $i \in I$.

Para probar que (ii.) implica (i.), suponga que $\mu_{q_i} \leq p_i(\mathcal{U})$, para cada $i \in I$. Luego, para $h \in \Gamma_f$

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i\in I} \mu_{q_i}(h_i) &\leq \bigotimes_{i\in I} [p_i(\mathcal{U})]\,(h_i) \\
&= \bigotimes_{i\in I} \mathcal{U}(h_i \circ p_i) \\
&\leq \mathcal{U}\left(\bigotimes_{i\in I}(h_i \circ p_i)\right) \\
&\leq \mathcal{U}(f).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mu_q(f) = \bigvee\left\{\bigotimes_{i\in I} \mu_{q_i}(h_i) : \ h \in \Gamma_f\right\} \leq \mathcal{U}(f).$$

Esto implica que $\mu_q \leq \mathcal{U}$. ∎

Teorema 2.6.1 (Tychonoff). *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios L-topológicos y sea (X, τ) el espacio dotado de la L-topología producto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

i. *(X_i, τ_i) es compacto, para todo $i \in I$.*

ii. *El espacio (X, τ), dotado de la L-topología producto, es compacto en la categoría L-Top.*

Demostración. Asuma que (X_i, τ_i) es compacto, para todo $i \in I$, se debe probar que (X, τ) es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ un L-ultrafiltro sobre X, luego $p_i(\mathcal{U})$ es un L-ultrafiltro sobre X_i y como por hipótesis (X_i, τ_i) es compacto, existe un L-filtro $\bar{\nu}$ sobre X_i, tal que $\mu_{q_i} \leq \bar{\nu}$, donde $q_i \in X_i$, y $p_i(\mathcal{U}) \leq \bar{\nu}$. Pero como $p_i(\mathcal{U})$ es un L-ultrafiltro, entonces $p_i(\mathcal{U}) = \bar{\nu}$. Así se tiene que $\mu_{q_i} \leq p_i(\mathcal{U})$, luego del Lema 3.5.2 se tiene que $\mu_q \leq \mathcal{U}$, donde $q = (q_i)_{i\in I} \in X$ y ya que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}$, se obtiene que $q = (q_i)_{i\in I}$ es un punto adherente de $\mathcal{U}$ y por tanto (X, τ) es compacto en la categoría L-Top.

Asuma ahora que (X, τ) es compacto en la categoría L-Top, se debe ver que (X_i, τ_i) es compacto, para cada $i \in I$. Puesto que cada proyección i-ésima $p_i : X \to X_i$ es continua y sobreyectiva, para cada $i \in I$. La Proposición 2.6.1 prueba que (X_i, τ_i) es compacto, para todo $i \in I$. ■

Capítulo 3

Teorema de Tychonoff sobre la Topología L-difusa

3.1. Introducción

En la medida que se estudian los espacios topológicos L-difusos y algunas de las estructuras y resultados empleados en este capítulo, para efecto del objetivo propuesto, es notable encontrar una gran similitud con la teoría desarrollada en el capítulo 2 sobre los espacios L-topológicos, esto se debe principalmente a que la topología L-difusa es una extención de la L-topología sobre los conjuntos L-difusos, esto hace que el camino a seguir para establecer una prueba del Teorema de Tychonoff en este ambiente sea análogo al del capítulo anterior, por tal motivo el orden a seguir en éste es desde una perspectiva general igual al del anterior.

3.2. Espacios topológicos L-difusos

En esta sección se introduce el concepto de espacios topológicos L-difusos y de las funciones LF-continuas.

Definición 3.2.1 (Topología L-difusa)**.** *Sean $(L. \leq, \otimes)$ un cqm-reticulo y X un conjunto dado. Una topología L-difusa sobre X es una función $\tau : L^X \to L$ que satisface las siguientes propiedades:*

i. $\tau(1_X) = \top$.

ii. $\tau(f) \otimes \tau(g) \leq \tau(f \otimes g)$, *para todo* $f, g \in L^X$.

iii. Para todo subconjunto $\{f_i\}_{i \in I}$ *de* L^X *se cumple*

$$\bigwedge_{i \in I} \tau(f_i) \leq \tau(\bigvee_{i \in I} f_i).$$

Donde I es un conjunto de indices.

El par (X, τ) formado por un conjunto X y una topología L-difusa τ sobre X se llama espacio topológico L-difuso.

Nota 3.2.1. *Si X es el conjunto vacío, entonces $L^{\emptyset} = \{\emptyset\}$; en este contexto, respecto a la función $\tau : L^{\emptyset} \to L$ definida por $\tau(\emptyset) = \top$, es la única topología L-difusa sobre $\emptyset$.*

Ahora, si el conjunto X es distinto de vacío, entonces el conjunto potencia difuso L^X tiene al menos dos elementos. Cuando se toma el subconjunto vacío de L^X y se aplica el axioma (iii.) se obtiene

iv. $\tau(0_X) = \top$.

Si se interpreta el retículo $(L, \leq)$ como el conjunto de valores de verdad, entonces el valor $\tau(f)$ de una topología L-difusa sobre X expresa el grado en que f es abierto. De acuerdo a (i.) y (iv.) las cotas universales de $(L^X, \leq)$ son siempre abiertos.

Observación 3.2.1. *En el conjunto $\mathfrak{T}_L(X)$, de todas las topologías L-difusas sobre X, se introduce un orden parcial definido puntualmente como sigue*

$$\tau_1 \leq \tau_2, \quad \textit{si y sólo si} \quad \tau_1(f) \leq \tau_2(g), \quad \textit{para todo} \quad f \in L^X.$$

Cuando $\tau_1 \leq \tau_2$, se dice que τ_1 es más gruesa que τ_2 o que τ_2 es más fina que τ_1.

Véase a continuación algunos ejemplos de espacios topológicos L-difusos, donde L hace referencia a un cqm-retículo.

Ejemplo 3.2.1. *Sea X un conjunto arbitrario distinto de vacío, la función $\tau : L^X \to L$ definida por $\tau(f) = \top$, para todo $f \in L^X$ es una topología L-difusa sobre X.*

Ejemplo 3.2.2. *Sea X un conjunto distinto de vacío, la función $\tau : L^X \to L$ definida por*

$$\tau(f) = \begin{cases} \bigwedge_{x \in X} f(x), & \textit{si} \quad f \neq 0_X \\ \top, & \textit{si} \quad f = 0_X \end{cases}$$

es una topología L-difusa sobre X.

En efecto,

i. Es claro que $\tau(1_X) = \top$, ya que, $\bigwedge_{x \in X} 1_X(x) = \top$

ii. Sea $f, g \in L^X$, se debe probar que $\tau(f) \otimes \tau(g) \leq \tau(f \otimes g)$. Si $f \otimes g = 0_X$ no hay nada que probar. Por otro lado, si $f \otimes g \neq 0_X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau(f) \otimes \tau(g) &= \left(\bigwedge_{x \in X} f(x) \right) \otimes \left(\bigwedge_{y \in X} g(y) \right) \\
&= \bigwedge_{x,y \in X} \left(f(x) \otimes g(y) \right) \\
&\leq \bigwedge_{x \in X} \left(f \otimes g \right)(x) \\
&= \tau(f \otimes g)
\end{aligned}$$

iii. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ *un subconjunto de* L^X*, tal que* $\bigvee_{i \in I} f_i \neq 0_X$*. Puesto que*

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i \in I} \tau(f_i) &= \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{x \in X} f_i(x) \\
&\leq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{x \in X} f_i(x) \\
&\leq \bigvee_{i \in I} f_i(x)
\end{aligned}$$

se sigue

$$\bigwedge_{i \in I} \tau(f_i) \leq \bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right)(x) = \tau \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right).$$

Por otro lado, si $\bigvee_{i \in I} f_i = 0_X$*, no hay nada que probar. Así las cosas,* τ *es una topología L-difusa sobre* X*.*

Ejemplo 3.2.3. *Sea* $\{\tau_i\}_{i \in I}$ *una colección de topologías L-difusas sobre un conjunto* X*. Se puede probar que la función* $\tau : L^X \to L$ *definida por*

$$\tau(f) = \bigwedge_{i \in I} \tau_i(f)$$

es una topología L-difusa sobre X*.*

Nota 3.2.2. *De los ejemplos anteriores se puede ver que el conjunto parcialmente ordenado* $(\mathfrak{T}_\tau(X), \leq)$ *es un retículo completo, donde la topología de los Ejemplos 3.2.1 y 3.2.3 representan la cota superior universal y el extremo inferior de* $\mathfrak{T}_\tau(X)$ *y la colección* $\{\tau_i\}_{i \in I}$*, respectivamente.*

Definición 3.2.2 (Funciones LF-continuas)**.** *Sean* (X, τ) *y* (Y, η) *espacios topológicos L-difusos y* $\phi : X \to Y$ *una función. Se dice que* ϕ *es* LF*-continua, si y sólo si, para todo* $g \in L^Y$ *se satisface*

$$\eta(g) \leq \tau(g \circ \phi).$$

Así las cosas, los espacios topológicos L-difusos y las funciones LF-continuas forman una categoría, denotada L-FTop.

3.3. Filtros y ultrafiltros L-difusos

Con el fin de introducir la noción de filtros L-difusos, se define un orden parcial en el conjunto $L^X \times L$ mediante la relación $\preccurlyeq$ como sigue

$$(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \quad \text{si y sólo si} \quad f \leq g \quad \text{y} \quad \beta \leq \alpha,$$

donde $(f,\alpha),(g,\beta) \in L^X \times L$.

El lema que sigue, aporta la estructura de GL-monide al conjunto $L^X \times L$.

Lema 3.3.1. *Sea $(L,\leq)$ un retículo completo, tal que $(L,\leq,\otimes)$ es un GL-monoide y $(L,\leq,\vee)$ un GL-comonoide, entonces la tripleta $(L^X \times L,\preccurlyeq,\boxtimes)$, donde*

$$(f,\alpha)\boxtimes(g,\beta) := (f\otimes g, \alpha\vee\beta), \quad \textit{para todo} \quad (f,\alpha),(g,\beta) \in L^X \times L,$$

es un GL-monoide.

