ECUACIONES FUNCIONALES ASOCIADAS A PRODUCTOS INTERIORES

Snayder José Buelvas Castellar

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

CARTAGENA D. T. y C.

2014

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
Y NATURALES

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR
EL GRADO DE MATEMÁTICO

ECUACIONES FUNCIONALES ASOCIADAS A PRODUCTOS INTERIORES

que presenta

Snayder José Buelvas Castellar

Asesor

Johnny Cuadro

CARTAGENA
2014

Índice general

Introducción

En el año de 1940 S. M. Ulam (cf. [8]), durante una charla en un coloquio de matemáticas en la universidad de Wisconsin, formuló el siguiente problema:

> *Sea G_1 un grupo y G_2 un grupo métrico con una métrica $d(\cdot, \cdot)$. Dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si una función $h : G_1 \to G_2$ satisface*
>
> $$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta,$$
>
> *para todo $x, y \in X$, entonces existe un homomorfismo $H : G_1 \to G_2$ tal que*
>
> $$d(h(x), H(x)) < \varepsilon,$$
>
> *para todo $x \in G_1$?*

En caso de que la respuesta sea positiva se dice que la ecuación funcional para homomorfismo es estable. Es decir, Ulam se preguntaba si al tener una función que "*casi*" es un homomorfismo, es posible garantizar la existencia de un homomorfismo o dicho de una forma más general:

> *Supongamos un objeto matemático que satisface aproximadamente una cierta propiedad, ¿ entonces es posible aproximar este objeto por objetos, satisfaciendo la propiedad exactamente?*

No fue hasta el año 1941, que D. H. Hyers (cf. [9]) dio una respuesta positiva a este problema para el caso en que G_1, G_2 son espacios de Banach

Proposición 0.1 (Teorema de Hyers). Sea $\delta > 0$ y $f : G_1 \to G_2$ una función entre espacios de Banach tal que

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| < \delta \quad \text{para todo} \quad x, y \in G_1,$$

entonces existe una función aditiva $T(x) : G_1 \to G_2$ tal que

$$||f(x) - T(x)|| < \delta \quad \text{para todo} \quad x \in G_1.$$

En otras palabras, Hyers caracterizó los espacios de Banach que poseen una solución de la ecuación funcional de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Así mismo, en 1978 Th. M. Rassias (cf. [10]) debilitó las hipótesis de la cota de la "diferencia de Cauchy"del teorema de Hyers, esta diferencia está dada por la expresión

$$f(x+y) - f(x) - f(y);$$

Hyers acota esta diferencia con un número $\delta > 0$ y Rassias generaliza el resultado al utilizar como cota una función.

Proposición 0.2 (Teorema de Rassias). Sea $f : G_1 \to G_2$ una función entre espacios de Banach. Si f satisface la desigualdad

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \theta(||x||^p + ||y||^p)$$

para algún $\theta > 0$, $0 \leq p < 1$ y todo $x, y \in G_1$, entonces existe una única función aditiva $A : G_1 \to G_2$ tal que

$$||f(x) - A(x)|| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p}||x||^p.$$

En 1991, Gadja [20] prueba el caso en que $p > 0$ y Semrl [19] dio un ejemplo de una ecuación funcional que no cumplía el teorema de Rassias cuando $p = 0$. Los resultados de Rassias influyeron para que una gran cantidad de matemáticos se interesaran en los problemas de estabilidad de una ecuación funcional, donde dichos problemas son conocidos como *estabilidad de Hyers-Ulam-Rassias* ; así es posible a través del estudio de la estabilidad encontrar solución a distintas ecuaciones funcionales y más aún caracterizar espacios con propiedades importantes como son los *espacios con producto interior.* Dado un espacio $X \neq \emptyset$, la manera más simple de garantizar la existencia de un producto interior sobre X es garantizar una solución de la ecuación funcional

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Observe por ejemplo [4] en donde se prueba como la estabilidad de la ecuación

$$||2f(x) + 2f(y) - f(xy^{-1})|| \leq ||f(xy)||$$

garantiza una solución de la ecuación (1); más aún en [18] se estudia la estabilidad de la ecuación funcional

$$2\psi(x) \leq f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \leq 2\phi(x),$$

donde f, ϕ, ψ son funciones con rango en $\mathbb{R}$; encontrando una solución F de la ecuación funcional cuadrática

$$F(x+y) + F(x-y) = 2F(x) + 2F(y),$$

donde se prueba, tomando $f(x) := ||x||^2$, que el espacio dado es equivalente a un espacio con producto interior.

En este trabajo se estudia la estabilidad de las ecuaciones funcionales

$$2f(x_1 - z) + 2f(x_2 - z) + 4f(z - x_3) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

y

$$||2f\,(x_1 - z) + 2f\,(x_2 - z) + 4f\,(z - x_3) - 2f(x_1 - x_3)|| \leq ||2f(x_2 - x_3)||,$$

donde $z = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $f : X \to Y$ es una función, donde X, Y pueden ser espacios vectoriales, métricos o normados. Se demuestra que la estabilidad de dichas ecuaciones garantiza la existencia de soluciones para la ecuación cuadrática

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y),$$

esto se hace utilizando dos métodos de gran uso en la teoría de la estabilidad, estos métodos son conocidos como *el método directo* y *la alternativa del punto fijo*, ambos son explicados a lo largo del trabajo. También se prueba que casos particulares de la estabilidad de estas ecuaciones funcionales son condiciones suficientes para la existencia de un producto interior.

El siguiente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presenta algunos conceptos básicos referentes a espacios vectoriales, métricos y de Banach y las ecuaciones funcionales de *la ley del paralelogramo* y *la semi-ley del paralelogramo*, que serán de utilidad para realizar el trabajo. En el capítulo 2 se enuncian algunos antecedentes de *la teoría de la estabilidad de ecuaciones funcionales*, este capítulo se basa; principalmente, en el libro del autor Soon-Mo Jung [1]. Los resultados obtenidos en los capítulos 3 y 4, serán sometidos a arbitraje para su posible publicación , estos resultados hacen referencia a la estabilidad de ecuaciones funcionales derivadas de la semi ley del paralelogramo. Los resultados del capitulo 4 demuestran la relación entre la teoría del capítulo 3 y la existencia de productos interiores en un espacio dado utilizando técnicas apropiadas, ver por ejemplo C. Park [21], Choonkil BAAK[22].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciaremos algunas definiciones y proposiciones básicas que serán de utilidad en el presente trabajo.

Definición 1.1. Un espacio vectorial F sobre un campo $\mathbb{K}$, es un conjunto con dos operaciones binarias $(+, \cdot)$ que satisfacen, para todo $u, v, w \in F$ y $a, b \in \mathbb{K}$, las siguientes propiedades

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. $u + v = v + u$.
3. Existe un elemento $0 \in F$ talque $u + 0 = u$.
4. Para todo $u \in F$, existe $-u \in F$ tal que $u + (-u) = 0$.
5. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$.
6. $(a + b)v = av + bv$.
7. $a(bv) = (ab)v$.
8. $1v = v$, donde 1 denota la identidad multiplicativa en $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1.2. El espacio $\mathbb{R}^n$, formado por los vectores de n componentes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.3. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una forma bilineal es una aplicación

$$f : V \times V :\to \mathbb{K}$$

que cumple, para todo $a \in \mathbb{K}$ y $u, v, w \in V$,

1. $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$.

2. $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$.

3. $f(au, v) = af(u, v)$.

4. $f(u, av) = af(u, v)$.

Si $f(u, v) = f(v, u)$ se dirá que la forma bilineal es simétrica.

Definición 1.4. Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto y d una métrica, esto es; una función de valor real definida en $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ satisface

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2. $d(x, y) \leq 0$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definición 1.5. Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es llamada sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \leq N$ se tiene

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Nota 1.6. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy (ver [17]). El recíproco, en general, es falso en un espacio métrico general. Por ejemplo, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio $T = (0, 1]$ de $\mathbb{R}$, pero en cambio dicha sucesión no converge

Definición 1.7. El espacio X se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge en X, esto es; si su límite es un elemento de X.

Definición 1.8. Una norma sobre un conjunto X es una función

$$||\cdot|| : X \times X \to X$$

tal que para todo $x, y \in X$ y α un escalar

1. $||x|| \geq 0$.

2. $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

4. $||\alpha x|| = \alpha ||x||$.

