GRUPO FUNDAMENTAL EN LA CATEGORIA DE LAS COLECCIONES

LILIBETH DE HORTA NARVÁEZ.

Trabajo de grado presentado
como requisito parcial para obtener el titulo
de Matemático.

Asesor: JOAQUÍN LUNA TORRES.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS.
CARTAGENA.
2010

Índice General

1 Espacios de colecciones

Siguiendo a A. Donado ([5]) se tiene que los espacios de colecciones son parejas (X, α) donde X es un conjunto y $\alpha \in \wp^2(X)$ es una colección. Por tanto, los espacios topológicos son espacios de colecciones que cumple condiciones adicionales: contienen al conjunto vacío, al conjunto total y tanto a la unión arbitraria como a la intersección finita de subconjuntos del conjunto en cuestión.

Cuando se omiten algunas de estas propiedades, se obtiene una gran gama de colecciones interesantes dotadas de estructuras, operaciones y no necesariamente ordenadas. De esta manera, se hace necesario el estudio de colecciones particulares relacionadas con algunos conceptos no necesariamente de carácter topológico, es por ello que se analizarán aquellas colecciones que se consideren interesantes y sugerentes. En el desarrollo de este trabajo se utilizan ciertas colecciones íntimamente ligadas a topologías prefijadas, sin que ellas mismas sean topologías, con el fin de poder encontrar semejanzas y diferencias entre sus propiedades y las de las topologías que las generan.

En este trabajo se construye el grupo fundamental sustituyendo la topología de un espacio por una colección más general imitando la construcción clásica del grupo de Poincaré: a partir de las definición de continuidad dada por Donado ([5]) se definen los lazos y las homotopias en el sentido de colecciones, para llegar al grupo funadamental del espacio con dicha coleccion que, en general, difiere del clásico; vale la pena aclarar que para efectos del trabajo se tomaron algunas colecciones muy ligadas a una topología dada. Esta construcción es muy útil para estudiar algunos espacios no necesariamente topológicos; ya que no siempre el objeto estudiado topologicamente conserva la estructura deseada y así que es coveniente reemplazar la topología por una colección apropiada sobre el conjunto subyacente.

Definición 1.1. [Definición de colecciones]

*Sea X un conjunto, una colección $\mathfrak{C}$ sobre X es cualquier subconjunto de $\wp(X)$, es decir, $\mathfrak{C} \in \wp^2(X)$ y a $(X, \mathfrak{C})$ se le llama **espacio de colecciones o $\mathfrak{C}$-espacio**.*

Ejemplo 1.2. [Ejemplos de espacios de colecciones]

(1) Sea un $\mathcal{F}$ un filtro en el conjunto X entonces $(X, \mathcal{F})$ es el $\mathcal{F}$-espacio o conjunto filtrado.

(2) Sea K un campo y $L_{\mathrm{K}} = \{X \mid X \text{ es subcampo de } \mathrm{K}\}$, entonces $(\mathrm{K}, L_{\mathrm{K}})$ es un L_{K}-espacio.

(3) El conjunto $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ de matrices invertibles de orden $n \times n$, con entradas en $\mathbb{R}$, se llama el grupo lineal sobre $\mathbb{R}^n$; entonces $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}))$ es un espacio de colección.

(4) Sea A una $\sigma-$álgebra en un conjunto X, así tenemos que (X, A) es un espacio de colección (un espacio de medida).

1.1 Relación entre topología y colección

Una topología es una colección de subconjuntos de un conjunto X que tiene las siguientes propiedades: contiene al conjunto $\emptyset$, al conjunto X, a la intersección finita y a la unión arbitraria de elementos de esta colección; así que es natural que surjan interrogantes sobre el comportamiento de aquellas colecciones que no cumplen con al menos una de las propiedades topológicas: Para poder responder algunos de dichos interrogantes, se extienden las nociones topológicas a los espacios de colecciones.

Es claro que las nociones de abierto, cerrado e interior son nociones propiamente topológicas, por ende no todas las colecciones pueden adaptarse fielmente a ellas, para tales casos se definen conceptos parecidos.

En los siguientes ejemplos se muestran algunas colecciones que no son topológicas:

(1) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un conjunto X, entonces $(X, \mathcal{F})$ es un $\mathcal{F}$-espacio que cumple:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Dados $A, B \in \mathcal{F}$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F}$.
- $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ implica que $B \in \mathcal{F}$
- De la propiedad anterior se deduce que si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I} \subseteq \mathcal{F}$, como $A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ para todo $\lambda \in I$, entonces $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \mathcal{F}$.

  Estas propiedades implican que los filtros son colecciones que cumplen con todas las condiciones para ser topologías, excepto contener a vacío. Cuando a un filtro se le agrega el conjunto vacío se obtiene una topología denominada **topología filtrosa**.

(2) El L_K-espacio del numeral (2) del ejemplo (1.2) satisface:

- $\phi \notin L_K$
- $K \in L_K$
- la intersección de dos elementos de L_K esta en él.
- la unión de dos subcampos de K no necesariamente es un subcampo de K.

(3) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, se tienen las siguientes colecciones asociadas a él:

- La topología $\mathcal{T}$.
- $c\mathcal{T}$ es la colección de subconjuntos de X que no pertecen a $\mathcal{T}$.

