Universidad de Cartagena

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

METAFORAS EN MATEMÁTICAS: ECUACIONES DIFERENCIALES

Trabajo de grado presentado por:
Luis Francisco Sierra Ibañez
para obtener el título de
Matemático

Asesor:
P.h.d. Alfonso Segundo Gómez Mulett

Diciembre de 2016

Cartagena de Indias D. T. y C.

Índice general

Introducción **4**

1. La Metáfora **6**

1.1. Platón y la guerra con el poeta 6

1.2. Aristóteles y la metáfora como problema del filósofo 7

1.3. Teoría Aristotélica 8

1.4. Análisis de la definición Aristotélica 9

1.5. Taxonomía Aristotélica de la Metáfora 9

1.6. Las nuevas ideas sobre la metáfora 11

2. Metáforas en matemáticas **13**

2.1. Concepto de metáfora en las ciencias 13

2.2. Concepto de Metáfora en las matemáticas 15

2.3. La perspectiva de Lakkof y Núñez acerca de las matemáticas 18

2.4. Algunos ejemplos de metáforas en las matemáticas 19

2.4.1. La metáfora básica del infinito 19

2.4.2. Continuidad de una función 20

2.4.3. Representación gráfica de las funciones en el bachillerato 22

2.4.4. Gráfica de funciones 22

3. Metáforas en Ecuaciones Diferenciales **25**

3.1. Espacio Vectorial 25

3.2. Ecuaciones Lineales Homogéneas con coeficientes constantes de orden n . . 27

3.3. La metáfora incluida en la solución de la Ecuación Diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n 33

Conclusiones **35**

Introducción

La metáfora es la reina de las figuras retóricas, así es considerada por algunos autores para los cuales es la invención más hermosa y misteriosa del ser humano, ya que ella traslada un concepto a otro mediante un deslizamiento lingüístico. En la didáctica las metáforas son útiles para introducir o estructurar un conocimiento nuevo, integrar varios elementos de los contenidos de la enseñanza y conectar la teoría con la práctica dando un colorido al lenguaje de la ciencia, posibilitando su comprensión tanto en el ambiente de especialistas como en el proceso del conocimiento del público en general.

El proposito de este trabajo es plantear la cuestión de la invención o el descubrimiento de la metáfora en las matemáticas, pero más preciso en las Ecuaciones diferenciales homogéneas de orden n. Para entender la metáfora en el tema mencionado se plantea la siguiente cuestión: ¿Qué metáforas están presentes en la conceptualización de las Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden n?

Para contestar a esta pregunta, se planteó como objetivo estudiar la estructuración metafórica de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n, utilizando las ideas desde Pitágoras hasta el siglo XXI, con el fin de posibilitar su comprensión en un contexto nuevo, abordando el estudio de la metáfora sobre las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n y caracterizando metafóricamente el dominio de partida y el dominio de llegada de una ecuación diferencial lineal homogénea de n orden .

En este trabajo se hizo una revisión detallada de temas involucrados en el asunto a tratar, haciendo énfasis en el estudio de la metáfora en el lenguaje y la matemática; para ello, se utilizaron los textos especializados, apuntes y artículos con el propósito de afianzar el desarrollo teórico del trabajo.

El trabajo se dividió en tres secciones; en la primera sección se estudia en detalle el papel de la metáfora en el lenguaje, en la segunda se analizó o se estudió la incidencia de la metáfora en las ciencias, y particularmente en la matemática, en la última parte se expone el papel de la metáfora en las ecuaciones diferenciales lineales de orden n a través del álgebra lineal.

Capítulo 1

La Metáfora

La metáfora es una forma de pensamiento que atraviesa toda la historia de la filosofía, desde Platón hasta nuestros días. La historia de la metáfora ha sido una historia llena de una pasión atormentada y ambivalente, pero constante. Hablar acerca de la metáfora es, en cierto modo, narrar la historia de una maldición. Es tratar de enlazar una narración acerca de un estigma, un demonio persistente dentro de la escena filosófica occidental que la mayor parte de las veces, funcionó como obstáculo para cualquier teoría interesada en suscribir una racionalidad pura.

Desde una primera mirada se verá que las metáforas se presentaron como recursos poéticos, armas del poeta, del escritor, del dramaturgo, en pocas palabras, herramientas que pertenecen a los artistas. En términos muy generales las reflexiones de los retóricos y filósofos del lenguaje, trazan la existencia de dos tipos de lenguaje: el literal y el figurativo. La metáfora junto con la metonimia, la sinécdoque y otros tropos, formarían parte del último tipo de lenguaje, es decir el figurativo.

Para hablar acerca de la historia de la metáfora necesariamente tendríamos que dialogar acerca de una tradición filosófica y retórica de aproximadamente veinticinco siglos, de manera que resulta necesario desarrollar una breve revisión histórica de la forma en que filósofos y retóricos consideraron el problema de lo figurativo y en particular, *la metáfora*.

1.1. Platón y la guerra con el poeta

En la antigüedad clásica, el pensamiento en torno a la metáfora se inicia en los márgenes de la filosofía, para después ser recluida fuera de ella, al ser convertida en objeto de indagación retórica. La metáfora fue al menos hasta Aristóteles un tema estrictamente filosófico, en cuanto los pensadores griegos no lograron una discusión de ella como un problema aislado y claramente diferenciable. Hay que saber también que Platón fue al mismo tiempo uno de los más brutales opositores del lenguaje figurativo, en el cual estaba contenida la metáfora.

Platón sostenía que las palabras del poeta no conducían a la verdad y en tal sentido no eran si no superficiales o vanas, fue tanto el alcance de Platón que estableció una tensión entre la metáfora y la verdad que condeno al ostracismo a todo lenguaje figurativo. Al mismo tiempo Platón fomenta un movimiento para el destierro de la poesía en nombre de la razón y también de la moral, no estando conforme con eso logra la expulsión del poeta para esa época, y por consiguiente la deportación de la metáfora, la cual no daba para Platón ninguna verdad y solamente consigue promover emociones; además, Platón en *La República* no realiza mención alguna o no parece guardar un espacio para la poesía. Los motivos son claros y se mencionan en las siguientes líneas:

El poeta imitativo implanta privadamente un régimen perverso en el alma de cada uno, condescendiendo con el elemento irracional que hay en ella, elemento que no distingue lo grande de lo pequeño, sino que considera las mismas cosas unas veces como grandes, otras como pequeñas, creando apariencias enteramente apartadas de la verdad [1]. Un acto seguido de Platón fue que después del destierro de la poesía, traslada la metáfora junto con otros instrumentos poéticos a la periferia de la práctica filosófica.

1.2. Aristóteles y la metáfora como problema del filósofo

Despues de Platón,aparece un hombre que ayuda a la metáfora y le da un aire para los problemas que afrontaba ella en esa época donde Platón trataba de difamar y desterrar a todo aquel que fuera poético o estuviera a favor del lenguaje figurativo, hablamos de Aristóteles quien traería una nueva riqueza conceptual al problema de la metáfora en esa época. En su *Poética*, además de delimitar el concepto de metáfora (como transferencia del nombre de una cosa a otra) y sus diversas clases, no desdeña la práctica poética, por el contrario, la valora positivamente, en la medida en que le atribuye una función de purificación y expurgación de los excesos de las pasiones. Pero la novedad crucial aquí es que con Aristóteles se origina de manera explícita, en el campo de la reflexión sobre el lenguaje, la oposición entre lo propio y lo transpuesto (en esta última clase se encuentran los sentidos indirectos o tropos).