Demostración. Se debe probar primero que $(L^X \times L,\preccurlyeq)$ es un retículo completo. En efecto, es claro que $(L^X \times L,\preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\{(f_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$ un subconjunto de $L^X \times L$, si se define

a. $\displaystyle\bigwedge_{i\in I}(f_i,\alpha_i) = \left(\bigwedge_{i\in I} f_i, \bigvee_{i\in I}\alpha_i\right)$

b. $\displaystyle\bigvee_{i\in I}(f_i,\alpha_i) = \left(\bigvee_{i\in I} f_i, \bigwedge_{i\in I}\alpha_i\right)$

se tiene que $\bigwedge_{i\in I} f_i \leq f_i$ y $\alpha_i \leq \bigvee_{i\in I}\alpha_i$, para todo $i\in I$, esto es, $\bigwedge_{i\in I}(f_i,\alpha_i) \preccurlyeq (f_i,\alpha_i)$, para todo $i \in I$. Análogamente se prueba que $(f_i,\alpha_i) \preccurlyeq \left(\bigvee_{i\in I} f_i, \bigwedge_{i\in I}\alpha_i\right)$, así (a.) y (b.) representan el extremo inferior y superior de $\{(f_i,\alpha_i)\}_{i\in I}$, respectivamente.

En particular, $\perp = (0_X,\top)$ y $\top = (1_X,\perp)$ son la cota inferior y superior universal de $L^X \times L$, respectivamente. Por tanto, el par $(L^X \times L,\preccurlyeq)$ es un retículo completo. Resta probar que la operación binaria $\boxtimes$ satisface las propiedades de GL-monoide. En efecto, sean $(f,\alpha),(g,\beta),(h,\gamma) \in L^X \times L$:

i. $\boxtimes$ es monótona. Asuma que $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, se debe probar que

$$(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma) \preccurlyeq (g,\beta)\boxtimes(h,\gamma), \quad \text{para todo} \quad (h,\gamma) \in L^X \times L.$$

Es decir, $f\otimes h \leq g\otimes h$ y $\beta\vee\gamma \leq \alpha\vee\gamma$, lo cual es claro, ya que por hipótesis $f \leq g$ y $\beta \leq \alpha$ y tanto $\otimes$ como $\vee$ son monótonas.

ii. $\boxtimes$ es conmutativa. Ya que, $\otimes$ y $\vee$ también lo son.

iii. $\boxtimes$ es asociativa, debido a la asociatividad de $\otimes$ y $\vee$.

iv. $(L^X \times L,\preccurlyeq,\boxtimes)$ es entero. Es decir, que $\top$ actúa como elemento neutro. En efecto, como $\top = (1_X,\perp)$ se sigue

$$(1_X,\top)\boxtimes(f,\alpha) = (1_X\otimes f, \perp\vee\alpha) = (f,\alpha), \quad \text{para todo} \quad (f,\alpha) \in L^X \times L.$$

v. $\perp = (0_X, \top)$ actúa como elemento cero.

$$(0_X, \top) \boxtimes (f, \alpha) = (0_x \otimes f, \top \vee \alpha) = (0_X, \top) \quad \text{para todo} \quad (f, \alpha) \in L^X \times L.$$

vi. $\boxtimes$ es distributiva respecto a extremos superiores arbitrarios. Esto es, para todo $(f, \alpha) \in L^X \times L$ y para todo $\{(g_i, \beta_i)\}_{i \in I} \subseteq L^X \times L$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(f, \alpha) \boxtimes \left[\bigvee_{i \in I} (g_i, \beta_i) \right] &= (f, \alpha) \otimes \left(\bigvee_{i \in I} g_i, \bigwedge_{i \in I} \beta_i \right) \\
&= \left(f \otimes \left(\bigvee_{i \in I} g_i \right), \alpha \vee \left(\bigwedge_{i \in I} \beta_i \right) \right) \\
&= \left(\bigvee_{i \in I} (f \otimes g_i), \bigwedge_{i \in I} (\alpha \vee \beta_i) \right) \\
&= \bigvee_{i \in I} (f \otimes g_i, \alpha \vee \beta_i) \\
&= \bigvee_{i \in I} [(f, \alpha) \boxtimes (g_i, \beta_i)].
\end{aligned}$$

vii. $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$ es divisible. Esto es, si $(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta)$, existe $(h, \gamma) \in L^X \times L$, tal que

$$(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta) \boxtimes (h, \gamma).$$

Puesto que $(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta)$, $f \leq g$ y $\beta \leq \alpha$ y como $\otimes$ es divisible y $\vee$ es co-divisible, existe $h \in L^X$ y $\gamma \in L$, tales que $f = g \otimes h$ y $\beta \vee \gamma = \alpha$, de esta manera

$$(f, \alpha) = (g \otimes h, \beta \vee \gamma) = (g, \beta) \boxtimes (h, \gamma), \quad \text{donde} \quad (h, \gamma) \in L^X \times L.$$

Por tanto, se ha probado que la tripleta $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$ es un GL-monide. ■

Observación 3.3.1. *Debido a que el GL-monoide $(L, \leq, \otimes)$ es residuado, con operación binaria $\longmapsto$, dada por*

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee_{\lambda \in L} \{\lambda : \alpha \otimes \lambda \leq \beta\} \qquad (1)$$

y el GL-comonoide $(L, \leq, \vee)$ es co-residuado con operación binaria $\rhd$, dada por

$$\alpha \rhd \beta = \bigwedge_{\lambda \in L} \{\lambda : \alpha \leq \beta \vee \lambda\}$$

se tiene que, para el GL-monide $(L^X \times L, \preccurlyeq, \boxtimes)$ la operación binaria $\longmapsto$ se define de manera análoga a (1), esto es, para $(f, \alpha), (g, \beta), (h, \gamma) \in L^X \times L$ se obtiene

$$(f, \alpha) \longmapsto (g, \beta) = \bigvee \{(h, \gamma) \in L^X \times L : (f, \alpha) \boxtimes (h, \gamma) \preccurlyeq (g, \beta)\}.$$

Puesto que $(f,\alpha)\boxtimes(h,\gamma)\preccurlyeq(g,\beta)$, *si y sólo si,* $f\otimes h\leq g$ *y* $\beta\leq\alpha\vee\gamma$, *además*

$$\bigvee_{(h,\gamma)\in L^X\times L}(h,\gamma)=\left(\bigvee_{h\in L^X}h,\bigwedge_{\gamma\in L}\gamma\right)=\bigvee_{h\in L^X}\bigwedge_{\gamma\in L}(h,\gamma),$$

$$(f,\alpha)\longmapsto(g,\beta)=\bigvee_{h\in L^X}\bigwedge_{\gamma\in L}\{(h,\gamma):f\otimes h\leq g,\ \beta\leq\alpha\vee\gamma\}=(f\longmapsto g,\beta\rhd\alpha),$$

que caracterizado por la condición de adjunción

$$(f,\alpha)\boxtimes(g,\beta)\preccurlyeq(h,\gamma),\quad \textit{si y sólo si}\quad (f,\alpha)\preccurlyeq[(g,\beta)\longmapsto(h,\gamma)],$$

para todo $(f,\alpha),(g,\beta),(h,\gamma)\in L^X\times L$.

Al igual que en la topología general y la L-topología, el concepto de filtro (respeto a cada estructura topológica) desarrolla un papel muy importante para caracterizar la compacidad en los espacios topológicos L-difusos, donde recibe el nombre de filtro L-difuso y cuya definición está dada como sigue.

Definición 3.3.1 (Filtros L-difusos)**.** *Sea X un conjunto. Un filtro L-difuso sobre X, es una función $\mathcal{F}:L^X\times L\to L$, tal que para $(f,\alpha),(g,\beta)\in L^X\times L$ satisface las siguientes propiedades:*

F_1. $\mathcal{F}(1_X,\alpha)=\top$, *para todo* $\alpha\in L$.

F_2. *si* $(f,\alpha)\preccurlyeq(g,\beta)$, *entonces* $\mathcal{F}(f,\alpha)\leq\mathcal{F}(g,\beta)$.

F_3. $\mathcal{F}(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}(g,\beta)\leq\mathcal{F}(f\otimes g,\alpha\vee\beta)$.

F_4. $\mathcal{F}(0_X,\alpha)=\bot$ *para todo* $\alpha\in L$.

El conjunto de todos los filtros L-difusos sobre X se denota por $\mathfrak{F}_{LF}(X)$.

Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros L-difusos sobre X. Se dice que $\mathcal{F}_2$ es más fino que $\mathcal{F}_1$ y se denota por $\mathcal{F}_1\preccurlyeq\mathcal{F}_2$, donde

$$\mathcal{F}_1\preccurlyeq\mathcal{F}_2,\quad \text{si y sólo si}\quad \mathcal{F}_1(f,\alpha)\leq\mathcal{F}_2(g,\beta),$$

para todo $(f,\alpha),(g,\beta)\in L^X\times L$. La relación $\preccurlyeq$ definida anteriormente, introduce un orden parcial en el conjunto $\mathfrak{F}_{LF}(X)$.

La proposición que sigue, prueba que toda cadena en $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$ tiene una cota superior, sentando las bases para definir un filtro L-difuso especial, llamado ultrafiltro L-difuso.

