

B.P  
T511.8  
L881  
Ej. 1

1

**OSCILAMIENTO REGULAR QUE EMERGE  
DE NEURONAS CAÓTICAS ACOPLADAS**

Gerardo Alfonso López Díaz

Trabajo de Grado para optar el título de Matemático

Asesor de Trabajo de Grado  
Humberto Pérez González, Ph.D.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Programa de Matemáticas

62472

Cartagena de Indias D. C. y T.  
Abril de 2011

*Dedicado a mis padres Adriano López Julio, Lenis  
Leonor Díaz Valdeblanquez y mi hermana "Lala".*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco grandemente a Dios por permitirme dar este primer paso en mi formación académica; por darme la sabiduría y la fortaleza para alcanzar esta meta.

A mi Asesor de trabajo de grado Humberto Pérez González quien fue un motivador constante y una persona muy comprometida conmigo para el éxito de todo este proceso.

A mis amigos y compañeros de “batalla” que durante esta etapa de mi vida estuvieron conmigo en el programa de Matemáticas de la U de C.

15 Abril de 2011.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Fisiología</b>	<b>5</b>
1.1. Tejido excitable . . . . .	5
1.1.1. Potencial de membrana . . . . .	5
1.1.2. Excitación: proceso de la producción del potencial de acción . . . . .	7
1.1.3. Propagación del potencial de acción . . . . .	8
1.2. El modelo de Hodgkin-Huxley (HH) . . . . .	9
1.2.1. Hipótesis físicas para el modelo (HH) . . . . .	10
1.2.2. Dinámica de los canales iónicos . . . . .	11
1.2.3. Ecuaciones del modelo (HH) . . . . .	12
1.2.4. El Modelo de Hindmarsh-Rose (HR) . . . . .	13
<b>2. Sistemas dinámicos no lineales</b>	<b>15</b>
2.1. Nociones de la Teoría de Sistemas dinámicos no lineales . . . . .	15
2.1.1. Soluciones de equilibrio: Estabilidad linealizada. . . . .	15
2.1.2. Funciones de Liapunov . . . . .	19
2.1.3. Variedades invariantes: Sistemas lineales y no lineales . . . . .	22
2.1.4. Soluciones periódicas . . . . .	31
2.1.5. Propiedades de los campos vectoriales: Existencia, Unicidad, Diferenciabilidad y Flujos . . . . .	33
2.1.6. Comportamiento Asintótico . . . . .	36
2.1.7. El teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	40
2.2. Mapas de Poincaré: Teoría, construcción y ejemplos . . . . .	41
2.2.1. Mapas de Poincaré : Ejemplos . . . . .	41
2.2.2. Construcción del mapa de Poincaré . . . . .	54
2.3. Bifurcaciones locales. . . . .	57

2.4.	Un par de valores propios imaginarios puros: "la bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré"	63
2.5.	Estabilidad de bifurcaciones bajo perturbaciones. . . . .	71
2.6.	Disección geométrica de modelos neurona-les . . . . .	74
<b>3.</b>	<b>Sincronización de osciladores cuadrados caóticos</b>	<b>77</b>
3.1.	Osciladores acoplados. . . . .	81
3.2.	Sincronización de las soluciones regulares de ruptura. . . . .	84
	<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
	<b>Anexos</b>	<b>97</b>

# INTRODUCCIÓN

Se ha estudiado clínica y experimentalmente muchos aspectos del funcionamiento de las neuronas, generalmente estos estudios se realizan *in vitro*<sup>1</sup>, y arrojan una gran cantidad de datos que deben ser analizados y puestos en contexto de tal manera que se puedan explicar los mecanismos de comunicación entre las neuronas y su sincronización para desarrollar tareas. De manera que el diseño de un modelo matemático permite un mejor entendimiento de la dinámica de la neuronas como un todo y focalizar la atención en el sistema y su funcionamiento global. Aquí se estudia un mecanismo, presentado por Su y Pérez en [16], donde se explica cómo las neuronas con comportamiento dinámico caótico pueden sincronizarse en forma periódica a través de una conexión sináptica. Este tipo de comportamiento es muy difícil de observar en experimentos *in vitro*.

Este trabajo de grado se estructura en tres capítulos. El primero corresponde a los fundamentos fisiológicos referentes al funcionamiento de las neuronas, el segundo capítulo consta de las nociones básicas de los sistemas dinámicos no lineales y la teoría de estabilidad, el tercer capítulo corresponde al resultado principal del artículo "*Regular bursting emerging from coupled chaotic neurons*".

Por último, además de resaltar la importancia del tema científico que se abordada en este trabajo de grado, se busca a través del mismo motivar a otros estudiantes de pregrado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales a indagar y estudiar en el campo de las Matemáticas aplicadas.

---

<sup>1</sup>*In vitro* hace referencia a una técnica para realizar un determinado experimento en un tubo de ensayo, o generalmente en un ambiente controlado fuera de un organismo vivo.

# Capítulo 1

## Fisiología

### 1.1. Tejido excitable

Se entiende como tejido a un conjunto de células que comparten funciones parecidas. En los organismos algunas células son “*excitables*”, es decir, capaces de autogenerar impulsos electroquímicos en sus membranas. El tejido excitable tiene la particularidad de responder y desarrollar algún tipo de actividad cuando es expuesto a estímulos eléctricos.

El tejido excitable se divide en dos grandes grupos: el tejido nervioso y el tejido muscular; los cuales transmiten señales a través de cambios en los “*potenciales de membrana*”. Se conoce como “*potencial de membrana*” a la diferencia de potencial eléctrico del interior de la célula con respecto al potencial eléctrico exterior.

El tejido excitable en que enmarcamos este trabajo es el tejido nervioso cuya principal componente son las neuronas. Una *neurona* es una célula que por lo anteriormente expuesto, se caracteriza por la excitabilidad eléctrica de su membrana plasmática para la conducción y recepción del impulso nervioso. Está compuesta por tres partes principales: *el cuerpo celular o soma* donde se encuentra el núcleo y el resto de organelos, *el axón* y *las dendritas*. Ver figura 1.1; ([http://www.ferato.com/wiki/images/e/e0/20080819\\_mgb\\_Neurona1\\_.jpg](http://www.ferato.com/wiki/images/e/e0/20080819_mgb_Neurona1_.jpg)).

#### 1.1.1. Potencial de membrana

Las membranas de casi todas las células de los organismos presentan potencial eléctrico, en particular las células del tejido excitable.

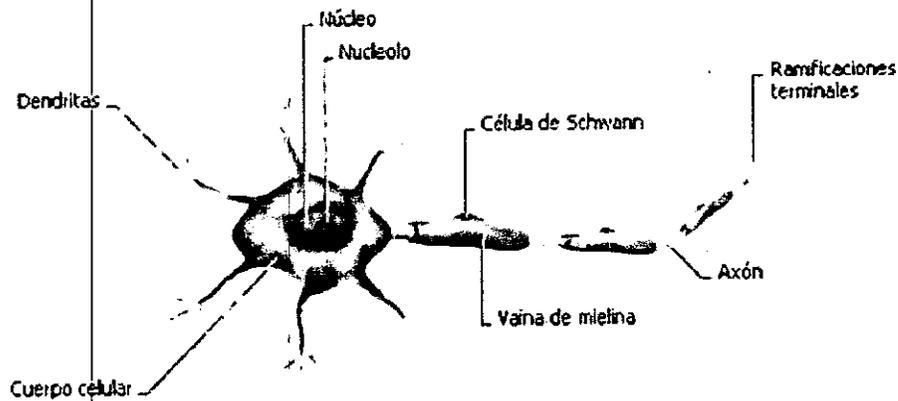


Figura 1.1: Partes de una neurona.

El potencial de membrana está estrechamente ligado al transporte de sustancias de líquido intracelular al extracelular y viceversa, pues entre las sustancias intercambiadas se encuentran los iones responsables de la carga eléctrica. “En el organismo humano, la baja cantidad de potasio (K) que contiene el tejido extracelular, hace que el potasio se difunda del interior al exterior. El proceso anterior se conoce un *efecto de electropositividad* en el interior y de *electronegatividad* en el exterior. Análogamente, el exterior de la célula contiene grandes cantidades de sodio (Na) y en el interior celular bajas cantidades de sodio. Los iones de sodio cargados positivamente se difunden al interior de la membrana y se produce un efecto similar al anterior, pero con mayor electropositividad en el interior de la célula y electronegatividad en el exterior. Los procesos anteriores en conjunto crean el potencial de membrana<sup>1</sup>.

Cuando el potencial de membrana se somete a cambios bruscos o rápidos de los factores que generan el potencial de difusión, es decir, cambios en:

1. Permeabilidad de la membrana de cada ión,
2. Concentraciones de los iones en el interior y exterior de la membrana,

<sup>1</sup>Cabe anotar que el potasio y el sodio no son las únicas sustancias que pueden crear el potencial de membrana, los iones de calcio representan una parte muy importante en el proceso de funcionamiento del corazón por ejemplo.

“entonces se manifiesta el *potencial de acción*”. El potencial de acción viaja a través de las fibras nerviosas transmitiendo un cambio de voltaje que codifica información.

El potencial de membrana tiene un estado de *reposo* que corresponde al estado en que las fibras de tejido nervioso no transmiten señales”[3].

### 1.1.2. **Excitación: proceso de la producción del potencial de acción**

El proceso de potencial de acción se inicia cuando el potencial de membrana tiene una elevación inicial o cambio “suficientemente” grande. El potencial en reposo, negativo en estado normal, cambia de negativo a positivo y nuevamente a negativo. Esto se alcanza cuando la entrada de iones de sodio supera la salida de iones de potasio y se conoce como “*umbral de estimulación*”. El potencial de acción consta de las siguientes fases:

1. Fase de reposo o polarización.
2. Fase de despolarización: que consiste en la entrada de iones de sodio por la apertura de canales de sodio y cuya acción neutraliza el efecto polarizado.
3. Fase de repolarización: posterior a la apertura de los canales de sodio, estos empiezan a cerrarse mientras inicia la apertura de canales de potasio (ver figura 1.2) [3].

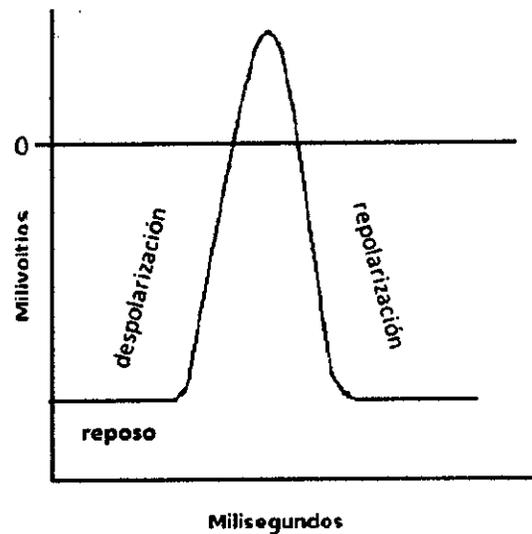


Figura 1.2: Fases del potencial de acción.

### 1.1.3. Propagación del potencial de acción

Un potencial de acción en un punto de la membrana, generalmente, excita porciones adyacentes de la misma. Una fibra excitada en una porción desarrolla repentinamente mayor permeabilidad al sodio, con lo que se crea un flujo de corriente en la membrana celular. Por su parte, el flujo de corriente en la membrana, hace que el potencial de acción se extienda en forma explosiva. Este proceso corresponde a la fase de despolarización y se extiende a lo largo de la fibra dando lugar a un *"impulso nervioso"*.

El potencial de acción se propaga en dirección tal que se aleja del estímulo a lo largo de las fibras y hasta que toda la membrana queda despolarizada. Ver figura 1.3.

Una vez desencadenado el potencial de acción, éste se propaga y viaja por toda la membrana si las condiciones son adecuadas, o no viaja en lo absoluto si las condiciones no lo son (esto se conoce como el *principio de todo o nada*).

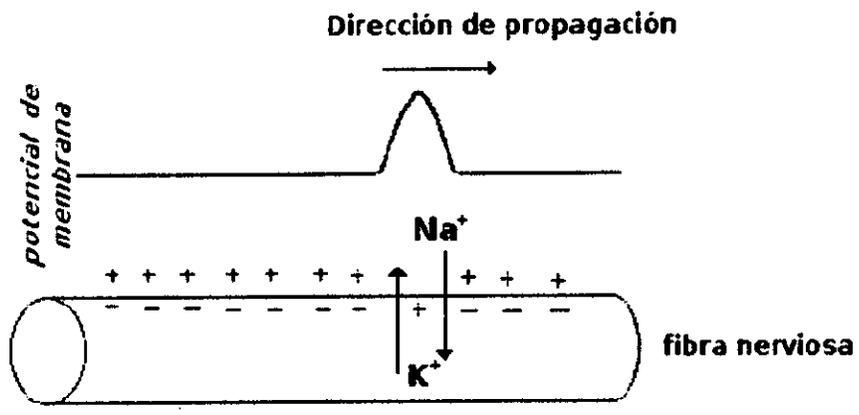


Figura 1.3: Propagación del potencial de acción.