Los continuadores más inmediatos de Aristóteles (Cicerón, Quintiliano, Dionisio de Halicarnaso) no se alejaron de los términos planteados por el Estagirita. A partir de ellos, la noción de figura del lenguaje comenzará a desempeñar un papel cada vez más importante. En términos generales, para la tradición retórica que va desde Quintiliano a Fontanier, la figura es algo subordinado, superpuesto, ornamental; es un desvío respecto de la norma. Gradualmente, la valoración positiva que Aristóteles había hecho sobre la metáfora se va disolviendo para acercarse a una posición más proclive al platonismo, es decir, a la desestimación de las relaciones entre metáfora y conocimiento. La metáfora, se suponía platónicamente, no jugaba un papel importante en la actividad cognoscitiva humana. En la medida en que las figuras eran reemplazables por enunciados literales sin pérdida de significado, se consideraba que su presencia no era imprescindible. Esta concepción alcanza, inclusive, a la retórica del siglo XVIII, la retórica agonizante, la cual se funda en la creencia en un cierto "fondo de pensamiento"que puede ser expresado tanto de manera directa (literal) como de manera indirecta (por medio de una figura).

Aristóteles sostenía que la metáfora tiene que permitir penetrar en la estructura de lo desconocido haciéndolo familiar pero que también debe presentar una gran capacidad para establecer relaciones imprevistas o novedosas y por ello mismo la metáfora demuestra calidad poética.

1.3. Teoría Aristotélica

Aristóteles como primer defensor de la metáfora expone una teoría que ayuda a solucionar algunos de los problemas que en ese tiempo la metáfora había causado en el campo filosófico. Aristóteles parecía pensar que una expresión metafórica operaba una forma de traslado o desplazamiento y que ese cambio era un cambio lingüístico, un cambio de denominación.

La definición general que Aristóteles proporciona en la *Poética* es: "la metáfora consiste en aplicar a una cosa una palabra que es propia de otra" [2].Esta definición y en general, toda la teoría aristotélica sobre la metáfora ha de entenderse propiamente en el contexto más amplio de las teorías clásicas sobre el origen y la naturaleza del lenguaje.

El problema esencial pre-aristotélico era si el lenguaje constituía un instrumento fiable para el conocimiento de la realidad, esto es, si el análisis lingüístico podía llevar al descubrimiento de la estructura íntima de lo existente. Ante este problema se esbozaron dos posiciones esenciales: los teóricos naturalistas pensaron que el lenguaje constituye una vía directa de acceso a la realidad porque entre uno y otra se da una relación por naturaleza.

La concepción aristotélica de la metáfora se apoya en dos supuestos, que es preciso aclarar, en primer lugar, conviene señalar que la misma definición hace apelación a una metáfora que se utiliza como medio para acceder a la comprensión del fenómeno. En segundo lugar, la caracterización aristotélica sugiere que, en ese traslado de denominación se efectúa una cierta desviación. Existen por una parte las denominaciones propias de los elementos que componen la realidad y por otra las denominaciones impropias que no corresponden a la realidad. No quiere esto decir que Aristóteles creyera que existen denominaciones naturales de las cosas y que las expresiones metafóricas violentaran la correspondencia directa entre el lenguaje y la realidad, antes bien esa concepción cuadraría a Platón o a los partidarios de las teorías naturalistas.

1.4. Análisis de la definición Aristotélica

La definición aristotélica se basa en la propuesta de diversos aportes de suma importancia para el desarrollo de las teorías posteriores sobre la metáfora; en primer lugar, la tesis que se refiere al soporte lingüístico propio del fenómeno: la metáfora es propia de la denominación. Hablar metafóricamente consiste en denominar realidades por nombres de otras realidades, al situar Aristóteles la metáfora en este nivel, determinó el sesgo de las posteriores investigaciones, casi hasta el siglo XIX, por que más adelante los científicos e investigadores se centraron en la elaboración de taxonomías del significado figurado más preocupados por la denominación que por la predicación o por otras posibles unidades de significación, como la oración o el texto.

En segundo lugar, la metáfora se define como una especie de desplazamiento o desviación *(epiphora)*; además, con el término *metaphora*, Aristóteles pretende cubrir cualquier clase de desplazamiento en la significación, esto es, su propósito primario no es tanto distinguir entre las diferentes clases de desviaciones del significado sino destacar el hecho del desplazamiento mismo de su significado.

1.5. Taxonomía Aristotélica de la Metáfora

Aristóteles identifica al menos cuatro modalidades del desplazamiento metafórico. La cita pertinente para este se encuentra en la Poética: "la metáfora consiste en dar a una cosa un nombre que también pertenece a otra; la transferencia puede ser de género a especie, o de una especie a género, o de especie a especie, o con fundamento en una analogía" [3]. Más adelante Aristóteles empleo de forma genérica el término metáfora, empleo recuperado en la moderna filosofía del lenguaje, que incluye fenómenos que más adelante fueron nominados como sinécdoque y metonimia.

La metáfora utiliza una peculiar modalidad la cual se define como la *catacresis*, esta peculiar modalidad se basa en que la metáfora provee un calificativo donde, si existe un hueco léxico entonces existe la ausencia de una palabra para nombrar una realidad. Lo característico de la metáfora es la naturaleza de las similaridades que pone de relieve, que permite diferenciarla de la figura del símil. Como la teoría aristotélica ha sido generalmente considerada una teoría reduccionista, este es un aspecto de la tesis aristotélica que resulta de gran interés. Sus puntos de vista se pueden reconstruir del siguiente modo,que explica por qué, aun reconociendo la proximidad conceptual entre el símil y la metáfora, Aristóteles no acabó de identificarlas entre sí:

1. El símil consiste en la afirmación explícita de una similaridad entre dos objetos o hechos, pero sin cualidad novedosa alguna (esto es, sin cualidad poética). Es adecuado pues en los casos en que la afirmación de tal similaridad es plausible, por la cercanía conceptual de los objetos (términos) que se emplean.

2. En cambio, la metáfora consiste en la expresión de una similaridad impensada, sorprendente, novedosa. Por ello tiene una cualidad poética (si se añade la propiedad o buen gusto). No requiere la formulación categórica de esa similaridad tanto por razones retóricas (pérdida de efectividad expresiva, de virtualidad suasoria) como por razones lógicas: Aristóteles considera las metáforas como apropiadas, correctas, ingeniosas, motivadas, etc., pero se resiste a calificarlas de verdaderas, quizás porque era consciente del núcleo paradójico de los fenómenos metafóricos, expresar percepciones con contenido cognitivo a través de manifiestas falsedades.

Por otra parte, Aristóteles menciona que la base de la consideración positiva de la metáfora era doble; por una parte el dominio de la metáfora "es lo único que no se puede aprender de los demás, y es también la impronta del genio" [4]. Porque esta no se basa en mecanismos que se pueden aplicar de forma regular y precisa en ese sentido, la metáfora no es "lógica", sino que implica el ejercicio de la imaginación y de la sensibilidad. Por otro lado, "una buena metáfora encierra una percepción intuitiva de las semejanzas en las cosas que no son similares" [4]).

