Axiomas de Separación en Grupos Paratopológicos

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas
Cartagena de Indias D. T. y C.
Octubre de 2015

Axiomas de Separación en Grupos Paratopológicos

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas
Cartagena de Indias D. T. y C.
Octubre de 2015

Axiomas de Separación en Grupos Paratopológicos

Lizeth María Coneo Gamarra

Trabajo de grado Para optar al título de matemática

Asesor Julio Cesar Hernandez Arzusa, Msc..

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas
Cartagena de Indias D. T. y C.
Octubre de 2015

Este trabajo es dedicado a Dios, mi madre Gladis Gamarra Arroyo, mi padre Alfredo Coneo Guerrero (Q.E.P.D)

A ti por necesitar tan poco tiempo para darme un apoyo imenso y creer en mi...

Gracias.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por poner sobre mí toda la sabiduría y paciencia para recorrer este camino y llegar hasta este logro, además por rodearme de personas que hicieron de mi vivir diario el mejor.

Tengo que agradecer a mi madre Gladis Gamarra, por su apoyo incondicional y creer en mí y hacer de su papel de madre el mejor, a mi padre Alfredo Coneo (Q.E.P.D) por ser mi compañía celestial. A mis hermanos Alfredo, José, Reynaldo y Denisse por su apoyo y acompañarme en este proceso. A mis cuñados a quienes aprecio mucho por estar siempre a mi lado y a mis sobrinos por ser parte de mí. A mis tíos, en especial a mi tía Miralvis y Arsenia que nunca se ausentarón de mi lado y me apoyarón. A mis primos en especial María josé Salcedo, José Salcedo, Elicia Gamarra y Luís gamarra por su grata compañía.

A mis amistades por su apoyo moral y por brindarme los mejores momentos en mi carrera en especial a Silvia Salas y Elking Guevara. A mis profesores, Julio Hernandez por ser mi guia incondicional en este proceso y María Ofelia Vásquez por su grata amistad.

Para culminar agradezco a la Universidad de Cartagena, por acogerme y brindarme esta oportunidad de hoy cumplir mi meta trazada.

GRACIAS A TODOS.

Índice general

IN	TRODUCCIÓN	VII	
1.	PRELIMINARES	1	
	1.1. Definiciones Básicas	1	
	1.2. Axiomas de Separación	5	
	1.3. Resultados Básicos	8	
2.	Axiomas de Separación en Grupos Topológicos	14	
3.	Axiomas de Separación en Grupos Paratopológicos	21	
CONCLUSIÓN			
REFERENCIAS			

INTRODUCCIÓN

Históricamente, las primeras ideas topológicas conciernen al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los inconmensurables descubiertos por Pitágoras ante la aparición de números reales no racionales. El término topología lo acuña por primera vez Johan Bennedict Listing, en 1836 en una carta a su antiguo profesor Müller, y posteriormente en su libro Vorstudien zur Topologie (Estudios previos a la Topología), publicado en 1847.

La idea general en álgebra y topología es encontrar y estudiar los fenómenos causados por un cierto tipo de continuidad de las operaciones algebraicas. En muchos casos el énfasis de este estudio se hace en la descripción de la estructura algebraica de objetos bajo ciertas restricciones topológicas. Por ejemplo cada grupo topológico compacto Booleano es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}(2)^{\kappa}$, para algún cardinal κ . El área del álgebra topológica está bien desarrollada y tiene una larga tradición. Los primeros resultados en grupos paratopológicos aparecieron en los años 50 del siglo pasado, de hecho muchos conceptos en la teoría de grupos paratopológico no son análogos a los dados en los grupos topológicos.

Un ejemplo famoso de un grupo paratopológico es la línea de Sorgenfrey, esto muestran que grupos paratopológicos (hereditario) normal primero contables no necesitan ser metrizables. Resumiendo, la teoría de grupos paratopológicos es bastante diferen-

INTRODUCCIÓN VIII

te de la de grupos topológicos. Sin embargo, existen varios resultados que indican, en muchos aspectos, que los grupos paratopológicos heredarán algún tipo de estabilidad o previsibilidad considerable de los grupos topológicos. Cabe mencionar un hecho sorprendente de esta naturaleza: el Teorema de Comfort-Ross: "el producto de los grupos topológicos pseudocompactos sigue siendo válido para grupos paratopológicos, sin ninguna restricción de separación." Este resultado fue recientemente probado por Rasvky en [5]. Otro hecho no trivial fue establecido con anterioridad por Reznichenko: "Cada grupo topológico de Hausdorff σ —compacto tiene celularidad numerable." Recientemente, el autor deduce la misma conclusión, sin imponer ninguna restricción de separación en un grupo paratopológico σ —compacto.

En el presente trabajo se pretende establecer las características de los grupos paratopológicos dentro de las cuales mencionamos el comportamiento de los axiomas de separación en estos grupos, esto es, ya sabemos que en los grupos topológicos se tiene que T_i , con $i \in \{0, 1, 2, 3, 3_{\frac{1}{2}}\}$, son equivalentes, estudiaremos esta situación en los grupos paratopológicos.

Se establecen algunas nociones importantes y se presenta la demostración detallada de los teoremas que sean necesarios para abordar la teoría de los axiomas de separación en grupos paratopológicos. Para el desarrollo de este trabajo se tomarán como referencia dos artículos titulados *Para-topological and semi-topological groups vs topological groups* publicado por M. TKACHENKO [2] y *Paratopological groups, II*, publicado por O. RAVSKY.[4]

En el primer capítulo se dan algunas nociones básicas referentes a la topología, definiciones básicas y otras necesarias para una mejor comprensión del presente trabajo; además se presentan algunos resultados preliminares necesarios para la demostración de

INTRODUCCIÓN IX

los teoremas principales.

El segundo capítulo en general está dedicado a describir el comportamiento de los axiomas de separación cuando G es un grupo topológico, es decir mostraremos las implicaciones en sentido contrario, pero antes de mostrar los resultados daremos algunas definiciones necesarias para proceder a hacer las pruebas, para esto nos apoyaremos en los espacios uniformizables.

En el tercer y último capítulo se dará a conocer el resultado final, en este capítulo empezaremos dando la definición formal de un grupo paratopológico, luego mostraremos ejemplos en los cuales se ve reflejado claramente que en un grupo paratopológico ser T_0 no necesariamente implicaria ser T_1, T_2 , ect.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1.1 (Topología). Dado un conjunto X, llamamos topología a una colección τ de subconjuntos de X la cual tiene las siguientes propiedades:

- 1. \emptyset y X están en τ .
- 2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ esta en τ.
 A el par (X, τ) se le llama espacio topológico.

Si $U \in \tau$, se dice que U es un abierto en (X, τ) . Cuando no haya peligro de confusión, escribiremos X en lugar de (X, τ) .

Ejemplo 1.1.1 (Topología Indiscreta). Esta topología consta de dos único conjuntos, el vacío y el propio X.

Ejemplo 1.1.2 (Topología Discreta). Sea X un conjunto, consideremos la familia $\tau = P(X)$, formada por todos los subconjuntos de X, esta familia es una topología, es decir que cualquier subconjunto de X es un abierto y se le llama topología discreta.