Al par $(X, ||\cdot||)$, donde $||\cdot||$ es una norma; se llamara espacio normado.
Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado, entonces $||\cdot||$ define una métrica d en X, definida por

$$d(x, y) = ||x - y||,$$

para todo $x, y \in X$.

Definición 1.9. Un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si X es completo bajo la métrica inducida por la norma.

Definición 1.10. Sea H un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. H es un espacio pre-Hilbert si existe una función $\langle\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ cumple

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ sii $x = 0$.

2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Definición 1.11. Sea $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espacio pre-Hilbert, entonces la función $||\cdot|| : H \to \mathbb{R}$ definida por

$$||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

es una norma.

Definición 1.12. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : (X, d) \to (X, d)$. Se dice que f es contractivo, si existe una constante $0 < L < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in X$. El mínimo valor de L que satisface 1.1 se conoce como constante de Lipschitz.

Definición 1.13. Sea β un número real fijo con $0 < \beta \leq 1$ y sea $\mathbb{K}$ un campo. Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Una función $|| \cdot ||_\beta : E \to (0, \infty)$ es llamada $\beta - norma$ si, y sólo si satisface

1. $||x||_\beta = 0$ si, y sólo si $x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda|^\beta ||x||$, para todo $\lambda \in \mathbb{K},\ x \in E$.
3. $||x + y||_\beta \leq ||x||_\beta + ||y||_\beta$, para todo $x, y \in E$.

1.1. Ecuaciones funcionales

En el campo científico es común utilizar modelos matemáticos para representar la realidad. Esta idealización debe ser suficientemente simple, lógicamente correcta, admitir soluciones matemáticas y al mismo tiempo, representar suficientemente bien la realidad asociada al problema. Como en toda modelización matemática se debe tener en cuenta los factores principales que intervengan en el problema y despreciar aquellos que sean irrelevantes.

Una de las herramientas más relevantes en los problemas de modelización matemática son las ecuaciones funcionales. Aunque la teoría de las ecuaciones funcionales es muy antigua y constituye una rama muy importante de la Matemática, sus contenidos son bastantes desconocidos, no sólo los técnicos, sino los matemáticos.

La teoría de las ecuaciones funcionales aparece casi al mismo tiempo que la definición moderna de función, aunque en siglos pasados ya se habían formulado problemas relacionados con esta teoría. En el año 1347 el matemático N. Oresme [6], describe una ecuación funcional, que escrita en notación moderna está dada por

$$\frac{S[(n+1)t] - S[nt]}{S[nt] - S[(n-1)t]} = \frac{2n+1}{2n} \tag{1.2}$$

ecuación que en 1638 Galileo Galilei [7] utiliza en sus experimentos para demostrar que la caída de los cuerpos satisface la Ley Cuadrática. Por supuesto ninguno de los dos sabía que esta representaba un problema de ecuaciones funcionales cuya solución (bajo ciertas condiciones) está dada por $S(t) = at^2$.

Además, las ecuaciones funcionales han sido utilizadas en otras áreas de la ciencia para resolver diversos problemas; por ejemplo, el problema de la ley del paralelogramo para la composición de fuerzas fue modelado en los siglos XVIII y XIX por medio de ecuaciones funcionales, mediante el sistema

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & x, y \geq 0 \\ g(x+y) - g(x-y) = 2g(x)g(y) & 0 \leq y \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{1.3}$$

donde f y g son funciones reales. Como observamos, la primera de ellas es la mencionada ecuación funcional aditiva y la segunda es la ecuación de D'Alembert, quien la resolvió en el año 1769 [5].

Otro problema de interés, es el estudio del matemático J. Tannery [16] en el año 1886, del sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} \psi(x+y) = \psi(x)\phi(y) + \psi(y)\phi(x) \\ \phi(x+y) = \phi(x)\phi(y) - \psi(x)\psi(y) \end{cases} \tag{1.4}$$

donde ψ, ϕ son funciones reales, para introducir las funciones seno y coseno, evitando así cualquier argumento geométrico.

Un primer aporte a la disciplina de las ecuaciones funcionales, fue estimulado por el problema del paralelogramo de fuerzas. La prueba de esta ley pertenece a la composición de fuerzas y fue reducida por J. D'Alembert en el año 1769 a la solución de la ecuación funcional

$$f(x+y) + g(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{1.5}$$

Esta ecuación fue considerada con el mismo propósito por S. D. Poisson en 1804 con una hipótesis de analíticidad, mientras que A. L. Cauchy en 1821 determinó el sistema completo de soluciones.

Uno de las características más importantes de las ecuaciones funcionales es su capacidad para modelar la realidad con un alto grado de certeza, pero para lograr una mayor comprensión de esta teoría debemos tener en cuenta ciertas definiciones y conceptos.

1.2. Conceptos básicos y definiciones

Definición 1.14. Una ecuación funcional es una ecuación en el que las variables desconocidas son funciones. Una ecuación funcional en una variable de una incógnita es una expresión de la forma

$$F(x, f(x), f(\varphi_s(x))) = 0$$

Donde

- x es la variable y varía en un conjunto dado X.
- $\{\varphi_s\}_{s\in S}$ es una familia de funciones definidas de X en X.
- S es un conjunto de índices no vacío.
- f es la función a determinar y está definida del conjunto X en un conjunto Y.
- F es una función definida en $X \times Y \times \prod_{s\in S} Y_s$ con valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.15. Las siguientes ecuaciones son típicos ejemplos de ecuaciones funcionales

- La ecuación de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

- La ecuación homogénea

$$f(zx, zy) = z^n f(x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R},\ z > 0. \tag{1.7}$$

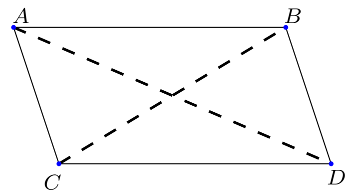
Definición 1.16 (sistema de ecuaciones funcionales). Un sistema de ecuaciones funcionales es un conjunto de $n \geq 2$ ecuaciones funcionales.

Definición 1.17 (Dominio de una ecuación funcional). Dada una ecuación funcional, el conjunto de todos los valores de las variables, que satisfacen la ecuación se llama dominio de la ecuación funcional.

Definición 1.18. Decimos que una función o conjunto de funciones es una solución particular de una ecuación funcional o sistema si, y sólo si, ésta satisface la ecuación funcional o sistema sobre el dominio de definición.

1.2.1. La ecuación funcional cuadrática

Un ejemplo de las ecuaciones funcionales es la conocida ecuación funcional cuadrática, esta ecuación se deriva de la conocida ley del paralelogramo y afirma que: *la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales*



$$(AB)^2 + (BC)^2 + (AD)^2 + (CD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2.$$

Si en vez de tomar los cuadrados de los segmentos se considera una función arbitraria obtenemos la siguiente definición

Definición 1.19. La ecuación

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \tag{1.8}$$

es llamada la **ecuación funcional cuadrática**. Toda solución de 1.8 es llamada función cuadrática.

El estudio de la ecuación funcional cuadrática es muy importante y sirve en muchos casos para definir una norma en espacios abstractos, se conoce también que si la función $f(x) = ||x||^2$ satisface 3.7 entonces la norma $||\cdot||$ genera un producto interior y recíprocamente la norma generada por un producto interior satisface 1.8.

Proposición 1.20. [2] Sean X, Y espacios vectoriales. Si $f : X \to Y$ satisface 1.8, entonces

$$f(rx) = r^2 f(x)$$

para todo $x \in X$ y todo escalar r.

La solución de la ecuación cuadrática puede ser caracterizada, como lo indica la siguiente proposición

Proposición 1.21. [2] La solución general de

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y), \tag{1.9}$$

$x, y \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$f(x)=cx^2, \tag{1.10}$$

donde c es una constante arbitraria.

El siguiente teorema permite caracterizar las funciones cuadráticas a partir de la existencia de una forma bilineal.