De acuerdo con lo anterior puede decirse que Aristóteles no solo fue el primer teórico del lenguaje en aventurar una definición de lo que es la metáfora, sino también el primer filósofo en reconocer su importancia en la constitución y extensión del conocimiento. La historia de la metáfora fue depresiva aunque en la actualidad también lo sigue siendo.

1.6. Las nuevas ideas sobre la metáfora

Hasta ahora se ha hablado acerca de los aportes y los conceptos que Aristóteles expuso y defendió acerca de la metáfora; pero, ¿Quiénes en la modernidad han expuesto más teorías o han defendido la metáfora? En el siglo XX Max Black [5] intenta desarrollar una gramática lógica de las metáforas, distinguiendo la metáfora de la sustitución; enfatiza que la naturaleza interactiva de las metáforas basadas en las operaciones que no se pueden reducir a una sustitución o una comparación. Las metáforas actúan como filtros de la mente y muchas veces no se basan en la observación de similitudes entre los conceptos sino las construyen. Para Black el pensamiento metafórico es una manera de desarrollar un conocimiento intuitivo por que las metáforas tienen el poder de juntar dominios separados y, así, resulta una extensión de los significados.

George Lakoff [6], afirma que los conceptos metafóricos se comprenden y se estructuran no solo en sus propios términos, sino en términos de otros conceptos, para ello se distinguen tres tipos de metáforas:

- Las metáforas orientacionales.
- Las metáforas ontológicas.
- Las metáforas estructurales.

Las metáforas orientales se usan expresiones como subir, alto, arriba, para estructurar los conceptos, las metáforas ontológicas proyectan la sustancia del concepto sobre otras que inherentemente no lo tienen, por ejemplo, la mente es un recipiente y las metáforas estructurales organizan un tipo de experiencia en términos de otra, por ejemplo entender es ver.

Lakoff y Johnson [7], y [8] consideran la metáfora como una proyección entre dos dominios semánticos distintos, que permite comprender lo abstracto a partir de lo concreto. Estos dos pensadores escribieron un libro llamado *Metaphors We Live By de 1980*, del que presentaron ese mismo año un amplio resumen en *TheJournal of Philosophy*, traducido al español y publicado en 1986 como Metáforas de la vida cotidiana, pero lo más atractivo de esta obra son quizá sus ejemplos, capaces de persuadir al lector de que hasta ahora no había prestado suficiente atención a las metáforas que impregnan por completo su vida cotidiana.

Lakoff [9], contrasta la figura lingüística “X es Y” con lo que llama las metáforas operacionales y las metáforas estructurales. Las metáforas operacionales actúan en la mente del alumno para producir aprendizaje, en tanto que las metáforas estructurales se pueden definir como "mapeos".

Kuhn [10], indica que las metáforas se usan con el propósito de mejorar la comunicación; la meta puede ser la explicación de un concepto abstracto desconocido.

Capítulo 2

Metáforas en matemáticas

En el primer capítulo se explicó el significado de la metáfora y su historia, en este segundo capítulo se fija el curso a seguir, haciendo unas escalas necesarias para comprender el enlace de la metáfora en la matemática. Se empieza zarpando con un concepto básico de ciencia y desde ahí se navega hacia un norte, el cual es la metáfora en las matemáticas, para ello, se considera que las ciencias son un conjunto de conocimientos adquiridos por la humanidad, que ha ayudado a su progreso y desarrollo como ser pensante, pero la mayoría de las ciencias hablan o se comunican en un mismo idioma, el lenguaje del universo: Las Matemáticas.

2.1. Concepto de metáfora en las ciencias

Las ciencias tienen varias clasificaciones según Rudolf Carnap [11], las divide en formales, naturales y sociales. Las primeras estudian las formas válidas de inferencia; las segundas tienen por objeto el estudio de la naturaleza y las terceras son todas las disciplinas que se ocupan de los aspectos del ser humano. En las primeras están la lógica y la matemática; en las naturales se encuentran la astronomía, la biología, la física, la geología, la química, entre otras. En las ciencias sociales están la filosofía, la administración, la antropología, la política, la demografía, la economía, el derecho, la historia, la psicología, la sociología, entre otras.

Entre las clasificaciones de las ciencias se encuentra una intersección de las otras dos clasificaciones de ciencia según Carnap [11] , y esa es la ciencia formal en la cual como se mencionó anteriormente está presente la lógica y la matemática, luego se puede usar la relación matemática-ciencias como recurso didáctico en cualquier nivel educativo para su aprendizaje. Habiéndose relacionado la matemática en la ciencia y destacando a la matemática como la ciencia del lenguaje universal, se profundizará un poco acerca de ese lenguaje científico.

A través de las lecturas relacionadas con el tema puede decirse que a simple vista para los investigadores la metáfora parece algo absurdo, pero pocos saben que desde Aristóteles hasta la actualidad se ha escrito bastante acerca de la relación de la metáfora con la ciencia. Hablando de la metáfora en la ciencia como un enlace que nos lleva a ver lo imaginable y amplio del universo, pero marcando nuestra tesis que la metáfora es una estructura con propiedades, se visualiza la metáfora más allá de una herramienta lingüística; ahora si se capitaliza la metáfora en una base científica, y descomponiendo la metáfora como la estructura que deseamos mostrar, la metáfora se constituye en un concepto importante.

Max Black [5], afirma que no se puede esperar que las "reglas del lenguaje" nos sean de mucha utilidad en la averiguación y desarrollo de la metáfora, luego, la metáfora pertenece más a la pragmática que a la semántica, la metáfora debe distinguirse hasta en el tono de voz y quien la exprese sin perder su esencia con el fin de caracterizarse y ser persuadida. Asimismo es claro que el vocabulario de la ciencia es una laguna, y cuya laguna debe tener un enfoque, se ha mal interpretado el hecho que la metáfora es un sustitutivo lingüístico que entra y sale en el trayecto del lenguaje universal, pero es muy importante marcar que el enfoque de la metáfora en la ciencia debe ser estrictamente un enfoque sustitutivo en la laguna de la ciencia que se debe llenar con las catacresis.

Los siguientes casos podrían ilustrar lo que acabamos de señalar. Arquímedes resolvió, mientras estaba tomando un baño, el problema de determinar la cantidad de oro que los orfebres habían usado en la corona de Herón, rey de Siracusa. Los científicos modernos de los siglos XVII y XVIII concebían el universo como un inmenso artefacto de relojería. En las ciencias naturales, tanto Charles Darwin como Alfred R. Wallace llegaron a la idea de la evolución por selección natural inspirándose en las prácticas ganaderas de selección, pero también en las ideas que relacionaban recursos y población humana contenidas en el ensayo sobre la población del economista Thomas Malthus. Rudolf Virchow, fundador de la patología celular, recurrió a conceptos y términos políticos para hablar sobre el cuerpo y la infección. La teoría ondulatoria de la luz le vino sugerida al físico Christian Huyghens por la comparación con las olas del mar, y la teoría atómica de la materia se le ocurrió a Niels Bohr por analogía con el sistema planetario.