Definición 1.1.2 (Grupo). Un grupo es un par ordenado (G,\cdot) donde G es un conjunto $y \cdot es$ una operación binaria en G, el cual sastisface los siguientes axiomas:

- i. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in G$, esto es, \cdot es asociativa.
- ii. Exite un elemento $e \in G$, llamado identidad, tal que para todo $a \in G$ se tiene que $a \cdot e = e \cdot a = a$.
- iii. Para cada $a \in G$ existe un elemento a^{-1} en G, llamado el inverso de a, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

El grupo (G, \cdot) es llamado abeliano si $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in G$.

Observación 1.1.1. De ahora en adelante escribiremos ab en vez de $a \cdot b$ para denotar el producto, para cuales quieran que sean a y b.

Definición 1.1.3 (Base). Sea X un espacio topológico y \mathcal{B} una colección de abiertos en X. Se dice que \mathcal{B} es una base para X si dado U abierto en X y $p \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subseteq U$. Es decir \mathcal{B} es una base para X si todo abierto de X se puede escribir como unión de elementos de \mathcal{B} .

Ejemplo 1.1.3. La colección de todas las bolas abiertas en un espacio métrico X es una base para una topología sobre X.

Definición 1.1.4 (Sub-base). Sea X un espacio topológico con topología τ . Una sub-base de τ es usualmente definida como una subcolección B de \mathfrak{B} que satisface una de las dos condiciones equivalentes:

- La subcolección
 genera una topología τ. Esto significa que τ es la topología más
 pequeña que contiene a
 Cualquier topología τ' de X que contiene a
 debe
 contener a τ.
- 2. La colección de conjuntos abiertos construida con X y todas las intersecciones finitas de los elementos de \mathfrak{B} forman una base para τ .

Ejemplo 1.1.4. La colección de todos los intervalos abiertos $\mathfrak{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ es una base para \mathbb{R} .

Ejemplo 1.1.5. En $X = \mathbb{R}$ si escojemos

$$U_1 = (-\infty, 0], \ U_2 = (0, 2], \ U_3 = [1, +\infty), \ U_4 = [2, 3].$$

esto es, si consideramos la sub-base $S = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ aparecen los abiertos (cerrados) $U_2 \cap U_3 = [1, 2], U_2 \cap U_4 = \{2\},$ (las intersecciones de tres o más son vacías) y la unión de todos ellos

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, 2], [1, +\infty), [2, 3], [1, 2], \{2\}, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), [1, 3], \ldots\}$$

Definición 1.1.5 (Base Local). Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$, se dice que $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ es una base local para x si y solo si dado $U \in \tau$ con $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 1.1.6. Si X es un espacio topológico y p es un punto perteneciente a X, una vecindad de p es un conjunto V que contiene un conjunto abierto U que contiene a p, esto es:

$$p \in U \subseteq V$$
.

Nótese que la vecindad V no necesita ser un conjunto abierto. Si V es abierto se le llama una vecindad abierta.

Definición 1.1.7 (Función Continua.). Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \longrightarrow Y$ es continua si $f^{-1}(O)$ es un conjunto abierto en X para cada conjunto abierto O de Y.

Naturalmente también es posible definir lo que significa que la función $f: X \longrightarrow Y$ sea continua en un punto $x \in X$.

Definición 1.1.8. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \longrightarrow Y$ es continua en un punto $x \in X$ si para cada vecindad V de f(x) en Y existe una vecindad V de X en X tal que X tal

Teorema 1.1.1. Dada una función $f: X \longrightarrow Y$, se dice que f es continua si y sólo si f es continua en x, para cada $x \in X$.

Definición 1.1.9. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. La colección $\{O \cap A : O \in \tau\}$. es la topología heredada por A de X o la topología inducida por X (o por la topología de X) sobre A. El espacio topológico formado se llama un subespacio de X.

Proposición 1.1.1. Sea X un conjunto y sea $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_i : X \longrightarrow (Y_i, \tau_i)\}$ una familia de funciones. Entonces

$$\{f_i^{-1}(U): i \in I \ y \ U_i \ es \ abierto \ en \ (X_i, \tau_i)\}$$

es una subbase para una topología en X, la topología generada por esta subbase se le llama topología inicial de X inducida por los f_i y los (Y_i, τ_i) .

Proposición 1.1.2. Sea Y un conjunto, $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos $y \{f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow Y\}$ una familia de funciones. Entonces:

$$\tau = \{A \subseteq Y : f_i^{-1}(A) \text{ es abierto en } X_i, \text{ para cada } i \in I\}$$

es una topología en Y. Esta topología es llamada la topología final en Y, inducida por los f_i y los (X_i, τ_i) .

Definición 1.1.10. Sean X, Y espacios topológicos y consideremos la topología inicial sobre el producto cartesiano $X \times Y$ inducida por las proyecciones canónicas

$$\pi_1: X \times Y \longrightarrow X \quad y \quad \pi_2: X \times Y \longrightarrow Y$$

llamamos esta topología, la topología producto sobre $X \times Y$.

1.2. Axiomas de Separación

En esta sección definiremos todos los axiomas de separación que usaremos para el desarrollo de este trabajo, enunciaremos sus distintas propiedades, de igual manera daremos algunos ejemplos de estos espacios.

Definición 1.2.1 (Espacios T_0). Decimos que un espacio topológico X es T_0 si dado dos puntos $x, y \in X$, existe una vecindad V_x de x (o V_y de y) tal que $y \notin V_x$ (o $x \notin V_y$).

Ejemplo 1.2.1. El espacio de Sierpinski, $X = \{0,1\}$ con la topología $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ es un espacio T_0 . Los únicos puntos distintos entre sí son 0 y 1, $\{0\}$ es una vecindad de 0 que no contiene a 1.

Definición 1.2.2 (Espacios T_1). Se dice que un espacio topológico X es T_1 si dado dos puntos $x, y \in X$ existe una vecindad V_x y V_y tal que $x \notin V_y$ e $y \notin V_x$.

Ejemplo 1.2.2. Todo espacio métrico es un espacio T_1 . Cualquier conjunto con la topología de los complementos finitos es T_1 .

Definición 1.2.3 (Espacios T_2 o Hausdorff). Un espacio topológico X es T_2 o de Hausdorff si dado dos puntos $x, y \in X$ existe una vecindad V_x y V_y tal que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.3. Todos los espacios métricos son espacios de Hausdorff. Sea r = d(x,y) y sean $r_x, r_y > 0$ tales que $r_x < \frac{r}{2}$ y $r_y < \frac{r}{2}$, entonces se tiene que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$. De no ser así, entonces existiría un $z \in B(x, r_x) \cap B(y, r_y)$. En efecto si $z \in B(x, r_x)$ entonces por definición de métrica se tiene que

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

de donde

$$d(z,y) \geq d(x,y) - d(x,z)$$

$$= r - d(x,z)$$

$$> r - \frac{r}{2}$$

$$= \frac{r}{2}$$

por lo que $z \notin B(y, r_y)$, por tanto se tiene que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$.

Definición 1.2.4 (Espacios funcionalmente Hausdorff). Un espacio X es funcionalmente Hausdorff si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe una función continua $f: X \longrightarrow [0,1]$ tal que f(x) = 0 y f(y) = 1.