Proposición 1.22. [2] La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función cuadrática si, y sólo si existe un mapeo bilineal simétrico $B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$B(x,x)=f(x).$$

Este mapeo es único y está dado por

$$B(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+y)-f(x-y)].$$

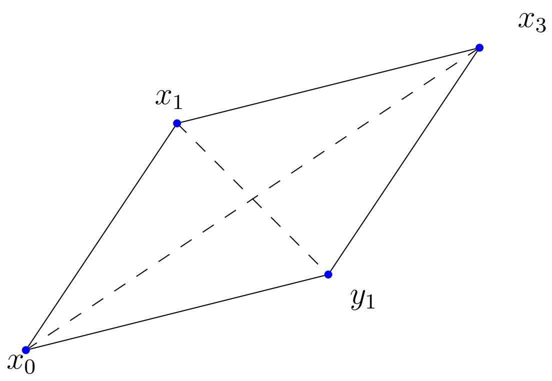
Nota 1.23. Si la función cuadrática $f:X\to Y$ satisface

1. $f(x)\geq 0$,
2. $f(x)=0$ si, y sólo si $x=0$,

implica que la forma bilineal $B(x,y)$ es un producto interior.

1.2.2. La semi-ley del paralelogramo

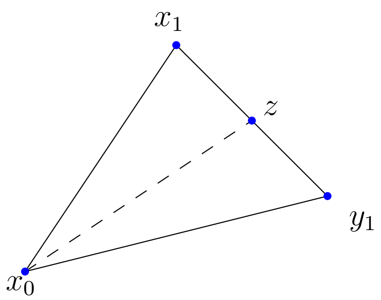
En la formulación de la ley del paralelogramo se considera que uno de los vértices de la figura formada siempre estará localizado en el origen, pero es posible localizar este paralelogramo en cualquier punto x_0 del espacio, luego él paralelogramo será como se muestra en la figura siguiente



si reemplazamos la norma por una distancia dada $d(\cdot,\cdot)$, entonces la ley del paralelogramo establece que

$$d(x_1,x_2)^2 + d(x_0,x_3)^2 \leq 2d(x_0,x_1)^2 + 2d(x_0,x_2)^2, \tag{1.11}$$

Ahora, la ley del paralelogramo puede ser debilitada de dos formas: primero si consideramos el punto medio de una de las diagonales y segundo, si en vez de la igualdad se reemplaza con una desigualdad. Entonces consideremos el semi paralelogramo



donde z es el punto medio de x_1, x_2, luego la ley del paralelogramo establece que

$$d(x_1,x_2)^2 + 4d(x_0,z)^2 = 2d(x_1,x_0)^2 + d(x_2,x_0)^2. \tag{1.12}$$

Ahora, se puede debilitar la ecuación 1.12 por una desigualdad y así poder extender su espectro de aplicabilidad sobre espacios más generales.

Sea X un espacio métrico, con una distancia $d(\cdot,\cdot)$, diremos que X satisface la semi-ley del paralelogramo si dados dos puntos $x_1, x_2 \in X$, existe z tal que para todo $x \in X$

$$d(x_1,x_2)^2 + 4d(x,z)^2 \leq d(x_1,x)^2 + d(x_2,x)^2 \tag{1.13}$$

se sigue de esta desigualdad que $d(z,x_2) = d(z,x_1) = \frac{1}{2}d(x_1,x_2)$. Así, si $z \in X$ existe se le llamará el punto medio de x_1, x_2 y a partir de esta semi-ley se establece que dicho punto medio es único.

Al igual que la ley del paralelogramo, es posible establecer una ecuación funcional a partir de la semi-ley del paralelogramo, dicha ecuación puede ser escrita como

$$2f\,(x_1 - z) + 2f\,(x_2 - z) + 4f\,(z - x) \leq 2f(x_1 - x) + 2f(x_2 - x), \tag{1.14}$$

donde $z = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Capítulo 2

Estabilidad de ecuaciones funcionales

En la práctica, la construcción de un modelo suele consistir en una selección arbitraria, normalmente basada en criterios de simplicidad, de ecuaciones que parecen representar la realidad con un cierto nivel de fiabilidad. Sin embargo, en muchas ocasiones estos modelos presentan problemas técnicos o inconsistencias que lo hacen inadmisibles. La técnicas de las ecuaciones funcionales suministra una herramienta muy potente que permite evitar esta arbitrariedad y seleccionar modelos basados en las restricciones que correspondan en cada caso.

En la resolución de una ecuación funcional nos podemos encontrar con dos tipos de soluciones; una solución particular ó una solución general. La solución particular de una ecuación funcional es cualquier función (o conjunto de funciones) que satisface la ecuación dada en el dominio considerado y dentro de la clase de funciones con la que se trabaja. Mientras que la solución general es el conjunto total de todas las soluciones de la ecuación dentro de la clase de funciones con la que se trabaja y en el dominio pertinente.

Muchas veces en el tratamiento de problemas matemáticos o de modelación de problemas físicos, suelen encontrarse pequeñas variaciones que dan lugar a un cambio en el modelo matemático que se trabaja, desde el punto de vista de las ecuaciones funcionales; esto quiere decir, que en vez de encontrar una solución de una ecuación funcional, se da con una función que "casi" satisface la ecuación. S. M. Ulam (cf. [8]) formuló el problema que daría inicio a la teoría de la estabilidad de ecuaciones funcionales.

Para poder entender mejor esta teoría se hace necesaria la siguiente definición

Definición 2.1 (**Estabilidad de una ecuación funcional**). Sean X, Y espacios normados. Para algunos $i \in \{1, 2, 3\}$ sean

$$g_i : X^3 \to X$$

$$G : X^3 \times Y^3 \to Y$$

y $\varphi, \phi : X^q \to [0, \infty)$ funciones que satisfacen algunas condiciones, que dependerán de la ecuación funcional que se esté trabajando y el método de demostración a utilizar; si para toda función f que satisface

$$||G(f(g_1(x_1, x_2, x_3)), f(g_2(x_1, .x_2, x_3)), f(g_3(x_1, .x_2, x_3)), x_1, x_2, x_3)|| \leq \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$, existe una función H tal que

$$G(H(g_1(x_1, x_2, x_3)), H(g_2(x_1, x_2, x_3)), H(g_3(x_1, x_2, x_3)), x_1, x_2, x_3) = 0$$

para todo $x_1, .x_2, x_3 \in X$, y

$$||f(x) - H(x)|| < \phi(x, x, x)$$

para $x \in X$ entonces decimos que la ecuación funcional

$$G(f(g_1(x_1, x_2, x_3)), f(g_2(x_1, .x_2, x_3)), f(g_3(x_1, .x_2, x_3)), x_1, x_2, x_3) = 0$$

es estable.

2.1. Estabilidad de Hyers-Ulam-Rassias

El primer matemático en dar un resultado de estabilidad para ecuaciones fue D. H. Hyers, este resultado esta enunciado en la proposición 0.1.

Nota 2.2. En general, el teorema es válido para una función $f : X \to Y$, donde X, Y son espacio de Banach.

Este resultado de Hyers establece que La ecuación funcional

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

es estable. Todo resultado similar al teorema de Hyers es conocido como ***estabilidad de Hyers-Ulam***

Th. M. Rassias en 1978 generaliza el resultado de Hyers al suponer que la diferencia de Cauchy no es acotada, obteniendo así un nuevo interés en el estudio de la estabilidad de ecuaciones funcionales. El resultado original de Rassias es el siguiente

Proposición 2.3. [10] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la desigualdad

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \theta(||x||^p + ||y||^p)$$

para algún $\theta > 0$, $0 \leq p < 1$ y todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces existe una única función aditiva $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$||f(x) - A(x)|| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}||x||^p.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

La función $(x, y) \to f(x+y) - f(x) - f(y)$ es conocida como la diferencia de Cauchy y la sucesión $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}$ es conocida como la sucesión de Hyers-Ulam.

En 1992 Semrl prueba que la generalización de Rassias no se cumple para $p = 1$ con el siguiente resultado

Proposición 2.4. Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq |x| + |y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

Dicha función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\log_2(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ x\log_2|x+1| & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Todo resultado similar al teorema de Rassias es conocido como ***estabilidad de Hyers-Rassias-Ulam***, pero a lo largo de este trabajo nos referiremos a resultados de este tipo como *estabilidad de ecuaciones funcionales.*

En base a las demostraciones de los resultados de Hyers y Rassias fue posible obtener una manera para resolver problemas de estabilidad de ecuaciones funcionales, este procedimiento es conocido como el método directo. Como alternativa a la demostración por el método directo, se utiliza otro procedimiento basado en la teoría de puntos fijos de funciones.