En biología molecular, se trata del ADN en términos propios de la teoría de la información, empleándose términos como "código" e "información genética". Asimismo, en psicología e inteligencia artificial nuestro cerebro es un "procesador de información" y el ordenador es una máquina que tiene "memoria" y que "piensa". Y por no extenderme más, en el terreno de la ciencia económica, un concepto clave como es el de “mercado” es un término claramente metafórico, como lo son muchos de los que se acuñan en el ámbito de las tecnologías emergentes, como puede ser el caso de la nanotecnología. “Nanotijeras”, “nanoagujas”, “nanohilos”, “nanopuntos” o “nanopinzas”, por señalar un grupo de términos pertenecientes a un mismo campo semántico.Qué es eso de metáforas en la ciencia [12]

2.2. Concepto de Metáfora en las matemáticas

Se observa claramente que el investigador acude al auxilio de la metáfora por que no entrega la definición que pretende transmitir, a, sino una función de él, $f(a)$ y la tarea del investigador establece en aplicar la función inversa f^{-1}, y obtener así $f^{-1}(f(a))$, es decir, a, el significado original. Se puede ver claramente que la función transformadora característica de la metáfora es la analogía o la semejanza, igualmente kaput [13] discute las metáforas básicas del pensamiento humano y su papel en la matemática que más adelante se tocara más a fondo pero lo que él llama antropomorfismo con las proyecciones de una experiencia cognitiva interna en las operaciones matemáticas y los “mapeos” que preservan estructuras.

Pero como podemos realizar una conexión;

$$\text{Metáfora} \longrightarrow \text{Ciencia} \longrightarrow \text{Matemática}$$

Esta conexión la podemos realizar por medio de la lógica. Rudolf Carnap [11], afirma que la ciencia solamente se ocupa de las propiedades de las estructuras de los objetos, cuyas estructuras se describen en los objetos de cualquier dominio. Por otra parte Carnap define unas descripciones que modelan a las metáforas en dos direcciones;

Descripciones de propiedades: Descripción del número de secciones de un cono, indicando las propiedades de cada una de ellas. Descripción de una curva, indicando la ecuación de las coordenadas, es decir, la ordenada que pertenece a cada punto de sus abscisas.

Descripción de relaciones: Descripción de una figura geométrica, la cual consiste en puntos y líneas rectas, indicando las relaciones de su incidencia. Descripción de una curva indicando su ecuación natural, o sea, la relación que cada uno de los elementos de la línea tiene con la cantidad anterior.

La estructura de un modelo científico debe tener la caracterización de una estructura caracterizada (o que define) un solo objeto, por otra parte toda proposición científica puede en principio ser transformada de tal manera que sea una proposición que describa esa estructura, es más toda transformación es un requisito necesario para entendimiento de la misma. En ese orden de ideas la metáfora debe tener de base una descripción caracterizada en las matemáticas.

Black [5], realiza unos enfoques los cuales son: enfoque metafórico, enfoque sustitutivo, enfoque comparativo y por último el enfoque interactivo, este último ayudara al proceso de la estructura de la metáfora científica – matemática, asimismo Black [14] encuentra dos asuntos [subjects], el principal y subsidiario.

A manera de comprender lo expuesto por Max Black se expondrá una metáfora científica paradigmática, *"el átomo es un sistema solar en miniatura".* Una proposición que ha sido tomada generalmente para detallar e identificar metáforas en la ciencia. Primero que todo empecemos con reconocer el asunto principal 'el átomo' y el subsidiario 'sistema solar en miniatura', más adelante Black [15], renombra asunto primario y segundario en todo enunciado metafórico de forma que la expresión metafórica funciona 'proyectando' sobre el asunto primario un conjunto de 'implicaciones asociadas' que son predicables del asunto secundario, ambos asuntos interactúan entre ellos pero uno es el acompañante del otro, Arthur I. Miller [16], toma el enfoque interactivo de Black y lo expresa de la siguiente manera:

$$x \text{ acts as if it were a } \{y\}$$

Que traducido es:

$$x \text{ funciona } \underline{\text{como si}} \text{ fuera un } \{y\}$$

Esa parte subrayada como si relaciona el asunto primario x con el asunto segundario y. Curiosamente, para Miller [16], "Bohr basó todo su razonamiento en la siguiente metáfora visual. "El átomo se comporta como si fuera un sistema solar minúsculo". El instrumento de la metáfora – como si – señala una correspondencia (mapping), o transferencia, del asunto secundario a fin de explorar el asunto primario todavía bien comprendido (el átomo)". Es decir, aclarando lo mencionado al caso de nuestra metáfora paradigmática "el átomo es un sistema solar en miniatura", 'el átomo' sería el asunto principal o primario, mientras que 'sistema solar en miniatura' sería el asunto secundario o subsidiario. Es claro que cada una de las definiciones dadas por los portadores de la metáfora lleva a la conexión lógica o los tópicos acompañantes que el enfoque interactivo que Black menciona sin perder de vista que la metáfora tiene el propósito de relacionar pensamientos. Más adelante se realizara un aporte de Lakoff y Núñez en la matemática que hasta la actualidad nombre y caracteriza parte de la metáfora en las matemáticas.

Es pertinente añadir que la metáfora en la ciencia no es una copia de “lo real” ni una construcción de lo real, sino que es una interpretación de la cosa misma sometiéndola a traducción pero resulta que “El ser metafórico significa un ser como, un modo de ser real, sino un *cómo ser, un cuasi - ser.* ”Navarro Cordón [17].

A continuación se enlazan un poco los esquemas de los enunciados necesarios y las reglas lingüísticas y científicas que en su manera matemática se interpretan de manera que carece de lógica. Un ejemplo geométrico para comenzar a ilustrar un poco acerca de los enunciados y reglas que en la geometría abundan pero no son bien transmitidas; se tiene entendido que “dos líneas son paralelas cuando nunca se encuentran en algún punto”, pero que pasaría si a esa pequeña premisa se refutara por un momento y se dijera que “dos líneas paralelas se encuentran en un punto del infinito” entonces tendríamos que detenernos y mirar el concepto de “punto del infinito”.

Dada la figura:

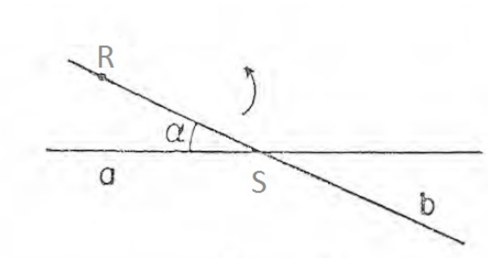


Figura 2.1: Un ejemplo de dos rectas paralelas

Imaginemos que existen dos rectas a y b como se muestran en la (2.1), la recta b gira contrario a las manecillas del reloj del punto R, al hacerlo, el ángulo α se vuelve más pequeño y el punto de intersección, S, se mueve cada vez más hacia la derecha. Luego dada esta situación definimos la posición limite, es aquella en la que las dos líneas se han convertido en paralelas y α ha pasado a ser cero, o $\alpha = 0$. Ahora a medida que se dio la posición limite, “el punto S se va encontrando ahora a una distancia infinita hacia la derecha “, lo anterior premisa no tiene ningún sentido si se sigue insistiendo en la palabra punto, de acuerdo con lo cual las líneas no pueden ser paralelas si se corta en algún punto: luego sabemos que las líneas paralelas simplemente no se encuentran, y de ahí que no exista en ninguna parte punto alguno que les sea común; pero es en ese instante cuando el investigador suele encontrar útil extender su terminología de tal modo que inserte el caso limite. Por lo tanto nada le evita decir al investigador: “tales líneas si se encuentran:

lo hacen en el punto del infinito", ya que "encontrarse en un punto del infinito" quiere expresar para el aprendiz "no encontrarse".