Definición 1.2.5 (Espacios Urysohn). Un espacio X es Urysohn si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, estos pueden separarse por vecindades cerradas, esto es, si U_x es una vecindad cerrada de x y V_y una vecindad cerrada de y, tales que U_x y V_y son disjuntas $(U_x \cap V_y = \emptyset)$.

Definición 1.2.6 (Espacios fuertemente Hausdorff). Un espacio X se dice que es fuertemente Hausdorff si este es de Hausdorff y si para cada subconjunto infinito $A \subset X$, se tiene una sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjutos abiertos disjuntos dos a dos tal que $A \cap U_n \neq \emptyset$.

Definición 1.2.7 (Espacios Regulares). Un espacio topológico X es regular si para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen abiertos U_1, U_2 en X tales que $x \in U_1$ y $F \subseteq U_2$ de donde $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.4. Cualquier espacio métrico es un espacio regular. En efecto, sea (X,d) un espacio métrico, $F \subseteq X$ cerrado $y \ x \in X - F$. Como X - F es un subconjunto abierto, existe r > 0 tal que $x \in B(x,r) \subseteq X - F$; de tal forma que

$$x \in B(x, r/2) \subseteq \overline{B(x, r/2)} \subseteq B(x, r).$$

Por lo tanto, si $A_1 = B(x, r/2)$ y $A_2 = X - \overline{B(x, r/2)}$ se tiene que A_1 y A_2 son subconjuntos abiertos ajenos tales que $F \subseteq A_2$ y $x \in A_1$. Como X es T_1 , tenemos que X es regular.

Definición 1.2.8 (Espacios T3). Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1 .

Definición 1.2.9 (Conjuntos canónicos). Sea X un espacio topológico, y sea U un conjunto, tal que $U \in X$, decimos que U es abierto canónico si $U = int\overline{U}$.

Definición 1.2.10 (Espacios CB). Un espacio X es CB si X tiene una base que consta de conjuntos abiertos canónicos.

Definición 1.2.11 (Espacios semiregular). Un espacio X es semiregular si este es CB y T_2 .

Definición 1.2.12 (Espacios Quasiregular). Un espacio X es quasiregular si cada conjunto abierto no vacío contiene la clausura de algún conjunto abierto distinto de vacío.

Definición 1.2.13 (Espacios π -semiregular). Un espacio es π -semiregular si cada conjunto abierto no vacío contiene el interior de la clausura de algún conjunto abierto no vacío.

Definición 1.2.14 (Espacios funcionalmente T_3). Un espacio X es funcionalmente T_3 si para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ y todo punto $x \in X - F$ existe una función continua $f: X \longrightarrow [0,1]$ tal que f(x) = 0 y f|F = 1.

Definición 1.2.15 (Espacios $T_{3\frac{1}{2}}$, completamente regulares o Tychonoff). Un espacio topológico X es completamente regular si es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F existe una función continua $f: X \longrightarrow [0,1]$ tal que f(x) = 1 y f(F) = 0.

1.3. Resultados Básicos

En esta sección estudiaremos algunos resultados topológicos básicos y también estableceremos resultados acerca del comportamiento de los axiomas de separación en los grupos topológicos, lo cual nos servirán mas adelante para relacionarlos con los grupos paratopológicos. Para las siguientes afirmaciones, consideremos X un espacio topológico.

Proposición 1.3.1. Un espacio es T_0 si y solo si, para $x, y \in X$, con $x \neq y$ entonces $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Demostración. Supongamos $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Como X es un espacio T_0 existe una vecindad U_x de x tal que $y \notin U_x$, luego U es una vecindad de x que no intersecta al conjunto $\{y\}$ por lo tanto, $x \in U \cap \{x\}$ y $x \notin U \cap \{y\}$. Así, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Recíprocamente, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Supongamos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Tomemos $z \in \overline{\{x\}}$ luego existe una vecindad U de x tal que $z \in U$ y $U \cap \{y\} = \emptyset$, ya que $z \notin \{y\}$ entonces $x \in U$ pero $y \notin U$. Así, X es un espacio T_0 .

Teorema 1.3.1. Dado un espacio topológico X, los siguientes enunciados son equivalentes:

- a. X es T_1 .
- b. Cada conjunto unitario en X es cerrado.
- c. Cada subconjunto de X es igual a la intersección de los conjuntos abiertos que lo contienen.

Demostración. (a. \Longrightarrow b.) Si X es un espacio T_1 entonces dados $x, y \in X$, con $x \neq y$ existe abiertos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$, así se tiene que $y \in V \subset X - \{x\}$ ya que $y \notin \{x\}$ por lo que $X - \{x\}$ es abierto y así $\{x\}$ es cerrado.

 $(b. \implies c.)$ Sea $x \in X$ y tenemos que cada $\{x\}$ es un conjunto cerrado, luego dado $A \subset X$ y para cada $x \notin A$, podemos escribir A como

$$A = \bigcup \{X - \{x\} : x \in X - A\}.$$

 $(c. \Longrightarrow a.)$ Sea $x \neq y$, supongamos que se satisface c entonces para $A = \{x\}$ es claro que existe una vecindad abierta de x que no contiene a y, análogamente tomando $A = \{y\}$, existirá una abierta de y que no contiene a x, por tanto X es T_1 .

Corolario 1.3.1. Si X es un espacio para el cual se tiene que toda sucesión definida en él tiene a lo más un límite, entonces X es un espacio T_1 .

Demostración. Supongamos que $x \in X$ es arbitrario, y que $y \in \overline{\{x\}}$. Puesto que tanto y como x son límites de la sucesión $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la propiedad que posee X implica que x = y. Ello nos asegura en particular que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. En consecuencia, X es un espacio T_1 .

Observación 1.3.1. Todo espacio T_2 es T_1 , pero el recíproco no es cierto, lo veremos a continuación

Ejemplo 1.3.1. Sea X un conjunto infinito con la toplogía de los complementos finitos, digamos $\tau_c = \{A \subset X | X - A \text{ es finito o } A = \emptyset\}$ (los conjuntos cerrados son los conjuntos finitos y(X)). Veamos que X con la topologia τ_c no es T_2 pero si es T_1 . Supongamos que X es T_2 luego dados abiertos U y(V) en X se sigue que $U \cap V = \emptyset$ por lo que

$$X = X - \emptyset = X - (U \cap V) = (X - U) \cap (X - V)$$

pero los subconjuntos (X - U) y (X - V) son finitos, así cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X siempre se intersecta por lo que X no es T_2 . Ahora sea $x, y \in X$ luego los conjuntos $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados porque son conjuntos finitos por lo que $X - \{x\}$ es su complemento por tanto es abierto, así el abierto U_x de x se puede escribir como $U = X - \{x\}$ luego $x \in U_x$ pero $y \notin U_x$, por lo tanto X es un espacio T_1 .

Ejemplo 1.3.2. Un espacio que sea T_0 no siempre es T_1 . Sea $X = \{a,b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, es claro que (X, τ) es T_0 , si tomamos $O = \{a\}$ se tiene que $(a \in \{a\} \land b \notin \{a\})$, pero (X, τ) no es T_1 ya que no existen abiertos que cumplan la condición de la definición.