### 1.2. El modelo de Hodgkin-Huxley (HH)

Una de las funciones celulares más importantes es la regulación del potencial de membrana a través del control de canales iónicos (llamados así porque permiten el paso de moléculas protéicas). Células como las neuronas usan el potencial de membrana para producir reacciones tales como secreciones responsables de mecanismos como la *sinápsis*, entre otros. El tejido excitable, tras recibir un estímulo, no regresa a su potencial de equilibrio aún cuando el estímulo ha sido retirado; de hecho, las células del tejido excitable generan un potencial de acción antes de regresar a su estado de reposo.

El modelo matemático de Hodgkin-Huxley fue el primero que reprodujo exitosamente observaciones experimentales para el tejido excitable en las corrientes de membrana de un axón gigante de calamar. Los experimentos realizados por Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley probaron que la interacción del potasio y el sodio en la membrana celular genera una diferencia de potencial eléctrico que es el principal responsable del potencial de acción (ver [6]).

### 1.2.1. Hipótesis físicas para el modelo (HH)

- El tejido excitable funciona como un circuito eléctrico.
- La corriente a través de la membrana es movida por iones de sodio, potasio y otros iones no identificados.
- La fuerza motora de los iones se produce por la diferencia de concentración entre el interior y el exterior de la membrana celular.<sup>2</sup>

Las variables utilizadas en el modelo (HH) corresponden a:

- $V$  potencial de membrana,
- $C$  capacitancia de la membrana,
- $g_{na}$  conductancia para el sodio,
- $g_k$  conductancia para el potasio,
- $g_l$  conductancia para otros iones <sup>3</sup>,
- $V_i$  voltaje de reposo para el ión  $i$ ,
- $I_a$  corriente inducida,
- $m$  función asociada a la activación del canal iónico por sodio,
- $n$  función asociada a la activación del canal iónico por potasio,
- $h$  función asociada a la desactivación del canal por cargas de sodio,
- $\alpha_i, \beta_i$  funciones exponenciales de ajuste para el comportamiento de la apertura y cerradura del canal para la función  $i$  (tasa de transferencia de iones al interior y al exterior de la célula)[3][8].

---

<sup>2</sup>Los iones viajan de gradientes de mayor concentración a gradientes de menor concentración llevando consigo una carga eléctrica, esto se conoce como *potencial de Nernst*.

<sup>3</sup>El subíndice  $l$  corresponde a las corrientes generadas por los iones distintos a sodio y potasio.

## 1.2.2. Dinámica de los canales iónicos

### Conductancia del Potasio

La conductancia del potasio  $g_k$  obedece una ecuación diferencial de estructura:

$$\frac{dg_k}{dt} = f(v, t),$$

con  $v = V - V_k$  y  $V_k =$  *potencial de reposo para el potasio*. La cual se reescribió en términos de una variable  $n(t)$  que resuelve una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, de manera que

$$g_k = \bar{g}_k n^4,$$

donde  $\bar{g}_k$  es una constante y  $n$  es una función que representa la fracción de canales abiertos tras aplicar un voltaje fijo al tiempo  $t$ .

Si definimos  $n_\infty(v)$  como la porción de canales abiertos en estado estacionario después de aplicar un voltaje por un tiempo considerablemente largo y  $\tau_n(v)$  como el tiempo que tarda en alcanzarse <sup>4</sup>  $n_\infty(v)$ , la función  $n$  satisface:

$$\tau_n(v) \frac{dn}{dt} = n_\infty(v) - n.$$

Ésta función se puede reescribir en términos de funciones exponenciales de ajuste  $\alpha_n(v)$  y  $\beta_n(v)$ , donde  $\alpha_n(v)$  determina la tasa de transferencia de iones de sodio del interior hacia el exterior celular y  $\beta_n(v)$  determina la tasa de transferencia de iones de sodio del interior al exterior celular; ver [8]. Sean:

$$n_\infty(v) = \frac{\alpha_n(v)}{\alpha_n(v) + \beta_n(v)} \quad \tau_n = \frac{1}{\alpha_n(v) + \beta_n(v)}.$$

Entonces la ecuación se puede reescribir :

$$\frac{dn}{dt} = (1 - n)\alpha_n(v) - n\beta_n(v).$$

---

<sup>4</sup>Estas funciones se determinan ajustando curvas válidas para todo voltaje aplicado a tiempos discretos.

### Conductancia del Sodio

En el caso de la conductancia del sodio, los datos experimentales sugieren que ésta depende de dos procesos: uno que activa la corriente de sodio y otro que la desactiva, entonces

$$g_{na} = g_{na}^- m^3 h.$$

Donde  $m(t)$  es la variable de activación de los canales de sodio y  $h(t)$  es la variable de desactivación, ambas funciones son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

En el caso del sodio,  $m(t)$  corresponde a la fracción de canales de sodio activados en el exterior de la membrana y  $(1 - m(t))$  a los activados en el interior:  $h(t)$  corresponde a la fracción de canales desactivados en el exterior de la membrana y  $(1 - h(t))$  a la proporción de canales desactivados en el interior. Esta diferencia se da porque los tiempos de cada proceso son diferentes <sup>5</sup>. Análogamente al razonamiento para la función de activación en la conductancia de potasio, estas funciones satisfacen:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m(m)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h(h).$$

### Exponentes de las funciones de activación y desactivación de canales

El exponente de la función de activación de potasio ( $n^4$ ) en la conductancia del potasio se puede explicar si se piensa que para que exista transferencia de iones en la membrana es necesario que existan 4 moléculas similares ocupando un región de membrana.

En la conductancia del sodio, por otro lado, los exponentes de las funciones corresponden a 3 ( $m^3$ ) y 1 ( $h$ ) y se explican si se piensa que en el interior de la membrana existen 3 moléculas activadoras no bloqueadas por una molécula desactivadora [3] [8].

#### 1.2.3. Ecuaciones del modelo (HH)

El modelo (HH) consta de cuatro ecuaciones, una que corresponde a la dinámica del voltaje y las otras tres corresponden a la dinámica de activación

<sup>5</sup>Lo anterior implica que  $1 - m(t) \neq h(t)$ .

de canales.

Para la ecuación relacionada con la dinámica de voltaje, se utiliza una *ecuación de cable* que represente el circuito eléctrico asociado al modelo (ver más detalles en [3]). Luego, las ecuaciones del modelo (HH) están dadas por:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - g_{na} m^3 h (V - V_{na}) - g_k n^4 (V - V_k) - g_l (V - V_l) \\ \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h. \end{aligned}$$

#### 1.2.4. El Modelo de Hindmarsh-Rose (HR)

El modelo de FitzHugh-Nagumo <sup>6</sup> explica el comportamiento del impulso nervioso con una modificación del modelo (HH), reduciéndolo a un sistema de dos ecuaciones. Este modelo se basa en distinguir la dinámica de las *variables rápidas* de la dinámica de las *variables lentas* (ver sección 2.6), esto es,

\*  $m$  y  $v$  son variables rápidas.

\*  $n$  y  $h$  son variables lentas.<sup>7</sup>

El modelo general de FitzHugh-Nagumo reproduce el comportamiento del plano fase del modelo (HH) para una *variable de excitación*  $v$ <sup>8</sup>, y una *variable lenta de recuperación*  $w$ <sup>9</sup>. El sistema no adimensional se representa por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_m \frac{dV}{d\tau} + F(V) + l &= -I_a \\ L \frac{dl}{d\tau} + RI_a &= V - V_0 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Ver [8].

<sup>7</sup>Fisiológicamente los canales de sodio en las células tienen una mejor capacidad de respuesta que los canales de potasio y otros canales iónicos protéicos frente a la interacción con el voltaje. De allí, las variables lentas son consideradas como constantes.

<sup>8</sup>Potencial de membrana.

<sup>9</sup>Representa el conjunto de canales iónicos conectados con el transporte de sodio y potasio.

con:  $\tau$  unidad de tiempo dimensional,  $L$  el inductor,  $I$  corriente a través del inductor-resistor,  $V_0$  el potencial a través de la batería asociada al circuito y tomando la función  $F(V)$  en forma polinómica de grado 3.

El sistema adimensional se reescribe como:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dv}{dt} &= f(v) - w - w_0 \\ \frac{dw}{dt} &= v - \gamma w - v_0\end{aligned}$$

donde

$$\varepsilon = \frac{R_1^2 C_m}{L} \quad w_0 = \frac{R_1 I_a}{V_1} \quad v_0 = \frac{V_0}{V_1} \quad \gamma = \frac{R}{R_1}.$$

### El modelo (HR)

El modelo(HR) está construido a partir de una modificación en el modelo de FitzHugh-Nagumo, y su fundamentación se encuentra en el estudio de los *trenes de impulso caóticos*. Denotamos  $v$  y  $w$  como citamos anteriormente. Entonces el modelo general de Hindmarsh-Rose está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \alpha(\beta w - f(v) + I) \\ \frac{dw}{dt} &= \gamma(g(v) - \delta w),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $I$  es la corriente aplicada,  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son constantes,  $f(v)$  está en forma polinómica de grado 3 y  $g(v)$  es una función no lineal. (Ver [8] y [1]).

## Capítulo 2

### Sistemas dinámicos no lineales

#### 2.1. Nociones de la Teoría de Sistemas dinámicos no lineales

##### 2.1.1. Soluciones de equilibrio: Estabilidad linealizada.

**Definición 2.1** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales dado por

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

es llamado un “sistema autónomo de ecuaciones diferenciales”, “campo vectorial autónomo” o simplemente “sistema autónomo”. Contrariamente, tenemos un “sistema no autónomo” dado por

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.2)$$

si la función  $f$  depende de la variable  $t$ .

**Nota:** Cualquier sistema no autónomo como (2.2) con  $x \in \mathbb{R}^n$  puede ser escrito como el sistema autónomo (2.1) con  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , simplemente colocando  $x_{n+1} = t$  y  $\dot{x}_{n+1} = 1$ .

Considere un campo vectorial autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Una "solución de equilibrio" de (2.3) es un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(\bar{x}) = 0,$$

esto es, una solución que no cambia con el tiempo. Otros términos sustitutos para el término *solución de equilibrio* son: *punto fijo*, *punto estacionario*, *singularidad* o *punto crítico*.

Una vez encontremos una solución de (2.3) es natural determinar si ésta es estable.

#### Estabilidad

Sea  $\bar{x}(t)$  cualquier solución de (2.3). Entonces,  $\bar{x}(t)$  es *estable* si las soluciones cerca a  $\bar{x}(t)$  en un momento dado lo están siempre para todos los tiempos. Son *asintóticamente estables* si las soluciones ahora convergen a  $\bar{x}(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.2 (Estabilidad de Liapunov [20])**  $\bar{x}(t)$  se dice estable (o estable Liapunov), si dado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier otra solución  $y(t)$  de (2.3) satisfaciendo  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$ , entonces  $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon$  para  $t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}$

**Definición 2.3 (Estabilidad Asintótica [20])**  $\bar{x}(t)$  se dice *asintóticamente estable* si es estable Liapunov y si existe una constante  $b > 0$  tal que, si  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$ .

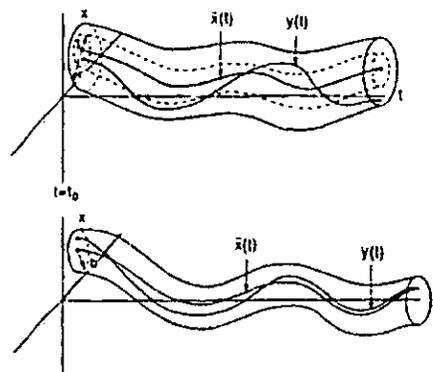


Figura 2.1: a) Estabilidad de Liapunov b) Estabilidad Asintótica.

*Linealización.*

A fin de determinar la estabilidad de  $\bar{x}(t)$  debemos entender la naturaleza de las soluciones cerca de  $\bar{x}(t)$ . Sea

$$x = \bar{x}(t) + y. \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.4) en (2.3) y aproximando en potencias de Taylor cerca de  $\bar{x}(t)$  se tiene

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2) \quad (2.5)$$

donde  $Df$  es la derivada de  $f$  y  $|\cdot|$  denota la norma sobre  $\mathbb{R}^n$  (nota: a fin de obtener (2.5),  $f$  debe ser al menos dos veces diferenciable). Usando el hecho de que  $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$ , (2.5) se vuelve

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2). \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) describe la evolución de órbitas cerca de  $\bar{x}(t)$ . Para cuestiones de estabilidad nos preocupa el comportamiento de soluciones arbitrarias cerca de  $\bar{x}(t)$ , por lo que parece razonable encontrar respuestas a través del estudio del *sistema lineal asociado*

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y. \quad (2.7)$$

Por tanto, la estabilidad de  $\bar{x}(t)$  involucra los dos pasos siguientes:

1. Determinar si la solución  $y = 0$  de (2.7) es estable.
2. Mostrar que la estabilidad (o inestabilidad) de la solución  $y = 0$  de (2.7) implica la estabilidad (o inestabilidad) de  $\bar{x}(t)$ .