2.1.1. Método directo

La prueba de los problemas de estabilidad de Hyers y Rassias se puede dividir en los siguientes pasos

1. Probar que $\left\{\dfrac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.
2. Probar que
$$A(x) = \lim_{n\to x\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$
es aditiva.
3. Se prueba que la diferencia $f(x) - A(x)$ satisface la desigualdad deseada (En el caso del teorema de Hyers que $|f(x) - A(x)| \leq \delta$).
4. Probar la unicidad de A.

Si la solución de un problema de estabilidad de una ecuación funcional satisface estos pasos se dice que la prueba fue hecha por el método directo.

2.1.2. Alternativa del punto fijo

Existe un método diferente al método directo para la solución de problemas de estabilidad, este es conocido como la alternativa del punto fijo, para poder entender este método es necesario manejar algunas definiciones y resultados

Definición 2.5. Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \to [0, \infty]$ es llamada una métrica generalizada en X si satisface

1. $d(x, y) = 0$ si y solos si $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Proposición 2.6. [**Teorema del punto fijo**](cf.[3]) Sea (X, d) un espacio métrico generalizado y $J : X \to X$ un mapeo estrictamente contractivo con constante Lipschitz $L < 1$. Si existe $x \in X$ y un entero no negativo k tal que

$$d(J^k(x), J^{k+1}(x)) < \infty,$$

entonces

1. La sucesión $\{J^n(x)\}$ converge al punto fijo x^* de J.

2. x^* es el único punto fijo de J en $X^* = \{y \in X : d(y, x) < \infty\}$.

3. Si $y \in X^*$ entonces
$$d(y, x^*) \leq \frac{1}{1 - L} d(J(y), y).$$

En base a 2.6 la alternativa del punto fijo se puede resumir de la siguiente manera

1. Se introduce una métrica generalizada en un subespacio de funciones, comúnmente definida por

$$d(g, h) = \text{ínf} \left\{C : \|g(x) - h(x)\| \leq C\varphi\right\},$$

donde φ es una función que satisface ciertas propiedades de acuerdo al problema.

2. Se introduce una función $J(g) = r^2 g\left(\frac{x}{r}\right)$ y se prueba que

$$d(J(g), J(h)) \leq Ld(g, h)$$

para $L > 1$.

3. Se prueba que $d(J(f), f) < 1$, donde f es la función involucrada en el problema de estabilidad, además esto prueba que existe un único punto fijo Q, que satisface el problema de estabilidad.

Toda solución de un problema de estabilidad que satisfaga estos pasos, se dice que fue resuelto por la alternativa del punto fijo.

2.2. Estabilidad de la ecuación funcional cuadrática

Aunque los primeros problemas de estabilidad que se estudiaron fueron referentes a funciones aditivas o lineales, pronto se extendió este estudio a otros tipos de ecuaciones funcionales. Entre estos podemos destacar la estabilidad de la ecuación funcional cuadrática.

F. Skof [11] fue el primero en probar la estabilidad de Hyers-Ulam de la ecuación funcional cuadrática para una función $f : E_1 \to E_2$, donde E_1, E_2 son un espacio normado y un espacio de Banach, respectivamente. P. W. Cholewa [12] demostró que el teorema de Skof también es válido si E_1 se sustituye por un grupo abeliano G.

Proposición 2.7 (Skof). Sea G un grupo abeliano y E un espacio de Banach. Si una función $f : G \to E$ satisface la desigualdad

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta \tag{2.2}$$

para algún $\delta > 0$ y todo $x, y \in G$, entonces existe una única función cuadrática $Q : G \to E$ tal que

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{1}{2}\delta \tag{2.3}$$

para todo $x \in G$.

S. Czerwik [13] probó la estabilidad de la ecuación funcional cuadrática (Estabilidad de Hyers-Rassias-Ulam)

Proposición 2.8 (Czerwik). Sean E_1 y E_2 espacios normados y de Banach respectivamente. Si una función $f : E_1 \to E_2$ satisface

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta + \theta(\|x\|^p + |y\|^p) \tag{2.4}$$

par algún $\delta, \theta \geq 0,\ p < 2$ y todo $x, y \in E_1 - \{0\}$, entonces existe una única función cuadrática $Q : E_1 \to E_2$ tal que

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{1}{3}(\delta + c) + 2(4 - 2^p)^{-1}\theta\|x\|^p \tag{2.5}$$

para todo $x \in E_1$ y $c = \|f(0)\|$.

Czerwik también dio un contraejemplo en el caso especial $p = 2$, el cual está enunciado en el siguiente resultado

Proposición 2.9. Defínase una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}\varphi(2^n x) \tag{2.6}$$

donde

$$\varphi(x) := \begin{cases} a & \text{si } |x| \geq 1 \\ ax^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

donde a es un número real positivo. La función f satisface la desigualdad

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)| \leq 32a(x^2 + y^2), \tag{2.8}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. pero no existe una función cuadrática $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{|f(x)-Q(x)|}{x^2}$ sea acotado.

Los resultados obtenidos en los teoremas anteriores también pueden ser estudiados como casos particulares del problema de estabilidad presentado por C. Borelli y G. L. Forti [14] que plantea lo siguiente

Sea G un grupo abeliano, E un espacio de Banach y $f : G \to E$ una función con $f(0) = 0$ que satisface la desigualdad

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \varphi(x, y) \tag{2.9}$$

para todo $x, y \in G$. Supongamos que una de las series

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i}\varphi(2^{i-1}x, 2^{i-1}y) \quad y \quad \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2(1-i)}\varphi(2^{-i}x, 2^{-i}y)$$

converge para todo $x \in G$ y denotemos su suma como $\phi(x)$. Entonces existe una única función cuadrática $Q : G \to E$ tal que

$$|f(x) - Q(x)| \leq \phi(x) \tag{2.10}$$

para todo $x \in G$.

También existen resultados de estabilidad de ecuaciones funcionales cuadráticas por medio de la alternativa del punto fijo, entre estos resultados mencionamos los de S. -M. Jung, T. -S. Kim y K. -S. Lee.[15]

Proposición 2.10. Sea E_1 y E_2 espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. En particular, Sea E_2 un espacio $\beta - normado$. Supongamos que $\varphi : E_1^2 \to [0, \infty)$ es una función para la cual existe una constante $0 < L < 1$ tal que

$$\varphi(2x, 2x) \leq 4^{\beta}\varphi(x, x) \tag{2.11}$$

para todo $x \in E_1$. Sea $f : E_1 \to E_2$ que satisface $f(0) = 0$ y

$$\|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \varphi(x, y) \tag{2.12}$$

para todo $x, y \in E_1$. Si φ satisface

$$\lim_{n\to\infty} 4^{-n\beta}\varphi(2^n x, 2^n y) \tag{2.13}$$

para todo $x, y \in E_1$, entonces existe una única función cuadrática $Q : E_1 \to E_2$ satisfaciendo

$$\|f(x) - Q(x)\|_{\beta} \leq \frac{1}{4^{\beta}}\frac{1}{1 - L}\varphi(x, x). \tag{2.14}$$

Capítulo 3

Estabilidad de ecuaciones funcionales asociadas con la ecuación cuadrática

En este capítulo se estudia la estabilidad de las ecuaciones funcionales

$$2f\left(x_1 - z\right) + 2f\left(x_2 - z\right) + 4f\left(z - x_3\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3) \tag{3.1}$$

y

$$||2f\left(x_1 - z\right) + 2f\left(x_2 - z\right) + 4f\left(z - x_3\right) - 2f(x_1 - x_3)|| \leq ||2f(x_2 - x_3)|| \tag{3.2}$$

donde $z = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $f : X \to Y$ es una función, donde X, Y pueden ser espacios vectoriales, métricos o normados. Ambas ecuaciones derivadas de la semi-ley del paralelogramo.

Nota 3.1. Sea X un espacio vectorial. A lo largo de este capítulo, dados dos puntos $x, y \in X$ definiremos z_{xy} como

$$z_{xy} = \frac{x + y}{2},$$

entonces la ecuación 3.1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} &2f\left(x_1 - z_{x_1x_2}\right) + 2f\left(x_2 - z_{x_1x_2}\right) \\ &\qquad + 4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nota 3.2. Si $x_3 = 0$, la ecuación 3.3 se reduce a

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)=f(x_1)+f(x_2). \tag{3.4}$$

La estabilidad de la ecuación 3.4 se estudia en [23].