- $\mathcal{T}_c$ es la colección de subconjuntos cerrados, es decir $\mathcal{T}_c = \{A \in \wp(X) \mid A^c \in \mathcal{T}\}$

- La colección $c\mathcal{T}_c$ formada por todos los elementos de $\wp(X)$ que no pertenece a $\mathcal{T}_c$.

Observación 1.3. *Las colecciones antes citadas dependen de la topología en consideración.*

- De igual manera se pueden hallar colecciones $c\Upsilon$,Υ_c y $c\Upsilon_c$ correspondientes a una colección Υ.

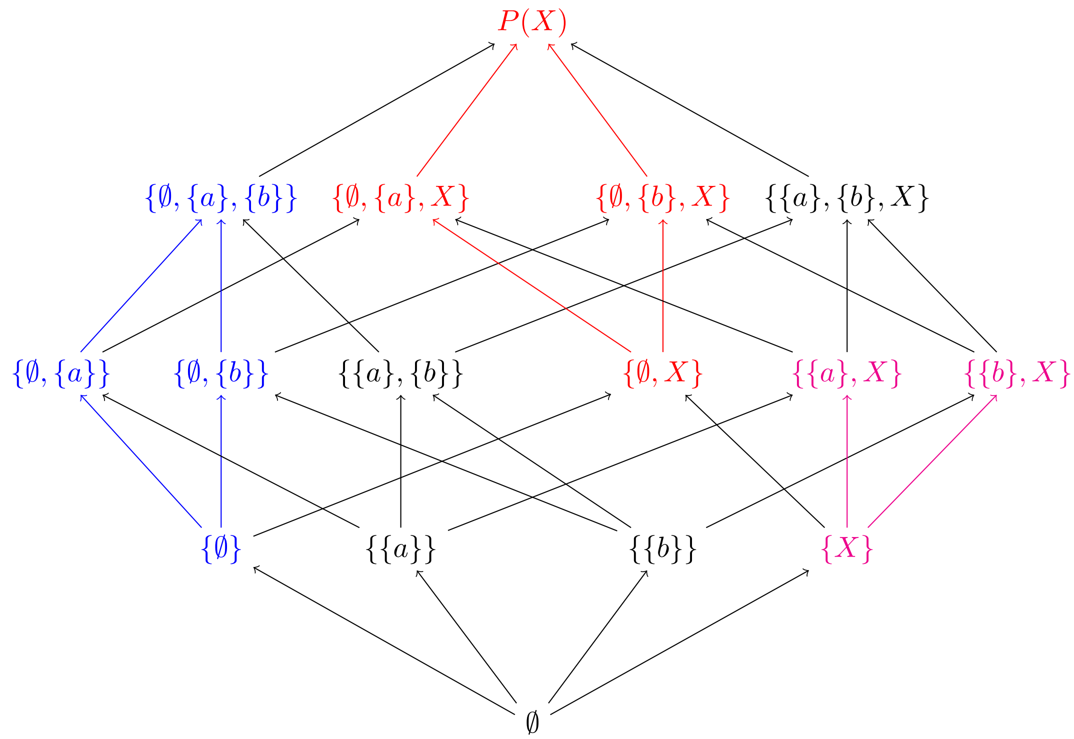
1.2 Conjuntos abiertos y cerrados en una colección

Como interesa conocer las coleciones y las propiedades de los espacios topológicos que se pueden extender a ellas, es necesario analizar algunas nociones básicas que son fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Para ello, se retoman las nociones de conjuntos abiertos y cerrados expuestas por A. Donado (ver [5]).
En el ejemplo que sigue, se nuestran varias colecciones que se pueden tener en un conjunto.

Ejemplo 1.4. *Para ello se toma un conjunto de tan solo dos elemetos* $X = \{a, b\}$
así que $\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$
entonces

$$\begin{aligned}\wp^2(X) &= \wp(\wp(X)) \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset,\ \{a\}\}, \{\emptyset\ \{b\}\}, \{\emptyset, X\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, X\}, \\ &\quad \{\{b\}, X\}, \{\emptyset,\ \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset,\ \{a\}, X\}\}, \{\emptyset,\ \{b\}, X\}, \{\{a\},\ \{b\}, X\}, \wp(X)\}\end{aligned}$$

Ahora, vease el retículo completo de la contenencia en $\wp^2(X)$ *y algunas estructuras que se pueden tener en él, son las siguientes:*



$\longrightarrow$ *los co-filtro del conjunto X,es decir,contiene a $\emptyset$ pero no al conjunto X.*

$\longrightarrow$ *todas las posibles topologías que posee un conjunto X.*

$\longrightarrow$ *los filtros del conjunto X.*

éstas solo son las colecciones más resaltantes; pero aquellas correspondientes a flechas en negro también pueden ser colecciones valiosas.

Definición 1.5. (Interior de un conjunto respecto a una colección $\mathfrak{A}$.)