El *paso 1* puede ser igualmente difícil que nuestro problema original, ya que no existen métodos generales para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes dependientes del tiempo. Sin embargo, si  $\bar{x}(t)$  es una solución de equilibrio, es decir,  $\bar{x}(t) = \bar{x}$ , entonces  $Df(\bar{x}(t)) = Df(\bar{x})$  es una matriz con entradas constantes, y la solución de (2.7) a través del punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  en  $t = 0$  puede ser inmediatamente escrita como

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t}y_0. \quad (2.8)$$

Entonces,  $y(t)$  es *asintóticamente estable* si todos los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tienen parte real negativa.

La respuesta con el *paso 2* puede ser obtenida con el siguiente teorema.

**Teorema 2.1** *Supongamos que todos los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tienen parte real negativa. Entonces la solución de equilibrio  $x = \bar{x}$  del campo vectorial no lineal (2.3) es asintóticamente estable.*

**Prueba:** La prueba de este teorema se discute en la sección siguiente cuando veamos las funciones de Liapunov.  $\square$

**Definición 2.4** ([20]) *Sea  $x = \bar{x}(t)$  un punto fijo de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\bar{x}$  es llamado un "punto fijo hiperbólico" si ninguno de los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tiene parte real 0. Por otra parte,  $\bar{x}$  es un punto fijo "no degenerado" si  $Df(\bar{x})$  no tiene algún valor propio igual a cero.*

#### *Mapeos*

Todo lo discutido hasta el momento se aplica a mapeos; mencionamos algunos detalles explícitamente. Considere un mapeo  $C^r$ , ( $r \geq 1$ )

$$x \longmapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

y supóngase que éste tiene un punto fijo en  $x = \bar{x}$ , es decir,  $\bar{x} = g(\bar{x})$ . La aplicación lineal asociada está dada por

$$y \longmapsto Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.10)$$

donde  $A \equiv Dg(\bar{x})$ .

#### *Definiciones de estabilidad para mapeos*

Las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica para órbitas de mapeos son análogas a las definiciones para campos vectoriales.

#### *Estabilidad de puntos fijos de mapeos lineales*

Sea  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . La órbita de  $y_0$  bajo el mapeo lineal (2.10) está dada por una sucesión bi-infinita (si el mapeo es un difeomorfismo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ )

$$\{\dots, A^{-n}y_0, \dots, A^{-1}y_0, y_0, Ay_0, \dots, A^n y_0, \dots\} \quad (2.11)$$

o la sucesión infinita (si el mapeo es  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , pero no invertible)

$$\{y_0, Ay_0, \dots, A^n y_0, \dots\}. \quad (2.12)$$

De (2.11) y (2.12) se muestra que el punto fijo  $y = 0$  del mapeo lineal (2.10) es asintóticamente estable si todos los valores propios de  $A$  tienen módulo

estrictamente menor que uno ( $< 1$ ).

*Estabilidad de puntos fijos de mapeos vía la aproximación lineal*

Con las modificaciones pertinentes, el teorema (2.1) es válido para mapeos.

*Terminología*

Un punto hiperbólico de un campo vectorial (resp. mapeo) es llamado de *punto silla* si alguno de sus valores propios en la linealización asociada, tiene parte real mayor que cero (resp. módulo mayor que uno) y el resto de valores propios tienen parte real menor que cero (resp. módulo menor que uno). Si todos los valores propios tienen parte real negativa (resp. módulo menor que uno), entonces el punto hiperbólico es llamado un *nodo estable*, y si todos los valores propios tienen parte real positiva (resp. módulo mayor que uno), entonces el punto fijo hiperbólico es llamado un *nodo inestable*. Si los valores propios son imaginarios puros (resp. tienen módulo uno) y no ceros, el punto fijo no hiperbólico es llamado un *centro*.

*Aplicación al Oscilador de Duffing no Forzado*

El oscilador de Duffing está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y \quad \delta \geq 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta ecuación tiene tres puntos fijos dados por

$$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0). \quad (2.13)$$

La matriz asociada con el campo vectorial linealizado está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\delta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Usando (2.13) y (2.14) los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  asociados con el punto fijo están dados por  $\lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + 4}$  y los valores propios asociados con los puntos fijos  $(\pm 1, 0)$  son los mismos para cada punto y están dados por  $\lambda_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 - 8}$ . Luego, para  $\delta > 0$ ,  $(0, 0)$  es inestable y  $(\pm 1, 0)$  son asintóticamente estables; para  $\delta > 0$ ,  $(\pm 1, 0)$  son estables en la aproximación lineal.

### 2.1.2. Funciones de Liapunov

El método de Liapunov puede ser usado para determinar la estabilidad de puntos fijos cuando la información obtenida de la linealización es inconclusa

(es decir, cuando el punto fijo no es hiperbólico).

La idea básica del método es la siguiente: supongamos un campo vectorial en el plano con un punto fijo  $\bar{x}$ , y queremos determinar cuando es o no estable. De acuerdo a las definiciones previas de estabilidad será suficiente encontrar una vecindad  $U$  de  $\bar{x}$  para que órbitas comenzando en  $U$  permanezcan en  $U$  para todo tiempo positivo. Esta condición se satisfecerá si mostramos que el campo vectorial es tangente a la frontera de  $U$  o apuntando hacia adentro o hacia  $\bar{x}$ . Ver figura 2.2.

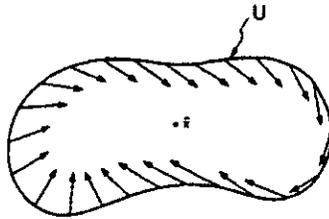


Figura 2.2: Campo vectorial sobre la frontera de  $U$ .

Mostramos esto para campos vectoriales en el plano y entonces generalizamos nuestro estudio a  $\mathbb{R}^n$ .

Considere el campo vectorial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.15)$$

que tiene un punto fijo en  $(\bar{x}, \bar{y})$  (asumamos que es estable). Queremos mostrar que en cualquier vecindad de  $(\bar{x}, \bar{y})$  las situaciones planteadas anteriormente se cumplen.

Sea  $V(x, y)$  una función de valor escalar sobre  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  (y al menos  $C^1$ ),  $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , tal que el lugar de los puntos satisfaciendo  $V(x, y) = C = \text{constante}$  forman curvas cerradas para diferentes valores de  $C$  encerrando a  $(\bar{x}, \bar{y})$  con  $V(x, y) > 0$  en una vecindad de  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Ver figura 2.3.

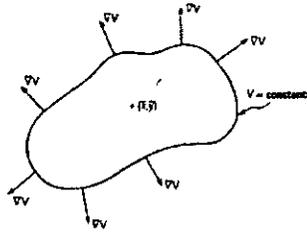


Figura 2.3: Conjunto de nivel de  $V$  y  $\nabla V$  denotada en varios puntos de la frontera.

Ahora, recuerde que el gradiente de  $V$ ,  $\nabla V$ , es un vector perpendicular al vector tangente a lo largo de cada curva  $V = C$  con los puntos en la dirección creciente de  $V$ . Ver figura 2.4.

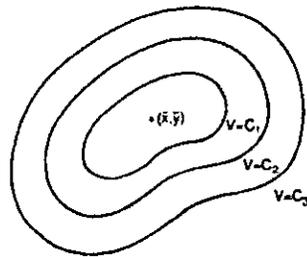


Figura 2.4: Conjuntos de nivel de  $V$ ,  $0 < C_1 < C_2 < C_3$ .

Así las cosas, en éste campo vectorial tenemos

$$\langle \nabla V(x, y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle \leq 0.$$

**Teorema 2.2** *Considere el siguiente campo vectorial*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

Sea  $\bar{x}$  un punto fijo de (2.16) y sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  definida en alguna vecindad de  $U$  de  $\bar{x}$  tal que

- i)  $V(\bar{x}) = 0$  y  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$ .
- ii)  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $U - \{\bar{x}\}$   
entonces  $\bar{x}$  es estable. Además, si

iii)  $\dot{V}(x) < 0$  en  $U - \{\bar{x}\}$   
entonces  $\bar{x}$  es asintóticamente estable.

**Prueba:** Ver [20] pág. 12.  $\square$

Denotamos a  $V$  como la *función de Liapunov*. Note que si  $U$  puede ser todo  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\bar{x}$  se dice *asintóticamente estable globalmente* siempre que i) y iii) se cumplen.

**Definición 2.5 (Homeomorfismo [12])** Sea  $X$  un espacio métrico y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ . Un "homeomorfismo" de  $A$  sobre  $B$  es un mapeo 1-1 continuo de  $A$  sobre  $B$ ,  $h : A \rightarrow B$ , tal que  $h^{-1} : A \rightarrow B$  es continuo. Los conjuntos  $A$  y  $B$  son llamados "homeomorficos o equivalentes topológicamente" si existe un homeomorfismo de  $A$  sobre  $B$ .

**Definición 2.6 (Variedad diferenciable [12])** Una "variedad diferenciable  $n$ -dimensional",  $M$ , (o variedad de clase  $C^r$ ), es un espacio métrico conexo con un cubrimiento abierto  $U_\alpha$ , es decir,  $M = \bigcup U_\alpha$ , tal que

1. Para todo  $\alpha$ ,  $U_\alpha$  es homeomorfo a la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\}$ , es decir, para todo  $\alpha$  existe un homeomorfismo de  $U_\alpha$  sobre  $B$ ,  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ , y
2. si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  y  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ ,  $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$  son homeomorfismos entonces  $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y el mapeo

$$h : h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.17)$$

es diferenciable (o de clase  $C^r$ ) y para todo  $x \in h(U_\alpha \cap U_\beta)$ , el determinante jacobiano  $\det Dh(x) \neq 0$ .

### 2.1.3. Variedades invariantes: Sistemas lineales y no lineales

**Definición 2.7 ([20])** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto, entonces

- a) (**Tiempo continuo**)  $S$  se dice invariante bajo el campo vectorial  $\dot{x} = f(x)$  si para cualquier  $x_0 \in S$  tenemos que  $x(t, 0, x_0) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

b) (**Tiempo discreto**)  $S$  se dice invariante bajo el mapeo  $x \mapsto g(x)$  si para cualquier  $x_0 \in S$  tenemos  $g^n(x_0) \in S$  para todo  $n$ .

Si nos limitamos a tiempos positivos (esto es,  $t \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ), entonces nos referimos a  $S$  como un conjunto invariante positivamente, para tiempo negativo, como conjunto invariante negativamente. Recuerde que si  $g$  no es invertible, entonces sólo  $n \geq 0$  tiene sentido.

**Definición 2.8 ([20])** Un conjunto invariante  $S \subset \mathbb{R}^n$  se dice una variedad invariante  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ) si  $S$  tiene estructura de variedad diferenciable  $C^r$ . Similarmente, un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  invariante positivamente (resp., negativamente)  $C^r$ , si  $S$  tiene la estructura de una variedad diferenciable  $C^r$ .

Ahora, estudiamos la estructura orbital cerca de puntos fijos para ver como surgen algunas importantes variedades invariantes. Empezamos con espacios vectoriales.

Sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  un punto fijo de

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Entonces, por la sección 2.1.1, es natural considerar el sistema lineal asociado

$$\dot{y} = Ax, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.19)$$

donde  $A = Df(\bar{x})$  es una matriz constante  $n \times n$ . La solución de (2.19) a través del punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  en  $t = 0$  está dado por

$$y(t) = e^{At}y_0 \quad (2.20)$$

donde

$$e^{At} = id + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (2.21)$$

y  $id$  denota la matriz identidad.

Luego,  $\mathbb{R}^n$  puede ser representado como la "suma directa" de las tres sub-espacios denotados por  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  definidos como sigue:

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{e_1, \dots, e_s\} \\ E^u &= \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\} \\ E^c &= \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\} \end{aligned} \quad s + u + c = n \quad (2.22)$$

donde  $\{e_1, \dots, e_s\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo parte real negativa,  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo parte real positiva y  $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo parte real cero.  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son los subespacios *estable*, *inestable* y *central* respectivamente.

**Teorema 2.3 (Forma canónica de Jordan [12])** Sea  $A$  una matriz real con valores propios reales  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  y valores propios complejos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$ . Entonces existe una base  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n\}$  para  $\mathbb{R}^{2n-k}$ , donde  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  y  $w_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$  son los vectores propios generalizados de  $A$ ,  $u_j = \text{Re}(w_j)$  y  $v_j = \text{Im}(w_j)$  para  $j = k+1, \dots, n$  tal que la matriz  $P = [v_1 \dots v_k v_{k+1} u_{k+1} \dots v_n u_n]$  es invertible con

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}$$

donde los bloques elementales de Jordan  $B = B_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  son de la forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

para  $\lambda$ , uno de los valores propios reales de  $A$  o de la forma

$$B = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & D & I_2 \\ 0 & \cdots & & 0 & D \end{pmatrix}$$

con  $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  para  $\lambda = a + ib$  uno de los valores propios complejos de  $A$ .