Si $x_3 = 0$ y la función f es par, la ecuación 3.3 se reduce a

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+2f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)=f(x_1)+f(x_2). \tag{3.5}$$

La estabilidad de la ecuación 3.5 se estudia en [24].

Si $x_3 = 0$, la función f es par y se reemplaza x_1, x_2 por $\frac{y-x}{2}, \frac{x+y}{2}$; donde x, y pertenecen al espacio, la ecuación 3.2 se reduce a

$$\left\|f(x)+f(y)-2f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\| \leq \left\|2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\|. \tag{3.6}$$

La estabilidad de la ecuación 3.6 se estudia en [25].

3.1. Resultados de estabilidad

En esta sección enunciaremos resultados de estabilidad asociados a la ecuación 3.1 y 3.2, para este propósito se demuestra el siguiente resultado

Proposición 3.3. Sean X y Y dos espacios vectoriales. Supongamos que el mapeo $f : X \to Y$ satisface $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Entonces f satisface 3.3 si, y sólo si satisface

$$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)+2f(x_2) \tag{3.7}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$

Demostración. Supongamos que el mapeo f satisface (3.3), tomando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ obtenemos

$$2f(0)+2f(0)+4f(0)=2f(0)+2f(0)$$
$$f(0)=0$$

Si $x_3 = x_2 = 0$, entonces

$$2f\left(\frac{x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{-x_1}{2}\right) + 4f\left(\frac{x_1}{2}\right) = 2f(x_1) + 2f(0)$$
$$4f\left(\frac{x_1}{2}\right) = f(x_1).$$

esto es $4f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(x)$ para todo $x \in X$.
Tomando $x_3 = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
2f\left(x_1 - z_{x_1x_2}\right) + 2f\left(x_2 - z_{x_1x_2}\right) + 4f\left(z_{x_1x_2}\right) &= 2f(x_1) + 2f(x_2)\\
2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) + 4f\left(z_{x_1x_2}\right) &= 2f(x_1) + 2f(x_2)\\
4f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= 2f(x_1) + 2f(x_2)\\
f\left(x_1 - x_2\right) + f\left(x_1 + x_2\right) &= 2f(x_1) + 2f(x_2),
\end{aligned}$$

luego f es un mapeo cuadrático.
Recíprocamente, supongamos que f satisface (3.7) tomando $x_2 = 0$,

$$2f(x_1) = 2f(x_1) + 2f(0),$$

así $f(0) = 0$ y reemplazando x_1, x_2 por $\frac{x_1}{2}$, obtenemos

$$f(x_1) = 4f\left(\frac{x_1}{2}\right).$$

Reemplazando x_1, x_2 por $x_1 - x_3$ y $x_2 - x_3$ respectivamente en (3.7), donde $x_1, x_2, x_3 \in X$, se tiene

$$f(x_1 + x_2 - 2x_3) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$2f\left(x_1 - z_{x_1x_2}\right) + 2f\left(x_2 - z_{x_1x_2}\right) + 4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

esto es f cumple (3.3). $\square$

Dada una función $f : X \to Y$, definimos

$$Df(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 - z_{x_1x_2}) + f(x_2 - z_{x_1x_2}) + 2f(z_{x_1x_2} - x_3) - f(x_1 - x_3) - f(x_2 - x_3)$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces de la ecuación 3.1 y utilizando el método directo obtenemos el siguiente resultado

Proposición 3.4. Sea X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Sea $f : X \to Y$, que satisface $f(0) = 0$. Si existe una función $\varphi : X^3 \to [0, \infty)$ tal que

$$\widehat{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \varphi\left(\frac{x_1}{2^k}, \frac{x_2}{2^k}, \frac{x_3}{2^k}\right) < \infty, \tag{3.8}$$

$$\|Df(x_1, x_2, x_3)\| \leq \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{3.9}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces existe una función cuadrática $Q : X \to Y$ tal que

$$\|f(x) + f(-x) - Q(x)\| \leq \widehat{\varphi}(x, 0, x) + \widehat{\varphi}(-x, 0, -x) \tag{3.10}$$

Demostración. Sea $x_1 = x_3 = x$ y $x_2 = 0$, entonces

$$\left\| f\left(\frac{-x}{2}\right) + 3f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right\| \leq \varphi(x, 0, x), \tag{3.11}$$

para todo $x \in X$. Reemplazando x por $-x$ obtenemos

$$\left\| f\left(\frac{x}{2}\right) + 3f\left(\frac{-x}{2}\right) - f(-x) \right\| \leq \varphi(-x, 0, -x), \tag{3.12}$$

para todo $x \in X$.
Definamos $g(x) := f(x) + f(-x)$, se sigue de (3.11) y (3.12)

$$\begin{aligned}
\left\| 4g\left(\frac{x}{2}\right) - g(x) \right\| &= \left\| 4f\left(\frac{x}{2}\right) + 4f\left(\frac{-x}{2}\right) - f(x) - f(-x) \right\| \\
&= \left\| 3f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) + 3f\left(\frac{-x}{2}\right) + f\left(\frac{-x}{2}\right) - f(-x) - f(x) \right\| \\
&\leq \varphi(-x, 0, -x) + \varphi(x, 0, x).
\end{aligned}$$

Esto implica

$$\left\| 4^n g\left(\frac{x}{2^n}\right) - 4^m g\left(\frac{x}{2^m}\right) \right\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} 4^j \varphi\left(\frac{x}{2^j}, 0, \frac{x}{2^j}\right) + \sum_{j=n}^{m-1} 4^j \varphi\left(\frac{-x}{2^j}, 0, \frac{-x}{2^j}\right) \tag{3.13}$$

para todo entero m, n con $n < m$. Se sigue de (3.8) que la sucesión $\left\{4^k g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\}$ es de Cauchy para todo $x \in X$. Como Y es completo, existe

$$Q(x) = \lim_{k\to\infty} 4^k g\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

por la definición de $g(x)$ tenemos que $Q(x)$ es una función par y además por (3.8) y (3.9)

$$\begin{aligned}
\|DQ(x_1, x_2, x)\| &= \lim_{k\to\infty} 4^k \left\|Dg\left(\frac{x_1}{2^k}, \frac{x_2}{2^k}, \frac{x}{2^k}\right)\right\| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} 2\left[4^k \varphi\left(\frac{x_1}{2^k}, \frac{x_2}{2^k}, \frac{x}{2^k}\right) + 4^k \varphi\left(\frac{-x_1}{2^k}, \frac{-x_2}{2^k}, \frac{-x}{2^k}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2, x \in X$, luego $DQ(x_1, x_2, x) = 0$, entonces por la proposición (3.3) $Q(x)$ es una función cuadrática. Haciendo $n = 0$ y $m \to \infty$ en (3.13), obtenemos (3.10). Ahora supongamos que existe otra función cuadrática

$$Q' : X \to Y$$

que satisface (3.10), entonces

$$\begin{aligned}
\|Q(x) - Q'(x)\| &= 4^k \left\|Q\left(\frac{x}{2^k}\right) - Q'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\| \\
&\leq 4^k \left\|Q\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) + f\left(\frac{-x}{2^k}\right)\right\| + \\
&\quad 4^k \left\|f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{-x}{2^k}\right) - Q'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right\| \\
&\leq 2 \cdot 4^k \varphi\left(\frac{x}{2^k}, 0, \frac{x}{2^k}\right) + 2 \cdot 4^k \varphi\left(\frac{-x}{2^k}, 0, \frac{-x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

el cual tiende a cero si $k \to \infty$, luego $Q = Q'$. $\square$

Ahora, usando la alternativa del punto fijo, se investigara la estabilidad de la ecuación 3.1.