Dada una colección $\mathfrak{A}$ en el conjunto X y un subconjunto A de X, se define el interior de A como:

$$i(A) = \bigcup \{G \subseteq X \mid G \in \mathfrak{A} \ \text{ y } \ G \subseteq A\}$$

Definición 1.6. (Adherencia de un conjunto respecto a una colección $\mathfrak{A}$.) *La adherencia, según la colección $\mathfrak{A}$, de $A \subseteq X$ es:*

$$\overline{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F^c \in \mathfrak{A} \ \ y \ \ A \subseteq F\}$$

1.3 La colección de los subconjuntos semiabiertos de un espacio topológico

Definición 1.7. *Dado un espacio topológico (X, τ), se dice que $A \in \wp(X)$ es un conjunto semiabierto en X si:*

$$A \subseteq \overline{i(A)}$$

Vale la pena aclarar que estos conjuntos semiabiertos dependen totalmente de la topología con la que el espacio esté dotado, ya que si se cambia; cambiará, indiscutiblemente, el interior y la clausura de cada conjunto.

Definición 1.8. *Dado un espacio topológico (X, τ), se dice que $B \in \wp(X)$ es un conjunto semicerrado en X si:*

$$i(\overline{B}) \subseteq B$$

Teorema 1.9. *El complemento de un conjunto semiabierto es semicerrado.*

Demostración: Sea (X, τ) un espacio topológico, y A un conjunto semiabierto con respecto a esta topología. Como

$$A \subseteq \overline{i(A)}$$

entonces

$$\left[\overline{i(A)}\right]^c \subseteq A^c = B,$$

pero $\big(i(A)\big)^c = \overline{A^c}$, esto implica que $\big(i(A)\big) = \left[\overline{A^c}\right]^c$, luego

$$B \supseteq \left\{ \overline{\left[(\overline{A^c})^c \right]} \right\}^c = \left\{ \left[i(\overline{A^c}) \right]^c \right\}^c = \left\{ i(\overline{A^c}) \right\} = i(\overline{B}).$$

Así que

$$i(\overline{B}) \subseteq B$$

luego B es semicerrado . □

Observación 1.10.

1.) La colección de subconjuntos semiabiertos de (X, τ) se denota por So(X) *y se dice que es una* So-*colección.*

2.) Dado un espacio topológico (X, τ), la topologia τ está contenido en los So-*colección, es decir, dado A de τ se tiene que:*

$$A = i(A) \subseteq \overline{i(A)},$$

así que $\tau \subseteq$ So$-$colección, ahora tomando B cerrado con respecto a τ se tiene que

$$i(\overline{B}) \subseteq \overline{B} = B$$

luego todo cerrado es semicerrado.

La preocupación ahora es pasar, de manera natural, de la continuidad topológica a la de *So*-colecciones

Definición 1.11. (*So*-continuidad.)

Sean(X, τ) y (Y, γ) dos espacios topológicos se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es So-*continua (o irresoluta), si para todo semiabierto v en Y, con respecto a la topología γ, se tiene que $f^{-1}(v) = w$ es un semiabierto en X, con respecto a τ.*

Definición 1.12. (Funciones *So*-abiertas.)

Sean (X, τ) *y* (Y, γ) *dos espacios topológicos. Se dice que una función* $f : X \longrightarrow Y$ *es* So-*abierta, si para todo semiabierto* w *en* X*, con respecto a la topología* τ*, se tiene que* $\overrightarrow{f}(w) = u$ *es un semiabierto en* Y*, con respecto a* γ*.*

Se observa que no siempre las funciones continuas son *So*-continuas, para ello se presenta un contraejemplo:

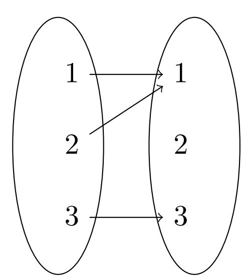
Ejemplo 1.13. *Dados el conjunto* $X = \{1, 2, 3\}$ *y las topologías* $\tau = \{\phi, \{1, 2\}, X\}$ *y* $\sigma = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$ *se tiene que las colecciones de cerrados para estás topologías son:*

$\tau_c = \{\phi, \{3\}, X\}$ *y* $\sigma_c = \{\phi, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ *respectivamente, luego las colecciones de los* So-*abiertos son*

$\mathrm{So}(\tau) = \{\phi, \{1, 2\}, X\}$ *y* $\mathrm{So}(\sigma) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$

La función f *definida por:*

$$f : X \longrightarrow X$$



es una función continua pero no So-*continua, ya que* $f^{-1}(\{2, 3\}) = \{3\} \notin \mathrm{So}(\tau)$.

El recíproco tampoco se cumple. Igual sucede con las funciones *So*-abiertas.

1.4 *So*-homeomorfismos

Antes de definir los *So*-homeomorfismos, se debe recordar algunas propiedades de los homeomorfismos, pues el propósito es generalizar ciertas características topológicas. Se sabe que un homeomorfimo es una función abierta y continua:

$$f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\rho)$$

es:

1. Abierta si se cumple una de las siguentes propiedades equivalentes:

   (i) $\overrightarrow{f}\big(i(A)\big) \subseteq i\big(\overrightarrow{f}(A)\big),\ \ \forall A \subseteq X$

   (ii) $i\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq f^{-1}\big(i(B)\big),\ \ \forall B \subseteq Y$

   (iii) $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)},\ \ \forall B \subseteq Y.$

2. Continua si se cumple una de las siguentes propiedades equivalentes:

   (a) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}),\ \ \forall B \subseteq Y$

   (b) $\overrightarrow{f}(\overline{A}) \subseteq \overline{\overrightarrow{f}(A)},\ \ \forall A \subseteq X$

   (c) $f^{-1}\big(i(B)\big) \subseteq i\big(f^{-1}(B)\big),\ \ \forall B \subseteq Y.$

Observación 1.14. f : $(X,\tau) \longrightarrow (Y,\rho)$ *es un homeomorfismo*

- *si y solo si*

  $$i\big(f^{-1}(B)\big) = f^{-1}\big(i(B)\big),\ \ \forall B \subseteq Y, \tag{1}$$

  lo que se obtiene usando (ii) y (c).