Proposición 3.3.1. *El conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$ tiene elementos maximales.*

Demostración. para probar que el par $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$ tiene elementos maximales, se debe aplicar el lema de zorn, y para esto es suficiente mostrar que toda cadena $\mathcal{C}$ en $\mathfrak{F}_{LF}(X)$ tiene una cota superior en $\mathfrak{F}_{LF}(X)$. En efecto, sea $\mathcal{C}=\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$, donde I es un conjunto de indices, una cadena no vacía de $\mathfrak{F}_{LF}(X)$. Se define una función $\mathcal{F}_\infty:L^X\times L\to L$, por medio de

$$\mathcal{F}_\infty(f,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(f,\alpha).$$

Se debe probar que $\mathcal{F}_\infty$ es un filtro L-difuso sobre X. Esto es,

F_1. $\mathcal{F}_\infty(1_X,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(1_X,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \top = \top.$

F_2. Si $(f\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, entonces

$$\mathcal{F}_\infty(f,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(f,\alpha) \leq \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(g,\beta) = \mathcal{F}_\infty(g,\beta).$$

F_3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\infty(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}_\infty(g,\beta) &= \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(f,\alpha)\otimes\bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(g,\beta) \\
&= \bigvee_{i\in I} [\mathcal{F}_i(f,\alpha)\otimes\mathcal{F}_i(g,\beta)] \\
&\leq \bigvee_{i\in I} [\mathcal{F}_i\,(f\otimes g,\alpha\vee\beta)] \\
&= \mathcal{F}_\infty\,(f\otimes g,\alpha\vee\beta)
\end{aligned}.$$

F_4. $\mathcal{F}_\infty(0_X,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \mathcal{F}_i(0_X,\alpha) = \bigvee_{i\in I} \bot = \bot.$

Así, se tiene que $\mathcal{F}_\infty$ es un filtro L-difuso sobre X y además $\mathcal{F}_i \preccurlyeq \mathcal{F}_\infty$, para todo $i \in I$. Por tanto, $\mathcal{F}_\infty$ es una cota superior para $\mathcal{C}$, luego del lema de zorn se concluye que $\mathfrak{F}_{LF}(X)$ tiene elementos maximales. ■

Definición 3.3.2. *Sea X un conjunto, un ultrafiltro L-difuso $\mathcal{U}$ sobre X, es un elemento maximal en $(\mathfrak{F}_{LF}(X),\preccurlyeq)$.*

Una caracterización de los ultrafiltros L-difusos se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2. *Para cada filtro L-difuso $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ en X, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso.*

ii. *$\mathcal{U} = (\mathcal{U}\,[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)])\longmapsto\bot$, para todo $(f,\alpha)\in L^X\times L$ y todo $\rho\leq\alpha$ en L.*

Demostración. Asuma que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso, se debe probar (ii.), esto se hará demostrando

a. $\mathcal{U}(f,\alpha) \leq (\mathcal{U}\,[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)])\longmapsto\bot.$

b. $(\mathcal{U}\,[(f,\alpha)\longmapsto(0_X,\rho)])\longmapsto\bot \leq \mathcal{U}(f,\alpha),$

para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$ y todo $\rho \leq \alpha$ en L. En efecto,

a. Puesto que

$$(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho) = \bigvee \{(h,\gamma) : (f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma) \preccurlyeq (0_X,\rho)\} := (h',\gamma')$$

se tiene que $\mathcal{U}\left[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)\right] = \mathcal{U}(h',\gamma')$, es tal que $(f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma) \preccurlyeq (0_X,\rho)$, luego

$$\mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \mathcal{U}(h',\gamma') \leq \mathcal{U}(f \otimes h', \alpha \vee \gamma') = \mathcal{U}\left[(f,\alpha) \boxtimes (h',\gamma')\right] \leq \mathcal{U}(0_X,\rho) = \perp,$$

ya que por hipótesis $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso, se obtiene que $\mathcal{U}(f,\alpha) \in \{\lambda : \mathcal{U}(h',\gamma') \otimes \lambda \leq \perp\}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f,\alpha) \leq \bigvee \{\lambda : \mathcal{U}(h',\gamma') \otimes \lambda \leq \perp\} \quad &= \mathcal{U}(h',\gamma') \longmapsto \perp \\ &= \left(\mathcal{U}\left[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)\right]\right) \longmapsto \perp. \end{aligned}$$

Así, se tiene $\mathcal{U}(f,\alpha) \leq \left(\mathcal{U}\left[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)\right]\right) \longmapsto \perp$.

Para probar que (i.) implica (ii.), es suficiente mostrar que la maximalidad de $\mathcal{U}$ implica (b.), para tal propósito se fija un elemento $(g,\beta) \in L^X \times L$, con dicho elemento se construye

$$\mathcal{G}_\beta := (\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp$$

y se define una función $\hat{\mathcal{U}} : L^X \times L \to L$ por medio de

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) = \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}.$$

Se debe probar primero que $\hat{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro L-difuso. En efecto

F_1. Es claro que $\hat{\mathcal{U}}(1_X,\alpha) = \perp$, para todo $\alpha \in L$, ya que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}}(1_X,\alpha) \quad &= \mathcal{U}(1_X,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (1_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\ &= \top \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (1_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\ &= \top. \end{aligned}$$

F_2. Si $(f,\alpha) \preccurlyeq (h,\gamma)$, se debe probar que $\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \leq \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma)$. Se tiene que

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) = \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \quad \text{y}$$

$$\hat{\mathcal{U}}(h,\gamma) = \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso, $\mathcal{U}(f,\alpha) \leq \mathcal{U}(h,\gamma)$. Además,

$$\begin{aligned}(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) &= \bigvee\{(k,\delta) \in L^X \times L : (g,\beta) \boxtimes (k,\delta) \preccurlyeq (f,\alpha)\}\\ &\leq \bigvee\{(k,\delta) \in L^X \times L : (g,\beta) \boxtimes (k,\delta) \preccurlyeq (h,\gamma)\}\\ &= (g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)\end{aligned}$$

luego, $\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \leq \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)]$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) &= \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\\ &\leq \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\\ &= \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma).\end{aligned}$$

Así, $\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \leq \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma)$, cuando $(f,\alpha) \preccurlyeq (h,\gamma)$.

F_3. Se debe probar que $\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \otimes \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma) \leq \hat{\mathcal{U}}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma)$. Esto es,

$$\begin{aligned}&\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \otimes \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma)\\ &= \Big(\mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\Big)\\ &\otimes \Big(\mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\Big)\\[1em] &= \mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \Big[\mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\Big]\\ &\bigvee \Big[\{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \otimes \Big(\mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\Big)\Big]\\[1em] &= \mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee [\mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}]\\ &\bigvee [\mathcal{U}(h,\gamma) \otimes \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}\\ &\bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \otimes \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}]\\[1em] &= \mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee [\mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}]\\ &\bigvee [\mathcal{U}(h,\gamma) \otimes \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\}]\end{aligned}$$

$$\bigvee [\{(\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)]) \otimes (\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)])\} \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$= \mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \mathcal{U}(h,\gamma) \bigvee [\{\mathcal{U}(f,\alpha) \otimes \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)]\} \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [\{\mathcal{U}(h,\gamma) \otimes \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)]\} \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [\{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)]\} \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\leq \mathcal{U}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma) \bigvee [\mathcal{U}\left((f,\alpha) \boxtimes [(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)]\right) \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [\mathcal{U}\left((h,\gamma) \boxtimes [(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)]\right) \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [(\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \boxtimes [(g,\beta) \longmapsto (h,\gamma)]) \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\leq \mathcal{U}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma) \bigvee [\mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [\mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$\bigvee [\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$= \mathcal{U}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma) \bigvee [\mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha) \boxtimes (h,\gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$= \mathcal{U}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma) \bigvee [\mathcal{U}\,[(g,\beta) \longmapsto (f \otimes h, \alpha \vee \gamma)] \otimes \mathcal{G}_\beta]$$

$$= \hat{\mathcal{U}}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma).$$

Por tanto, $\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) \otimes \hat{\mathcal{U}}(h,\gamma) \leq \hat{\mathcal{U}}(f \otimes h, \alpha \vee \gamma)$.

F_4. $\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha) = \perp$, para todo $\alpha \in L$. Puesto que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha) &= \mathcal{U}(0_X,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\
&= \perp \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\
&= \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta.
\end{aligned}$$

Como por hipótesis $\rho \leq \alpha$, del Lema 2.2.1$\rho \rhd \beta \leq \alpha \rhd \beta$, lo cual implica que

$$(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)$$

y por tanto

$$\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \leq \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)]$$

del Lema 2.2.1 se sigue que

$$\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)] \longmapsto \perp \leq \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \longmapsto \perp.$$

Esto es,

$$\mathcal{G}_\beta \leq \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \longmapsto \perp$$

y esto ocurre, si y sólo si $\mathcal{G}_\beta \otimes \mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \leq \perp$.

Por tanto,

$$\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha) = \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} = \perp.$$

Así, $\hat{\mathcal{U}}(0_X,\alpha) = \perp$.

Esto prueba que $\hat{\mathcal{U}}$ es un filtro L-difuso en X. A continuación se probará que $\hat{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro L-difuso en X. En efecto, puesto que

$$\hat{\mathcal{U}}(f,\alpha) = \mathcal{U}(f,\alpha) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (f,\alpha)] \otimes \mathcal{G}_\beta\},$$

es claro que $\mathcal{U}(f,\alpha) \leq \hat{\mathcal{U}}(f,\alpha)$, para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$. Como por hipótesis $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso, $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(g,\beta) = \hat{\mathcal{U}}(g,\beta) &= \mathcal{U}(g,\beta) \bigvee \{\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (g,\beta)] \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\
&= \mathcal{U}(g,\beta) \bigvee \{\mathcal{U}(1_X,\perp) \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\
&= \mathcal{U}(g,\beta) \bigvee \{\top \otimes \mathcal{G}_\beta\} \\
&= \mathcal{U}(g,\beta) \vee \mathcal{G}_\beta.
\end{aligned}$$

Esto es, $\mathcal{U}(g,\beta) = \mathcal{U}(g,\beta) \bigvee \mathcal{G}_\beta$, esto ocurre si y sólo si, $\mathcal{G}_\beta \leq \mathcal{U}(g,\beta)$ y como $\mathcal{G}_\beta := (\mathcal{U}[(g,\beta) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp$, para algún $(g,\beta) \in L^X \times L$ arbitrario, se tiene que

$$(\mathcal{U}\,[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp \leq \mathcal{U}(f,\alpha),$$

lo cual prueba (b.), y esto a su vez prueba que $\mathcal{U} = (\mathcal{U}\,[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)]) \longmapsto \perp$, y por tanto que (i.) implica (ii.).

Se debe verificar ahora que (ii.) implica (i.), para esto, asuma que $\mathcal{U} \preccurlyeq \hat{\mathcal{U}}$, donde $\hat{\mathcal{U}}$ es un filtro L-difuso en X, luego $\mathcal{U}(f,\alpha) \leq \hat{\mathcal{U}}(f,\alpha)$, para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$, así

$$\mathcal{U}[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)] \leq \hat{\mathcal{U}}[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)].$$

Por tanto,

$$\left(\hat{\mathcal{U}}[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)] \longmapsto \bot\right) \leq (\mathcal{U}[(f,\alpha) \longmapsto (0_X,\rho)] \longmapsto \bot)$$

lo cual prueba que $\hat{\mathcal{U}} \preccurlyeq \mathcal{U}$ y por consiguiente $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$. Es decir, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro L-difuso en X. ■

Proposición 3.3.3. *Sea $\phi : X \to Y$ una función y sea $\mathcal{F} : L^X \times L \to L$ un filtro L-difuso en X. Entonces*

i. La función $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}} : L^Y \times L \to L$ definida por

$$\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta) = \mathcal{F}(g \circ \phi, \beta), \quad \textit{para todo } (g,\beta) \in L^Y \times L$$

es un filtro L-difuso sobre Y.

ii. La función $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}} : L^Y \times L \to L$ es un ultrafiltro L-difuso en Y, siempre que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro L-difuso en X.