Hasta el momento se ha visto que la metáfora no es solo una representación literal de la lengua sino que también está adherida en la ciencia – matemática, y que detrás de una metáfora se encuentra una estructura y un enfoque interactivo que converge a más allá de nuestros pensamientos y de esa manera nos enseña a sentir lo que no vemos y expresar lo que no entendemos.

2.3. La perspectiva de Lakkof y Núñez acerca de las matemáticas

Según las ideas de Lakoff y Johnson [7], Lakoff y Núñez [18] suponen que la esencia de las matemáticas se halla en los pensamientos de los seres humanos, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones. Estos planteamientos yacen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Por otra parte, la estructura cognitiva para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: "esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, fusiones conceptuales y la metáfora conceptual." [18], de estos procesos mencionados, se enfatizara en los esquemas de las imágenes y metáfora conceptual estrictamente. También se enlazara la interpretación de la metáfora como el entendimiento de un dominio en términos de otro y admitimos que las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y una llegada, que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada.

Asimismo Lakoff y Núñez [18],en la relación con las matemáticas identifican dos tipos de metáforas conceptuales; Las grounding "conectados a tierra", relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas, por ejemplo " una función es una maquina", " los puntos son objetos". Este tipo específico de metáfora se ve en el aula en dos direcciones diferentes; el profesor busca la manera de transmitir consciente o inconscientemente un concepto matemático, pero dicho concepto matemático es relacionado con una situación de la vida cotidiana. A su vez el alumno utiliza su conocimiento de la vida cotidiana para comprender el contenido matemático, en este caso en particular, se utiliza mucho para el proceso enseñanza –aprendizaje, el dominio de partida esta fuera de las matemáticas y el de llegada son las matemáticas. Ilustrando la situación anterior se tiene

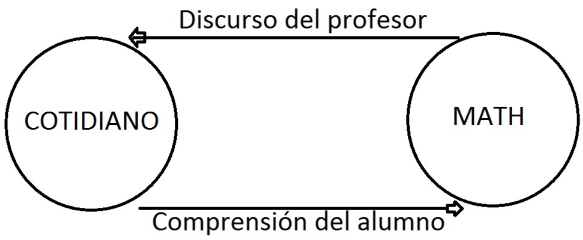


Figura 2.2: Grounding Metáfora en el proceso de enseñanza

El segundo tipo son las metáforas de enlace (linking), cuyo tipo de metáforas tiene su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas, por ejemplo, "dos puntos forman una línea recta", "los números reales son los puntos de una recta". Las metáforas de enlace proyectan un campo de conocimientos matemáticos sobre otro distinto, en este tipo de metáfora conceptual nos enfocaremos para nuestra investigación.

2.4. Algunos ejemplos de metáforas en las matemáticas

2.4.1. La metáfora básica del infinito

Aristóteles distingue entre dos ideas de infinito; el infinito potencial e infinito actual y desde entonces los razonamientos matemáticos han tenido en cuenta la diferencia entre ambos tipos de infinito. Por un lado el infinito potencial es un proceso reiterativo o sin final, un ejemplo de este tipo de infinito es; "por muy grande que sea un número natural, siempre podemos imaginar uno mayor, y uno mayor que este, y así sucesivamente donde "así sucesivamente" quiere decir reiteración ilimitada. La segunda idea es el infinito actual, el cual no es un proceso sino que refiere a un infinito existente como un todo o unidad, ejemplo de este tipo es; la ecuación $\frac{k}{0} = \infty$, donde k es una constante, si se considera a ∞ como un estado final, es decir como un numero tendríamos que aceptar que $k = \infty 0$, con lo que al realizar el producto por cero podría dar como resultado un numero distinto de cero.

Habiendo escrito un poco acerca del infinito y las ideas de Aristóteles del infinito, conectaremos la idea de infinito actual con la metáfora del infinito, lo primero que hay que hacer es considerar como se presenta el infinito fuera de las matemáticas. La interpretación del infinito en la vida cotidiana se ve como una idea literal de "algo que no tiene final", en la vida cotidiana un proceso infinito es un proceso que se repite indefinidamente sin parar (iteración), o si es continuo sin un punto final (continuo indefinidamente). Para Lakoff y Núñez [18], los procesos continuos con procesos iterativos por ejemplo; en matemáticas la aproximación a un punto la determinamos "paso a paso", hasta llegar a "acercarnos tanto como queramos". Por otra parte, un proceso que se prolonga indefinidamente se conceptualiza como teniendo un final y un último resultado, debido a que actúa lo que se denomina " metáfora básica del infinito", en la metáfora según Lakoff y Núñez [18], esta metáfora influye en el procesamiento de las ideas matemáticas relacionadas con la infinidad.

2.4.2. Continuidad de una función

Una definición muy informal de continuidad es "la continuidad es como un proceso incesante en el cual no hay huecos o rupturas". Uno de los aportes de Euler en las funciones fue caracterizar una función continua como una curva descrita por el movimiento libre y continuo de la mano, este aporte implica ciertos contenidos cognitivos tales como movimiento, procesos y cambio en el tiempo, parámetros que en el transcurso de la historia han tomado otra trayectoria. Es claro que este aporte de Euler es una metáfora conceptual que permite entender el concepto de función continua aplicando la estructura de los contenidos cognitivos. Sin embargo existen otras ideas de funciones continuas igualmente validas pero que al fin y al cabo no definen la esencia de la continuidad específicamente sino que hacen uso de diferentes metáforas conceptuales, como es el caso de la definición de Cauchy – Weierstrars, ya este no implica una metáfora en movimiento, sino que ya implica términos discretos que igualmente son proyecciones metafóricas estructuradas en el campo matemático, para analizar estos dos tipos de aportes de Euler y Cauchy, haremos referencia a Núñez y Edwards [19], quienes exponen las diferentes maneras de entender la continuidad de las funciones; la natural que es el aporte de Euler y la de Cauchy – Weierstrars que es discreta.

Empecemos con la continuidad natural esta es considerada una idea natural o intuitiva caracterizada de la siguiente manera "función continua":

- La función continua es formada por el movimiento, que ocurre en un cierto tiempo.
- La continuidad viene de un movimiento continuo.
- Hay direccionalidad en la función.
- El movimiento da lugar a una línea estática sin saltos.

- Como hay movimiento, hay un objeto moviéndose.

Este tipo de idea intuitiva parte de un hecho cotidiano que Euler en su mente sintió y denomino función continua. Por otra parte la definición de Cauchy – Weierstrars es un intento de disciplina que se ve encaminada a una buena estructura para el análisis matemático. Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si:

a. Existe $f(a)$, es decir $f(x)$ está definida en $x = a$.

b. Existe el $\lim_{h\to a} f(x)$

c. Ambos valores coinciden, es decir $f(a) = \lim_{h\to a} f(x)$

Ahora si tenemos en cuenta la definición de límite, podemos obtener la siguiente definición equivalente conocida como la definición de Cauchy – Weierstrars.