- *si y solo si*

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B}), \ \ \forall B \subseteq Y, \tag{2}$$

lo que se obtiene usando (iii) y (a).

Definición 1.15. (*So*-homeomorfismos)

Una función f *es un* So-*homeomorfismo si es* So-*continua y* So-*abierta.*

Teorema 1.16. *Dado* (X,τ) *y* (Y,ρ) *espacios topológicos y* f : $(X,\tau) \longrightarrow (Y,\rho)$ *un homeomorfismo entonces es un* So-*homeomorfismo.*

Demostración: Dado f un homeomorfismo se va a mostrar que es:

1. f es *So*- continua

2. f es *So*- abierta.

En efecto:

1. Sea $B \subseteq Y$ *So*-abierto con respecto a la topológia γ, es decir $B \subseteq \overline{i(B)}$ entonces

$$f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\big(\overline{i(B)}\big) = \overline{i\big(f^{-1}(B)\big)}$$

por la ecuación (1) y (2)de la observación (1.14).

Así que $f^{-1}(B) \subseteq \overline{i\big(f^{-1}(B)\big)}$, luego la imagen inversa de un *So*-abierto es *So*-abierto y por lo tanto f es *So*-continua.

2. Sea $A \subseteq X$ con $A \subseteq \overline{i(A)}$ entonces

$$\overrightarrow{f}(A) \subseteq \overrightarrow{f}\left(\overline{i(A)}\right)$$

por (b) se tiene que:

$$\overrightarrow{f}(A) \subseteq \overrightarrow{f}\left(\overline{i(A)}\right) \subseteq \overline{\overrightarrow{f}(i(A))}.$$

Como se había dicho en (i), $\overrightarrow{f}\big(i(A)\big) \subseteq i\big(\overrightarrow{f}(A)\big)$, se sigue entonces que:

$$\overrightarrow{f}(A) \subseteq \overline{i\big(\overrightarrow{f}(A)\big)},$$

luego, $\overrightarrow{f}(A)$ es *So*-abierto.

Así las cosas, de 1. y 2. se concluye que f es un *So*-homeomorfismo. $\square$

Teorema 1.17. *Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son* So-*homeomorfismos entonces $g \circ f : X \to Z$ es un* So$-$*homeomorfismo.*

Demostración: se tiene que f y g son *So*-homeomorfismo.se demostrará que $g \circ f$ es un *So*-homeomorfismo, es decir, que $g \circ f$ es *So*-continuas y *So*-abiertas. En efecto:
Sea v un *So*-abierto en Z, asi que $(g \circ f)^{-1}(v) = f^{-1} \circ g^{-1}(v)$ pero como $v \subseteq \overline{i(v)}$, por lo que

$$(g \circ f)^{-1}(v) \subseteq f^{-1}\big(g^{-1}(\overline{i(v)})\big) = f^{-1}\overline{\big(i(g^{-1}(v))\big)}$$

y como f y g es *So*-homeomorfismo se cumple que:

$$f^{-1}\big(g^{-1}(v)\big) \subseteq \overline{i\big(f^{-1}(g^{-1}(v))\big)}$$

entonces $f^{-1}\big(g^{-1}(v)\big)$es un *So*-abierto, por tanto $g \circ f$ es *So*-continua. Ahora sólo falta demostrar que $g \circ f$ es *So*-abierta, para esto se toma u un *So*-abierto en$X$
$\overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}(u)\big) \subseteq \overrightarrow{g}\big(\overrightarrow{f}\,\overline{i(u)}\big) \subseteq \overrightarrow{g}\big(\overline{i(\overrightarrow{f}(u))}\big) = \overline{i\big(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(u))\big)}$ entonces

$$g \circ f \subseteq \overline{i\big(\overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(u))\big)}$$

$\overrightarrow{g \circ f}(u)$ es un *So*-abierto, por lo tanto $g \circ f$ es *So*-abierta, con lo que queda demostrado.

$\square$

1.4.1 La coleción Ro de los conjuntos abiertos-regulares.

Definición 1.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico, la colección de los subconjuntos abiertos-regulares de X es*

$$Ro(X) = \{A \in \wp(X) \mid A = i(\overline{A})\}.$$

La colección Ro tiene las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset,\ X \in Ro(X)$.

(ii) $Ro(X) \subseteq \tau$.