**Nota:** A manera de aplicación, considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax$$

con  $A$  una matriz  $n \times n$  con entradas reales. Entonces por el teorema anterior existe una matriz  $P$  (invertible) tal que  $P^{-1}AP = J$ , donde  $J$  es la matriz de Jordan. Luego la transformación lineal

$$y = P^{-1}x$$

da como resultado el nuevo sistema

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = Jy$$

### Ejemplo 1 ([20] pág. 16)

Supóngase que los tres valores propios de  $A$  son reales y distintos, denotados por  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  y  $\lambda_3 > 0$ . Entonces  $A$  tiene tres vectores propios linealmente independientes  $e_1, e_2$  y  $e_3$  correspondientes a  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  respectivamente. Si Formamos la matriz  $3 \times 3$  tomando como columnas los vectores propios  $e_1, e_2$  y  $e_3$ , se tiene

$$T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Entonces se sigue que

$$U \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = T^{-1}AT. \quad (2.24)$$

Recuerde que la solución de (2.19) a través de  $y_0 \in \mathbb{R}^3$  en  $t = 0$  está dada por

$$y(t) = e^{At}y_0 = e^{TUT^{-1}}y_0. \quad (2.25)$$

Usando (2.21), es fácil ver que (2.25) es lo mismo que

$$\begin{aligned} y(t) &= Te^{Ut}T^{-1}y_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0 \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} T^{-1}y_0. \end{aligned}$$

(2.26)

Ahora queremos dar una interpretación geométrica a (2.26). Recuerde de (2.26) que tenemos

$$E^s = \text{span}\{e_1, e_2\},$$

$$E^u = \text{span}\{e_3\}.$$

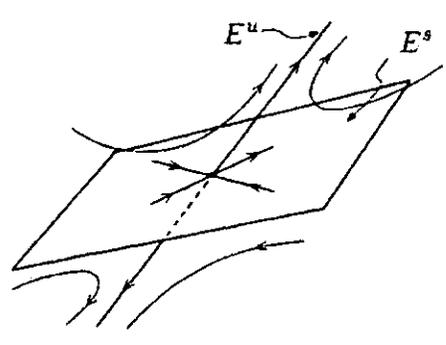


Figura 2.5: Geometría de  $E^s$  y  $E^u$  en el ejemplo 1.

*Invarianza*

Sea  $y_0 \in \mathbb{R}^3$  cualquier punto. Entonces  $T^{-1}$  es la matriz transformación que cambia las coordenadas de  $y_0$  con respecto a la base estandar de  $\mathbb{R}^3$  en coordenadas con respecto a la base  $e_1, e_2$  y  $e_3$ . Entonces, para  $y_0 \in E^s, T^{-1}y_0$  tiene la forma

$$T^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{01} \\ \tilde{y}_{02} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

y para  $y_0 \in E^u, T^{-1}y_0$  tiene la forma

$$T^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{y}_{03} \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Por tanto, sustituyendo (2.27) (resp.,(2.28)) en (2.26), es fácil ver que  $y_0 \in E^s$  (resp., $E^u$ ) implica  $e^{At}y_0 \in E^s$ (resp., $E^u$ ). Entonces  $E^s$  y  $E^u$  son variedades invariantes.

*Comportamiento Asintótico*

Usando (2.27) y (2.26), podemos ver que, para cualquier  $y_0 \in E^s$ , tenemos  $e^{At}y_0 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  y, para cualquier  $y_0 \in E^u$ , tenemos  $e^{At}y_0 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  (ver figura 2.5 para una ilustración geométrica de  $E^s$  y  $E^u$ ).

### Ejemplo 2 ([20] pág. 17)

Supóngase que  $A$  tiene dos valores propios complejos conjugados  $p + iw$ ,  $p < 0$ ,  $w \neq 0$  y un valor propio  $\lambda > 0$ . Entonces  $A$  tiene tres vectores propios generalizados  $e_1, e_2$  y  $e_3$ , que pueden ser usados como las columnas de una matriz  $T$  a fin de transformar  $A$  como sigue

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} p & w & 0 \\ -w & p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = T^{-1}AT. \quad (2.29)$$

Del ejemplo 1 se puede ver en este ejemplo que

$$\begin{aligned} y(t) &= Te^{\Lambda t}T^{-1}y_0 \\ &= T \begin{pmatrix} e^{pt} \cos wt & e^{pt} \sin wt & 0 \\ -e^{pt} \sin wt & e^{pt} \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & e^{pt} \end{pmatrix} T^{-1}y_0. \end{aligned}$$

Utilizando los mismos argumentos que en el ejemplo 1 se muestra que  $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$  es una variedad invariante de soluciones que decrecen exponencialmente a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ , y  $E^u = \text{span}\{e_3\}$  es una variedad invariante inestable de soluciones que decrecen exponencialmente a cero cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Ver figura 2.6.

### Ejemplo 3 ([20] pág. 18)

Supóngase que  $A$  tiene dos valores propios reales que están repetidos,  $\lambda < 0$ , y un tercer valor propio distinto  $\gamma > 0$  tal que existen vectores propios generalizados  $e_1, e_2$  y  $e_3$  que pueden ser usados para formar las columnas de una matriz  $T$  tal que  $A$  es transformada como

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = T^{-1}AT. \quad (2.30)$$

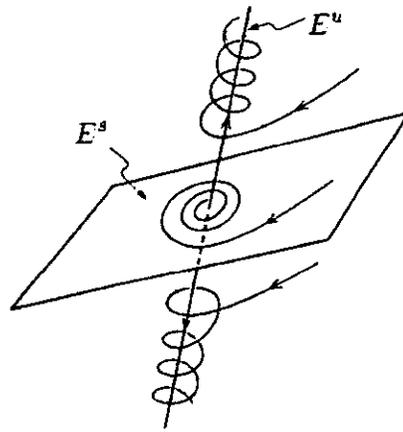


Figura 2.6: Geometría de  $E^s$  y  $E^u$  para  $w < 0$ .

Siguiendo los ejemplos 1 y 2, en este ejemplo, la solución a través del punto  $y_0 \in \mathbb{R}^3$  en  $t = 0$  es dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= T e^{\Lambda t} T^{-1} y_0 \\ &= T \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma t} \end{pmatrix} T^{-1} y_0. \end{aligned}$$

Usando los mismos argumentos que en el ejemplo 1, vemos que  $E^s = \text{span}\{e_1, e_2\}$  es una variedad invariante de soluciones que decrecen a  $y = 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , y  $E^u = \text{span}\{e_3\}$  es una variedad invariante de soluciones que decrecen a  $y = 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Ver figura 2.7.

#### *El Sistema No Lineal*

Recuerde que nuestra motivación original es estudiar el sistema lineal

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.31)$$

donde  $A = Df(\bar{x})$ , fue obtenida de la naturaleza de las soluciones cerca del punto fijo  $x = \bar{x}$  de la ecuación lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.32)$$

Primero transformamos el punto fijo  $x = \bar{x}$  de (2.32) a el origen vía la translación  $y = x - \bar{x}$ . En este caso, de (2.32) resulta

$$\dot{y} = f(\bar{x} + y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

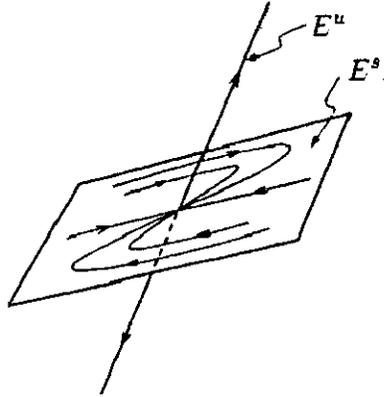


Figura 2.7: Geometría de  $E^s$  y  $E^u$ .

Expandiendo en serie de Taylor  $f(\bar{x} + y)$  cerca de  $x = \bar{x}$  se tiene que

$$\dot{y} = Df(\bar{x}) + R(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.34)$$

donde  $R(y) = O(|y|^2)$  y hemos utilizado  $f(\bar{x}) = 0$ . Del teorema de la forma canónica de Jordan podemos encontrar una transformación lineal que transforma la ecuación lineal (2.44) en la forma diagonal en bloque

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

donde  $T^{-1}y \equiv (u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c$ ,  $s + u + c = n$ .  $A_s$  es una matriz  $s \times s$  teniendo valores propios con parte real negativa,  $A_u$  es una matriz  $u \times u$  teniendo valores propios con parte real positiva y  $A_c$  es una matriz  $c \times c$  teniendo valores propios con parte real cero. Usando esta misma transformación lineal, transformamos las coordenadas del campo vectorial no lineal (2.34) dando como resultado

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, u, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, u, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, u, w) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $R_s(u, u, w)$ ,  $R_u(u, u, w)$  y  $R_c(u, u, w)$  son las componentes  $s, u$  y  $c$  respectivamente del vector  $T^{-1}R(t(u, v, w))$ .

**Teorema 2.4 (Variedades locales de puntos fijos [20])** *Supóngase que (2.36) es  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Entonces el punto fijo  $(u, v, w) = 0$  de (2.36) posee una variedad local estable  $C^r$  de dimensión  $s$ ,  $W_{loc}^s(0)$ , una variedad local inestable  $C^r$  de dimensión  $u$ ,  $W_{loc}^u(0)$  y una variedad local central  $C^r$  de dimensión  $c$ ,  $W_{loc}^c(0)$ , todas intersectadas en  $(u, v, w) = 0$ . Estas variedades son tangentes a la respectiva variedad invariante del campo vectorial (2.35) en el origen y, luego, son representables localmente como grafos. En particular tenemos*

$$W_{loc}^s(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid v = h_v^s(u), w = h_w^s(u), \\ Dh_v^s(0) = 0, Dh_w^s(0) = 0; |u| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

$$W_{loc}^u(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^u(v), w = h_w^u(v), \\ Dh_u^u(0) = 0, Dh_w^u(0) = 0; |v| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

$$W_{loc}^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^c(w), v = h_v^c(w), \\ Dh_u^c(0) = 0, Dh_v^c(0) = 0; |w| \text{ suficientemente pequeño}\}$$

donde  $h_v^s(u)$ ,  $h_w^s(u)$ ,  $h_u^u(v)$ ,  $h_w^u(v)$ ,  $h_u^c(w)$ , y  $h_v^c(w)$  son funciones  $C^r$ . Sin embargo,  $W_{loc}^s(0)$ ,  $W_{loc}^u(0)$  tienen propiedades asintóticas de  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente. Es decir, soluciones de (2.36) con condiciones iniciales en  $W_{loc}^s(0)$  (resp.,  $W_{loc}^u(0)$ ) aproximan el origen en un ritmo exponencial asintótico cuando  $t \rightarrow +\infty$  (resp.,  $t \rightarrow -\infty$ ).

#### Mapeos

Una teoría idéntica puede ser desarrollada para mapeos. Resumimos estos detalles: Considere un difeomorfismo  $C^r$

$$x \mapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.37)$$

Supóngase que (2.37) tiene un punto fijo en  $x = \bar{x}$  y queremos conocer la naturaleza de las órbitas cerca de este punto fijo. Entonces es natural considerar el mapeo lineal asociado

$$y \mapsto Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.38)$$

donde  $A \equiv Dg(\bar{x})$ . El mapeo lineal (2.38) tiene las variedades invariantes dadas por

$$\begin{aligned} E^s &= \text{span}\{e_1, \dots, e_s\} \\ E^u &= \text{span}\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\} \quad s + u + c = n \\ E^c &= \text{span}\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\} \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, \dots, e_s\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo *módulo menor que uno*,  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo *módulo mayor que uno* y  $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$  son los vectores propios (generalizados) de  $A$  correspondientes a los valores propios de  $A$  teniendo *módulo igual a uno*. Obsérvese que esto se logra colocando  $A$  en la forma canónica de Jordan y notando que la órbita del mapeo lineal (2.38) a través del punto  $y \in \mathbb{R}^n$  está dada por

$$\{\dots, A^{-n}y_0, \dots, A^{-1}y_0, y_0, Ay_0, \dots, A^n y_0, \dots\}. \quad (2.39)$$

En el caso de mapeos, el teorema (2.4) se cumple, es decir, el mapeo no lineal (2.37) tiene una variedad invariante estable  $s$  – *dimensional* de clase  $C^r$ , una variedad invariante inestable  $u$  – *dimensional* de clase  $C^r$  y una variedad invariante central  $c$  – *dimensional* de clase  $C^r$ , todas intersectando en el punto fijo. Además, estas variedades son todas tangentes a las respectivas variedades invariantes del mapeo lineal (2.38) en el punto fijo.