Observación 1.3.2. Es trivial verificar que en un espacio topológico se cumple que:

$$T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$$
 (*)

Observación 1.3.3. Las propiedades T_1 , T_2 , T_3 , y $T_{3\frac{1}{2}}$ son hereditarias y se preservan los productos.

Teorema 1.3.2. Si X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ entonces X es un regular.

Demostración. Sea F un conjunto cerrado en X y sea $x \in X - F$, entonces existe una función continua $f: X \longrightarrow [0,1]$ tal que f(F) = 0 y f(x) = 1, ahora los conjuntos $f^{-1}([0,1/2))$ y $f^{-1}((1/2,1])$, son abiertos en X y disyuntos, además $F \subset f^{-1}([0,1/2))$ y $x \in f^{-1}((1/2,1])$. Esto quiere decir que tanto F como x los podemos separar por medios de conjuntos abiertos en X.

A continuación introduciremos un concepto que nos servirá en el segundo capítulo para probar que todo grupo topológico T_0 es Tychonoff.

Definición 1.3.1. Dado un conjunto X definimos su diagonal como el conjunto

$$\triangle(X) := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

sin perdida de generalidad lo denotaremos por \triangle .

Definición 1.3.2 (Uniformidad). Sea X un conjunto, sea $\mathcal{U} \subset P(X \times X)$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$, tal que:

- 1. $\forall U \in \mathcal{U}, \triangle \subset U$.
- 2. $U \in \mathcal{U}$ entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$.
- 3. $U \in \mathcal{U}$ entonces $\exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subset U$.
- 4. $U, V \in \mathcal{U}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.

5. $\forall U \in \mathcal{U}, U \subset V \subset X \times X$ entonces $V \in \mathcal{U}$.

Diremos que \mathcal{U} es una uniformidad para X.

Observación 1.3.4. Sean X, Y conjuntos, dada una relación U en $X \times Y$ definimos

$$U^{-1} := \{(x,y) \in Y \times X : (y,x) \in U\}.$$

Dadas U, V relaciones en $X \times Y$, definimos

$$U \circ V := \{(x, z) \in X \times X, \exists y \in X \text{ tal que } (x, y) \in V \text{ } y \text{ } (y, z) \in U\}$$

Definición 1.3.3 (Espacios Uniformes). Al par (X, \mathcal{U}) se le llama espacio uniforme. Los elementos de \mathcal{U} se les dice contornos.

Ejemplo 1.3.3. Dado cualquier conjunto X podemos dotarlo de diferentes uniformidades. Las uniformidades triviales son : $\mathcal{U} = \{X \times X\}$ esta se le llama uniformidad indiscreta y $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X : \triangle \subset U\}$, esta se le llama uniformidad discreta.

Ejemplo 1.3.4. La uniformidad usal para \mathbb{R} es:

$$\mathcal{U} = \{ U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r > 0 \ tal \ que \ |x - y| < r \Longrightarrow (x, y) \in U \}$$

Observación 1.3.5. Para un par de puntos $x, y \in X$ y $V \in X \times X$ tenemos que $(x,y) \in V$, si esto ocurre, entonces decimos que es la distancia entre x e y en V y lo denotaremos de ahora en adelante como |x-y| < V.

Teorema 1.3.3. Para cada uniformidad \mathcal{U} en un conjunto X la familia

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{G \subset X : para \ cada \ x \in G \ existe \ V \in \mathcal{U} \ tal \ que \ B(x, V) \subset G\}$$

es una topología en un conjunto X y el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio T_1 . La topología $\tau_{\mathcal{U}}$ es llamada topología inducida por la uniformidad \mathcal{U} .

Observación 1.3.6. Es válido aclarar que $B(x, V) = \{y / (x, y) \in V\}$.

Demostración. Debemos probar que $\tau_{\mathcal{U}}$ es una topología. Por como esta definida $\tau_{\mathcal{U}}$, se tiene que $\tau_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, además se tiene que para $G \subset X$ entonces $G \in \tau_{\mathcal{U}}$. Ahora consideremos dos conjuntos $G_1, G_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$ y sea $x \in G_1 \cap G_2$, por la definición de $\tau_{\mathcal{U}}$ existen $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, tal que $B(x, V_1) \subset G$ y $B(x, V_2) \subset G$, entonces por definición de uniformidad se tiene que $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$ y

$$B(x,V) = B(x,V_1) \cap B(x,V_2) \subset G_1 \cap G_2,$$

se tiene que $G_1 \cap G_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$. Ahora sean los conjuntos $G_1, G_2, ... \in \tau_{\mathcal{U}}$ y sea $x \in G_i$ con i = 1, 2, ... por la definición de $\tau_{\mathcal{U}}$ existen $V_1, V_2, ... \in \mathcal{U}$, de manera que $B(x, V_1) \subset G_1$, $B(x, V_2) \subset G_2$, ... en general $B(x, V_i) \subset G_i$, para $V_i \in \mathcal{U}$, (es claro que $x \in B(x, V_i)$). Tomemos ahora $V = \bigcup V_i \in \mathcal{U}$ y así:

$$B(x,V) = B(x,V_1) \cup B(x,V_2) \cup B(x,V_3) \cup \cdots$$
$$= \bigcup B(x,V_i)$$
$$\subset \bigcup G_i.$$

Así se tiene que $\bigcup G_i \in \tau_{\mathcal{U}}$ y por tanto $\tau_{\mathcal{U}}$ es una topología.

Para probar que $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio T_1 , debemos probar que para cada $x \in X$ el conjunto $G = X - \{x\}$, es abierto. En efecto, para cualquier $y \in G$ con $x \neq y$, así se tiene que existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que |x - y| < V, como $B(y, V) \subset G$, entonces G es abierto.

Observación 1.3.7. Dado cualquier espacio topológico (X, τ) , podemos darle estructura uniforme \mathcal{U} , tal que toda función continua $f: X \longrightarrow [0,1]$ es una función uniformemente continua. La topología $\tau_{\mathcal{U}}$ no tiene por qué ser la topología τ , si esto ocurriera, todo espacio topológico seria uniformizable, lo cual no es cierto. Lo que si ocurre es que $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$, esto es, τ es más fina (o igual que $\tau_{\mathcal{U}}$).

Una base para las vecindaes de U consiste de intersecciones finitas de conjuntos

$$U_{(f,\epsilon)} = \{(a,b) \in X \times X : |f(a) - f(b)| < \epsilon\}$$

donde $f: X \longrightarrow [0,1]$ es continua y $\epsilon > 0$.

Definición 1.3.4. Un espacio topológico (X, τ) se dice uniformizable si existe una uniformidad \mathcal{U} en X, tal que $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$.

Teorema 1.3.4. Un espacio topológico es uniformizable si y sólo si es Tychonoff.

Demostración. Ver [8], Cap. 8 Pag 434.

Capítulo 2

Axiomas de Separación en Grupos Topológicos

En esta parte estudiaremos el comportamiento de los axiomas de separación cuando G en este caso es un grupo topológico. Antes de proceder daremos la definición formal de un grupo topológico.