(iii) Si A y $B \in Ro$, es decir $A = i(\overline{A})$ y $B = i(\overline{B})$ entonces $A \cap B = i(\overline{A} \cap \overline{B})$.
ya que, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ y así $i(\overline{A \cap B}) \subseteq i(\overline{A} \cap \overline{B}) = i(\overline{A}) \cap i(\overline{B})$.
Recíprocamente, como $A = i(\overline{A})$ implica que $i(A) = i(\overline{A})$ entonces
$i(\overline{A}) \cap i(\overline{B}) = i(A) \cap i(B) = i(A \cap B) \subseteq i(\overline{A \cap B})$, ya que $A \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$ con lo que se puede concluir que $A \cap B \ \in \ Ro$

(iv) Finalmente, el hecho que A y $B \in Ro$ no implica que $A \cup B \in Ro$, como se puede ver en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.19. *Sean $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$ en $Ro(\mathbb{R})$, según la topológia usual en $\mathbb{R}$.*
Luego $A \cup B = (0, 1) \cup (1, 2)$ y, por otra parte, $i(\overline{A \cup B}) = (0, 2)$. Entonces
$A \cup B \neq i(\overline{A \cup B})$

Observación 1.20. *Se escribirá $Ro_\tau(X)$ para referirse a los abiertos regulares con respecto a la topológia τ en el espacio X*

Definición 1.21. **(Ro-continuidad)**

Sean $(X, Ro_\tau(X))$ y $(Y, Ro_\sigma(Y))$ Ro-espacios con respecto a las topológias τ y σ, respectivamente. Se dice que una función $f : X \to Y$ es Ro-continua si para cada $B \in Ro_\sigma(Y)$ se cumple que $f^{-1}(B) \in Ro_\tau(X)$; es decir $f^{-1}(B) = i(\overline{f^{-1}(B)})$.

Note que todos los Ro-abiertos son abiertos pero no todos los abiertos son Ro-abiertos, pues Ro es subconjunto propio de τ. Esto conduce a resultados muy útiles para los fines propuestos. Una de estas consecuencias es: la continuidad de una función no implica su Ro-continuidad y el recíproco tampoco se cumple. En efecto,

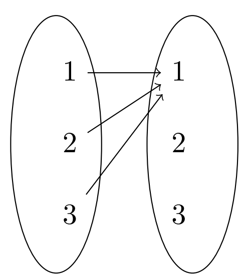
Ejemplo 1.22. *Sea el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ y sea la topologías $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$ por lo tanto*

$$\tau_c = \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$$

luego

$$\mathrm{Ro}(\tau) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

$$f : X \longrightarrow X$$



así se tiene que la función f es continua pero no Ro-continua, ya que $f^{-1}(1) = X \notin Ro(\tau)$

2 La categoría de las colecciones.

Se verifica que los espacios de colecciones forman una categoría, para ello se analizan las propiedades necesarias para que esto se cumpla.

Se toman como ***objetos*** a la familia de pares (X, σ), donde X es un conjunto y $\sigma \subseteq \wp(X)$ y como ***flechas*** a las funciones $\mathcal{C}$-continuas $(X, \sigma) \xrightarrow{f} (X, \rho)$, es decir,

(i) $X \xrightarrow{f} Y$ es una función

(ii) $\forall_B \in \rho, \overleftarrow{f}(B) \in \sigma$.

La categoría de las colecciones se denota $\mathcal{C}ol$.

Teorema 2.1. *$\mathcal{C}ol$ es una categoría.*

Demostración: Sean $\mathbb{X} = (X, \sigma_X)$, $\mathbb{Y} = (Y, \sigma_Y)$ y $\mathbb{Z} = (Z, \sigma_Z)$ objetos de $\mathcal{C}ol$, se define

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{Col}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times Hom_{Col}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) &\longrightarrow Hom_{Col}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) \\ (\quad f \quad , \quad g \quad) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

donde

a) $g \circ f$ es la composición en **Set**[1].

b) Es claro que $\forall_Z \in \sigma_Z$, $\overleftarrow{(g \circ f)}(Z) = \overleftarrow{g}(\overleftarrow{f}(Z)) \in \sigma_X$[2].

$\square$

[1]**Set** es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos $hom(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones del conjunto A al conjunto B.

[2]Vale aclarar que categoricamente la imagen inversa de la función f también se denota $\overleftarrow{f}$

Ejemplo 2.2. So$-$*abiertos (*So*-cerrados) con respecto a una topologia* τ *es una categoria,con*

- *Los objetos son los espacios* (X, So_τ)
- *las flechas son funciones* So*-continuas, ya que si se tiene* $f : X \to Y$, $g : y \to Z$ *son* So$-$*continuas, es decir que la imagen inversa de un* So- *abierto (*So*-cerrado) es un* So- *abierta (*So*-cerrada) entonces* $g \circ f : X \to Z$ *es una función* So$-$*continuas*

2.1 Subcategorías de la categoría $\mathcal{C}ol$

En la categoría $\mathcal{C}ol$ hay varias subcategorías, en este trabajo se enuncian algunas de ellas: La categoría $\mathcal{T}op$ y la categoría $Ptop$. (Ver el ejemplo 1.4)
A partir de una colección que sea un objeto de $\mathcal{C}ol$ se obtienen las siguintes colecciones:
Dada una topología τ tenemos el diagrama:

Diagrama 1

$$Ro(\tau) \hookrightarrow \tau \hookrightarrow So(\tau)$$
$$Ro(c\tau) \dashrightarrow c\tau \dashleftarrow So(c\tau)$$
$$Ro(\tau_c) \hookrightarrow (\tau_c) \hookleftarrow So(\tau_c)$$
$$Ro(c\tau_c) \dashrightarrow c\tau_c \dashrightarrow So(c\tau_c)$$

Las colecciones intermedias se observan en los retículos correspondientes a presentaciones booleanada de la topología τ y se puede decir que la topología y sus complementos no preservan un orden de contenencia con sus respectivos *Ro*-colección y *so*-coleción.
En el diagrama anterior,

- las flechas indican que siempre hay una contenencia y muestra su sentido.