$y = f(x)$ es continua en $x = a \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $\mid x - a \mid < \delta$ entonces $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$

Así $y = f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b). Esta definición es el resultado de la proyección de una metáfora conceptual, la aplicación de dicha metáfora conlleva que:

- Una línea es un conjunto de puntos.
- La continuidad no puede presentar huecos ni rupturas.
- Aproximarse a un límite es la preservación de la proximidad al punto.

Una línea es un conjunto de puntos: Según esta metáfora los puntos no son localizaciones en la línea, sino que son entidades que constituyen la línea misma, esta idea estaría más próxima a la definición de Cauchy – Weierstrars.

La continuidad no puede presentar huecos ni rupturas: La metáfora en este caso identifica los puntos localizaciones en una línea como constituyentes de la línea en sí misma. Cuando un segmento de línea naturalmente continuo se conceptualiza como un sistema de puntos, ese sistema de puntos será sin "huecos".

Aproximarse a un límite es la preservación de la proximidad a un punto: La idea dinámica de la función $f(x)$ acercándose al límite L cuando x tiende a "a" es reemplazada por una idea diferente, a saber: la preservación de la cercanía de las imágenes al límite cuando las abscisas están cerca de "a".

2.4.3. Representación gráfica de las funciones en el bachillerato

En 1.6 se redacto acerca de las nuevas ideas sobre la metáfora con un aporte de George Lakoff [6] con base a los conceptos metafóricos, a continuación se explicara un ejemplo muy común de las metáforas orientacionales en las matemáticas con la representación de funciones, la construcción de un sistema de ejes coordenados lleva a organizar el plano en términos de expresiones metafóricas del tipo “horizontal-vertical”, “arriba-abajo”, o “izquierda-derecha” que son manifestaciones de este tipo de metáforas conceptuales. Por ejemplo, hay un momento en que la configuración didáctica se organiza en torno a la tarea de hallar los puntos de corte de la gráfica de la función con ejes de coordenadas, también como hallar sus máximos y mínimos, donde es creciente y decreciente, entre otras cosas. Las expresiones metafóricas orientacionales “el eje de abscisas es horizontal y el eje de ordenadas es vertical”, lleva a introducir otras expresiones orientacionales como son:

Dominio de partida	Dominio de llegada
Punto de corte en los ejes verticales y horizontales	Origen de coordenadas
Eje horizontal	Eje x
Eje Vertical	Eje y
Recta horizontal	Paralela al eje x
Recta Vertical	Paralela al eje y
Arriba	Valores de $y > 0$
Subir	Función creciente
Abajo	Valores de $y < 0$
Bajar	Función decreciente
Derecha	Valores de $x > 0$
Izquierda	Valores de $x < 0$

Estas metáforas no son arbitrarias, tienen una base en nuestra experiencia física y cultural,a su vez, son la base de las teorías científicas.

2.4.4. Gráfica de funciones

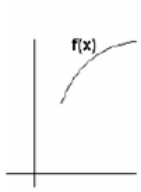
En la Grecia clásica las curvas se consideraron como secciones o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. Para Newton la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Además, aportó que las gráficas de las funciones eran consideradas como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se puede expresar mediante una formula (generalmente en forma implícita). Leibniz, aporta casi lo mismo que Newton pero él considera que la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve.

La primera definición explicita de función surgió en 1718 con Bernoulli, para Bernoulli una función de una magnitud variable era una cantidad compuesta de variables y constantes. Más adelante Euler, que fue su discípulo en 1748, modifica la definición de su maestro sustituyendo el término “cantidad” por “expresión analítica”. En el siglo XVIII Euler consideraba que a cada expresión analítica le correspondía una gráfica cartesiana. Euler aporta en su terminología que las gráficas definidas a trozos eran “discontinuas o mixtas o irregulares”, pero la necesidad de considerar funciones mixtas en determinados problemas llevo a Euler a buscar una definición de función que abarca a todas las curvas que no se podían definir por una sola expresión, pero que se podían dibujar por el movimiento libre de la mano.

Font [20], considera que la estructuración metafórica de una gráfica de una función se denomina “Metáfora Conjuntista “, la metáfora conjuntista permite entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$. Pero para entender un poco más este concepto es necesario adherir el concepto de función semiótica, una función semiótica asocia una expresión a un contenido (línea superior) con la particularidad de que a su vez la expresión está formada por un contenido junto con las unidades expresivas que lo transmiten (línea inferior). Es decir, el par expresión/ contenido (línea inferior) se convierte en una expresión de un contenido posterior.

<table>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
</table>

Aplicando la función semiótica a la gráfica de funciones se tiene:

<table>
<tr><td colspan="2">**Expresión**</td><td>Contenido
Conjunto de puntos (x,f(x))</td></tr>
<tr><td>Expresión

</td><td>Contenido
Gráfica de la función f(x).</td><td></td></tr>
</table>

Las funciones semióticas son una herramienta de tipo descriptivo que no explica *el por qué* , pero es claro que deja de precedente la relación entre la expresión y el contenido, todo esto nos ayuda a poner en funcionamiento o a definir la metáfora conceptual: la gráfica de una función es el conjunto de pares $(a, f(a))$. Relacionando lo anterior con los conceptos ya dados y dando como base la metáfora conceptual ya mencionada, tenemos:

Dominio de partida: Conjunto	Dominio de llegada: Gráficas de funciones
Conjunto de pares $(a, f(a))$.	Gráfica de la función.
Miembros del conjunto.	Puntos de la gráfica.
La relación de pertenencia.	Ser un punto de la Gráfica.
Un subconjunto de un conjunto más grande.	Dominio, Rango, Puntos de corte, puntos de inflexión, concavidad, Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Capítulo 3

Metáforas en Ecuaciones Diferenciales

En este capitulo se presentan los conceptos necesarios para la comprensión del trabajo los cuales abarcan, conceptos de Algebra lineal y de las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogeneas de orden n con coeficientes constantes.

3.1. Espacio Vectorial

Definición 3.1 (Espacio Vectorial)**.** *Un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen los diez axiomas que se enumeran a continuación.*

Axiomas de un espacio vectorial:

1. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ (es decir, $\mathbb{V}$ es cerrado para la suma).
2. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en $\mathbb{V}$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ley asociativa de la suma).
3. Existe un vector $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ se conoce como *neutro aditivo*).
4. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\mathbb{V}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ se conoce como el *inverso aditivo de* $\mathbf{x}$).
5. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ estan en $\mathbb{V}$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (ley conmutativa de la suma de vectores).

6. Si $\mathbf{x} \in V$, y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ (se dice que $\mathbb{V}$ es cerrado para la multiplicación escalar).

7. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{V}$ y si α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (primera ley distributiva).

8. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ y si α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (segunda ley distributiva).

9. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ y si α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (ley asociativa de la multiplicación por escalar).

10. Para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{1x} = \mathbf{x}$ (al escalar 1 se le conoce como *neutro multiplicativo*).