Proposición 3.5. Sea $\varphi : X^3 \to [0, \infty)$ y $0 < L < 1$ tal que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{1}{4} L\varphi(2x_1, 2x_2, 2x_3), \tag{3.14}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$.
Sea $f : X \to Y$ un mapeo par entre espacios de Banach que satisface

$$\| Df(x_1, x_2, x_3) \| \leq \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{3.15}$$

entonces existe un único mapeo cuadrático $A : X \to Y$ tal que

$$\| f(x) - A(x) \| \leq \frac{L}{4 - 4L} \varphi(2x, 0, 0) \tag{3.16}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. De (3.14) obtenemos

$$\varphi(0, 0, 0) = 0,$$

luego haciendo $x_1, x_2, x_3 = 0$ en (3.15), se tiene $f(0) = 0$.
Consideremos el conjunto $S := \{g \mid g : X \to Y\}$ e introduzcamos la función d en S definida por

$$d(g, h) := \text{ínf}\, S_\varphi(g, h),$$

donde

$$S_\varphi(g, h) = \{C \in (0, \infty) : ||g(x) - h(x)|| \leq C\varphi(2x, 0, 0) \text{ para todo } \ x \in X\},$$

para todo $g, h \in S$. d es una métrica generalizada, en efecto;

1. Sean $g, h \in S$.
$$\begin{aligned} d(g, h) = 0 &\iff ||g(x) - h(x)|| = 0 \ \text{ para todo } \ x \in X \\ &\iff g(x) = h(x) \ \text{ para todo } \ x \in X \\ &\iff g = h. \end{aligned}$$

2. Dados $f, g \in S$
$$d(g, h) = \text{ínf}\, S_\varphi(g, h) = \text{ínf}\, S_\varphi(h, g) = d(h, g).$$

3. Dados $g, f, h \in S$ se tiene

$$\begin{aligned} S_\varphi(g,f) + S_\varphi(f,h) &= \Big\{C_1 + C_2 : \|g(x) - f(x)\| \leq C_1\varphi(2x,0,0) \\ &\qquad \text{y } \|f(x - h(x)\| \leq C_2\varphi(2x,0,0) \text{ para todo } \ x \in X\Big\} \\ &\subseteq \Big\{C \in (0,\infty) : \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - g(x)\| \\ &\qquad \leq C\varphi(2x,0,0) \text{ para todo } \ x \in X\Big\}, \quad C = C_1 + C_2. \\ &\subseteq \Big\{D \in (0,\infty) : \|g(x) - h(x)\| \leq D\varphi(2x,0,0) \\ &\qquad \text{para todo } \ x \in X\Big\}, \end{aligned}$$

luego

$$d(g,h) = \text{ínf}\, S_\varphi(g,h) \leq \text{ínf}\, S_\varphi(g,f) + \text{ínf}\, S_\varphi(f,h) = d(g,f) + d(f,h).$$

Sea $\{h_n\}$ una sucesión de Cauchy en (S,d). Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N_ε tal que $d(h_n, h_m) < \varepsilon$ para $m, n \geq N_\varepsilon$. La definición de d implica que existe $C \in (0, \varepsilon)$ tal que

$$\|h_n(x) - h_m\| \leq C\varphi(2x,0,0) \leq \varepsilon\varphi(2x,0,0) \tag{3.17}$$

para todo $n, m \geq N_\varepsilon$ y todo $x \in X$. Así $\{h_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada $x \in X$. Donde Y es completo, existe $h : X \to Y$ tal que

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x),$$

para todo $x \in X$. Haciendo $n \to \infty$ en (3.17), tenemos que para $m \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} &\|h_m(x) - h(x)\| \leq \varepsilon\varphi(2x,0,0) \\ &\Rightarrow d(h_m, h) < \varepsilon. \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Esto implica que la sucesión de Cauchy $\{h_n\}$ converge a h en (S,d), esto es; (S,d) es un espacio completo.

Definamos un mapeo $J : S \to S$ por

$$J(g(x)) = 4g\left(\frac{x}{2}\right),$$

para todo $x \in X$. J es un mapeo estrictamente contractivo en S, en efecto dado $g, h \in S$, sea $C \in [0, \infty]$ una constante arbitraria con $d(g, h) \leq C$, luego

$$\begin{aligned} \|g(x) - h(x)\| &\leq C\varphi(2x, 0, 0) \\ \|4g\left(\frac{x}{2}\right) - 4h\left(\frac{x}{2}\right)\| &\leq 4C\varphi(x, 0, 0) \\ \|J(g(x)) - J(h(x))\| &\leq L\varphi(2x, 0, 0) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Entonces $d(J(g), J(h)) \leq Ld(g, h)$. Luego J es un mapeo estrictamente contractivo con constante Lipschitz $0 < L < 1$.
Haciendo $x_2 = x_3 = 0$ en (3.15) obtenemos

$$\left\|4f\left(\frac{x_1}{2}\right) - f(x_1)\right\| \leq \varphi(x_1, 0, 0) \leq \frac{L}{4}\varphi(2x_1, 0, 0)$$

para todo $x_1 \in X$, así $d(f, J(f)) \leq \frac{L}{4} < \infty$. Se sigue de la proposición (2.6) que la sucesión $\{J^n(f)\}$ converge al punto fijo A de J, esto es

$$A : X \to Y, \quad A = \lim_{n \to \infty} 4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

A es el único punto fijo de J en el conjunto $S^* := \{g : \ d(g, f) < \infty\}$ y

$$d(A, f) \leq \frac{1}{1 - L} d(J(f), f) \leq \frac{L}{4 - 4L},$$

así se cumple (3.16). Además

$$\|DA(x, y, z)\| = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{4^k} \left\|Df\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n}\right)\right\| \leq \lim_{k \to \infty} L^k \varphi(x, y, z) = 0,$$

luego por la proposición (3.3), A es una función cuadrática. $\square$

Los resultados obtenidos en las proposiciones anteriores pueden ser debilitados si en vez de considerar la igualdad (3.1), se trabaja con una desigualdad como la planteada en la ecuación (3.2), para este propósito se enuncia y demuestra el siguiente resultado

Proposición 3.6. Sean X, Y espacios normados. Si $f : X \to Y$ es una función par, entonces

$$\begin{aligned}\|2f\left(x_1 - z_{x_1x_2}\right) + 2f\left(x_2 - z_{x_1x_2}\right)\\ +4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) - 2f(x_1 - x_3) + \| \leq \|2f(x_2 - x_3)\|\end{aligned} \tag{3.18}$$

si, y sólo si

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1) + 2f(x_2), \tag{3.19}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Demostración. Supongamos que el mapeo $f : X \to Y$ satisface (3.18), tomando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ obtenemos

$$\|6f(0)\| \leq \|2f(0)\|,$$

esto implica que $f(0) = 0$.
Haciendo $x_2 = x_3 = 0$ entonces

$$\left\|4f\left(\frac{x_1}{2}\right)) - f\left(x_1\right)\right\| \leq ||f(0)||;$$

esto es $4f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$ para todo $x \in X$.
Ahora de (3.18) y del hecho que f es par, tenemos que

$$\|f(x_1 - x_2) + f(x_2 + x_1 - 2x_3) - 2f(x_1 - x_3)\| \leq \|2f(x_2 - x_3)\|,$$

multiplicando la desigualdad por 2, haciendo $x_3 = 0$ y reemplazando x, y por $\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{-x_1 - x_2}{2}$ respectivamente, se tiene

$$\|2f(x) + 2f(y) - f(x - y)\| \leq \|f(x + y)\|. \tag{3.20}$$

De [4] se tiene que si f satisface (3.20) entonces satisface (3.7).

Recíprocamente, supongamos que f satisface (3.7) tomando $x_2 = 0$,

$$2f(x_1) = 2f(x_1) + 2f(0),$$

así $f(0) = 0$ y reemplazando x_1, x_2 por $\frac{x_1}{2}$, obtenemos

$$f(x_1) = 4f\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

reemplazando x_1, x_2 por $x_1 - x_3$ y $x_2 - x_3$, respectivamente en (3.7) se tiene

$$f(x_1 + x_2 - 2x_3) + f(x_1 - x_2) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) + 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3)$$

$$2f\left(x_1 - z_{x_1x_2}\right) + 2f\left(x_2 - z_{x_1x_2}\right) + 4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) = 2f(x_1 - x_3) + 2f(x_2 - x_3),$$

luego f cumple (3.18). □

Definamos para toda $f : X \to Y$

$$Cf(x_1, x_2, x_3) := 2f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) + 4f\left(z_{x_1x_2} - x_3\right) - 2f(x_1 - x_3)$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces de la ecuación 3.2 y empleando la alternativa del punto fijo obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.7. Sean X, Y espacios de Banach. Supongamos que un mapeo par $f : X \to Y$ satisface