- Las flechas punteadas muestran que generalmente, pero no siempre, se tiene la contenencia en ese sentido.

3 Grupos en la categoría $\mathcal{C}ol$ (Grupo- $\mathcal{C}ol$)

Los grupos topológicos son instrumentos de gran interés en las matemáticas, por ejemplo su acción ayuda a estudiar cualitativamente muchos problemas asociados a las ecuaciones diferenciales. En esta sección se realiza su estudio en el ambiente de las colecciones.

Definición 3.1. *Un grupo de colecciones es una terna* $(\mathbb{G}, \bullet, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{C} \subset \wp(\mathbb{G})$ *donde*

(i) $(\mathbb{G}, \bullet)$ *es un grupo*

(ii) $(\mathbb{G}, \mathfrak{C})$ *es un* $\mathfrak{C}$*-espacio.*

(iii) $\bullet : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$ *es* $\mathfrak{C}$*-continua*

(iv) $(\ )^{-1} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}, a \longmapsto a^{-1}$ *es* $\mathfrak{C}$*-continua.*

Ejemplo 3.2 (Grupo *So*)**.** *Un caso interesante de grupo en la categoría* $\mathcal{C}ol$ *es* $(\mathbb{R}, +, \mathrm{So})$*: en efecto, sea*

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}(a, b) = a + b},$$

se quiere ver que $\boldsymbol{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es* So*-continua, en efecto si se toman* So*-abiertos básicos* υ *y* ν *que contiene a* x *y* y *respectivamente, respecto a la topología usual de* $\mathbb{R}$*, con* $\upsilon = [a - r, a + r)$ *y* $\nu = (b - s, b + s)$*, es decir,*

$$a - r \leq x < a + r$$

y

$$b - s < y < b + s,$$

entonces se tiene que:

$$\overleftarrow{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(\upsilon, \nu) = \{(x, y) \mid a + b - (r + s) \leq x + y < a + b + (s + r)\}$$

se toma $s = r = \epsilon/2$*, con lo que se obtiene*

$$\overleftarrow{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(\upsilon, \nu) = \{(x, y) \mid a + b - \epsilon \leq x + y < a + b + \epsilon\}$$

es un So-*abierto en* $\mathbb{R}$*; así que se tiene que* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ *es* So-*continua.*

Veamos ahora que $-(\ )$ *es* So-*continua:*

$$-(\ ) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto -(t) = -t$$

sea $A \in \mathrm{So}(\mathbb{R})$*, entonces se tiene que* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $A \subset \overline{i(A)}$

si se toma $A = [a, b)$

luego, $\overleftarrow{-(A)} = [-b, -a) \in Ro(\mathbb{R})$*, como se tienen situaciones parecidas para los otros casos de* So-*abiertos básicos, se puede concluir que* $-(\ )$ *es* So-*continua.*

Teorema 3.3. *Las traslaciones forman un* So-*grupo.*

Demostración: sea $(\mathcal{G}, So(\mathcal{G}))$ el *So*-espacio y $(\mathcal{G}, \varphi)$ el grupo de las translaciones en el espacio, con φ definida asi $\varphi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,$\mathcal{G}(z) = z + a$, donde $a \in \mathcal{G}$. Basta mostrar que φ es *So*- continua. para ello se toma v un so-abierto en $\mathcal{G}$ entonces

$$\overleftarrow{\varphi}(v) = \{x \mid x = z + a, z \in v\}$$

y como se mostró en el ejemplo anterior que la suma es un una funcion *So*-continua. por otro lado la funcion inversa será la translacion definida como $\phi(z) = z - a$, claramente ϕ es *So*-continua. $\square$

Esta proposicion implica que los sistemas fundamentales de vecindades quedan completamente definidos apartir de las vecindades del elemento neutro. vease a continuación la definición de vecindad del elemento neutro e

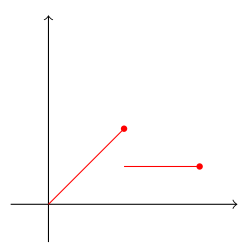
Definición 3.4. *Sea v es una vecindad de e si existe $w \in \mathcal{G}$ tal que $\{e\} \subseteq w \subset v$*

4 Homotopías y grupos fundamentales en Col

Definición 4.1 ($\mathfrak{C}$- camino)**.** *Sea $(X, \mathfrak{C})$ un espacio de colección. Un camino en X es una función $\mathfrak{C}$- continua $f : I \to X$, con $f(0)$ su origen y $f(1)$ es su extremo.*

Ejemplo 4.2. *Se considera la función f definida por:*

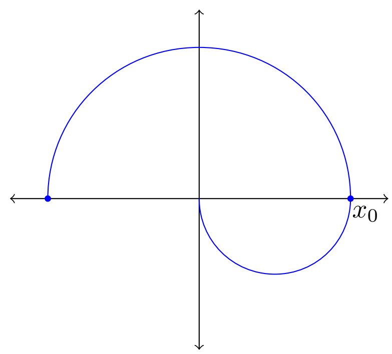
$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4}, & si \;\; \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$



y la colección $\mathfrak{C} = So_{\tau}(\mathbb{R})$. Esta función define un $So_{\tau}(\mathbb{R})$-camino aunque no es un camino en el sentido topológico usual.