Demostración. i. Se debe probar que $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}$ satisface los axiomas de un filtro L-difuso. En efecto

F_1. $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(1_Y,\alpha) = \mathcal{F}(1_Y \circ \phi, \alpha) = \mathcal{F}(1_X,\alpha) = \top$, para todo $\alpha \in L$.

F_2. Si $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, se tiene que $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) = \mathcal{F}(f\circ\phi,\alpha) \leq \mathcal{F}(g\circ\phi,\beta) = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta)$, ya que $(f\circ\phi,\alpha) \preccurlyeq (g\circ\phi,\beta)$.

F_3.

$$\begin{aligned}\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) \otimes \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta) = \quad & \mathcal{F}(f\circ\phi,\alpha) \otimes \mathcal{F}(g\circ\phi,\beta) \\ & \leq \mathcal{F}\left((f \otimes g)\circ\phi, \alpha \vee \beta\right) \\ & = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}\left((f \otimes g)\circ\phi, \alpha \vee \beta\right)\end{aligned}$$

Así, $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) \otimes \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta) \leq \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}\left((f\otimes g), \alpha \vee \beta\right)$.

Ya que, $(f\circ\phi) \otimes (g \circ \phi) = [(f \otimes g)\circ\phi]$.

F_4. $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}(0_Y,\alpha) = \mathcal{F}(0_Y \circ \phi, \alpha) = \mathcal{F}(0_X,\alpha) = \bot$, para todo $\alpha \in L$.

Por tanto, $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}$ es un filtro L-difuso en X.

ii. Sea $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ un ultrafiltro L-difuso en X, $(g,\beta) \in L^Y \times L$ y $\alpha \in L$. Se probará que $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{F}}$ es un ultrafiiltro L-difuso en Y, esto es, que

$$\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}(g,\beta) = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}[(g,\beta) \longmapsto (0_Y,\alpha)] \longmapsto \bot.$$

Para todo $(g,\beta) \in L^Y \times L$ y $\alpha \leq \beta$. Así,

$$\begin{aligned}
\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}(g,\beta) &= \mathcal{U}(g \circ \phi, \beta) \\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi, \beta) \longmapsto (0_X, \alpha)] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto 0_X, \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \circ \phi) \longmapsto (0_Y \circ \phi), \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \mathcal{U}[(g \longmapsto 0_Y) \circ \phi, \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}[(g \longmapsto 0_Y), \alpha \rhd \beta] \longmapsto \perp \\
&= \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}[(g,\beta) \longmapsto (0_Y, \alpha)] \longmapsto \perp
\end{aligned}$$

De la Proposición 3.3.2 se concluye que $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro L-difuso en Y. ■

Proposición 3.3.4. *Sea $\phi : X \to Y$ una función sobreyectiva y sea $\mathcal{F} : L^Y \times L \to L$ un filtro L-difuso en Y. Entonces la función $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}} : L^X \times L \to L$ definida por*

$$\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) = \bigvee \{\mathcal{F}(g,\beta) : (g \circ \phi, \beta) \preccurlyeq (f,\alpha)\}.$$

Para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$ es un filtro L-difuso en X.

Demostración. se debe probar que $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ satisface los axiomas de un filtro L-difuso. En efecto

F_1.

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(1_X,\alpha) &= \bigvee \{\mathcal{F}(g,\beta) : (g \circ \phi, \beta) \preccurlyeq (1_X,\alpha)\} \\
&= \bigvee_{g \in L^Y} \bigwedge_{\beta \in L} \{\mathcal{F}(g,\beta) : (g \circ \phi, \beta) \preccurlyeq (1_X,\alpha)\} \\
&= \mathcal{F}(1_Y,\alpha) \\
&= \top, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in L.
\end{aligned}$$

F_2. Asuma que $(f,\alpha) \preccurlyeq (h,\gamma)$, luego $f \leq h$ y $\gamma \leq \alpha$, de esta manera se sigue

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) &= \bigvee\{\mathcal{F}(g,\beta) : (g\circ\phi,\beta) \preccurlyeq (f,\alpha)\}\\
&= \bigvee_{g\in L^Y}\bigwedge_{\beta\in L}\{\mathcal{F}(g,\beta) : g\circ\phi \le f,\ \ \alpha\le\beta\}\\
&\le \bigvee_{g\in L^Y}\bigwedge_{\beta\in L}\{\mathcal{F}(g,\beta) : g\circ\phi \le h,\ \ \gamma\le\beta\}\\
&= \bigvee\{\mathcal{F}(g,\beta) : (g\circ\phi,\beta) \preccurlyeq (h,\gamma)\}\\
&= \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(h,\gamma).
\end{aligned}$$

Luego, $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha) \le \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(h,\gamma)$

F_3. $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha)\otimes\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(h,\gamma)$

$$= \bigvee\{\mathcal{F}(g,\beta) : (g\circ\phi,\beta) \preccurlyeq (f,\alpha)\}\otimes\bigvee\{\mathcal{F}(j,\delta) : (j\circ\phi,\delta) \preccurlyeq (h,\gamma)\}$$

$$\le \bigvee\{\mathcal{F}(g,\beta)\otimes\mathcal{F}(j,\delta) : ((g\otimes j)\circ\phi,\beta\vee\delta) \preccurlyeq (f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\}$$

$$\le \bigvee\{\mathcal{F}(g\otimes j,\beta\vee\delta) : ((g\otimes j)\circ\phi,\beta\vee\delta) \preccurlyeq (f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\}$$

$$= \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma).$$

Por tanto, $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f,\alpha)\otimes\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(h,\gamma) \le \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)$.

F_4.

$$\begin{aligned}
\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(0_X,\alpha) &= \bigvee\{\mathcal{F}(g,\beta) : (g\circ\phi,\beta) \preccurlyeq (0_X,\alpha)\}\\
&= \bigvee_{g\in L^Y}\bigwedge_{\beta\in L}\{\mathcal{F}(g,\beta) : g\circ\phi \le 0_X, \alpha\le\beta\}\\
&= \mathcal{F}(0_Y,\alpha), \quad \text{ya que } \ \phi \text{ es sobreyectiva}\\
&= \top, \quad \text{para todo} \quad \alpha\in L.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ es un filtro L-difuso en X. ■

3.4. Sistema L-difuso de vecindades y Operador L-difuso de interior

Los operadores L-difusos de interior y los Sistemas L-difusos de vecindades, son conceptos cuya utilidad es crucial para definir los espacios topológicos L-difusos compactos, donde el primero apunta más hacia el desarrollo del segundo, para por medio de éste definir la compacidad L-difusa, concepto inherente para establecer el Teorema de Tychonoff en este ambiente.

Definición 3.4.1 (Sistema L-difuso de vecindades). *Sea X un conjunto. Una función $\mathcal{N} : X \to L^{L^X \times L}$ se llama un sistema L-difuso de vecindades en X, si y sólo si, para cada $p \in X$ y $(f,\alpha),(g,\beta) \in L^X \times L$, la aplicación $\mathcal{N}_p : L^X \times L \to L$ satisface los siguientes propiedades:*

N_1. $\mathcal{N}_p(1_X,\alpha) = \top$, *para todo* $\alpha \in L$.

N_2. *Si* $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, *entonces* $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leq \mathcal{N}_p(g,\beta)$.

N_3. $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \otimes \mathcal{N}_p(g,\beta) \leq \mathcal{N}_p(f \otimes g, \alpha \vee \beta)$.

N_4. $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leq f(p)$.

N_5. $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leq \bigvee\{\mathcal{N}_p(g,\beta) : (f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$ *y* $g(q) \leq \mathcal{N}_q(f,\alpha), \forall q \in X\}$.

Definición 3.4.2 (Operador L-difuso de Interior). *Sea X un conjunto. Una función $\mathcal{I} : L^X \times L \to L^X$ se llama un operador L-difuso de interior en X si y sólo si, para $(f,\alpha),(g,\beta) \in L^X \times L$, $\mathcal{I}$ satisface las siguientes propiedades:*

I_1. $\mathcal{I}(1_X,\alpha) = 1_X$, *para todo* $\alpha \in L$

I_2. *Si* $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, *entonces* $\mathcal{I}(f,\alpha) \leq \mathcal{I}(g,\beta)$.

I_3. $\mathcal{I}(f,\alpha) \otimes \mathcal{I}(g,\beta) \leq \mathcal{I}(f \otimes g, \alpha \vee \beta)$.

I_4. $\mathcal{I}(f,\alpha) \leq f$.

I_5. $\mathcal{I}(f,\alpha) \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(f,\alpha),\alpha)$.

I_6. $\mathcal{I}(f,\bot) = f$.

I_7. *Sea* $K \subseteq L$, *con* $K \neq \emptyset$, *Si* $\mathcal{I}(f,\alpha) = f^0$, *para todo* $\alpha \in K$, *entonces* $\mathcal{I}(f, \bigvee K) = f^0$.

Lema 3.4.1. *Sea X un conjunto y $\tau : L^X \to L$ una topología L-difusa sobre X. La función $\mathcal{I}_\tau : L^X \times L \to L^X$ definida por*

$$\mathcal{I}(f,\alpha) = \mathcal{I}_\tau(f,\alpha) = \bigvee\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (f,\alpha)\},$$

para todo $(f,\alpha) \in L^X \times L$ es un operador L-difuso de interior en X.

Demostración. Se debe probar que $\mathcal{I}_\tau$ satisface las propiedades de un operador L-difuso de interior.