Definición 2.0.5 (Grupo Topológico). Sea G un conjunto distinto de vacío. Sea \cdot una operacion binaria y τ una familia de subconjuntos de G; decimos que G es un grupo topológico si:

- 1. El par (G,\cdot) es un grupo y (G,τ) es un espacio topológico.
- 2. Las funciones $g_1: (G,\tau) \times (G,\tau) \longrightarrow (G,\tau)$ y $g_2: (G,\tau) \longrightarrow (G,\tau)$ dadas por $g_1(x,y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$, son continuas, para todo x,y en G y x^{-1} es el inverso de x.

Ejemplo 2.0.5. Cualquier grupo dotado con la topoloógia discreta e indiscreta, es un grupo topológico.

Ejemplo 2.0.6. \mathbb{R} bajo la adición. \mathbb{R}^{\times} y \mathbb{C}^{\times} bajo la multiplicación son grupos topológicos.

Definición 2.0.6. X es un espacio homogéneo si dados $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f: X \longrightarrow X$ tal que f(x) = y.

Proposición 2.0.2. Dado un grupo G y un elemento $a \in G$ definimos las traslaciones r_a y l_a derecha e izquierda respectivamente como

$$r_a(x) = xa \ y \ l_a(x) = ax$$

estas traslaciones son homeomorfismos de G en G.

Demostración. Probemos para las traslaciones por la derecha de a, la traslación izquierda se prueba de manera análoga. Por ser G un grupo topológico entonces r_a es continua. Veamos que r_a sea inyectiva, esto es, supongamos que

$$r_a(x) = r_a(y) \implies xa = ya$$

 $\implies xaa^{-1} = yaa^{-1}$
 $\implies x = y.$

así r_a es inyectiva. Sea ahora $y \in G$, entonces $r_a(ya^{-1}) = yaa^{-1} = y$, así r_a es sobreyectiva. La inversa de r_a es $r_{a^{-1}}$ puesto que

$$r_{a^{-1}}(r_a(x)) = r_{a^{-1}}(xa) = xaa^{-1} = x$$

además $r_{a^{-1}}$ es continua por estar en G, así r_a es un homeomorfismo.

Corolario 2.0.2. Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.

Demostración. Debemos probar que dados dos elementos arbitrarios $x, y \in G$, existe un homeomorfismo de G sobre sí mismo que envía un elemento en otro. Observe que $l_{yx^{-1}}(x) = y$ lo cual por la proposición anterior este es un homeomorfismo.

Sea G un grupo topológico, denotaremos por \mathcal{N}_x a la familia de vecindades de un punto $x \in G$. De la definición de grupos topológico la segunda condición se puede escribir así:

Si x e y son elementos de G, para cada $U \in \mathcal{N}_{xy}$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}_x$ y $W \in \mathcal{N}_y$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, de donde

$$V \cdot W = \{vw : v \in V, w \in W\}.$$

y para cada $U \in \mathcal{N}_x^{-1}$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, de donde $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$. También denotaremos la vecindad del neutro en G como \mathcal{N}_{e_G} .

Definición 2.0.7. Sea V una vecindad, tal que V pertenece a la familia de las bases locales para el neutro e_G en G, si V cumple que $V^{-1} = V$, entonces decimos que V es una vecindad simétrica.

Proposición 2.0.3. Sea G un grupo topológico. Cada vecindad U de e_G contiene una vecindad abierta simétrica V de e_G tal que $VV \subset U$.

Demostración. Sea $f: G \times G \to G$ el producto de G y sea $g: G \to G$ la función definida por $x \to g(x) = x^{-1}$, para cada $x \in G$. Como f es continua y $f(e_G, e_G) = e_G \in U$, existen vecindades U_1, U_2 de e_G , tales que $f(U_1 \times U_2) \subseteq U$, es decir $U_1U_2 \subseteq U$. Ahora como $g(e_G) = e_G^{-1} = e_G$, existe U_3 tal que $g(U_3) \subseteq U$, es decir $U_3^{-1} \subseteq U_2$, tomemos

$$V = (U_1 \cap U_2 \cap U_3) \cap (U_1 \cap U_2 \cap U_3)^{-1}.$$

Note que $V^{-1} = V$ y además

$$VV \subseteq U_1U_3^{-1} \subseteq U_1U_2 \subseteq U$$
.

Si G es un grupo topológico no trivial con la topología indiscreta, tenemos un grupo topológico que no es T_1 o T_0 , pero si un grupo topológico es T_0 , dado que también es T_3 , el grupo es regular y por tanto es un espacio de Hausdorff. Para todo grupo topológico la propiedad de ser T_0 equivale a ser T_1 .

De ahora en adelante, las bases locales que tomaremos seran respecto al elemento neutro e_G en el grupo topológico G. Antes de mostrar las equivalencias entre los axiomas

de separación en grupo topológico, enunciaremos y demostraremos un lema que sera fundamental de ahora en adelante.

Lema 2.0.1. Sea G un grupo topológico:

- 1. Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $V^n \subseteq U$. $(V^n = V \cdot V \cdot V \cdot V \cdot n - factores).$
- 2. Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

Demostración. 1. Sea $U \in \mathcal{N}_{e_G}$. Procederemos por inducción sobre n.

Para n=1, hacemos V=U. Sea $n\in\mathbb{N}^+$ fijo y supongamos que el resultado es válido para n, es decir, existe $W\in\mathcal{N}_{e_G}$ tal que $W^n\subset U$ y queremos encontrar una vecindad V de e_G tal que $V^{n+1}\subset U$. Dado que la multiplicación $g_1(x,y)=xy$ es continua y $g_1(e_G,e_G)=e_G$ existe entonces V_1,V_2 tales que $V_1V_2\subseteq W$. Sea $V=V_1\cap V_2$ entonces $V\in\mathcal{N}_{e_G}$ y $V^2\subseteq W$, de donde

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subset W \cdot W^{n-1} \subset U.$$

Así tenemos que $V^n \subseteq U$.

2. Sea $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $VV = V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $xV \cap V \neq \emptyset$, decimos que existen $v_1, v_2 \in V$ con $xv_1 = v_2$, de donde $x = v_2v^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$, así $\overline{V} \subseteq U$.

En lo que sigue, estudiaremos el comportamiento entre los axiomas de separación cuando G es un grupo topológico.

Teorema 2.0.5. Cada grupo topológico G es regular.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, por la continuidad de la multiplicación y la inversa se tiene que existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $VV \subseteq U$ y $V^{-1} = V$ por el lema (2.0.1) tenemos que $\overline{V} \subseteq V^{-1}V = VV \subseteq U$, así por la homogeneidad, G es regular en e_G .

Teorema 2.0.6. Sea G un grupo topológico. Si G es T_0 , entonces G es T_1 .

Demostración. Supongamos que G es T_0 . Sean $x, y \in G$, sin perdidad de generalidad, existe una vecindad abierta de x que no contiene a y, entonces por el lema anterior (lema 2.0.1) existe $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, tal que $y \notin xU$, esto implica que $x^{-1}y \notin U$, de donde se tiene que:

$$(x^{-1}y)^{-1} \notin U^{-1} \iff y^{-1}x \notin U^{-1} = U$$

es decir

$$yy^{-1}x \notin yU^{-1}$$
,

así $x \notin yU^{-1} = yU \Longrightarrow x \notin yU$, por lo tanto G es T_1 .