Ejemplo 4.3. *Se toma un* So-*lazo definido como sigue:*

$$g(x) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), & o \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ (\frac{1}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin 2\pi t), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$



se tiene entonces que los extremos del So-*lazo coinciden:* $f(0) = f(1) = (1,0)$, *pero este no es un lazo respecto a la topología usual de* $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.4 ($\mathfrak{C}$-homotopía)**.** *Sea* $(X, \mathfrak{C})$ *un espacio de colección y* $\alpha, \beta : I \to X$ *funciones* $\mathfrak{C}-$*continuas con origen común* a *y extremo común* b. α, β *son* $\mathfrak{C}-$*homotópicas si existe una aplicación* $\mathfrak{C}-$*continua* $H : I \times I \to X$ *tal que para todo* $s, t \in I$ *se tiene*

- $H(s, 0) = \alpha(s)$
- $H(s, 1) = \beta(s)$
- $H(0, t) = a$
- $H(1, t) = b$

y se denota

$$\alpha \ \sim_{\mathfrak{C}} \ \beta$$

Definición 4.5 ($\mathfrak{C}$-contractil)**.** *Sea* $(X, \mathfrak{C})$ *un espacio de colección y* A *un subespacio de* X. *Se dice que* A *es una* $\mathfrak{C}$*-retracción de* X *si existe una aplicación* $\mathfrak{C}$*-continua* $r : X \to A$ *tal que* $r(a) = a$ *para todo* $a \in A$

Definición 4.6 (Grupo fundamental de un $\mathfrak{C}-$espacio)**.** *Sea X un conjunto, x_o un punto en X y $\mathfrak{C}-$ una colección en X. A la colección de las clases de $\mathfrak{C}-$homotopias de los lazos en X con origen y extremo x_0, se le llama grupo $\mathfrak{C}-$fundamental o primer grupo de $\mathfrak{C}-$homotopico del espacio punteado $((X, x_0); \mathfrak{C})$.*
Se denota $\pi_1((X, x_0); \mathfrak{C})$ o $\pi_1^{\mathfrak{C}ol}((X, x_0)$

Observación 4.7. *Notese que el grupo de Poincaré π_1 y $\pi_1^{\mathfrak{C}ol}$ no siempre son iguales si se toma como espacio $\mathbb{R}^2 - \{(0, \frac{1}{2})\}$ en el ejemplo 4.3 es contráctil pero un lazo relativo a la topología usual no lo es.*

4.1 Grafo en una colección ($\mathfrak{C}$-grafo)

Casos particulares de los complejos simpliciales son los grafos. En este aparte se presentan los grafos en el ambiente de las colecciones.

Definición 4.8 ($\mathfrak{C}$-Grafo)**.** *Sean X $\mathfrak{C}$-espacio de Hausdorff y X^0 un $\mathfrak{C}$-subespacio de X. Se dice al par (X, X^0) un $\mathfrak{C}$-grafo si cumple las siguientes condiciones:*

(i) *X^0 es un subespacio $\mathfrak{C}$-cerrado discreto de X cuyos puntos se llaman vértices.*

(ii) *$X - X^0$ es una unión disjunta y finita de subconjuntos $(e_i)_{i=1,2,\cdots,n}$ cada uno de los cuales es $\mathfrak{C}$-homeomorfo a un intervalo $\mathfrak{C}$-abierto de la recta real. Los conjuntos e_i se llaman aristas.*

(iii) *Para cada arista e_i, su borde $\bar{e}_i - e_i$ es un subconjunto de X^0 formado por uno o dos puntos. Si $\bar{e}_i - e_i$ consta de dos puntos, entonces el par $(\bar{e}_i, e_i)$ es $\mathfrak{C}$-homeomorfo al par $(S^1, S^1 - \{1\})$, donde S^1 tiene esta dotado de la $\mathfrak{C}$-colección cociente del $\mathfrak{C}$-espacio $I = [0, 1]$.*

(iv) X tiene la colección debil: Un subconjunto de $A \subseteq X$ es $\mathfrak{C}$-cerrado si y solo si, para toda arista e_i, $A \cap \bar{e}_i$ es $\mathfrak{C}$-cerrado.

Proposición 4.9 (Vecindad contráctil)**.** *Todo punto de un $\mathfrak{C}$-grafo tiene una base de vecindades $\mathfrak{C}$-contráctiles*

Para la prueba ver ([12]), pag.190

4.1.1 Árboles

Un árbol es un $\mathfrak{C}$-grafo conexo que no contiene caminos de aristas $\mathfrak{C}$-cerrados. Es claro que

- Todo subgrafo de un árbol es también un árbol.
- En un árbol, dos vértices arbitrarios y distintos pueden unirse siempre por un único camino reducido de aristas.