#### 2.1.4. Soluciones periódicas

Consideramos campos vectoriales

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.40)$$

y mapeos

$$x \mapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.41)$$

**Definición 2.9 (Campos Vectoriales [20])** Una solución de (2.40) por el punto  $x_0$  se dice *periódica de periodo  $T$*  si existe  $T > 0$  tal que  $x(t, t_0) = x(t + T, x_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . (Mapeos) la órbita de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se dice *periódica de periodo  $k > 0$*  si  $g^k(x_0) = x_0$ .

Recuerde que si la solución de (2.40) es periódica de periodo  $T$  se tiene que es periódica de periodo  $nT, n > 1$ . Sin embargo, por el periodo de una órbita entendemos el  $T > 0$  más pequeño posible tal que la definición (2.9) se cumpla. Una afirmación similar se cumple para órbitas periódicas de mapeos.

**Nota:**

Discutiremos "la estabilidad de órbitas periódicas de campos vectoriales" cuando veamos los *mapas de Poincaré*.

Ahora, consideremos los campos vectoriales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $f$  y  $g$  son al menos  $C^1$ .

**Teorema 2.5 (Criterio de Bendixson [20])** *Si sobre una región  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  simplemente conexa la expresión  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$  y no cambia de signo, entonces (2.42) no tiene órbitas cerradas situadas enteramente en  $D$ .*

**Prueba:** Usando (2.42) y aplicando la regla de la cadena encontramos que sobre cualquier órbita cerrada  $\Gamma$  se sigue

$$\int_{\Gamma} f dy - g dx = 0. \quad (2.43)$$

Por el teorema de Green esto implica que

$$\int_S \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (2.44)$$

donde  $S$  es el interior acotado por  $\Gamma$ . Pero si  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$  y no cambia de signo, entonces esto no puede ser verdad. Por lo tanto no deben existir órbitas cerradas en  $D$ .  $\square$

**Teorema 2.6 ([20])** *Sea  $B(x, y) C^1$  sobre una región  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  simplemente conexa. Si  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$  y no cambia de signo en  $D$ , entonces (2.42) no tiene órbitas cerradas situadas enteramente en  $D$ .*

### 2.1.5. Propiedades de los campos vectoriales: Existencia, Unicidad, Diferenciabilidad y Flujos

Considere el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.45)$$

donde  $f(x, t)$  es  $C^r$ ,  $r \geq 1$  sobre algún conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ .

#### Existencia, Unicidad, Diferenciabilidad con respecto a condiciones iniciales

**Teorema 2.7** *Sea  $(x_0, t_0) \in U$ . Entonces existe una solución de (2.45) para el punto  $x_0$  en  $t = t_0$ , denotado por  $x(t, t_0, x_0)$  con  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ , para  $|t - t_0|$  suficientemente pequeño. Esta solución es única en el sentido que cualquier otra solución de (2.45) por el punto  $t = t_0$  debe ser la misma como  $x(t, t_0, x_0)$  sobre su intervalo común de existencia. Por otra parte,  $x(t, t_0, x_0)$  es una función  $C^r$  de  $t, t_0$  y  $x_0$ .*

**Prueba:** Ver [2].  $\square$

*Continuación de soluciones*

Sea  $C \subset U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  un conjunto compacto conteniendo  $(x_0, y_0)$ .

**Teorema 2.8** *La solución  $x(t, t_0, x_0)$  puede ser extendida únicamente hacia adelante o hacia atrás salvo en la frontera de  $C$ .*

**Prueba:** Ver [5].  $\square$

*Diferenciabilidad con respecto a parámetros*

Considere el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, t; \mu) \quad (2.46)$$

donde  $f(x, t; \mu)$  es  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ) sobre algún conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^p$ .

**Teorema 2.9** *Para  $(t_0, x_0, \mu) \in U$  la solución  $x(t, t_0, x_0, \mu)$  es una función  $C^r$  de  $t, t_0, x_0$  y  $\mu$ .*

**Prueba:** Ver [2].  $\square$

En esta fase queremos señalar algunas propiedades especiales de  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ) para campos vectoriales autónomos que serán de utilidad.

*Campos vectoriales autónomos*

Considere el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.47)$$

donde  $f(x)$  es  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , sobre algún conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Por simplicidad supóngase que las soluciones existen en todo tiempo.

**Proposición 2.10** *Si  $x(t)$  es una solución de (2.47), entonces así es  $x(t+\tau)$  para cada  $\tau \in \mathbb{R}$ .*

**Prueba:** por definición

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)). \quad (2.48)$$

Luego, tenemos

$$\left. \frac{dx(t+\tau)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0+\tau} = f(x(t_0+\tau)) = f(x(t+\tau)) \Big|_{t=t_0}$$

o

$$\left. \frac{dx(t+\tau)}{dt} \right|_{t=t_0} = f(x(t+\tau)) \Big|_{t=t_0}. \quad (2.49)$$

Ya que (2.49) es cierto para cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$  el resultado se sigue.  $\square$

**Proposición 2.11** *Para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}$  existe solo una solución de (2.47) pasando por este punto.*

**Prueba:** Si mostramos que la proposición no es verdad, entonces contradicimos la unicidad de las soluciones. En efecto:

Sea  $x_1(t), x_2(t)$  soluciones de (2.47) satisfaciendo

$$x_1(t_1) = x_0$$

$$x_2(t_2) = x_0.$$

Por la proposición (2.10),

$$\tilde{x}_2(t) \equiv x_2(t - (t_1 - t_2));$$

ya que también es una solución de (2.47) satisfaciendo

$$\tilde{x}_2(t_1) = 0.$$

Luego por el teorema (2.7),  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  deben ser idénticas.  $\square$

**Proposición 2.12** i)  $x(t, x_0)$  es  $C^r$ .

ii)  $x(0, x_0) = x_0$

iii)  $x(t + s, x_0) = x(t, x(s + x_0))$ .

**Prueba:** i) se sigue del teorema (2.7), ii) es la definición y iii) se sigue de la proposición (2.11); es decir,  $\tilde{x}(t, x_0) \equiv x(t + s, x_0)$  y  $x(t, x(s, x_0))$  son ambas soluciones de (2.47) satisfaciendo las condiciones iniciales en  $t = 0$ . Luego por la unicidad ellas coinciden.  $\square$

(Nota: la proposición (2.12) muestra que las soluciones de (2.47) forman una familia uni-paramétrica de difeomorfismos  $C^r$  en el espacio fase. Esto es referenciado como un *flujo de fase* o *flujo*; el cual se denota por  $\phi(t, x)$  o  $\phi_t(x)$ ). Formalmente damos la siguiente

**Definición 2.10 (flujo de una ecuación diferencial [12])** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(E)$  y el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.50}$$

con la condición inicial  $x(0) = x_0$ . Además considere  $\phi(t, x_0)$  la solución del sistema (2.50) definida en su intervalo de existencia máxima  $I(x_0)$ . Entonces para  $t \in I(x_0)$ , el conjunto de mapeos definidos por

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

es llamado el "flujo de la ecuación diferencial (2.50); esto es también referido como el "flujo para el campo vectorial  $f(x)$ ".

*Campos vectoriales no autónomos*

Las proposiciones (2.10),(2.11) y (2.12) no se cumplen para campos vectoriales no autónomos. Sin embargo podemos siempre pasar de un campo vectorial no autónomo a uno autónomo redefiniendo una nueva variable dependiente. Esto es como sigue. Escribiendo (2.45) como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x, t)}{1} \tag{2.51}$$

y usando la regla de la cadena, introducimos una nueva variable independiente  $s$  así que de (2.51) se tiene

$$\frac{dx}{ds} \equiv x' = f(x, t)$$

$$\frac{dt}{ds} \equiv t' = 1. \quad (2.52)$$

Si definimos  $y = x(x, t)$  y  $g(y) = (f(x, t), 1)$ , vemos que de (2.52) se sigue

$$y' = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1. \quad (2.53)$$

Por supuesto, el conocimiento de las soluciones de (2.53) implica el conocimiento de las soluciones de (2.45) y viceversa. Por ejemplo, si  $x(t)$  es una solución de (2.45) pasando por  $x_0$  en  $t = t_0$ , esto es,  $x(t_0) = x_0$ , entonces  $y(s) = (x(s + t_0), t(s) = s + t_0)$  es una solución de (2.53) que pasa por  $y_0 \equiv (x(t_0), t_0)$  en  $s = 0$ .

Cada campo vectorial puede ser visto como un campo vectorial autónomo. De ahora en adelante estaremos definiendo en el contexto de campos vectoriales autónomos y mapeos.

### 2.1.6. Comportamiento Asintótico

Ahora desarrollamos una técnica que trata las nociones de comportamiento en el infinito y *observable* para órbitas de sistemas dinámicos. Serán de interés los mapeos  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) y campos vectoriales autónomos sobre  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos como sigue

$$\text{Campo vectorial} : \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.54)$$

$$\text{Mapeo} : x \mapsto g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.55)$$

El *flujo* generado por (2.54) será denotado  $\phi(t, x)$ .

**Definición 2.11 ([20])** Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es llamado un  $\omega$ -punto límite de  $x \in \mathbb{R}^n$ , denotado por  $\omega(x)$ , si existe una sucesión  $\{t_i\}$ ,  $t_i \rightarrow \infty$  tal que

$$\phi(t_i, x) \rightarrow x_0.$$

Los  $\alpha$ -puntos límites son definidos similarmente tomando la sucesión  $\{t_i\}$ ,  $t_i \rightarrow -\infty$

**Ejemplo 4 ([20] pág. 41)**

Considere un campo vectorial sobre el plano con un punto silla hiperbólico, como se muestra en la figura 2.8. Entonces  $x$  es un  $\omega$ -punto límite de cualquier punto sobre una variedad estable y el  $\alpha$ -punto límite de cualquier variedad inestable.

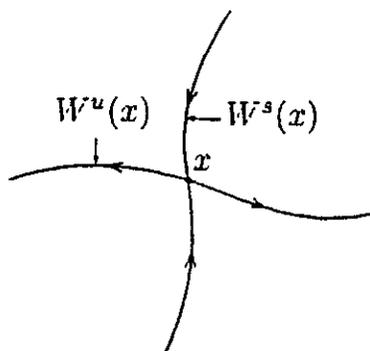


Figura 2.8: Interpretación geométrica del ejemplo 4.

#### Ejemplo 5 ([20] pág. 41)

Este ejemplo muestra por qué es necesario tomar una subsucesión en tiempos,  $\{t_i\}$  y no simplemente permitir que  $t \uparrow \infty$  en la definición de  $\alpha$  y  $\omega$ -punto límite. Considere un campo vectorial sobre el plano con una órbita atractora,  $\gamma$ , como muestra la figura 2.9. Entonces órbitas que no comienzan en  $\gamma$  se enrollan alrededor de  $\gamma$ .

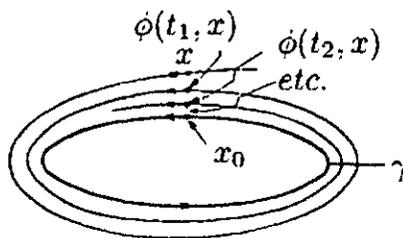


Figura 2.9:

Ahora para cada punto sobre  $\gamma$ , podemos encontrar una subsucesión  $\{t_i\}$ , tal que  $\phi(t_i, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , que se aproxima al punto cuando  $i \uparrow \infty$ . Por tanto,  $\gamma$  es el  $\omega$ -conjunto de  $x$  como esperábamos. Sin embargo  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) \neq \gamma$ .

**Definición 2.12 ([20])** El conjunto de todos los  $\omega$ -puntos límite de un flujo o mapeo es llamado  $\omega$ -conjunto límite. El  $\alpha$ -conjunto límite se define de manera análoga.

(Nota: la definición para mapeos también se hace de manera análoga).

**Definición 2.13 ([20])** Un punto  $x_0$  es llamado no errante si se cumple lo siguiente:

Flujos: Para cualquier vecindad  $U$  de  $x_0$  y  $T > 0$ , existe algún  $|t| > T$  tal que

$$\phi(t, U) \cap U \neq \emptyset.$$

Mapeos: Para cualquier vecindad  $U$  de  $x_0$ , existe algún  $n \neq 0$  tal que

$$g^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

(Nota: si el mapeo no es invertible, entonces debemos tomar  $n > 0$ ).

**Definición 2.14 ([20])** El conjunto de todos los puntos no errantes de un mapeo o flujo es llamado conjunto no errante del mapeo particular o flujo.

**Definición 2.15 ([20])** Un conjunto cerrado invariante  $A \subset \mathbb{R}^n$  es llamado un conjunto atractor si existe alguna vecindad  $U$  de  $A$  tal que

flujos:  $\forall x \in U, \forall t \geq 0, \phi(t, x) \rightarrow A$  cuando  $t \uparrow \infty$ .

mapeos:  $\forall x \in U, \forall n \geq 0, g^n(x) \in U$  y  $g^n(x) \rightarrow A$  cuando  $t \uparrow \infty$ .

Si tenemos un conjunto atractor es natural preguntarse que puntos en el plano fase se aproximan a un conjunto atractor asintóticamente.