Definición 3.2 (Dependencia e independencia lineales). *Sean* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *n vectores en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen* n *escalares* $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ *no todos cero, tales que*

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, entonces se dice que son linealmente independientes.

Expresado de otro modo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *son linealmente independientes si la ecuación* $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ *sólo se satisface si* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Definición 3.3 (Combinación lineal). *Sean* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *n vectores en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*. Entonces, toda expresión de la forma*

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} \tag{3.2}$$

en donde $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *son escalares, se llama combinación lineal de* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$.

Definición 3.4 (Generación de un espacio vectorial). *Los vectores* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$ *se dice que generan* $\mathbb{V}$*, si todo vector en* $\mathbb{V}$ *puede expresarse como combinación lineal de ellos. Esto es, para todo* $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$*, existen escalares* $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *tales que*

$$v = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} \tag{3.3}$$

Definición 3.5 (Espacio generado por un conjunto de vectores)**.** *Sean* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *n factores en un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*. El espacio generado por* $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *es el conjunto de las combinaciones lineales* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}$*. Esto es,*

$$gen\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{a_1 v_1} + \mathbf{a_2 v_2} + \cdots + \mathbf{a_n v_n}\} \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ son escalares.

Definición 3.6 (Base)**.** *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{a_1 v_1} + \mathbf{a_2 v_2} + \cdots + \mathbf{a_n v_n}\}$ *forma una base para* $\mathbb{V}$ *si*

i $\{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{a_1 v_1} + \mathbf{a_2 v_2} + \cdots + \mathbf{a_n v_n}\}$ *es linealmente independiente.*

ii $\{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{a_1 v_1} + \mathbf{a_2 v_2} + \cdots + \mathbf{a_n v_n}\}$ *genera* $\mathbb{V}$*.*

Nota 3.1. *La base es el conjunto más pequeño que genera el espacio vectorial.*

Teorema 3.1. *Todo elemento de un Espacio vectorial de dimensión finita se puede representar de manera única como combinación lineal de los elementos de la base.*

Prueba: Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base para $\mathbb{V}$, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ya que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ generan a $\mathbb{V}$. Tomemos $y \in \mathbb{V}$ tal que $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ sea una combinación lineal de los vectores de la base. Ahora supongamos que existen escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tal que $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$, luego $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ de aqui $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n - (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n) = 0$, como los $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son Linealmente independientes entonces $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Así $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

3.2. Ecuaciones Lineales Homogéneas con coeficientes constantes de orden n

Una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{3.5}$$

se llama **homogénea**. Por ejemplo, $y'' - 4y + 4y = 0$ es una ecuación diferencial homogénea, lineal y de segundo orden.

Nota 3.2 (Operadores diferenciales)**.** *En cálculo, la diferenciación suele indicarse con la D mayúscula; esto es, $\frac{dy}{dx} = Dy$. El símbolo D se llama **operador diferencial** porque transforma una función diferenciable en otra función; por ejemplo, $D(6x^3 - 4x^2) = 18x^2 - 8x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = (D^2y)$$

y en general

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

*en donde y representa una función una función suficientemente diferenciable. Las expresiones polinomiales donde interviene D, como $D+4, D^2+3D-5$ y $4x^3D^3-8x^2D^2+4xD+2$ también son operadores diferenciales. En general, el **operador diferencial de orden n** se define:*

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{3.6}$$

Como consecuencia de dos propiedades básicas de la diferenciación, $D(cf(x)) = cDf(x)$, donde c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de linealidad; es decir,L, operando sobre una combinación lineal de dos funciones diferenciables, es lo mismo que una combinación lineal de L operando sobre las funciones individuales. Esto significa que

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)) \tag{3.7}$$

*en donde α y β son constantes. A causa de la ecuación (3.7), se dice que el operador diferencial de orden n, L, es un **operador lineal.***

Por otra parte toda ecuación diferencial lineal se puede expresar en notación D. Por ejemplo $y'' + 5y' + 6y = 0$ se puede escribir en la forma $(D^2 + 5D + 6)y = 0$. Al aplicar la ecuación (3.6), la ecuacion diferencial (3.5) de orden n se puede escribir en forma compacta como $L(y) = 0$.

En el siguiente teorema veremos que la suma o *superposición* de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

Teorema 3.2 (Principio de superposición, ecuaciones homogéneas)**.** *Sean* $y_1, y_2, \cdots, y_k$ *soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden* n*, (3.5), en un intervalo* I*. Entonces la combinación lineal. Al aplicar*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) \tag{3.8}$$

en donde las c_i*,* $i = 1, 2, \ldots, k$ *son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.*

Prueba: Demostremos el caso $k = 3$. Sea L el operador diferencial lineal definido en (3.6) y sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si definimos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$, entonces , por linealidad de L,

$$L(y) = L\{c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+c_3 y_3(x)\} = c_1 L(y_1)+c_2 L(y_2)+c_3 L(y_3) = c_1 \cdot 0+c_2 \cdot 0+c_3 \cdot 0 = 0$$

Definición 3.7 (Wronskiano)**.** *Suponga que cada una de las funciones* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *posee al menos* $n - 1$ *derivadas. El determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

en donde las primas representan las derivadas, se llama wronskiano *de las funciones.*

Nota 3.3. *Sean* $y_1, y_2, \ldots, y_n$*,* n *soluciones, de la ecuación diferencial (3.5), lineal, homogénea y de orden* n*, en un intervalo* I*. Entonces, el conjunto de solución es* linealmente independiente *en* I *si y sólo si* $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ *para todo* x *en el intervalo.*

Definición 3.8 (Conjunto fundamental de soluciones)**.** *Todo conjunto* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *de* n *soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden* n *(3.5), en un intervalo* I*, es un* conjunto fundamental de soluciones *en el intervalo.*

Por otra parte cuando se realiza el estudio de la Ecuación lineal de primer orden, $y' + ay = 0$, donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por consiguiente, lo más natural es determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.9}$$

en donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$.

Para hallar las soluciónes de las ecuaciones lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes es necesario utilizar una ecuación auxiliar o ecuación caracteristica, comenzaremos en el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.10}$$

Si probamos con una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces, después de sustituir $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2 e^{mx}$, sustituyendo en la ecuación (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} \\ &= e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \end{aligned}$$

Como e^{mx} nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es cuando se elige una m como una raiz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{3.11}$$

Esta ecuación se llama *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* de la ecuación diferencial (3.10). Como las dos raíces de la ecuación (3.11) son $m_1 = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a}$ y $m_2 = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a}$, habrá tres formas de la solución general de la ecuación (3.10), que corresponden a los tres casos mencionados a continuación:

- m_1 y m_2 reales y distintos $(b^2 - 4ac > 0)$,
- m_1 y m_2 reales e iguales $(b^2 - 4ac = 0)$
- m_1 y m_2 números complejos conjugados $(b^2 - 4ac < 0)$

Cada caso tiene una solución distinta y son los siguientes:

Caso I. Raíces reales distintas. Si la ecuación (3.11) tiene dos raices reales distintas, m_1 y m_2, llegamos a dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$, y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Luego, la solución general de la ecuación (3.10) en ese intervalo es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \tag{3.12}$$