Corolario 2.0.3. Todo grupo topológico T_0 es T_3 , en particular es T_2 .

Demostración. Por teorema 2.0.5 cada grupo topológico G es regular. Supongase ahora que además G es T_0 , entonces por 2.0.6 G es T_1 , lo que quiere decir que G cumple con la definición de espacio T_3 , por tanto G es T_3 . Siendo G un espacio T_3 , entonces inmediatamente G es un espacio T_2 o de Hausdorff.

Corolario 2.0.4. Para cada uniformidad \mathcal{U} en un conjunto X, el conjunto X con la topología inducida por \mathcal{U} es un espacio Tychonoff.

Demostración. (ver [8]. pag 431, corolario 8.1.13)

Teorema 2.0.7. Todo grupo topológico T_1 es un espacio uniformizable.

Demostración. Probaremos que el conjunto denotado por:

$$O_V^l = \{(g, h) \in G \times G : g^{-1}h \in V\}$$
 para cada $V \in \mathcal{N}_{e_G}$

es una uniformidad; en efecto, para probar que O_V^l es una uniformidad, debemos probar las propiedades de la definición 1.3.2, esto es: la diagonal \triangle de $G \times G$ esta contenida en V, ya que para $h \in G$ se tiene que $(h,h) \in G \times G$, así que $h^{-1}h \in V = e_G \in V$, por tanto $\triangle \subset V$, ahora para $h, g \in G$ se tiene que $g^{-1}h \in V$, entonces:

$$g^{-1}h \in V \iff (g^{-1}h)^{-1} \in V^{-1}$$
$$\iff h^{-1}q \in V^{-1}$$

así las relaciones $g^{-1}h \in V$ y $h^{-1}g \in V^{-1}$ son equivalentes, por tanto $V^{-1} \in O_V^l$. Ahora sea $k \in G$, se tiene que $g^{-1}k \in V$ y $k^{-1}h \in V$ entonces

$$g^{-1}kk^{-1}h \in V \circ V = g^{-1}h \in V \circ V$$

por lo tanto $V \circ V \subset O_V^l$. Las siguientes dos propiedades (4 y 5) son obvias, por lo tanto podemos decir que O_V^l es una uniformidad.

Definamos la estructura de las uniformidades de un grupo topológico G, como

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\},\$$

ahora para cualquier $x, y \in G$ definamos un contorno de la siguiente forma:

$$B_{\mathcal{U}}(x) = \{y/x^{-1}y \in \mathcal{U}\}.$$

Teorema 2.0.8. Si (G, τ) es un grupo topológico, entonces $\tau_{O_V^l} = \tau$.

Demostración. Sea V un abierto en τ y sea $x \in V$, luego existe $U \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $xU \in V$, note que $xU = B_{\mathcal{U}}(x)$. En efecto $y \in xU$ si y solo si $x^{-1}y \in U$ si solo si $(x,y) \in \mathcal{U}$ si y solo si $y \in B_{\mathcal{U}}(x)$. Así podemos decir que $\tau \subseteq \tau_{O_V^l}$. Recíprocamente, sea V un abierto en $\tau_{O_V^l}$ y $x \in V$, por definición existe V tal que $y \in B_{\mathcal{U}}(x) \subseteq V$, pero como $xU = B_{\mathcal{U}}(x)$ entonces $xU \subseteq V$, y xU es abierto en τ , luego $\tau_{O_V^l} \subseteq \tau$. Así, podemos concluir que $\tau_{O_V^l} = \tau$.

Teorema 2.0.9. Sea G un grupo topológico, el cual es T_1 entonces G es un espacio de Tychonoff o completamente regular.

Demostración. Ya vimos que todo espacio topológico es uniformizable si y solo si es un espacio Tychonoff y además que todo grupo topológico T_1 es un espacio uniformizable entonces de estas implicaciones podemos concluir que todo grupo topológico T_1 es un espacio de Tychonoff.

Ya vimos que en un grupo topológico se tiene que:

$$T_0 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_3.$$

Corolario 2.0.5. Todo grupo topológico T_0 (y por ende T_1) es uniformizable. En particular todo grupo topológico T_0 es Tychonoff, es decir en un grupo topológico se tiene que:

$$T_0 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow Tychonoff.$$

Demostración. La prueba es consecuencia del teorema 2.0.7 y 2.0.8 y corolario 2.0.3.

Capítulo 3

Axiomas de Separación en Grupos Paratopológicos

Ya es bien conocido que en cada grupo topológico ser T_0 implica tambien ser completamente regular. La situación en los grupos paratopológicos es distinta, son diversos los ejemplos que muestran que si invertimos las implicaciones (*) no se cumplen en espacios topológicos generales. Aunque en grupos topológicos la influencia de los axiomas de separación es muy fuerte, por el contrario en grupos paratopológicos, estas implicaciones no se comportan de la misma manera. En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los axiomas de separación en grupos paratopológico.

Definición 3.0.8 (Grupo paratopológico). Sea G un conjunto distinto de vacío. Sea · una operacion binaria y τ una familia de subconjuntos de G; decimos que G es un grupo paratopológico si

- 1 El par (G,\cdot) es un grupo y (G,τ) es un espacio topológico.
- 2. la función $g_1:(G,\tau)\times(G,\tau)\longrightarrow(G,\tau)$ dada por $g_1(x,y)=x\cdot y$ es continua.

A continuación, presentamos ejemplos donde no se cumplen las implicaciones (*) invertidas para grupos paratopológicos independientemente de su estructura algebraica.

Ejemplo 3.0.7. En un grupo paratopológico ser T_0 no implica ser T_1 . Para la demostración de este hecho probaremos que $G = (\mathbb{R}, +, \tau)$, donde τ es la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{x + [0, +\infty)/x \in \mathbb{R}\}$ es un grupo paratopológico T_0 que no es T_1 . Sabemos que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo. Demostremos que \mathcal{B} es una base para una topología sobre \mathbb{R} . Es claro que $x + [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $x \in x + [0, +\infty)$ así $x \in \bigcup_{y \in \mathbb{R}} y + [0, \infty)$, de donde se tiene que $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} y + [0, \infty)$. Ahora sean $U = [a, +\infty), V = [b, +\infty) \in \mathcal{B}$, tal que $x \in U \cap V$. Entonces, $x \in [0, +\infty) \in \mathcal{B}$ y $x \in x + [0, +\infty) \subset U \cap V$, lo que prueba que \mathcal{B} es una base para una topología. Ahora debemos probar la continuidad de la operación, en efecto sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por f(x,y) = x + y, veamos que f sea continua. En efecto sea $[a, +\infty) \in \mathcal{B}$ y sea

$$A = f^{-1}([a, +\infty)) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/x + y \in [a, +\infty)\}$$

veamos que A sea abierto en la topología producto. En efecto sea $(u,v) \in A$, entonces $u+v \in [a,+\infty)$, ahora $U=[u,+\infty)\times [v,+\infty)$ es un abierto en la topología producto y además $(u,v) \in U \subset A$, así A es abierto, por tanto f es continua g es un grupo paratopológico.