I_1.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(1_X,\alpha) &= \bigvee\left\{g\in L^X : (g,\tau(g))\preccurlyeq(1_X,\alpha)\right\}\\ &= \bigvee\left\{g\in L^X : g\leq 1_X,\ \ \alpha\leq\tau(g)\right\}\\ &= 1_X\end{aligned}$$

I_2. Asuma que $(f,\alpha)\preccurlyeq(h,\gamma)$, luego

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) &= \bigvee\left\{g\in L^X : (g,\tau(g))\preccurlyeq(f,\alpha)\right\}\\ &\leq \bigvee\left\{g\in L^X : (g,\tau(g))\preccurlyeq(h,\gamma)\right\}\ \cdot\\ &= \mathcal{I}_\tau(h,\gamma)\end{aligned}$$

Esto es, $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)\leq\mathcal{I}_\tau(h,\gamma)$

I_3. $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)\otimes\mathcal{I}_\tau(h,\gamma)$

$$\begin{aligned}&= \bigvee\left\{g\in L^X : (g,\tau(g))\preccurlyeq(f,\alpha)\right\}\otimes\bigvee\left\{j\in L^X : (j,\tau(j))\preccurlyeq(h,\gamma)\right\}\\ &\leq \bigvee\left\{g\otimes j\in L^X : (g\otimes j,\tau(g)\otimes\tau(j))\preccurlyeq(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\right\}\\ &= \bigvee\left\{g\otimes j\in L^X : g\otimes j\leq f\otimes h,\ \ \alpha\vee\gamma\leq\tau(g)\otimes\tau(j)\right\}\\ &\leq \bigvee\left\{g\otimes j\in L^X : g\otimes j\leq f\otimes h,\ \ \alpha\vee\gamma\leq\tau(g\otimes j)\right\}\\ &\leq \bigvee\left\{g\otimes j\in L^X : (g\otimes j,\tau(g\otimes j))\preccurlyeq(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\right\}\\ &= \mathcal{I}_\tau(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)\otimes\mathcal{I}_\tau(h,\gamma)\leq\mathcal{I}_\tau(f\otimes h,\alpha\vee\gamma)$.

I_4.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) &= \bigvee\left\{g\in L^X : (g,\tau(g))\preccurlyeq(f,\alpha)\right\}\\ &= \bigvee\left\{g\in L^X : g\leq f,\ \ \alpha\leq\tau(g))\right\}\ \cdot\\ &\leq f.\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)\leq f$.

I_5. Se debe probar que $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \leq \mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha))$. Puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)) &= \bigvee \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (\mathcal{I}_\tau(f,\alpha),\alpha)\right\}\\ &= \bigvee \left\{g \in L^X : g \leq \mathcal{I}_\tau(f,\alpha),\ \ \alpha \leq \tau(g)\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) &= \bigvee \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (f,\alpha)\right\}\\ &= \bigvee \left\{g \in L^X : g \leq f,\ \ \alpha \leq \tau(g)\right\}\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\alpha \leq \bigwedge_{g\in L^X} \tau(g) \leq \tau\left(\bigvee \left\{g \in L^X : g \leq f,\ \ \alpha \leq \tau(g)\right\}\right) = \tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)),$$

es decir, $\alpha \leq \tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha))$, ya que τ es una topología L-difusa. De esta manera se tiene $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \in L^X$, $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \leq \mathcal{I}_\tau(f,\alpha)$ y $\alpha \leq \tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha))$, es decir,

$$\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \in \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (\mathcal{I}_\tau(f,\alpha),\alpha)\right\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \leq \bigvee \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (\mathcal{I}_\tau(f,\alpha),\alpha)\right\} = \mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha)).$$

Esto es, $\mathcal{I}_\tau(f,\alpha) \leq \mathcal{I}_\tau(\mathcal{I}_\tau(f,\alpha))$.

I_6. Se debe probar que $\mathcal{I}_\tau(f,\perp) = f$. Puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\tau(f,\perp) &= \bigvee \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq (f,\perp)\right\}\\ &= \bigvee \left\{g \in L^X : g \leq f,\ \ \perp \leq \tau(g)\right\}\end{aligned}$$

y como $f \leq f$ y $\perp \leq \tau(f)$, se sigue que $f \in \left\{g \in L^X : g \leq f,\ \ \perp \leq \tau(g)\right\}$ y por tanto $f \leq \bigvee\left\{g \in L^X : g \leq f,\ \ \perp \leq \tau(g)\right\} = \mathcal{I}_\tau(f,\perp)$, esto es, $f \leq \mathcal{I}_\tau(f,\perp)$, luego por I_4 se demuestra que $\mathcal{I}_\tau(f,\perp) = f$.

I_7. Sea $K \subseteq L$, con $K \neq \emptyset$, Si $\mathcal{I}(f,\alpha) = f^0$, para todo $\alpha \in K$, se debe probar $\mathcal{I}(f,\bigvee K) = f^0$. Se tiene que

$$\mathcal{I}\left(f,\bigvee K\right) = \bigvee \left\{g \in L^X : (g,\tau(g)) \preccurlyeq \left(f,\bigvee K\right)\right\}.$$

En la prueba de I_6 se vió que $\alpha \leq \tau(\mathcal{I}\,(f,\alpha))$, luego $\bigvee K \leq \tau(\mathcal{I}\,(f,\alpha)) = \tau(f^0)$. Como por I_4, $\mathcal{I}^\tau\left(f^0,\bigvee K\right) \leq f^0$ y por I_5, $f^0 \leq \mathcal{I}^\tau\left(f^0,\bigvee K\right)$ se tiene que $f^0 = \mathcal{I}_\tau\left(f^0,\bigvee K\right)$.

Por otro lado, de I_4 se tiene que $f^0 \leq f$, así $\left(f^0, \bigvee K\right) \preccurlyeq (f, \bigvee K)$ y por tanto

$$f^0 = \mathcal{I}_\tau\left(f^0, \bigvee K\right) \leq \mathcal{I}_\tau\left(f, \bigvee K\right),$$

es decir, $f^0 \leq \mathcal{I}_\tau\left(f, \bigvee K\right).$

Ahora, puesto que $\alpha \leq \bigvee K$, entonces $(f, \bigvee K) \preccurlyeq (f, \alpha)$, de modo que $\mathcal{I}_\tau\left(f, \bigvee K\right) \leq \mathcal{I}_\tau(f, \alpha) = f^0$. Esto es, $\mathcal{I}_\tau\left(f, \bigvee K\right) \leq f^0$. Así las cosas, se ha probado que $\mathcal{I}_\tau\left(f, \bigvee K\right) = f^0$. Lo cual termina la prueba. ■

Lema 3.4.2. *Todo operador L-difuso de interior $\mathfrak{T} : L^X \times L \to L^X$ induce, para cada $p \in X$, un sistema L-difuso de vecindades $\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}} : L^X \times L \to L$ definido por*

$$\mathcal{N}_p(f, \alpha) := \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}} = [\mathfrak{T}(f, \alpha)](p).$$

Demostración. Se debe probar que $\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}$ satisface los axiomas de un sistema L-difuso de vecindades.

N_1 $\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(1_X, \alpha) = [\mathfrak{T}(1_X, \alpha)](p) = [1_X](p) = \top$. Así, $\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(1_X, \alpha) = \top$, para todo $\alpha \in L$.

N_2 Si $(f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta)$, se tiene que

$$\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f, \alpha) = [\mathfrak{T}(f, \alpha)](p) \leq [\mathfrak{T}(g, \beta)](p) = \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g, \beta).$$

De esta manera, $\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f, \alpha) \leq \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g, \beta)$.

N_3

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f, \alpha) \otimes \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g, \beta) &= [\mathfrak{T}(f, \alpha)](p) \otimes [\mathfrak{T}(g, \beta)](p) \\
&= [\mathfrak{T}(f, \alpha) \otimes \mathfrak{T}(g, \beta)](p) \\
&\leq [\mathfrak{T}(f \otimes g, \alpha \vee \beta)](p) \\
&= \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f \otimes g, \alpha \vee \beta).
\end{aligned}$$

Por tanto, $N_p^{\mathfrak{T}}(f, \alpha) \otimes \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g, \beta) \leq \mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f \otimes g, \alpha \vee \beta)$.

N_4 Es claro que $N_p^{\mathfrak{T}}(f, \alpha) \leq f(p)$, ya que $\mathfrak{T}(f, \alpha) \leq f$, por ser un operador L-difuso de interior.

N_5 Se debe probar que

$$\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(f,\alpha) \leq \bigvee \{\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g,\beta) : (f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \text{ y } g(q) \leq \mathcal{N}_q^{\mathfrak{T}}(f,\alpha), \forall q \in X\}.$$

Pero como

$$\{\mathcal{N}_p^{\mathfrak{T}}(g,\beta) : (f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta) \text{ y } g(q) \leq \mathcal{N}_q^{\mathfrak{T}}(f,\alpha), \forall q \in X\}$$

$$= \{[\mathfrak{T}(g,\beta)](p) : f \leq g,\ \beta \leq \alpha \text{ y } g(q) \leq [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q), \forall q \in X\}$$

$$= \{[\mathfrak{T}(g,\beta)](p) : f \leq g,\ \beta \leq \alpha \text{ y } g(q) = [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q) \leq f(q), \forall q \in X\}$$

$$= \{[\mathfrak{T}(g,\beta)](p) :\ \beta \leq \alpha \text{ y } g(q) = [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q), \forall q \in X\}.$$

Así, probar N_5 es equivalente a probar

$$[\mathfrak{T}(f,\alpha)](p) \leq \bigvee \{[\mathfrak{T}(g,\beta)](p) :\ \beta \leq \alpha \text{ y } g(q) = [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q), \forall q \in X\}.$$

Sea

$$[\mathfrak{T}'(g,\beta)](p) := \bigvee \{[\mathfrak{T}(g,\beta)](p) :\ \beta \leq \alpha \text{ y } g(q) = [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q), \forall q \in X\}.$$

Puesto que $[\mathfrak{T}'(g,\beta)](p)$ es tal que $\beta \leq \alpha$ y $g(q) = [\mathfrak{T}(f,\alpha)](q)$, entonces $(\mathfrak{T}(f,\alpha),\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$, luego por I_2 e I_5 se tiene que

$$\mathfrak{T}(f,\alpha) \leq \mathfrak{T}(\mathfrak{T}(f,\alpha),\alpha) \leq \mathfrak{T}(g,\beta).$$

Por tanto, $[\mathfrak{T}(f,\alpha)](p) \leq [\mathfrak{T}'(g,\beta)](p)$, lo cual termina la prueba. ■