$$\|Cf(x_1, x_2, x_3)\| \leq \|f(x_2 - x_3)\| + \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{3.21}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$, donde $\varphi : X^3 \to [0, \infty)$ es una función dada. Si existe $L < 1$ tal que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{L}{4}\varphi(2x_1, 2x_2, 2x_3) \tag{3.22}$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in X$. Entonces existe un único mapeo cuadrático $Q : X \to Y$ tal que

$$\|f(x) - Q(x)\| \leq \frac{L}{8 - 8L}\varphi(2x, 0, 0) \tag{3.23}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. De (3.22) se prueba que

$$\varphi(0, 0, 0) = 0.$$

Haciendo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ en (3.21) se obtiene que $f(0) = 0$.
Consideremos el conjunto $S := \{g|g : X \to Y\}$ y definiremos la métrica generalizada d en S definida por

$$d(g,h) := \text{ínf}\, S_{\varphi}(g,h)$$

donde

$$S_{\varphi}(g,h) := \{C \in (0,\infty) : \|g(x) - h(x)\| \leq C\varphi(2x,0,0) \text{ para todo } \ x \in X\}$$

para todo $g, h \in S$. Sabemos que (S,d) es completo. Definamos un mapeo $J : S \to S$ por

$$J(g(x)) = 4g\left(\frac{x}{2}\right),$$

para todo $x \in X$. J es un mapeo estrictamente contractivo en S, en efecto. Dado $g, h \in S$, sea $C \in [0,\infty]$ una constante arbitraria con $d(g,h) \leq C$, luego

$$\|g(x) - h(x)\| \leq C\varphi(2x,0,0)$$
$$\left\|4g\left(\frac{x}{2}\right) - 4h\left(\frac{x}{2}\right)\right\| \leq 4C\varphi(x,0,0).$$

De (3.22)

$$\|J(g(x)) - J(h(x))\| \leq L\varphi(2x,0,0)$$

para todo $x \in X$. Entonces

$$d(J(g),J(h)) \leq Ld(g,h).$$

Luego J es un mapeo estrictamente contractivo con constante Lipschitz $0 < L < 1$.
Tomando $x_2 = x_3 = 0$ en (3.21)

$$\left\|4f\left(\frac{x_1}{2}\right) - f(x_1)\right\| \leq \frac{1}{2}\varphi(x_1,0,0) \leq \frac{L}{8}\varphi(2x_1,0,0)$$

esto es $d(J(f),f) \leq \frac{L}{8} < \infty$. Se sigue de la proposición (2.6) que la sucesión $\{J^n(f)\}$ converge al punto fijo Q de J, es decir

$$Q : X \to Y \qquad Q(x) = \lim_{n\to\infty} 4^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Q es el único punto fijo de J en el conjunto $S^* := \{g : \ d(g, f) < \infty\}$ y

$$d(Q, f) \leq \frac{1}{1-L} d(J(f), f) \leq \frac{L}{8 - 8L},$$

así se cumple (3.23) además

$$\begin{aligned}
\|CQ(x_1, x_2, x_3)\| &= \lim_{n\to\infty} 4^n \left\| Cf\left(\frac{x_1}{2^n}, \frac{x_2}{2^n}, \frac{x_3}{2^n}\right) \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} 4^n \left[\left\| f\left(\frac{x_2}{2^n} - \frac{x_3}{2^n}\right) \right\| + \varphi\left(\frac{x_1}{2^n}, \frac{x_2}{2^n}, \frac{x_3}{2^n}\right) \right] \\
&\leq \|Q(x_2 - x_3)\| + \lim_{n\to\infty} 4^n \varphi\left(\frac{x_1}{2^n}, \frac{x_2}{2^n}, \frac{x_3}{2^n}\right) \\
&\leq \|Q(x_2 - x_3)\| + \lim_{n\to\infty} L^n \varphi(x_1, x_2, x_3) \\
&\leq \|Q(x_2 - x_3)\|
\end{aligned}$$

de la proposición (3.6) se tiene que Q es una función cuadrática. $\square$

Capítulo 4

Productos interiores

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, si la función $f(x) = \|x\|^2$; para todo $x \in X$, satisface la ley del paralelogramo, entonces en X se puede definir un producto interior. Si en lugar de suponer la ley del paralelogramo trabajamos con la semi-ley del paralelogramo, surge la siguiente pregunta ¿Es posible hallar una condición para la existencia del producto interior en el espacio?

En el capítulo 3 se estudió la estabilidad de dos ecuaciones derivadas de la semi-ley del paralelogramo. En este capítulo se darán condiciones suficientes para la existencia de productos interiores en base a esos resultados.

Si consideramos el estudio de la estabilidad de la ecuación 3.1 es posible hallar condiciones para la existencia de un producto interior sobre el espacio que se está trabajando.

Corolario 4.1. Sea X un espacio normado. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función par satisfaciendo $f(0) = 0$ y

$$|Df(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{\theta}{4}(\|x_1\|^r + \|x_2\|^r + \|x_3\|^r), \tag{4.1}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in X$, $\theta \in [0, 1)$ y $r > 1$. Entonces existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|2f(x) - Q(x)| \leq \theta\|x\|^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{r-1})^k}, \tag{4.2}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Hagamos $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{\theta}{4}(\|x_1\|^r+\|x_2\|^r+\|x_3\|^r)$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(x_1,x_2,x_3) &:= \sum_{k=0}^{\infty}2^k\varphi\left(\frac{x_1}{2^k},\frac{x_2}{2^k},\frac{x_3}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k}{(2^k)^r}\right)\frac{\theta}{4}(\|x_1\|^r+\|x_2\|^r+\|x_3\|^r)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2^{r-1})^k}\right)\frac{\theta}{4}(\|x_1\|^r+\|x_2\|^r+\|x_3\|^2r)<\infty.\end{aligned}$$

Luego por la proposición 3.4, existe una función cuadrática $Q(x)$ tal que

$$|2f(x)-Q(x)|\leq\widehat{\varphi}(x,0,x)+\widehat{\varphi}(-x,0,-x)$$

esto es

$$|2f(x)-Q(x)|\leq\theta\|x\|^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{r-1})^k}.$$

□

Lemma 4.2. Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Si su norma satisface

$$|Df(x_1,x_2,x_3)|\leq\frac{\theta}{4}(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2) \tag{4.3}$$

con $f(x)=\|x\|^2$, $x,x_1,x_2,x_3\in X$ y $\theta\in[0,1)$. Entonces existe un producto interior en X.

Demostración. Del corolario 4.1, con $r=2$; se prueba que existe una función cuadrática $Q:X\to\mathbb{R}$ tal que

$$\left|2\|x\|^2-Q(x)\right|\leq 2\theta\|x\|^2 \tag{4.4}$$

esto implica que

$$Q(0)=0$$

y

$$Q(x)\geq 2\|x\|^2(1-\theta)>0.$$

Además si $Q(x)=0$ entonces

$$0\geq 2\|x\|^2(1-\theta),$$

esto implica que $x = 0$; en otras palabras

$$Q(x) = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad x = 0.$$

Por la proposición 1.22, existe una única forma bilineal $B : X^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(x_1, x_2) = \frac{1}{4}[Q(x + y) - Q(x - y)],$$

se tiene entonces

- $B(x, x) = Q(x) \geq 0$.
- $B(x, x) = Q(x) = 0$ si, y sólo si $x = 0$,

así B es un producto interior sobre X. □

Corolario 4.3. Sean X un espacio normado. Sea $f : X \to Y$ una función par que satisface

$$|Df(x_1, x_2, x_3)| \leq \theta\left(\|x_1\|^r + \|x_2\|^r + \|x_2\|^r\right) \tag{4.5}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in X$, $r > 2$ y $0 \leq \theta$. Entonces existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{1 - 2^{2-r}}\theta\|x\|^r \tag{4.6}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Tomemos $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \theta\left(\|x_1\|^r + \|x_2\|^r + \|x_2\|^r\right)$ entonces

$$\frac{2^{2-r}}{4}\varphi(2x_12, x_2, 2x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

donde $L = 2^{2-r} < 1$, se sigue de la proposición 3.5 que existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ que satisface

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{L}{4 - 4L}\varphi(2x, 0, 0),$$

esto es;

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{2^{2-r}}{4 - 4 \cdot 2^{2-r}}\theta\|2x\|^r. \tag{4.7}$$

De (4.7) se sigue (4.6). □

Lemma 4.4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si

$$|Df(x_1, x_2, x_3)| \leq \theta \left(\|x_1\|^4 + \|x_2\|^4 + \|x_2\|^4\right), \tag{4.8}$$

donde $f(x) = \|x\|^4$, $x, x_1, x_2, x_3 \in X$ y $\theta \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$. Entonces existe un producto interior en X.