**Definición 2.16 ([20])** El dominio de atracción de  $A$  está dado por

$$\text{flujos: } \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, U)$$

$$\text{mapeos: } \bigcup_{n \leq 0} g^n(U), \text{ donde } U \text{ es definido con en (2.15).}$$

En la práctica, un camino para localizar conjuntos atractores es primero encontrar una región atrapada.

**Definición 2.17 ([20])** Un conjunto  $M$  cerrado y conexo es llamado una *región atrapada* si  $\phi(t, M) \subset M, \forall t \geq 0$  o equivalentemente, si el campo vectorial sobre la frontera de  $M$  (denotada por  $\partial M$ ) está apuntando al interior de  $M$ . Entonces

$$\bigcap_{t>0} \phi(t, M) := A$$

es un conjunto atractor.

**Ejemplo 6 ([20] pág. 44)** Considere el campo vectorial autónomo

$$\dot{x} = x - x^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1.$$

Este campo vectorial tiene un punto silla en  $(0, 0)$  y dos nodos estables en  $(\pm 1, 0)$ . El eje  $y$  es la variedad estable de  $(0, 0)$ . Elegimos un elipse,  $m$ , conteniendo tres puntos fijos como muestra la figura 2.10. De manera que  $m$  es un región atractora y que el intervalo  $[-1, 1] = \bigcap_{t \geq 0} \phi(t, m)$  es un conjunto atractor.

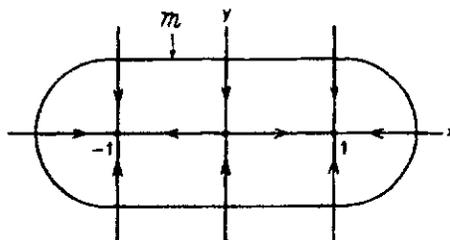


Figura 2.10: Región atractora del ejemplo 6 en  $[-1, 1]$ .

**Definición 2.18 ([20])** Un conjunto invariante cerrado  $A$  se dice *transitivo topológicamente* si, para cualesquiera conjuntos abiertos  $U, V \subset A$   
 flujos:  $\exists t \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$   
 mapeos:  $\exists n \in \mathbb{Z}$  tal que  $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Definición 2.19 ([20])** Un atractor es un conjunto atractor transitivo topológicamente.

### 2.1.7. El teorema de Poincaré-Bendixson

Consideramos campos vectoriales  $C^r$ ,  $r \geq 1$

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (2.56)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (x, y) \in P \quad (2.57)$$

donde  $P$  denota el espacio fase, que debe ser el plano, cilindro o la esfera bi-dimensional. Denotamos el flujo generado por este campo vectorial por

$$\phi(\cdot),$$

donde  $\cdot$  denota el punto  $(x, y) \in P$ . La siguiente proposición es fundamental e independiente de la dimensión del espacio fase.

**Proposición 2.13** *Sea  $\phi(\cdot)$  un flujo generado por un campo vectorial y sea  $M$  un conjunto compacto invariante positivamente para este flujo. Entonces, para  $p \in M$ , tenemos*

- i)  $\omega(p) \neq \emptyset$ ;
- ii)  $\omega(p)$  es cerrado;
- iii)  $\omega(p)$  es invariante bajo el flujo, es decir,  $\omega(p)$  es la unión de órbitas;
- iv)  $\omega(p)$  es conexo.

**Prueba:** Ver [20], pág. 16.  $\square$

**Definición 2.20 ([20])** *Sea  $\Sigma$  continua y arco-conexa en  $P$ . Entonces  $\Sigma$  se dice "transversa" al campo vectorial sobre  $P$  si el producto punto vectorial de la unidad normal en cada punto sobre  $\Sigma$  con el campo vectorial en ese punto es no cero y no cambia de signo sobre  $\Sigma$ . Equivalentemente, ya que el campo vectorial es  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , el campo vectorial no tiene puntos fijos sobre  $\Sigma$  y tampoco tangentes a  $\Sigma$ .*

Para cualquier  $p \in P$ , denotaremos la órbita de  $p$  bajo el flujo  $\phi_t(\cdot)$  para tiempos positivos por  $O_+(p)$  (también llamada semiórbita positiva de  $p$ ).

**Lema 2.1** *Sea  $\Sigma \subset M$  un arco transverso a el campo vectorial. La órbita positiva a través de cualquier punto  $p \in M$ ,  $O_+(p)$ , intersecta  $\Sigma$  en una sucesión monótona; esto es, si  $p_i$  es la  $i$ -ésima intersección de  $O_+(p)$  con  $\Sigma$ , entonces  $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$*

**Prueba:** Ver [20] pág. 47.  $\square$

**Corolario 2.14 ([20])** *El conjunto  $\omega$ -límite de  $p(\omega(p))$  intersecta  $\Sigma$  en al menos un punto.*

**Lema 2.2** *Si  $\omega(p)$  no contiene puntos fijos, entonces  $\omega(p)$  es una órbita cerrada.*

**Prueba:** Ver [20] pág. 48.  $\square$

**Lema 2.3** *Sean  $p_1$  y  $p_2$  puntos fijos distintos del campo vectorial conteniendo  $\omega(p)$ ,  $p \in M$ . Entonces existe al menos una órbita  $\gamma \subset \omega(p)$  tal que  $\alpha(\gamma) = p_1$  y  $\omega(\gamma) = p_2$  (nota: para  $\alpha(\gamma)$  entendemos el conjunto  $\alpha$ -límite de cada punto sobre  $\gamma$ ; similarmente para  $\omega(\gamma)$ ).*

**Prueba:** Ver [20] pág. 49.  $\square$

**Teorema 2.15 (Poincaré - Bendixson)** *Sea  $M$  una región invariante positivamente para el campo vectorial conteniendo un número finito de puntos fijos. Sea  $p \in M$ , y considere  $\omega(p)$ . Entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

- i)  $\omega(p)$  es un punto fijo;
- ii)  $\omega(p)$  es una órbita cerrada;
- iii)  $\omega(p)$  consiste de un número finito de puntos fijos  $p_1, \dots, p_n$  y órbitas  $\gamma$  con  $\alpha(\gamma) = p_i$  y  $\omega(\gamma) = p_j$ .

**Prueba:** Ver [20] pág. 49.  $\square$

## 2.2. Mapas de Poincaré: Teoría, construcción y ejemplos

### 2.2.1. Mapas de Poincaré : Ejemplos

La idea de reducir el estudio del sistema de tiempo continuo (flujos) a el estudio de un sistema de tiempo discreto asociado (mapeo) se debe a Poincaré. Ahora, es posible asociar a cada sistema de tiempo discreto una ecuación

diferencial ordinaria la cual se conoce como *mapa de Poincaré*.

Desafortunadamente no existen métodos generales aplicables a ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que la construcción del mapa de Poincaré requiere algún conocimiento de la estructura geométrica del espacio fase de la ecuación diferencial ordinaria.

En la construcción de mapas de Poincaré pueden darse en tres casos que son:

1. En el estudio de la estructura orbital cerca a una órbita periódica de una ecuación diferencial ordinaria.
2. En el caso donde el espacio fase de una ecuación diferencial ordinaria es periódico con oscilaciones periódicas forzadas.
3. En el estudio de la estructura orbital cerca de una órbita homoclínica o heteroclínica.

### CASO 1: Mapa de Poincaré cerca de una órbita periódica

Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.58)$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^r$  sobre algún conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $\phi(t, \cdot)$  el flujo generado por (2.58). Supóngase que (2.58) tiene una solución periódica de período  $T$  que denotamos por  $\phi(t, x_0)$  donde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es cualquier punto a través del cual pasa la solución (es decir,  $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$ ). Sea  $\Sigma$  una superficie de dimensión  $n-1$  *transversa* a el campo vectorial en  $x_0$  (nota: *transversa* significa que  $f(x) \cdot n(x) \neq 0$  con el producto punto usual y  $n(x)$  es la normal a  $\Sigma$  en  $x$ ); nos referimos a  $\Sigma$  como la sección transversal a el campo vectorial (2.58). Ahora, en el teorema (2.7) se prueba que  $\phi(t, x)$  es  $C^r$  si  $f(x)$  es  $C^r$ ; entonces podemos encontrar un conjunto abierto  $V \subset \Sigma$  tal que las trayectorias comenzando en  $V$  retornan a  $\Sigma$  en un tiempo cerrado de  $T$ . El mapa que asocia puntos en  $V$  con sus puntos de primer retorno a  $\Sigma$  es llamado *mapa de Poincaré*, que se denota por  $P$ . Más precisamente

$$P : V \rightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto \phi(\tau(x), x),$$

donde  $\tau(x)$  es el tiempo de retorno del punto  $x$  a  $\Sigma$ . Note que, por construcción, tenemos  $\tau(x_0) = T$  y  $P(x_0) = x_0$ . Por tanto, un punto fijo de  $P$  corresponde a la órbita periódica de (2.58), y un punto  $k$  periódico de  $P$  (esto es, un punto  $x \in V$  tal que  $P^k(x) = x$  probado que  $P^i(x) \in V, i = 1, \dots, k$ ) correspondiente a una órbita periódica de (2.58) que agujera  $\Sigma$   $k$  tiempos, antes de que se cierre. Ver figura 2.11.

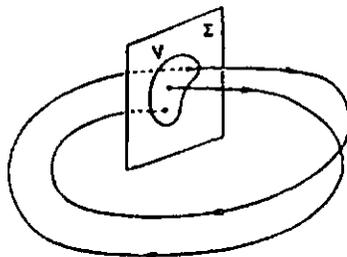


Figura 2.11: Dinámica de un mapa de Poincaré.

**Ejemplo 7** (ver [20] pág. 66) *Considere el campo vectorial sobre  $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - \mu y - y(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\quad (2.59)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^1$  es un parámetro (nota: el estudio de este tipo de sistemas se analiza cuando vemos la bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré). Nuestro objetivo es estudiar (2.59) para construir un mapa de Poincaré unidimensional asociado y analizar la dinámica del mapa. De acuerdo a la discusión previa, necesitamos encontrar una órbita periódica de (2.59), construir una sección transversal a la órbita, y estudiar como los puntos sobre la sección transversal retornan a la sección transversal bajo el flujo generado por (2.59).

Para construir el mapa de Poincaré se requiere algún conocimiento de la geometría del flujo generado por (2.59). En este ejemplo el proceder es facilitado al considerar el campo vectorial en un "mejor aproximado" sistema de coordenadas; en este caso, coordenadas polares.

Sea

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sen \theta\end{aligned}\quad (2.60)$$

entonces (2.59) queda como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Supóngase que  $\mu > 0$ . Entonces resolviendo el sistema por separación de variables o como una ecuación de Bernoulli; el flujo de (2.61) está dado por

$$\phi_t(r_0, \theta_0) = \left( \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-2\mu t} \right)^{1/2}, t + \theta_0 \right)\tag{2.62}$$

Obsérvese que (2.61) tiene una órbita periódica dada por  $\phi_t(\sqrt{\mu}, \theta_0)$ . Ahora construimos el mapa de Poincaré cerca de ésta órbita periódica. Definimos la sección transversal  $\Sigma$  del campo vectorial (2.61) por

$$\Sigma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 / r > 0, \theta = \theta_0\}$$

De (2.61) vemos que el "tiempo de vuelo" para órbitas comenzando sobre  $\Sigma$  a retornar a  $\Sigma$  está dado por  $t = 2\pi$ . Usando ésta información, el mapa de Poincaré está dado por

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$(r_0, \theta_0) \mapsto \phi_{2\pi}(r_0, \theta_0) = \left( \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\pi\mu} \right)^{1/2}, t + \theta_0 \right)\tag{2.63}$$

o simplemente

$$r \mapsto \left( \left( \frac{1}{\mu} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\pi\mu} \right)^{1/2} \right),$$

El mapa de Poincaré tiene un punto fijo en  $r = \sqrt{\mu}$ . Podemos calcular la estabilidad en el punto fijo calculando los valores propios de  $DP(\sqrt{\mu})$  (la derivada de un mapeo uni-dimensional). Un simple cálculo muestra que

$$DP(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu}.$$

Por lo tanto, el punto fijo  $r = \sqrt{\mu}$  es asintóticamente estable. Ver figura 2.12.

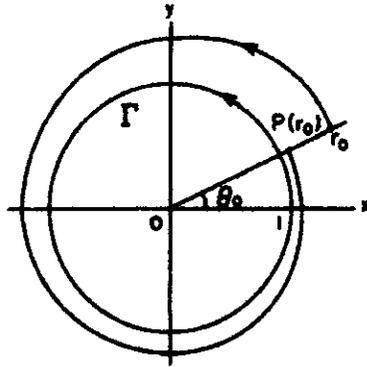


Figura 2.12: Ejemplo 7 para  $\mu = 1$ .

Ilustramos ahora, como el estudio de los mapas de Poincaré cerca de órbitas periódicas debe simplificar la geometría.