Caso II. Raíces reales repetidas. Si la ecuación (3.11) tiene dos raices reales repetidas, es decir $m_1 = m_2$. Luego, la solución general de la ecuación (3.10), es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_2x} \tag{3.13}$$

Caso III. Raíces complejas conjugadas. Si la ecuación (3.11) tiene raices complejas, es decir si m_1 y m_2 son complejas, podremos escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$ donde $alpha$ y $\beta > 0$ son reales, e $i^2 = -1$. En este caso la solución general es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sen\beta x \tag{3.14}$$

En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n como la ecuación (3.9) en donde las $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, debemos resolver una ecuación polinomial de grado n:

$$a_nm^{(n)} + a_{n-1}m^{(n-1)} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{3.15}$$

Si todas las raíces de la ecuación (3.15) son reales y distintas, la solución general es

$$y = c_1e^{m_1x}c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

Es más dificil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos pueden tener muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de sexto grado podria seis raíces reales distintas, como puede tener dos raíces reales disintas con dos iguales y otras dos complejas o una real distinta, cuatro reales iguales y una compleja, etcétera. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de grado n (esto es, k raíces son iguales a m_1),la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}$$

Por último,las raices complejas de la ecuación auxiliar siempre aparecen en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener dos raíces complejas cuando mucho.

3.3. La metáfora incluida en la solución de la Ecuación Diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n

Teniendo en cuenta según Lakoff y Núñez afirman que la metáfora es un mapeo caracterizado por un dominio de partida y una de llegada, y el espacio solución de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes de dimensión n, metaforicamente existe un isomorfismo de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ cualquiera de dimension n sobre el espacio solución, en particular si se toma el espacio general con $\mathbb{R}^{\ltimes}$ para el caso de la ecuacion diferencial lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes, podria asociarse las siguientes bases:

$$\{(1,0),(0,1)\} \rightarrow \{e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\}$$

$$\{(1,0),(0,1)\} \rightarrow \{e^{m_1 x}, xe^{m_2 x}\}$$

$$\{(1,0),(0,1)\} \rightarrow \{e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x\}$$

Teniendo en cuenta que si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son espacios vectoriales de dimensión n y $\mathbb{T}$ es un isomorfismo de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ entonces, si $B = v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base en $\mathbb{V}$, $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es una base para $\mathbb{W}$. En efecto, como $T(v_2)$ esta en $\mathbb{W}$, sea $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ imágenes $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_n T(v_n) = 0$, $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$, como T es isomorfismo, entonces el nucleo contiene solamente el elemento identidad en $\mathbb{W}$, luego $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ implica

$T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ es linealmente independiente como la dimensión de $\mathbb{W}$ en n, el conjunto es una base.

En terminos generales para ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ generan el espacio solución ya que cualquier solución puede escribirse como una combinación lineal siendo linealmente independiente entonces puede decirse que tambien la base $\{T(v_1, T(v_2), \ldots, T(v_n))\}$ coincide con la base del espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

En terminos más puntuales la metáfora se da por que se transfiera las propiedades de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y una de sus bases al espacio vectorial de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

Este aspecto es clave porque la metafora se traslada de un dominio a otro, estando ambos dominios en la matematica.

Conclusiones

Una vez terminado el presente trabajo, podemos concluir lo siguiente:

La metáfora en la matemática es una herramienta universal para una enseñanza didáctica y traslación de conceptos teóricos a la práctica. Además, puede ser interpretada como el entendimiento de un dominio en términos de otro, y se admite que las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y uno de llegada, que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada.

En las matemáticas se utilizan las metáforas conceptuales de tipo enlace, es decir, (linking), cuyo dominio de partida y de llegada están en las mismas matemáticas.

Por último, cabe resaltar que las metáforas están presente en la conceptualización de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n, estableciendo un dominio de partida el cual es un espacio vectorial cualquiera y un dominio de llegada, el cual está constituido por la solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes ,este trabajo es de vital importancia, ya que aporta conceptos metafóricos y pedagógicos para el descubrimiento y señalamiento de la solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, ayudando así a crear más interés en el público en general, para investigar y modelar los dominios de la metáfora con la matemática.

A futuro es muy importante que se siga investigando acerca de esta temática porque ayudara a facilitar el aprendizaje de la matemática o en disciplinas donde esta tenga injerencia.

Bibliografía

[1] Eggers Lan, C., Platón. Vol. IV: República, Traducción, Colección Clásica de Gredos, Madrid, 1986.

[2] Aristóteles . (2003). IV. En La poética(1457). Buenos Aires : Eilhard Schlesinger.

[3] Aristóteles . (2003). IV. En La poética(1458). Buenos Aires : Eilhard Schlesinger.

[4] Aristóteles . (2003). IV. En La poética(1459). Buenos Aires : Eilhard Schlesinger.

[5] Black, M. (1962), Models and Metaphors, Cornell University Press, Ithaca, New York. Versión española: Modelos y Metáforas, Tecnos, Madrid, 1966 (citado por esta edición).

[6] Lakoff, George y Johnson, Mark (1981), "La estructura metafórica del sistema conceptual humano", en D. NORMAN, comp., Perspectivas de la ciencia cognitiva, Barcelona: Paidós, 1987.

[7] Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). Metáforas de la vida cotidiana. Madrid: Cátedra.

[8] Lakoff, George (1996), Moral Politics: What Conservatives know that Liberals Don't, Chicago: University of Chicago Press.

[9] Lakoff, George (1994), "The Contemporary Theory of Metaphor", en A. ORTONY, ed., Metaphor and Thought, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Kuhn, T. (1993): "Metaphor in Science". En A. Ortony (ed.), Metaphor and Thought.

[11] Carnap R.. (1988). La construcción lógica del mundo. México: U. Nacional Autónoma De México.

[12] https://www.piratasdelaciencia.com/blog/2012/05/30/que-es-eso-de-metaforas-en-ciencia/

[13] Kaput, 1979,"Mathematics and Learning. Roots of Epistemological Status", en Clement Lochhead (Ed.) Cognitive Process Instruction. Philadelphia, Franklin Institute Press

[14] Black, M. (1962), pág 49, Models and Metaphors, Cornell University Press, Ithaca, New York. Versión española: Modelos y Metáforas, Tecnos, Madrid, 1966 (citado por esta edición).

[15] Black, M. (1993), pág. 27-28: "More about metaphor". In Andrew Ortony (ed.), Metaphor and Thought, Second Edition, Cambridge Univ. Press.

[16] Miller, A. I. (2000): "Metaphor and Scientific Creativity". In F. Hallyn (ed.), Metaphor and Analogy in the Sciences, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[17] Navarro Cordón, pág. 165- 166, J. M. (2004): "Metáfora e Interpretación. Un giro hermenéutico aislado". En Juan M. Navarro Cordón (coordinador), Perspectivas del Pensamiento Contemporáneo, Vol. I: Corrientes, Editorial Síntesis, Madrid.

[18] Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. Nueva York: Basic Books.

[19] Núñez, R., Edwards, L. y Matos, J.F (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational studies in mathematics, 39, 45-65.

[20] Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gráfiques. Aplicacions a les derivades.

[21] Dennis G. Zill. (2001). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Los Angeles: THOMSON LEARNING .

[22] Stanley I. Grossman. (1988). Álgebra Lineal. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.