  Observación 4.10. *Un camino de aristas en un grafo es una sucesión finita de aristas orientadas $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ $(n \geq 1)$ tal que el vértice final de e_{i-1} coincida con el vértice inicial e_i, para $1 < i \leq n$. El camino de arista se llama reducido si no contiene dos aristas consecutivas que solámente se diferencie en su orientación.*

Proposición 4.11. *Todo árbol es contráctil.*

ver ([12]), pag.192

Proposición 4.12 (Grupo fundamental de un grafo)**.** *El grupo fundamental $\pi_1^{\mathfrak{C}ol}(X, v_0)$ es un grupo libre sobre el conjunto de generadores $\{\alpha_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$*

Observación 4.13. *Un grupo G es libre si existe un subconjunto S de G tal que cada elemento de G se puede escribir de manera única como producto de un número finito* *de elementos de S y de sus inversos. Aparte de la existencia de inversos no hay más relaciones entre los generadores del grupo, es decir los elementos de S.*

Demostración: Se considera, en primer lugar, el caso en que el conjunto de índices contenga sólo un elemento, es decir, existe sólo una arista e_1 de X no contenida en el árbol maximal T. Puesto que X no es un árbol, existe un camino de aristas $\mathfrak{C}$-cerrado en X que debe contener a e_1. Esta arista se orienta de una manera precisa. Entonces existen caminos de aristas $\mathfrak{C}$-cerrados en X que empiezan por e_1, es decir, son caminos de la forma $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Eligiendo el más corto de dichos caminos se puede obtener un camino $\mathfrak{C}$-cerrado simple. Si

$$C = \cup_{i=1}^{m} \overline{e_i}$$

entonces C es un $\mathfrak{C}$-subgrafo de X que es:

- u homeomorfo a la circunferencia S^1
- o es contractil, cuando al menos una de sus aristas es de la forma que aprece en el ejemplo (4.2),

en el primer caso se obtiene un generador del grupo.

Ahora se considera el complemento $X - C$; se designa por $\{Y_i\}$ al conjunto de las componentes de $X - C$. Cada $\overline{Y_i}$ es un árbol que tiene exactamente un vértice común con C y, por lo tanto, C es un retracto por deformación de X; por lo tanto, la inclusión $C \to X$ induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales, lo que prueba que $\pi_1^{\mathfrak{C}ol}(X, v_0)$ es un grupo trivial o ciclico infinito.

En el caso general, para cada $\lambda \in \Lambda$ se elige un punto $x_\lambda \in e_\lambda$. el conjunto $\{x_\lambda \mid e_\lambda\}$ es $\mathfrak{C}$-cerrado y discreto, ya que X está provisto de la colección débil. Sea U es el complemento de $\{x_\lambda \mid e_\lambda\}$ en X. Entonces T es un retracto por deformación de U, por lo tanto U es contráctil. Para cada índice λ, sea

$$V_\lambda = U \cap \{x_\lambda\}.$$

Entonces $U \subseteq V_\lambda$, paro todo $\lambda \in \Lambda$, y si $\lambda \neq \mu$,

$$V_\lambda \cap V_\mu = U.$$

Claramente $T \cup e_\lambda$ es un retracto por deformación de V_λ, por lo tanto, $\pi_1^{\mathfrak{C}ol}(V_\lambda, v_0)$ es un grupo ciclico infinito generado por α_λ o trivial. Utilizando el cubrimiento abierto formado por los V_λ y por U se concluye el teorema. $\square$

4.2 Conclusiones

En este trabajo se han mostrado varias colecciones asociadas a un conjunto, dentro de ella están las topologías con propiedades interesantes, por ello se han estudiado clásicamente. Pero, como se mostró en este trabajo, las topologías de un conjunto es una muy pequeña muestra de colecciones de dicho conjunto. Así que se realizó un estudio de algunas colecciones que pueden ser importante e interesante y en la extensión de propiedades topológicas a colecciones se obtuvieron resultados importantes:

- Las funciones clásicamente continuas no siempre son continuas en cualquiera colección
- En las colecciones se tiene mayor variedad de funciones continuas.
- En grupo fundamental depende del espacio y la colección de la que esté dotado.

Para trabajos posteriores, se propone estudiar grupos tanto de homotopías de orden superior como de homologías en el ámbito de las colecciones, asi como homotopías dirigidas.

Bibliografía

[1] Adamek, J. Herrlich, H., *Abstract and Concrete Categories*, Wiley, New York (1990).

[2] Biss, Daniel, *The Topological Fundamental Group and Generalized Covering Spaces*, Topology and its applications 124 (2002) $355-371$.

[3] Birkhoff, Garrett, *Lattice Theory*, The American Mathematical Society, USA, (1984).

[4] Bourbaki, Nicolas, *General Topology*, Addison-Wesley, Paris (1966).

[5] Donado, Alberto, *Topología y colecciones*, Universidad pedagógica nacional, Santa Fe de Bogotá, (1998).

[6] Dugundji, James, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, (1966).

[7] Fraleigh, John, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley,Massuchusets, (1967).

[8] Gratzer, George, *Lattice Theory*, W.H:Freeman and Company, USA, (1971).

[9] Lang, Serge, *Algebra*, Addison-Wesley, USA, (1965).

[10] Lima, Elon, *Grupo fundamental e espacos de recobrimento*, Projeto euclides, Rio de janeiro, (1998).

[11] Luna Torres, Joaquín, *Complejos celulares generales: Finitud local y conservacion de estructuras por revestimientos*, Universidad Nacional de Colombia, (1981).

[12] Massey W. S., *Introducción a la topología algebraica*, Editorial Reverté S. A., (1972).

[13] Spanier, Edwin, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill,New York, (1966).