Considere un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$  generado por  $\phi_t(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Supóngase que también que éste tiene una órbita periódica,  $\gamma$ , de periodo  $T > 0$  pasando por el punto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , es decir,

$$\phi_t(x_0) = \phi_{t+T}(x_0).$$

Construimos por la forma usual un mapa de Poincaré,  $P$ , cerca a ésta órbita periódica construyendo una sección transversal,  $\Sigma$ , del campo vectorial a través de  $x_0$  y considerando el retorno de puntos a  $\Sigma$  bajo el flujo generado por el campo vectorial; ver figura 2.11.

Ahora considere el mapa de Poincaré  $P$ . El mapa tiene un punto fijo en  $x_0$ . Supóngase que el punto fijo es un punto silla que tiene una variedad estable uni-dimensional,  $W^s(x_0)$  y una variedad inestable uni-dimensional,  $W^u(x_0)$ ; ver figura 2.13. Ahora queremos mostrar como estas variedades se generan en el flujo y como se relacionan con  $\gamma$ .

Matemáticamente, esto es representado como sigue

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(x_0)),$$

$$W^u(\gamma) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(x_0)).$$

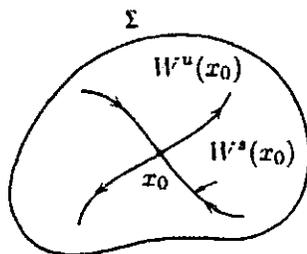


Figura 2.13: Variedades estable e inestable en un punto silla.

Esto muestra que  $W^s(\gamma)$  (resp.,  $W^u(\gamma)$ ) es diferenciable, así como  $W^s(x_0)$  (resp.,  $W^u(x_0)$ ). Esto se debe a que  $\phi_t(x)$  es diferenciable con respecto a  $x$ . Ver figura 2.14.

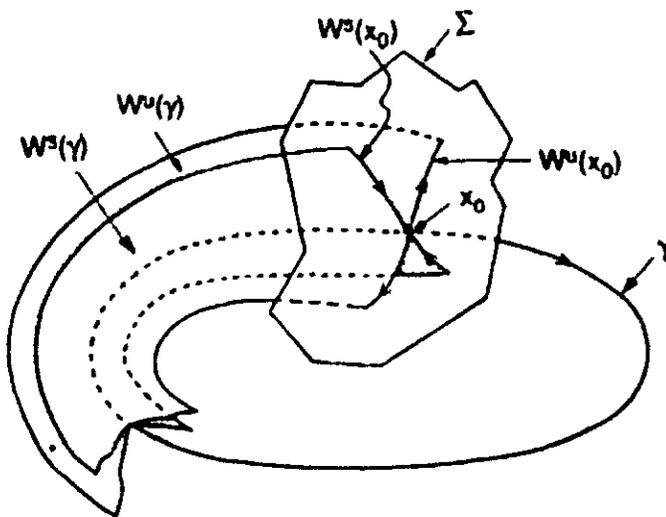


Figura 2.14: Geometría de la sección transversal a  $\gamma$ .

Luego, en  $\mathbb{R}^3$ ,  $W^s(\gamma)$  y  $W^u(\gamma)$  son superficies de dimensión dos que se intersectan en una curva cerrada.

## CASO 2: Mapa de Poincaré de una ecuación diferencial ordinaria de tiempo periódico

Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.64)$$

donde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^r$  sobre algún conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ . Supóngase que el tiempo de dependencia de (2.64) está en la forma de una ecuación autónoma de  $n + 1$  dimensiones definiendo la función

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^1 &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \theta(t) = \omega t, \quad \text{mod}(2\pi). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Usando (2.65) y la ecuación (2.64) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= \omega \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Denotamos el flujo generado por (2.66) como  $\phi(t) = (x(t), \theta(t)) = \omega t + \theta_0 \pmod{2\pi}$ . Definimos una sección transversal  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  a el campo vectorial (2.66) por

$$\Sigma^{\bar{\theta}_0} = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid \theta = \bar{\theta}_0 \in (0, 2\pi)\}.$$

La unidad normal a  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  en  $\mathbb{R}^n \times S^1$  está dada por el vector  $(1, 0)$ ; además es claro que  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  es transverso a el campo vectorial (2.66) para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , ya que  $(f(x, \theta), \omega) \cdot (1, 0) = \omega \neq 0$ . En este caso  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  es llamada una *sección transversal global*.

Definimos el mapa de Poincaré de  $\Sigma^{\bar{\theta}_0}$  como sigue

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_0} : \Sigma^{\bar{\theta}_0} &\rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}_0} \\ \left(x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{\omega}\right), \bar{\theta}_0\right) &\mapsto \left(x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{\omega}\right), \bar{\theta}_0 + 2\pi \equiv \bar{\theta}_0\right), \quad \circ \\ x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0}{\omega}\right) &\mapsto x\left(\frac{\bar{\theta}_0 - \theta_0 + 2\pi}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Entonces el mapa de Poincaré simplemente traza condiciones a  $x$  en una fase fija después de periodos sucesivos del campo vectorial. Esto muestra con

claridad que los puntos fijos  $P_{\bar{\theta}_0}$  corresponden a órbitas  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periódicas y puntos  $k$ -periódicos de  $P_{\bar{\theta}_0}$  que corresponden a órbitas periódicas de (2.13) que atraviesan  $\sum^{\bar{\theta}_0} k$  veces antes de cerrarse.

**Definición 2.21 (Órbita homoclínica [12])** *Una "órbita homoclínica" es una trayectoria del flujo de un sistema dinámico que une a un punto equilibrio (punto silla) en si mismo. Más precisamente, una órbita homoclínica está en la intersección de la variedad estable y la variedad inestable de un equilibrio.*

*Un "punto homoclínico" es la intersección de un conjunto estable y un conjunto inestable de algún punto fijo del sistema.*

**CASO 3: Mapa de Poincaré cerca a una órbita homoclínica.**

Consideremos un ejemplo que ilustra las ideas principales. En efecto: Sea la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x + f_1(x, y; \mu), \\ \dot{y} &= \beta y + f_2(x, y; \mu), \end{aligned} \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \quad (2.68)$$

con  $f_1, f_2 = O(|x|^2 + |y|^2)$  y  $C^r, r \geq 2$  y donde  $\mu$  se considera como parámetro. Establecemos las siguientes hipótesis sobre (2.68)

*Hipótesis 1.*  $\alpha < 0, \beta > 0$  y  $\alpha + \beta \neq 0$ .

*Hipótesis 2.* En  $\mu = 0$  (2.68) posee una órbita homoclínica conectando el punto fijo hiperbólico  $(x, y) = (0, 0)$  a si mismo, y sobre ambos lados de  $\mu = 0$ , la órbita homoclínica es quebrada.

Además, la órbita homoclínica quebrada es en una manera, transversa en el sentido que las variedades estable e inestable tienen diferentes orientaciones sobre los lados de  $\mu = 0$ . Para definir, asumimos que para  $\mu < 0$ , la variedad estable está dentro de la variedad inestable; para  $\mu > 0$ , la variedad estable está fuera de la variedad inestable y, para  $\mu = 0$ , ellas coinciden; ver figura 2.15.

La *Hipótesis 1* es de una naturaleza local ya que esto concierne a la naturaleza de los valores propios del campo vectorial linealizado cerca del punto fijo. La *Hipótesis 2* es de una naturaleza global, ya que ésta supone la existencia de una órbita homoclínica y describe la naturaleza del parámetro dependiente de la órbita homoclínica.

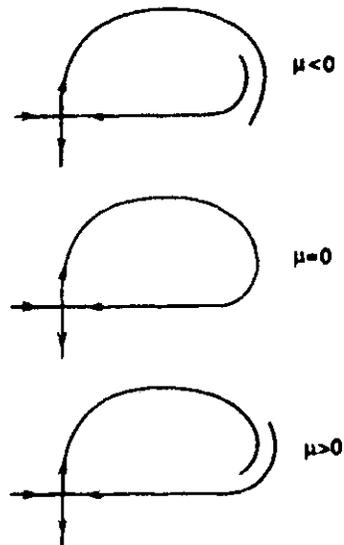


Figura 2.15: Comportamiento de la órbita homoclínica cuando  $\mu$  varía.

A la pregunta: ¿Cuál es la naturaleza de la estructura orbital cerca de las órbitas homoclínicas para  $\mu$  cerca de  $\mu = 0$ ? se le dará respuesta calculando un mapa de Poincaré cerca de la órbita homoclínica y estudiando la estructura orbital del mapa de Poincaré. El mapa de Poincaré que construimos será diferente al de los anteriores *CASO 1* y *CASO 2*, siendo la composición de dos mapas. Uno de los mapas,  $P_0$ , será construido a partir del flujo cerca al origen (tomaremos el flujo generado por la linealización de (2.40) cerca del origen). El otro mapa,  $P_1$ , será construido a partir del flujo fuera de una vecindad de un punto fijo, que estando lo suficientemente cerca de la órbita homoclínica puede hacer un movimiento repentino como queremos.

El mapa de Poincaré resultante,  $P$ , estará dado por  $P = P_1 \circ P_0$ . Evidentemente con estas aproximaciones, nuestro mapa de Poincaré será válido (significando esto el reflejo dinámico de (2.68) sólo cuando éste está definido en una órbita homoclínica (quebrada) suficientemente cerrada).

Discutiremos la validez de nuestras aproximaciones más adelante, pero ahora seguimos con nuestro análisis. El análisis constará de varios pasos:

- P1. Preparación del dominio para el mapa de Poincaré.
- P2. Calcular  $P_0$ .

P3. Calcular  $P_1$ .

P4. Examinar a dinámica de  $P = P_1 \circ P_0$ .

Paso 1: Preparación del dominio para el mapa de Poincaré. Para el dominio de  $P_0$  elegimos  $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \varepsilon > 0, y > 0\}$ , y para el dominio de  $P_1$  elegimos  $\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \varepsilon > 0, x > 0\}$ , con  $\varepsilon$  pequeño (ver figura 2.16).

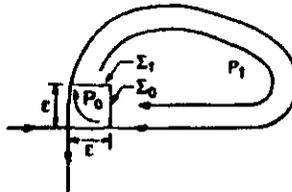


Figura 2.16: Preparación del dominio para el mapa de Poincaré.

Paso 2. Calcular  $P_0$ . Usaremos el flujo generado por el campo vectorial lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x, \\ \dot{y} &= \beta y. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para una buena aproximación de esto, debemos tomar  $\varepsilon$  y  $y$  pequeños. (Discutiremos la validación de ésta aproximación después).

El flujo generado por (2.69) está dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\alpha t} \\ y(t) &= y_0 e^{\beta t}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

El tiempo de recorrido,  $T$ , necesario para que el punto  $(\varepsilon, y_0) \in \Sigma_0$  alcance  $\Sigma_1$  bajo la acción de (2.70) está dado resolviendo

$$\varepsilon = y_0 e^{\beta T} \quad (2.71)$$

para luego obtener

$$T = \frac{1}{\beta} \log \frac{\varepsilon}{y_0}. \quad (2.72)$$

Ahora para (2.72) debemos considerar  $y_0 \leq \varepsilon$ . Esto es,

$$P_0 : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$$

$$(\varepsilon, y_0) \longmapsto \left( \varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{y_0} \right)^{\alpha/\beta}, \varepsilon \right)$$

Paso 3. Calcular  $P_1$ . Usando el teorema 2.7; el flujo con respecto a condiciones iniciales sólo toma tiempos finitos. Así, para el flujo de  $\Sigma_1$  a  $\Sigma_0$  a lo largo de una órbita homoclínica, podemos encontrar una vecindad  $U \subset \Sigma_1$  que es mapeada sobre  $\Sigma_0$  bajo el flujo generado por (2.69). Denotamos este mapeo por

$$P_1(x, \varepsilon; \mu) = (P_{11}(x, \varepsilon; \mu), P_{12}(x, \varepsilon; \mu)) : U \subset \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_0$$

donde  $P_1(0, \varepsilon; 0) = (\varepsilon, 0)$ .

Expandiendo en potencias de Taylor cerca de  $(x, \varepsilon; \mu) = (0, \varepsilon; 0)$  se tiene

$$P_1(x, \varepsilon; \mu) = (\varepsilon, ax + b\mu) + O(2).$$

La expresión  $O(2)$  representa el término no lineal de orden superior que se debe hacer pequeño tomando  $\varepsilon$ ,  $x$  y  $\mu$  pequeños. Luego, para este caso tenemos  $O(2) = O(h^2)$ . Por ahora, omitamos estos términos y tomemos nuestro mapa

$$P_1 : U \subset \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_0$$

$$(x, \varepsilon) \longmapsto (\varepsilon, ax + b\mu),$$

donde  $a > 0$  y  $b > 0$ .

La elección de  $a > 0$  y  $b > 0$  está determinada por la figura 2.15.