Veamos ahora que G sea T_0 , en efecto consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ y supongamos que x < y (sin perdida de generalidad) y tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}|x - y|$, luego $(x + \epsilon) \in [0, +\infty)$ tal que $((x + \epsilon) + [0, +\infty)) \cap \{x, y\} = \{y\}$, así G es T_0 .

Ahora supongamos que G es T_1 en efecto si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x\}$ es cerrado, lo que implica $\mathbb{R} - \{x\}$ es abierto, sea $y \in \mathbb{R} - \{x\}$, con y < x los únicos abierto que contienen a y son de la forma $z + [0, +\infty)$ donde $z \leq y$ pero $z + [0, +\infty) \not\subset \mathbb{R} - \{x\}$ ya que $x \in z + [0, +\infty)$, pero $x \notin \mathbb{R} - \{x\}$, así $\{x\}$ no es cerrado y en consecuencia G no es T_1 .

Ejemplo 3.0.8. Sea \mathbb{Z} el grupo aditivo de números enteros, con la topología τ_1 en \mathbb{Z} tiene como subbase los conjuntos de la forma

$$\tau_1 = \{k\} \cup \{[n, +\infty) : k, n \in \mathbb{Z}, n > k\}$$

 (\mathbb{Z}, τ_1) es un grupo paratopológico T_1 , en donde cualesquiera dos conjuntos abiertos tienen intersección no vacía por lo que (\mathbb{Z}, T_1) no es T_2 , entonces $T_1 \not\Longrightarrow T_2$ en grupos paratopológicos.

Ejemplo 3.0.9. Sea \mathbb{R}^2 el plano aditivo y sea τ_2 la topología del grupo paratopológico \mathbb{R}^2 , cuya base local es el elemento (0,0) consiste de los conjuntos

$$V_n = \{(0,0)\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2} \right\}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Entonces el grupo paratopológico (\mathbb{R}, τ_2) es de Hausdorff, pero no es regular ya que el conjunto $(0, 1/n) \times \{0\}$ esta contenido en \overline{V}_n y no en V_1 para todo $n \in \mathbb{N}$ así que $T_2 \not \Longrightarrow T_3$ en grupos paratopológicos.

Teorema 3.0.10. Sea G un grupo paratopológico y V una base local del neutro e en G. Entonces:

- 1. Para $U, V \in \mathcal{V}$, existe $W \in \mathcal{V}$, tal que $W \subset U \cap V$.
- 2. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $Vx \subset U$.
- 3. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.
- 4. Para cada $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$.

Recíprocamente, sea G un grupo y sea \mathcal{V} la familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones 1) - 4). Entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{V}\}$ es una base para la topología $\tau_{\mathcal{V}}$ en G tal que $(G, \tau_{\mathcal{V}})$ es un grupo paratopológico. Además, la familia $\{aU : a \in G, U \in \mathcal{V}\}$ es una base para la misma topología $\tau_{\mathcal{V}}$.

Demostración. (\Longrightarrow) Supongamos que G es un grupo paratopológico. El inciso 1 es válido porque \mathcal{V} es una base local del neutro e de G. Como las funciones descritas en la definición 2.0.4 ($g_1(x,y)$ y $g_2(x)$) son continuas entonces los incisos 2 y 3 son válidos. Dado que la multiplicación es continua en G, entonces se satisface 4.

(\Leftarrow) Recíprocamente, sea \mathcal{V} una familia de subconjuntos de G que satisfacen las condiciones 1-4. Sea τ la familia de conjuntos $W \subset G$ que satisfacen la siguiente condición:

Para cada
$$x \in W$$
, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $Ux \subset W$.

Veamos que τ sea una topología, en efeto, es claro que $\emptyset \in \tau$ y $G \in \tau$, por tanto $\tau \neq \emptyset$. La unión arbitraria de elementos de τ están en τ . Sean $W_1, W_2 \in \tau$, tomemos $W = W_1 \cap W_2$, veamos que $W \in \tau$. En efecto tomemos $x \in W$, entonces existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $U_1x \subset W_1$ y $U_2x \subset W$, por el inciso 1, se tiene que existe $U \subset \mathcal{V}$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$, lo que quiere decir que $Ux \subset U_1x \cap U_2x$ lo que implica que $Ux \subset W_1 \cap W_2 = W$, por tanto se tiene que $W \in \tau$ y así τ es una topología. Por otra parte afirmamos lo siguiente: Para cada $Ux \in \tau$, $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{V}$, en efecto si $y \in Ux$, es equivalente a decir que $yx^{-1} \in U$, por el inciso 2, existe $V \in \mathcal{V}$ lo que satisface $Vyx^{-1} \subset U$, así $Vy \subset Ux$ por tanto $Ux \in \tau$. Esta afirmación junto con el inciso 2 implican que la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{Ua : a \in G; U \in \mathcal{V}\}$ es una base para la topología τ , en consecuencia $\tau = \tau_{\mathcal{V}}$. Falta probar que $\{aU : a \in G; U \in \mathcal{V}\}$ también es una base para $\tau_{\mathcal{V}}$. Para probar este hecho tengamos en cuenta lo siguiente:

$$bV \in \tau$$
, para cada $b \in G$ y cada $V \in \mathcal{V}$

para verificar este hecho tomemos $y \in bV$, esto es $b^{-1}y \in V$. Por el inciso 2, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $Wb^{-1}y \subset V$, aplicando la parte 3 tenemos que hay un elemento $U \in \mathcal{V}$ el cual satisface $b^{-1}Ub \subset W$, así $b^{-1}Uy = (b^{-1}Ub)b^{-1}y \subset Wb^{-1}y \subset V$, esto es, $b^{-1}Uy \subset V$ por lo tanto, $Uy \subset bV$. Ahora de la afirmación anterior y del inciso 3, se concluye que la familia $\{aU : a \in G; U \in \mathcal{V}\}$ también es una base para la topología τ .

Para mostrar las equivalencias entre los axiomas de separación cuando G es un grupo paratopológico, es necesario introducir un concepto el cual nos ayudará en gran parte a las pruebas.

Definición 3.0.9. Un subconjunto abierto U de un espacio topológico X es llamado abierto regular si y solo si $U = Int\overline{U}$.

Teorema 3.0.11. En un espacio topológico X, los abiertos regulares constituyen una base para los grupos paratopológicos.

Demostración. Ver [12] pag. 11-12

Definición 3.0.10. Dado un espacio $(X, \tau,)$ denotamos por τ' la topología en X, cuya base consiste de subconjuntos abiertos regulares de (X, τ) . El espacio $(X, \tau',)$ se dice que es la semiregularización de (X, τ) y se denota por X_{sr} . Por otra parte se tiene que $\tau' \subset \tau$ y (X, τ) y (X, τ') tienen los mismos subconjuntos abiertos regulares.

Observación 3.0.8. Utilizaremos el hecho de la semiregularización cuando sea necesario. Denotaremos G_{sr} , un grupo semiregular es decir $G \in (X, \tau')$.

Teorema 3.0.12. Si (G, τ) es un grupo paratopológico Hausdorff, entonces G_{sr} es un grupo paratopológico regular.