Proposición 3.4.1. *Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos L-difusos, $\phi : X \to Y$ una función LF-continua y sobreyectiva, $\mathcal{N}_p : L^X \times L \to L$ el sistema L-difuso de vecindades de un punto $p \in X$, inducido por τ y $\mathcal{N}_{\phi(p)} : L^Y \times L \to L$ el sistema L-difuso de vecindades correspondiente de $\phi(p)$ en Y, inducido por σ. Entonces*

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} \leq \phi^{\to}(\mathcal{N}_p),$$

donde $\phi^{\to}(\mathcal{N}_p) : L^Y \times L \to L$ está definido por

$$\phi^{\to}(\mathcal{N}_p)(g,\beta) = \mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta), \quad \textit{para todo } (g,\beta) \in L^Y \times L.$$

Demostración. Puesto que del Lema 3.4.1, se tiene que toda topología L-difusa induce un operador L-difuso de interior, se tiene que

$$\mathfrak{I}_\sigma(g,\beta) = \bigvee \left\{h \in L^Y : (h,\sigma(h)) \preccurlyeq (g,\beta)\right\},$$

para todo $(g,\beta) \in L^Y \times L$, es un operador L-difuso de interior en Y. Como por hipótesis ϕ es LF-continua

$$\sigma(h) \leq \tau(h \circ \phi), \quad \text{para todo } h \in L^Y.$$

Así, $\{h \in L^Y : h \leq g, \ \beta \leq \sigma(h)\} \subseteq \{k \in L^Y : k \leq g, \ \beta \leq \tau(k \circ \phi)\}$, esto implica que

$$\mathfrak{I}_\sigma(g,\beta) = \bigvee \left\{h \in L^Y : h \leq g \ \beta \leq \sigma(h)\right\} \leq \bigvee\{k \in L^Y : k \leq g, \ \beta \leq \tau(k \circ \phi)\}.$$

Sea $w := \bigvee\{k \in L^Y : k \leq g, \ \beta \leq \tau(k \circ \phi)\}$, luego como todo operador L-difuso de interior, induce un sistema L-difuso de vecindades (Lema 3.4.2), se sigue

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} = [\mathfrak{I}_\sigma(g,\beta)](\phi(p)) \leq w\,(\phi(p)) = (w \circ \phi)(p).$$

Luego,

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} \leq (w \circ \phi)(p) \qquad (a)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)(g,\beta) &= \mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta) = \left[\mathfrak{I}_\tau(g \circ \phi,\beta)\right](p)\\ &= \left[\bigvee \left\{h \in L^Y : h \leq g \circ \phi, \ \beta \leq \tau(h)\right\}\right](p).\end{aligned}$$

y como $w \circ \phi \leq g \circ \phi$, se tiene que $w \circ \phi \in \{h \in L^Y : h \leq g \circ \phi, \ \beta \leq \tau(h)\}$, y por tanto

$$\begin{aligned}(w \circ \phi)(p) &\leq \left[\bigvee \left\{h \in L^Y : h \leq g \circ \phi, \ \beta \leq \tau(h)\right\}\right](p)\\ &= \left[\mathfrak{I}_\tau(g \circ \phi,\beta)\right](p)\\ &= \mathcal{N}_p(g \circ \phi,\beta) = \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)\\ &= \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p).\end{aligned}$$

Esto es,

$$(w \circ \phi)(p) \leq \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p) \qquad (b)$$

Así las cosas, de (a) y (b) se concluye que $\mathcal{N}_{\phi(p)} \leq \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)$. ∎

3.5. Compacidad y Teorema de Tychonoff

Antes de definir la compacidad de un espacio topológico L-difuso, se introduce la definición de punto adherente de un filtro, concepto mediante el cual se caracteriza la compacidad L-difusa.

Definición 3.5.1 (Punto adherente). *Sean (X, τ) un espacio topológico L-difuso y $\mathcal{N} : X \longrightarrow L^{(L^X \times L)}$ el sistema L-difuso de vecindades correspondiente. Además, sea $\mathcal{F} : L^X \times L \longrightarrow L$ un filtro L-difuso en X. Un punto $p \in X$ se llama un punto adherente de $\mathcal{F}$ si y sólo si, existe otro filtro L-difuso $\mathcal{G}$ en X provisto de las siguientes propiedades:*

i. $\mathcal{G}((\perp \otimes \top) \cdot 1_X, \alpha) \leq \perp \otimes \top$, *para todo* $\alpha \in L$.

ii. $\mathcal{N}_p \leq \mathcal{G}$ *y* $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$.

Donde $(\perp \otimes \top) \cdot 1_X(x) = \perp \otimes \top$, *para todo* $x \in X$.

Definición 3.5.2. *Un espacio topológico L-difuso (X, τ) es compacto si y sólo si, cada filtro L-difuso en X tiene al menos un punto adherente.*

Observación 3.5.1. *De la Definición 3.5.1, es claro que todo filtro L-difuso sobre X satisface la condición (i), ya que como L es un Gl-monoide, se tiene que $\perp \otimes \top = \perp$, luego $(\perp \otimes \top) \cdot 1_X(x) = \perp = 0_X(x)$, para todo $x \in X$, de modo que si $\mathcal{F}$ es un filtro L-difuso sobre X, se sigue que*

$$\mathcal{F}((\perp \otimes \top) \cdot 1_X, \alpha) = \mathcal{F}(0_X, \alpha) = \perp,$$

para todo $\alpha \in X$. Por tanto, para probar que un filtro L-difuso $\mathcal{F}$ tiene un punto adherente, es suficiente probar la condición (ii) de la definición de punto adherente.

Proposición 3.5.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico L-difuso compacto, (Y, σ) un espacio topológico L-difuso y $\phi : X \to Y$ una función LF-continua y sobreyectiva. Entonces (Y, σ) es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} : L^Y \times L \to L$ un filtro L-difuso en Y, se debe probar que $\mathcal{F}$ tiene al menos un punto adherente.

De la Proposición 3.3.4 se tiene que $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ es un filtro L-difuso sobre X. Como por hipótesis (X, τ) es compacto, $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}$ tiene al menos un punto adherente, esto es, existe un filtro L-difuso $\mathcal{G}$ sobre X, tal que $\mathcal{N}_p \leq \mathcal{G}$ y $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}} \leq \mathcal{G}$.

Ahora, aplicando la Proposición 3.3.3, se tiene que

$$\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)(g, \beta) = \mathcal{N}_p(g \circ \phi, \beta) \leq \mathcal{G}(g \circ \phi, \beta) = \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}(g, \beta),$$

para todo $(g, \beta) \in L^Y \times L$, esto es, $\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p) \leq \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}$.

Puesto que ϕ es LF-continua y sobreyectiva, de la Proposición 3.4.1 se sigue que $\mathcal{N}_{\phi(p)} \leq \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p)$, y como $\phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p) \leq \phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}$, se obtiene que

$$\mathcal{N}_{\phi(p)} \leq \phi^{\rightarrow}(\mathcal{N}_p) \qquad (a)$$

Donde $\mathcal{N}_{\phi(p)}$ es un sistema L-difuso de vecindades en Y, y $\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}$ un filtro L-difuso en Y.

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}\phi^{\rightarrow}\left(\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta)\right) &= \phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g\circ\phi,\beta)\\ &= \bigvee\{\mathcal{F}(h,\gamma):\ (h\circ\phi,\gamma)\preccurlyeq(g\circ\phi,\beta)\}\\ &= \bigvee_{h\in L^Y}\bigwedge_{\gamma\in L}\{\mathcal{F}(h,\gamma):\ h\circ\phi\leq g\circ\phi,\ \beta\leq\gamma\}\\ &= \mathcal{F}(g,\beta).\end{aligned}$$

Ya que $\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}\leq\mathcal{G}$, se tiene que

$$\mathcal{F}(g,\beta)=\phi^{\rightarrow}\left(\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g,\beta)\right)=\phi^{\leftarrow}_{\mathcal{F}}(g\circ\phi,\beta)\leq\mathcal{G}(g\circ\phi,\beta)=\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}(g,\beta),$$

para todo $(g,\beta)\in L^Y\times L$. Por tanto,

$$\mathcal{F}\leq\phi^{\rightarrow}_{\mathcal{G}}\qquad(b)$$

Así, de (a) y (b) se concluye que $\phi(p)$ es un punto adherente del filtro L-difuso $\mathcal{F}$ de Y. Luego, (Y,σ) es compacto. ■

3.5.1. Topología producto L-difusa

Si bien, hasta este punto se ha definido el concepto de compacidad sobre espacios topológicos L-difusos, resta introducir una topología clave que junto con la compacidad L-difusa, le aporta gran sentido al Teorema de Tychonoff, esta topología definida sobre el producto de una familia arbitraria de espacios topológicos L-difusos, recibe el nombre de topología producto L-difusa, cuyo concepto se introduce a continuación.

En lo que sigue se pretende construir el producto de una colección arbitraria de espacios topológicos L-difusos para un GL-monoide $(L,\leq,\otimes)$ (para más detalles ver [2]). Esto es, dada una familia $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ de espacios topológicos L-difusos, se desea definir la topología producto L-difusa sobre el producto cartesiano

$$\prod_{i\in I}X_i:=\left\{x:I\to\bigcup_{i\in I}X_i : x(i)\in X_i,\ i\in I\right\}$$

asociada con las topologías L-difusas τ_i, con $i\in I$. Normalmente se escribe x_i en lugar de $x(i)$ y denota la i-ésima componente de x.

Cada proyección $p_i:\prod_{i\in I}X_i\to X_i$, definida por $p_i(x)=x_i$ induce el operador $p_i:L^{X_i}\to L^{\prod_{i\in I}X_i}$, definido por $p_i^{\leftarrow}(g)=g\circ p_i$, para todo $g\in L^{X_i}$.

Para efecto de introducir la topología producto L-difusa, se utiliza el Lema 2.6.2, el cual se demostró en el capítulo anterior.

Proposición 3.5.2 (Topología producto L-difusa)**.** *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos L-difusos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. La función $\tau : L^X \to L$ definida por*

$$\tau(f) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(k_i) : \ k \in \Gamma_f \right\}$$

es una topología L-difusa sobre X, llamada topología producto L-difusa.