Demostración. Del corolario 4.3, con $r = 4$; se tiene que existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\|x\|^4 - Q(x)\right| \leq \frac{4}{3}\theta \|\|x\|^4, \tag{4.9}$$

esto implica que

$$Q(0) = 0$$

y

$$Q(x) \geq \|x\|^4(1 - \frac{4}{3}\theta) > 0.$$

Además si $Q(x) = 0$ entonces

$$0 \geq \|x\|^4(1 - \frac{4}{3}\theta),$$

esto implica que $x = 0$; en otras palabras

$$Q(x) = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad x = 0.$$

Por la proposición 1.22, existe una única forma bilineal $B : X^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(x_1, x_2) = \frac{1}{4}[Q(x + y) - Q(x - y)],$$

se tiene entonces

- $B(x, x) = Q(x) \geq 0$.
- $B(x, x) = Q(x) = 0$ si, y sólo si $x = 0$,

así B es un producto interior sobre X. $\square$

También al considerar el estudio de la estabilidad de la ecuación 3.2 es posible hallar condiciones para la existencia de un producto interior sobre el espacio que se esté trabajando.

Corolario 4.5. Sean X un espacio normado. Sea $f : X \to Y$ una función par que satisface

$$|Cf(x_1, x_2, x_3)| \leq |f(x_2 - x_3)| + \theta \left(\|x_1\|^r + \|x_2\|^r + \|x_2\|^r\right) \tag{4.10}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in X$, $r > 2$ y $0 \leq \theta$. Entonces existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{4 - 4 \cdot 2^{2-r}} \theta \|x\|^r \tag{4.11}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Tomemos $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \theta \left(\|x_1\|^r + \|x_2\|^r + \|x_2\|^r\right)$ entonces

$$\frac{2^{2-r}}{4} \varphi(2x_1 2, x_2, 2x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

donde $L = 2^{2-r} < 1$, se sigue de la proposición 3.7 que existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ que satisface

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{L}{8 - 8L} \varphi(2x, 0, 0),$$

esto es;

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{2^{2-r}}{8 - 8 \cdot 2^{2-r}} \theta \|2x|\|^r. \tag{4.12}$$

De (4.12) se sigue (4.11). $\square$

Lemma 4.6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si

$$|Cf(x_1, x_2, x_3)| \leq |f(x_2 - x_3)| + \theta \left(\|x_1\|^4 + \|x_2\|^4 + \|x_2\|^4\right), \tag{4.13}$$

donde $f(x) = \|x\|^4$, $x, x_1, x_2, x_3 \in X$ y $\theta \in (0, 3)$. Entonces existe un producto interior en X.

Demostración. Del corolario 4.5, con $r = 4$; se tiene que existe una función cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\|x\|^4 - Q(x)\right| \leq \frac{1}{3} \theta \|x\|^4, \tag{4.14}$$

esto implica que

$$Q(0) = 0$$

y

$$Q(x) \geq \|x\|^4(1 - \frac{1}{3}\theta) > 0.$$

Además si $Q(x) = 0$ entonces

$$0 \geq \|x\|^4(1 - \frac{1}{3}\theta),$$

esto implica que $x = 0$; en otras palabras

$$Q(x) = 0 \quad \text{si, y sólo si} \quad x = 0.$$

Por la proposición 1.22, existe una única forma bilineal $B : X^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(x_1, x_2) = \frac{1}{4}[Q(x + y) - Q(x - y)],$$

se tiene entonces

- $B(x, x) = Q(x) \geq 0.$
- $B(x, x) = Q(x) = 0$ si, y sólo si $x = 0$,

así B es un producto interior sobre X. □

En particular los lemas 4.4 y 4.6 nos permiten encontrar condiciones para afirmar que si un espacio satisface la semi-ley del paralelogramo entonces se puede definir un producto interior, este resultado es análogo a la relación entre la ley del paralelogramo y los productos interiores, con una diferencia clave; mientras la ley del paralelogramo nos ofrece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un producto interior, a partir de la semi-ley del paralelogramo solamente se enunciaron condiciones suficientes para la existencia de un producto interior.

Bibliografía

[1] S. M. Jung, "Hyers–Ulam–Rassias Stability of Functional Equations in Mathimatical Analysis", Hadronic Press, Palm Harbor, 2001.

[2] P. K. Sahoo and Palaniappan Kannappan, "Introduction to functional equations", Taylor and Francis Group,(2011), 2, 4, 6, 93-94, 107, 111, 123, 125, 129,143-144, 296-299, 303, 349-353.

[3] B. Margolis and J. Diaz, "A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space", Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 305–309.

[4] A. Gilányi, "Eine zur Parallelogrammgleichung aquivalente Ungleichung," Aequationes Mathematicae, vol. 62, no. 3, pp. 303–309, 2001.

[5] D'alembert, J. : Mémoires sur les principes de la mécanique, Académie Royalc des Sciences, Paris, (1769) pp. 278-286.

[6] Oresme, N. : Questiones super geometriam Euclidis (Manuscrito). 1347. Paris (Ed. II.L.L. Busard; E.J. Brill, Leiden, 1961).

[7] Galilei, G. : Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno a due nuove scienze. Leyden. 1638. (Opere, vol. VIII, pp. 209-210. Barbéra, Firenze, 1968).

[8] Ulam, S. M.:" *Problems in Mathematics,*" Chap. IV., Science eds. Wiley, New York, 1964.

[9] Hyers, D. H.:" *On the stability of the linear functional equation*". Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A., 27, 222–224 (1941).

[10] Rassias, Th. M., "*On the stability of linear mappings in Banach space*", Proc. Amer. Math. Soc 72 (1978), 297-300.

[11] F. Skof, *Prprietá locali e approssimazione di operatori*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 53 (1983), 113–129.

[12] P. W. Cholewa, *Remarks on the stability of functional equations*, Aequationes Math. 27 (1984), 76–86.

[13] S. Czerwik, *On the stability of the quadratic mapping in normed spaces*, Abh. Math. Sem. Hamburg 62 (1992), 59–64.

[14] C. Borelli and G. L. Forti, *On a general Hyers-Ulam stability result*, Int. J. Math. Math. Sci. 18 (1995), 229–236.

[15] S.-M. Jung, T.-S. Kim and K.-S. Lee, *A fixed point approach to the stability of quadratic functional equation*, Bull. Korean Math. Soc. 43 (2006), 531–541.

[16] Tannery, J. : *Introduction á la tréorie des fonctions d'une variable*, Paris, Cap. 96, 1886.

[17] Apostol, Tom M. (1960). *Análisis matemático: Introducción moderna al cálculo superior*. Reverté. ISBN 84-291-5000-5.

[18] Chmielinski, J., "*Normed spaces equivalent to inner product spaces and stability of functional equations* ", Aequationes Math, 2013.

[19] Th. M. Rassias and P. Semrl, "On the behavior of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability," Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 114, no. 4, pp. 989–993, 1992.

[20] Gajda, Z: On stability of additive mappings. Int. J. Math. Math. Sci. 14, 431-434 (1991)

[21] C. Park, "Fixed points, inner product spaces, and functional equations," Fixed Point Theory and Applications, vol. 2010, Article ID 713675, 14 pages, 2010.

[22] Choonkil BAAK. "Cauchy-Rassias Stability of Cauchy-Jensen Additive Mappings in Banach Spaces[J]". Acta Mathematica Sinica, English Series, 2006, 22(6): 1789-1796.

[23] C. Park, J. S. Huh, W. J. Min, D. H. Nam, and S. H. Roh. " Functional equations associated with inner product spaces", Journal of the Chungcheong mathematical society, Volume 21, No. 4, December 2008.

[24] C. Park, Y. J. Cho and J. R. Lee." Orthogonal stability of functional equations with the fixed point alternative", Advances in Difference Equations 2012, 2012:173.

[25] Y. H. Kwon, H. M. Lee, J. S. Sim, J. Yang, and C. Park. "Jordan-Von Neumann type functional inequalities", Journal of the Chungcheong mathematical society, Volume 20, No. 3, September 2007