Demostración. Consideremos una base \mathcal{B} del neutro e en G.

Sea la familia $\mathcal{B}_{sr} = \{Int\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local del neutro e en G_{sr} . Debemos ver que G_{sr} es un grupo paratopológico, es suficiente probar que \mathcal{B}_{sr} satisface las condiciones 1-4 del teorema 3.0.10.

En efecto para $U, V \in \mathcal{B}$, se tiene que U, V son abiertos regulares, es claro que la intersección de abiertos regulares es de nuevo un abierto regular, esto implica que a su vez existe $W \subset U \cap V$, de donde $W \in \mathcal{B}$, así \mathcal{B}_{sr} cumple con la primera condición del teorema 3.0.10.

Sea ahora $U \in \mathcal{B}$ y $x \in Int\overline{U}$. Como $Int\overline{U}$ es abierto en G, entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $Vx \subset Int\overline{U}$, lo que quiere decir que:

$$(Int\overline{V})x = Int\overline{Vx} \subset Int(\overline{Int\overline{U}}) = Int\overline{U}$$

la útima parte se debe del hecho que Int(Int(A)) = IntA para cualquier A que sea abierto regular.

Dado que las traslaciones derechas e izquierdas son homeomorfismo de G en G, (proposición 2.0.3) entonces la parte 3 del teorema 3.0.10 se satisface. Sea $U \in \mathcal{B}$, dado que G es un grupo paratopológico entonces $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subset U$. Dado que la multiplicación es continua en G (definición 3.0.7) entonces si $V^2 \subset U$ implica que $\overline{V^2} \subset \overline{U}$. Como $Int\overline{V}$ es abierto en G, entonces

$$(Int\overline{V})^2 \subset Int(\overline{V^2}) \subset Int\overline{U},$$

por tanto se tiene que $Int(\overline{V^2}) \subset Int\overline{U}$.

Así podemos concluir que G_{sr} es también un grupo paratopológico, como G es de Hausdorff, el espacio G_{sr} es también de Hausdorff.

Sabemos que la familia \mathcal{B}_{sr} consiste de abiertos regulares en G, por lo tanto la familia \mathcal{B}_{sr} esta formada de abiertos regulares en G_{sr} . Sea $O \in \mathcal{B}_{sr}$, $Int_{G_{sr}}\overline{O}^{G_{sr}} = O$ se satisface porque O es un conjunto abierto regular en O_{sr} . Como G_{sr} es un grupo paratopológico, existe $W \in \mathcal{B}_{sr}$ tal que $W_2 \subset O$. En consecuencia:

$$W\overline{W}^{G_{sr}} \subset \overline{W}^{G_{sr}}\overline{W}^{G_{sr}} \subset \overline{O}^{G_{sr}}$$

así $\overline{W}^{G_{sr}}\subset Int_{G_{sr}}\overline{O}^{G_{sr}}=O.$ Así G_{sr} es un grupo paratopológico regular. $\hfill\Box$

Teorema 3.0.13. Cada grupo paratopológico CB es T_3 .

Demostración. Sea \mathcal{B} una base que contiene al neutro en G, tal que \mathcal{B} consiste de todos los conjuntos canónicos abiertos. Para cada vecindad $U \in \mathcal{B}$ existe una vecindad $V \in \mathcal{B}$ tal que $VV = V^2 \subset U$. Entonces $V\overline{V} \subset \overline{U}$, así $\overline{V} \subset Int\overline{U} = U$, por lo tanto $\overline{V} \subset U$. \square

Teorema 3.0.14. Cada grupo paratopológico π – semiregular es quasiregular

Demostración. Sea \mathcal{B} una base del elemento neutro de un grupo paratopológico G. Para cada vecindad $U \in \mathcal{B}$ existe un punto $x \in U$ y una vecindad $V \in \mathcal{B}$ tal que $xInt\overline{V} \subset U$. Así si escogemos $W \in \mathcal{B}$ tal que $WW = W^2 \subset V$, entonces se tiene que $x\overline{W} \subset x\overline{W} \subset T$ y así G es quasiregular.

Teorema 3.0.15. Todo grupo paratopológico Hausdorff es un espacio de Urysohn.

Demostración. Por teorema 3.0.11 la semiregularización G_{sr} de un grupo paratopológico Hausdorff G es regular entonces para dos puntos distintos existen abiertos disyuntos en G_{sr} , como G_{sr} es regular entonces existen vecindades de dicho puntos cuyas cerraduras son disyuntas en G_{sr} y a su vez son disyuntas en G. Por lo tanto G es de Urysohn. \Box

CONCLUSIÓN

El anterior trabajo estuvo desarrollado en el área de topolgía general y álgebra topológica. Nuestro interés principal fueron los grupos paratopológicos. El variado comportamiento de los grupos paratopológico en relación a los axiomas de separación hace necesario una profunda revisión de aquellas propiedades que poseen los grupos topológicos bajo la carencia de una inversa continua. La falta de simetría de los grupos paratopológicos hace complicado el estudio de las propiedades de separación.

Para poder desarrollar y continuar exitosamente este trabajo nos basamos en ciertas propiedades tales como las uniformidades y la semiregularización, las cuales nos facilitaron algunos resultados debido a la gran inlfuencia que tienen en los axiomas de separación y los grupos topológicos y paratopológicos.

REFERENCIAS

- C. HERNANDEZ, M. TKACENKO, L. VILLEGAS, O.RENDÃN,
 (2006) Grupos Topologicos. Universidad Autónoma Metropolitana, Departamento de Matemáticas.
- [2] M. TKACHENKO, "Para-topological and semi-topological groups vs topological groups". Departamento de Matemáticas, (2005) Universidad Autónoma Metropolitana, Col. Vicentina, Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F.
- [3] O. RAVSKY. Paratopological groups, I, Matematychini Studii, 16 (2002) pp 37-48
- [4] O. RAVSKY. *Paratopological groups*, *II*, Matematychini Studii, 17 (2002) pp 93-101
- [5] O. RAVSKY (2002). Topological and algebraic properties of paratopological groups, Ph.D. thesis (Lviv University, Lviv; in Ukrainian)
- [6] T. HUSAIN, (1966). *Introduction to topological groups* (W. B. Saunders Comp., Philadelphia-London).
- [7] A. V. ARHANGEL'SKII, E. A. REZNICHENKO, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, (2005) Topol. Appl. 151, pp. 107-119.
- [8] R. ENGELKING, General Topology (PWN, Warszawa), (1976.)

REFERENCIAS

- [9] C. Liu A note on paratopological groups, Comment. Math. Univ. Car- olin. 47 no. 4 (2006), 633-640.
- [10] L.-H. XIE, S. LIN . A note on the continuity of the inverse in paratopological groups, (2012) preprint.
- [11] WEIL, A. Sur les Espaces a Structure Uniforme et sur la Topolo- gie Generale, Publ. (1937) Math. Univ. Strasbourg (Hermann, Paris). .
- [12] Juan A, Martinez C. Generalizaciones de compacidad en la topología general y en el álgebra topológica, Publ. (2014) Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa Departamento de Matemáticas. (México, D.F.).