Demostración. i. $\tau(1_X) = \top$. Puesto que del Lema 2.6.2 inciso (i.) se tiene que $1_\Delta \in \Gamma_{1_X}$, donde $(1_\Delta)_i = 1_{X_i}$, para cada $i \in I$. Luego, como $\tau_i((1_\Delta)_i) = \tau_i(1_{X_i}) = \top$, para todo $i \in I$, se obtiene que

$$\bigotimes_{i\in I} \tau_i((1_\Delta)_i) = \top.$$

De esta manera

$$\tau(1_X) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i((1_\Delta)_i) : \ 1_\Delta \in \Gamma_{1_X} \right\} = \top$$

Por tanto, $\tau(1_X) = \top$.

ii, Se debe verificar que $\tau(f) \otimes \tau(g) \leq \tau(f \otimes g)$, para todo $f, g \in L^X$. Puesto que

$$\tau(f) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(k_i) : \ k \in \Gamma_f \right\}, \quad \tau(g) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) : \ h \in \Gamma_g \right\},$$

$\otimes$ es conmutativa, respecto a extremos superiores y del Lema 2.6.2 (ii.) se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(f) \otimes \tau(g) \quad &= \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(k_i) \otimes \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) : \ k \in \Gamma_f, \ h \in \Gamma_g \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} [\tau_i(k_i) \otimes \tau_i(h_i)] : \ k \in \Gamma_f, \ h \in \Gamma_g \right\} \\ &\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} [\tau_i(k_i \otimes h_i)] : \ k \otimes h \in \Gamma_{f\otimes g} \right\} \\ &= \tau(f \otimes g). \end{aligned}$$

Por tanto, $\tau(f) \otimes \tau(g) \leq \tau(f \otimes g)$.

iii. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un subconjunto de L^X, se debe probar que

$$\bigwedge_{j\in J} \tau(f_j) \leq \tau(\bigvee_{j\in I} f_j).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{j\in J} \tau(f_j) &= \bigwedge_{j\in J} \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i((k_j)_i) :\ k_j \in \Gamma_{f_j} \right\} \\
&\leq \bigvee \left[\bigwedge_{j\in J} \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i((k_j)_i) :\ k_j \in \Gamma_{f_j} \right\} \right] \\
&\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i((\bigwedge_{j\in J} (k_j))_i) :\ k_j \in \Gamma_{f_j} \right\}
\end{aligned}$$

Si se hace $\rho := \bigwedge_{j\in J}(k_j)$, puesto que $k_j \in \Gamma_{f_j}$, y $\rho \leq k_j$ se puede ver que $\rho \in \Gamma_{f_j}$, por otro lado, ya que $f_j \leq \bigvee_{j\in J} f_j$, entonces $\Gamma_{f_j} \subseteq \Gamma_{\bigvee_{j\in J} f_j}$ y por tanto $\rho \in \Gamma_{\bigvee_{j\in J} f_j}$.

Así las cosas, ya que

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{j\in J} \tau(f_j) &\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i((\bigwedge_{j\in J} (k_j))_i) :\ k_j \in \Gamma_{f_j} \right\} \\
&\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(\rho_i) :\ \rho \in \Gamma_{\bigvee_{j\in J} f_j} \right\} \\
&= \tau(\bigvee_{j\in J} f_j)
\end{aligned}$$

Por tanto $\bigwedge_{j\in J} \tau(f_j) \leq \tau(\bigvee_{j\in I} f_j)$. Lo cual prueba que τ es una topología L-difusa sobre X. ■

Proposición 3.5.3. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos L-difusos y sea (X, τ) el espacio dotado de la topología producto L-difusa. Entonces, la proyección $i-$ésima $p_i : X \to X_i$ es continua, para cada $i \in I$.*

Demostración. Sea $g_i \in L^{X_i}$, se debe probar que

$$\tau_i(g_i) \leq \tau(g_i \circ p_i), \text{ para todo } g_i \in L^{X_i}.$$

Para ello, se define $g : X \to L$ por

$$g_u = \begin{cases} g_i, & \text{si} \quad u = i \\ \\ 1_{X_u} & \text{si} \quad u \neq i \end{cases}$$

De esta manera, se tiene que $g_u \in \prod_{i\in I} L^{X_i}$, además

$$\bigotimes_{u\in I} p_u^{\leftarrow}(g_u) = \bigotimes_{u\in I}(g_u \circ p_u) = (g_i \circ p_i) \otimes \bigotimes_{u\in I,\, u\neq i} (g_u \circ p_u) = (g_i \circ p_i) \otimes \left(\bigotimes_{u\in I,\, u\neq i} g_u \right) \circ p_u,$$

luego,

$$\bigotimes_{u\in I} p_u^{\leftarrow}(g_u) = (g_i \circ p_i) \otimes (1_{X_u} \circ p_u) = (g_i \circ p_i) \otimes 1_X = (g_i \circ p_i).$$

Por tanto, $g_u \in \Gamma_{g_i \circ p_i}$. Puesto que

$$\tau(g_i \circ p_i) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \tau_i(k_i) : \ k \in \Gamma_{g_i \circ p_i} \right\},$$

se tiene que $\tau(g_i) \leq \tau(g_i \circ p_i)$, para todo $g_i \in L^{X_i}$. Lo cual prueba que la p_i es continua para cada $i \in I$. ■

Para establecer la versión del Teorema de Tychonoff que se pretende en esta teoría, se necesitan los siguientes lemas.

Lema 3.5.1. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos L-difusos y sea (X, τ) el espacio dotado de la topología producto L-difusa. Entonces para cada $p \in X$, la aplicación $\mathcal{N}_p : L^X \times L \to L$ definida por*

$$\mathcal{N}_p(f, \alpha) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i, \alpha) : \ h \in \Gamma_f, \ \alpha \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\},$$

es un sistema L-difuso de vecindades sobre X.

Demostración. Se debe probar que $\mathcal{N}_p$ satisface los axiomas de un sistema L-difuso de vecindades.

N_1. $\mathcal{N}_p(1_X, \alpha) = \top$. Del Lema 2.6.2 (i.) se sabe que $1_\Delta \in \Gamma_{1_X}$, donde $(1_\Delta)_i = 1_{X_i}$, para cada $i \in I$. Luego, como $\mathcal{N}_{p_i}((1_\Delta)_i, \alpha) = \mathcal{N}_{p_i}(1_{X_i}, \alpha) = \top$ y $\tau_i((1_\Delta)_i) = \tau(1_{X_i}) = \top$, para todo $i \in I$, se obtiene que

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}((1_\Delta)_i, \alpha) = \top \quad \text{y} \quad \alpha \leq \top = \bigotimes_{i\in I} \top = \bigotimes_{i\in I} \tau_i((1_\Delta)_i).$$

De esta manera,

$$\mathcal{N}_p(1_X, \alpha) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}((1_\Delta)_i, \alpha) : \ 1_\Delta \in \Gamma_{1_X}, \ \alpha \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i((1_\Delta)_i) \right\} = \top.$$

Por tanto, $\mathcal{N}_p(1_X) = \top$.

N_2. Sea $(f,\alpha) \preccurlyeq (g,\beta)$ en $L^X \times L$, luego $f \leq g$ y $\beta \leq \alpha$, por lo que $\Gamma_f \subseteq \Gamma_g$, así

$$\bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i,\alpha) : \ h \in \Gamma_f,\ \alpha \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\}$$

$$\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i,\beta) : \ h \in \Gamma_g,\ \beta \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\},$$

y por tanto $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leq \mathcal{N}_p(g,\beta)$.

N_3. Se debe verificar que $\mathcal{N}_p(f,\alpha)\otimes\mathcal{N}_p(g,\beta) \leq \mathcal{N}_p(f\otimes g, \alpha\vee\beta)$, para $(f,\alpha),\ (g,\beta) \in L^X \times L$. Puesto que

$$\mathcal{N}_p(f,\alpha) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i,\alpha) : \ h \in \Gamma_f,\ \alpha \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\},$$

$$\mathcal{N}_p(g,\beta) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(k_i,\beta) : \ k \in \Gamma_g,\ \beta \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\},$$

$\otimes$ es conmutativa, respecto a extremos superiores y del Lema 2.6.2 (ii.) se tiene que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_p(f,\alpha) \otimes \mathcal{N}_p(g,\beta)\\
&= \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i,\alpha) \otimes \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(k_i,\alpha) : \ h \in \Gamma_f,\ k \in \Gamma_g,\ \alpha\vee\beta \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i \otimes k_i) \right\}\\
&= \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} [\mathcal{N}_{p_i}(h_i,\alpha) \otimes \mathcal{N}_{p_i}(k_i,\alpha)] : \ h \in \Gamma_f,\ k \in \Gamma_g,\ \alpha\vee\beta \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i \otimes k_i) \right\}\\
&\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{p_i}(h_i\otimes k_i,\alpha\vee\beta) : \ h\otimes k \in \Gamma_{f\otimes g},\ \alpha\vee\beta \leq \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i \otimes k_i) \right\}\\
&= \mathcal{N}_p(f\otimes g, \alpha\vee\beta).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \otimes \mathcal{N}_p(g,\beta) \leq \mathcal{N}_p(f\otimes g,\alpha\vee\beta)$.

N_4. Se debe ver que $\mathcal{N}_p(f,\alpha) \leq f(p)$, para cada $(f,\alpha) \in L^X \times L$. Puesto que $\mathcal{N}_{p_i}$ es un sistema L-difuso de vecindades sobre X_i, se tiene que $\mathcal{N}_{p_i}(h_i,\alpha) \leq h_i(p_i)$, para todo $i \in I$ y todo $(h_i,\alpha) \in L^{X_i} \times L$.

Sea $h \in \Gamma_f$, luego $h \in \prod_{i\in I} L^{X_i}$, $h_i = 1_{X_i}$, para un número finito de índices $i \in I$ y

$$\bigotimes_{i\in I}(h_i \circ p_i) \leq f,$$

así

$$\bigotimes_{i\in I}(h_i \circ p_i)(p) \leq \bigotimes_{i\in I} h_i(p_i) \leq f(p).$$

Ahora como $\mathcal{N}_{p_i}(h_i, \alpha) \leq h_i(p_i)$, para todo $i \in I$,

$$\bigotimes_{i\in I}\mathcal{N}_{p_i}(h_i, \alpha) \leq \bigotimes_{i\in I} h_i(p_i) \leq f(p).$$

Esto implica que

$$\mathcal{N}_p(f, \alpha) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I}\mathcal{N}_{p_i}(h_i, \alpha) :\ h \in \Gamma_f,\ \alpha \leq \bigotimes_{i\in I}\tau_i(h_i) \right\} \leq f(p).$$

Es decir, $\mathcal{N}_p(f, \alpha) \leq f(p)$.

N_5. Se debe probar que

$$\mathcal{N}_p(f, \alpha) \leq \bigvee \{\mathcal{N}_p(g, \beta) : (f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta) \ y \ g(q) \leq \mathcal{N}_q(f, \alpha), \forall q \in X\}.$$

Puesto que $\mathcal{N}_{p_i}$ es un sistema L-difuso de vecindades sobre X_i, se tiene que

$$\mathcal{N}_{p_i}(k_i, \alpha) \leq \bigvee \{\mathcal{N}_{p_i}(h_i, \beta) : (k_i, \alpha) \preccurlyeq (h_i, \beta) \ y \ h_i(q_i) \leq \mathcal{N}_{q_i}(k_i, \alpha), \forall q_i \in X_i\}.$$

Luego, para $k \in \Gamma_f$ y $h \in \Gamma_g$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\bigotimes_{i\in I}\mathcal{N}_{p_i}(k_i, \alpha)\\
&\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I}\mathcal{N}_{p_i}(h_i, \beta) : (k_i, \alpha) \preccurlyeq (h_i, \beta) \ y \ h_i(q_i) \leq \mathcal{N}_{q_i}(k_i, \alpha), \forall q_i \in X_i \right\}\\
&\leq \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I}\mathcal{N}_{p_i}(h_i \circ p_i, \beta) : (k_i, \alpha) \preccurlyeq (h_i, \beta) \ y \ h_i(q_i) \leq \mathcal{N}_{q_i}(k_i, \alpha), \forall q_i \in X_i \right\}.
\end{aligned}$$

Así las cosas, se obtiene que

$$\mathcal{N}_p(f, \alpha) \leq \bigvee \{\mathcal{N}_p(g, \beta) : (f, \alpha) \preccurlyeq (g, \beta) \ y \ g(q) \leq \mathcal{N}_q(f, \alpha), \forall q \in X\}.$$

Por tanto, se ha probado que $\mathcal{N}_p$ es un sistema L-difuso de vecindades sobre X. ■

Lema 3.5.2. *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos L-difusos y sea (X,τ) el espacio dotado de la topología producto L-difusa. Sean $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ y $\mathcal{N}_q : L^X \times L \to L$ un ultrafiltro L-difuso y un sistema L-difuso de vecindades sobre X, respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

i. $\mathcal{N}_q \le \mathcal{U}$, *donde* $q = (q_i)_{i\in I} \in X$.

ii. Para cada $i \in I$, $\mathcal{N}_{q_i} \le p_i^{\to}(\mathcal{U})$.

Demostración. Asuma que $\mathcal{N}_q \le \mathcal{U}$, donde $q = (q_i)_{i\in I} \in X$, se debe probar (ii.). Como p_i es continua y sobreyectiva, para cada $i \in I$, se sigue que

$$p_i^{\to}(\mathcal{N}_q) \le p_i^{\to}(\mathcal{U}),$$

donde $p_i^{\to}(\mathcal{N}_q)$ y $p_i^{\to}(\mathcal{U})$ son un sistema L-difuso de vecindades y un ultrafiltro L-difuso sobre X_i, respectivamente. De la Proposición 3.4.1, se tiene que

$$\mathcal{N}_{q_i} = \mathcal{N}_{p_i(q)} \le p_i^{\to}(\mathcal{N}_q) \le p_i^{\to}(\mathcal{U}).$$

Por tanto $\mathcal{N}_{q_i} \le p_i^{\to}(\mathcal{U})$, para cada $i \in I$.

Asuma ahora que $\mathcal{N}_{q_i} \le p_i^{\to}(\mathcal{U})$, para cada $i \in I$. Luego para $h \in \Gamma_f$

$$\begin{aligned}
\bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{q_i}(h_i,\alpha) &\le \bigotimes_{i\in I} p_i^{\to}(\mathcal{U})(h_i,\alpha) \\
&= \bigotimes_{i\in I} \mathcal{U}(h_i \circ p_i,\alpha) \\
&\le \mathcal{U}\left(\bigotimes_{i\in I}(h_i \circ p_i),\alpha\right) \\
&\le \mathcal{U}(f,\alpha).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}_q(f,\alpha) = \bigvee \left\{ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{N}_{q_i}(h_i,\alpha) :\ h \in \Gamma_f,\ \alpha \le \bigotimes_{i\in I} \tau_i(h_i) \right\} \le \mathcal{U}(f,\alpha).$$

Lo cual implica que $\mathcal{N}_q \le \mathcal{U}$. ∎

Teorema 3.5.1 (Tychonoff). *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia no vacía de espacios topológicos L-difusos y sea (X, τ) el espacio dotado de la topología producto L-difusa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

i. (X_i, τ_i) *es compacto, para todo* $i \in I$.

ii. El espacio (X, τ), *dotado de la topología producto L-difusa, es compacto en la categoría L-FTop.*

Demostración. Suponga que (X_i, τ_i) es compacto, para todo $i \in I$, se debe probar que (X, τ) es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U} : L^X \times L \to L$ un ultrafiltro L-difuso sobre X, luego $p_i^{\to}(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro L-difuso sobre X_i y como por hipótesis (X_i, τ_i) es compacto, existe un filtro L-difuso $\mathcal{G}$ sobre X_i, tal que $\mathcal{N}_{p_i} \leq \mathcal{G}$, donde $p_i \in X_i$, y $p_i^{\to}(\mathcal{U}) \leq \mathcal{G}$. Pero como $p_i^{\to}(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro, entonces $p_i^{\to}(\mathcal{U}) = \mathcal{G}$. Así se tiene que $\mathcal{N}_{p_i} \leq p_i^{\to}(\mathcal{U})$, luego del Lema 3.5.2 se tiene que $\mathcal{N}_p \leq \mathcal{U}$, donde $p = (p_i)_{i\in I} \in X$ y ya que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}$, se obtiene que $p = (p_i)_{i\in I}$ es un punto adherente de $\mathcal{U}$ y por tanto (X, τ) es compacto en la categoría LF-Top.

Suponga ahora que (X, τ) es compacto en la categoría LF-Top, se debe ver que (X_i, τ_i) es compacto, para cada $i \in I$. Puesto que cada proyección i-ésima $p_i : X \to X_i$ es continua y sobreyectiva, para cada $i \in I$. La Proposición 3.5.1 prueba que (X_i, τ_i) es compacto, para todo $i \in I$. ■

Conclusión

Cada prueba del Teorema de Tychonoff aquí desarrollada tiene como referente la dada por Bourbaki en 1937, quien mediante el uso de la teoría de filtros caracteriza los espacios topológicos compactos logrando de esta manera establecer dicha prueba. Respecto a las estructuras topológicas que en esta monografía extienden la topología general, esto es la L-topología y topología L-difusa, en el ambiente de los GL-monoides, GL-comonoides y de los L-filtros (filtros L-difusos) se estudian los sistemas de L-vecindades (L-difuso de vecindades) y los operadores L-interior (L-difuso de interior) para caracterizar los espacios L-topológicos compactos (espacios topológicos L-difusos compactos). El desarrollo de esta teoría hace que independientemente del retículo sobre el cual se fundamenta el concepto de espacio topológico (respecto a cada estructura), las demostraciones del Teorema de Tychonoff presentadas sean una extensión natural de la demostración sobre la topología general, debido a la gran similitud que preservan en su forma y razonamiento.

Una de las perspectivas de este trabajo es: establecer una prueba del Teorema de Tychonoff, sin utilizar el axioma de elección, sobre la topología formal, la cual se fundamenta en la teoría de tipos de Martin Löf y estudiar los efectos que ocurren en la prueba del teorema, el cambio de la estructura de retículo en los que se definen los filtros, sistemas de vecindades y operador interior.

Bibliografía

[1] G. Birkhoff. *Lattice Theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, 1940.

[2] Ochoa C. and J. Luna. Products of lf-topologies and separation in lf-top. *Proyecciones Journal of Mathematics*, (2):181–201, 2009.

[3] C.C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (88):467–490, 1958.

[4] C.L. Chang. Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, (24):182–190, 1964.

[5] Rubiano G.N. *Topologia General.* Editorial UN, Colombia, 2010.

[6] U. Hohle. Monoidal closed categories. *Weak topoi and generalized logics, Fuzzy Sets and Systems*, (42):15–35, 1991.

[7] U. Hohle and A.P. Šostack. On a fuzzy topological structure. *Fuzzy Sets Syst.*, (73):131–149, 195.

[8] U. Hohle and A.P. Šostak. *Axiomatic foundations of fixed-basis fuzzy topology.* Chapter 3 in: U. Hohle and S.E. Rodabaugh, Editors, Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, The Handbook of Fuzzy Sets Series, Volume 3, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 1999.

[9] P.T. Johnstone. *Stone Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[10] J.L. Kelley. *General Topology.* Editorial Board, California, 1955.

[11] T. Kubiak. *On fuzzy topologies.* PhD thesis, Adam Mickiewicz University. Poznań, Poland, 1985.

[12] T. Kubiak and Šostak A.P. Lower set-valued fuzzy topologies. *Quaestiones Math.*, (20):423–429, 1997.

[13] J. Luna and Salazar E. Compactness in l-fuzzy topological spaces. *Annals of Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems*, (4):287–209, 2012.

[14] L.Y. Ming and L.M. Kang. *Fuzzy Topology.* World Scientific, USA, 1997.

[15] J.R. Munkres. *Topología.* Prencice Hall, Madrid, 2002.

[16] A. Pinchuck. Extension theorems on l-topological spaces and l-fuzzy vector spaces. Master's thesis, Rhodes University, 2001.

[17] S.E. Rodabaugh. *Powerset Operator Foundations for Poslat Fuzzy Set Theories and Topologies.* Chapter 2 in: U. Hohle and S.E. Rodabaugh, Editors, Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, The Handbook of Fuzzy Sets Series, Volume 3, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 1999.

[18] A.P. Šostack. A general theory of tuzzy topological spaces. *Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II.*, (11):89–103, 1985.