Paso 4. Examinar la dinámica de  $P = P_1 \circ P_0$ . Tenemos

$$\bar{P} = P_1 \circ P_0 : V \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0,$$

$$(\varepsilon, y_0) \longmapsto \left( \varepsilon, a\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{y_0} \right)^{\alpha/\beta} + b\mu \right)$$

donde  $V = (P_0)^{-1}(U)$ , o

$$P(y; \mu) : y \longrightarrow Ay^{|\alpha/\beta|} + b\mu, \quad (2.73)$$

siendo  $A \equiv a\varepsilon^{1+(\alpha/\beta)} > 0$ .

(Nota: asumimos que  $U$  es suficientemente pequeño tal que  $(P_0)^{-1}(U) \subset \Sigma_0$ ). Sea  $\delta = |\alpha/\beta|$ ; entonces  $\alpha + \beta \neq 0$  implica que  $d \neq 1$ . Buscaremos puntos fijos del mapa de Poincaré, esto es,  $y \in V$  tales que

$$P(y; \mu) : y \longrightarrow Ay^\delta + b\mu = y. \quad (2.74)$$

Los puntos fijos pueden ser mostrados gráficamente como la intersección del grafo de  $P(y; \mu)$  con la línea  $y = P(y; \mu)$  para  $\mu$  fijo.

Existen dos casos distintos.

**caso 1**  $|\alpha| > |\beta|$  o  $\delta > 1$ . Para este caso  $D_y P(0,0) = 0$ , y el grafo de  $P$  es dado como en la figura 2.17 para  $\mu > 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\mu < 0$ .

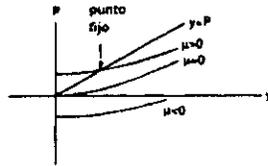


Figura 2.17: Grafo de  $P$  para  $\mu > 0$ ,  $\mu = 0$ , y  $\mu < 0$  con  $\delta < 1$ .

Entonces, para  $\mu > 0$  y pequeño (2.73) tiene un punto fijo. El punto fijo es estable e hiperbólico, ya que  $0 < D < 1$  y  $P < 1$  para  $\mu$  suficientemente pequeño. Por construcción vemos que este punto corresponde a una órbita atractora de (2.68) (probado que podemos justificar nuestras aproximaciones). Ver figura 2.18).

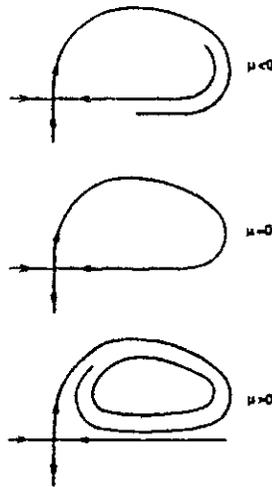


Figura 2.18: plano fase de la ecuacion (2.68) para  $\delta < 1$ .

Recordemos que si la órbita homoclínica fuera a quebrar en la manera opuesta a como se muestra en la figura, entonces el punto fijo de (2.73) sucederá para

$\mu < 0$ .

**Caso 2**  $|\alpha| < |\beta|$  o  $\delta < 1$ . Para este caso,  $D_y P(0, 0) = \infty$ , y el grafo de  $P$  aparece como en la figura 2.19. Entonces para  $\mu < 0$ , (2.73) tiene un punto fijo. Por construcción podemos concluir que esto corresponde a una órbita periódica corrida para la ecuación (2.68) como lo ilustra la figura 2.20.

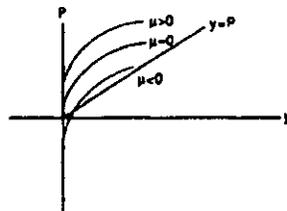


Figura 2.19: Grafo de  $P$  para diferentes valores de  $\mu$  con  $\delta < 1$ .

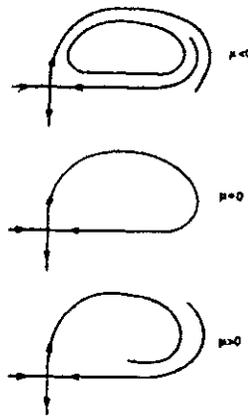


Figura 2.20: plano fase de la ecuacion (2.68) para  $\delta < 1$ .

Recuerde que si la órbita homoclínica fuera a quebrar en la manera opuesta a la mostrada en la figura 2.15, entonces el punto fijo de (2.73) sucederá para  $\mu > 0$ . Resumimos nuestro resultado en el siguiente teorema.

**Teorema 2.16** ([20]) *Considere un sistema donde la Hipótesis 1 y la Hipótesis 2 se cumplen. Entonces tenemos, para  $\mu$  suficientemente pequeño: i) si*

$\alpha + \beta < 0$ , existe una única órbita periódica estable sobre un lado de  $\mu = 0$ ; sobre el lado opuesto de  $\mu$  no existen órbitas periódicas. ii) Si  $\alpha + \beta > 0$  la misma conclusión se cumple como en i), excepto que la órbita periódica es inestable.

### 2.2.2. Construcción del mapa de Poincaré

Desarrollamos dos métodos para la construcción de mapas de Poincaré para sistemas no lineales. Ellos serán métodos de perturbación y serán aplicados a sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.75)$$

donde

$$\begin{aligned} f &: U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ g &: U \times \mathbb{R}^1 \times [0, \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

son funciones  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) sobre sus respectivos dominios de definición con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto. Tomamos  $\varepsilon$  pequeño y fijo. La ecuación (2.75) debe también depender de parámetros, sin embargo, omitiremos cualquier dependencia paramétrica cuando ésta afecte nuestros argumentos.

Cuando  $\varepsilon = 0$ , obtenemos la siguiente ecuación

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.76)$$

que consideramos como *ecuación no perturbada*. Como la mayoría de los métodos de perturbación, la idea es usar las soluciones conocidas de (2.76) para inferir las soluciones de (2.75). Nuestras aproximaciones serán más geométricas en el sentido que usamos el conocimiento de la estructura geométrica del espacio fase de (2.76) para inferir los resultados concernientes a la estructura geométrica del espacio fase de (2.75).

Sean  $x_\varepsilon(t)$  y  $x_0(t)$  soluciones de (2.75) y (2.76) respectivamente y supóngase que  $x_\varepsilon(t)$  y  $x_0(t)$  son *cerradas*. Entonces resulta natural preguntarse ¿cuanto tiempo  $x_\varepsilon(t)$  y  $x_0(t)$  permanecen cerradas?. Para responder ésta pregunta tenemos el siguiente lema.

**Lema 2.4 (Desigualdad de Gronwall's)** *Supóngase las funciones  $u(s)$  y  $v(s)$  continuas y no negativas en el intervalo  $[t_0, t]$ , y la función  $c(s)$  es  $C^1$  y*

no negativa sobre el intervalo  $[t_0, t]$  con

$$v(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds;$$

entonces

$$v(t) \leq c(t)\exp\left(\int_{t_0}^t u(s)ds\right) + \int_{t_0}^t \dot{c}(s)\left(\exp\int_s^t u(\tau)d\tau\right)ds$$

**Prueba:** Ver [7] o [5].  $\square$

La desigualdad anterior es la herramienta básica para estimar la diferencia entre las soluciones de (2.75) y (2.76) sobre intervalos de tiempo finito.

**Proposición 2.17** *Supóngase  $|x_\varepsilon(t_0) - x_0(t)| = O(\varepsilon)$ ; entonces  $|x_\varepsilon(t) - x_0(t)| = O(\varepsilon)$  para  $|t - t_0| = O(1)$*

**Prueba:** Ver [20] pág. 105.  $\square$

### El método de promedio

El método de promedio es considerado a ecuaciones de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.77)$$

donde

$$\begin{aligned} f &: U \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ g &: U \times \mathbb{R}^1 \times [0, \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

son  $C^r$  sobre sus respectivos dominios de definición con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto. Supongamos además que  $f$  y  $g$  son periódicas en  $t$  con el mismo periodo  $T > 0$ .

La ecuación promedio asociada está dada por

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.78)$$

donde

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt.$$

*Transformación de (2.75) en la forma (2.77)*

En (2.75) supongamos que  $g$  es periódica en  $t$  con periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Sea  $x(t, x_0)$  una solución periódica de la ecuación no perturbada (2.76) teniendo frecuencia  $\omega_0$  (nota: la necesidad de tomar  $x(t, x_0)$  como periódica lo discutiremos más adelante). Nuestro objetivo será derivar una ecuación diferencial ordinaria que determine el tiempo de evolución de la condición inicial  $x_0$  en la solución  $x(t, x_0)$ .

Supóngase que la condición inicial,  $x_0$ , es una función que depende del tiempo. Luego la función resultante

$$\dot{y} = x(t, x_0(t)) \tag{2.79}$$

es una solución de la ecuación perturbada (2.75). Si esto es cierto, entonces  $x_0(t)$  debe tener cierta forma que incide en la diferenciabilidad de (2.79) y poder así sustituir el resultado en la ecuación perturbada (2.75). De manera que esto produce

$$\dot{y} = \dot{x} + (D_{x_0}x)\dot{x}_0 = f(x(t, x_0)) + \varepsilon g(x(t, x_0), t, \varepsilon)$$

o

$$\dot{x}_0 = (D_{x_0}x)^{-1}(f(x(t, x_0)) - \dot{x} + \varepsilon g(x(t, x_0), t, \varepsilon)). \tag{2.80}$$

Ahora, si  $x(t, x_0)$  es una solución de la ecuación no perturbada (2.76), entonces  $\dot{x} = f(x(t, x_0))$ , y así (2.80) se reduce a

$$\dot{x}_0 = \varepsilon (D_{x_0}x)^{-1}g(x(t, x_0), t, \varepsilon). \tag{2.81}$$

Este campo es aparentemente de la misma forma que la ecuación (2.77). Sin embargo, un problema puede presentarse; es decir, que (2.77) es periódico con periodo  $T$ , pero (2.81) es cuasiperiódico con frecuencias  $\omega$  en  $t$ . Ya que nuestro objetivo es tener una dependencia periódica del tiempo de (2.81) elegimos uno de los dos caminos:

1. Restringir la aplicación del método a situaciones donde las frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega$  sean iguales. En este caso (2.81) es un campo vectorial de tiempo periódico y el método de promedio puede ser aplicado.

2. Suponer que  $n\omega$  está cercano a  $m\omega_0$  siendo  $m$  y  $n$  enteros. (Nota: asumimos que  $m.c.d(n, m) = 1$ ) además, consideramos que la frecuencia de  $x(t, x_0)$  es  $(n/m)\omega$ . En este caso  $x(t, x_0)$  ya no es una solución del problema no perturbado (2.76) así que (2.80) no se reduce a (2.81). A fin de que el método de promedio pueda aplicarse, en algún sentido esperamos que  $f(x(t, x_0))$  sea cerrado ( $O(\varepsilon)$ ) a  $\dot{x}$ , así que (2.81) será periódico en  $t$ .

**Teorema 2.18** Existe un cambio de coordenadas  $C^r$   $x = y(\varepsilon\omega(y, t))$ , tal que de (2.77) resulta

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon), \quad (2.82)$$

donde  $f_1$  es de periodo  $T$  en  $t$ . Además,

- i) si  $x(t)$  y  $y(t)$  son soluciones de (2.77) y (2.78) respectivamente, con  $x_0(t) = x_0, y(t_0) = y_0$  y  $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$ , entonces  $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$  sobre una escala de tiempo  $O(1/\varepsilon)$  probado que  $y(t) \in U$  sobre una escala de tiempo  $O(1/\varepsilon)$ ;
- ii) si  $p_0$  es un punto fijo hiperbólico de (2.78), entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , (2.77) posee una órbita periódica hiperbólica aislada  $y_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$  del mismo tipo de estabilidad de  $p_0$ ;
- iii) si  $x^s(t) \in W^s(y_\varepsilon)$  es una solución de (2.77) situada en la variedad estable de la órbita  $y_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$ ,  $y^s(t) \in W^s(p_0)$  es una solución de (2.78) situada en una variedad estable del punto fijo hiperbólico  $p_0$ , y si  $|x(0) - y(0)| = O(\varepsilon)$ , entonces  $|x^s(t) - y^s(t)| = O(\varepsilon)$  para  $t \in [0, \infty)$ .  
Unas afirmaciones similares se cumplen para soluciones situadas en la variedad inestable sobre el intervalo de tiempo  $(-\infty, 0]$ .

**Prueba:** Ver [20] pág. 111.  $\square$

## 2.3. Bifurcaciones locales.

Empecemos el estudio de esta sección ilustrando el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 8** (Ver [20] pág. 255)

Considere el campo vectorial

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1. \quad (2.83)$$

Es fácil verificar que

$$f(0, 0) = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad (2.85)$$

pero en este ejemplo podemos determinar mucho más. El conjunto de puntos fijos de (2.83) está dado por

$$\mu - x^2 = 0$$

o

$$\mu = x^2. \quad (2.86)$$

Esto representa una parábola en el plano  $(\mu, x)$  como lo muestra la figura 2.21.

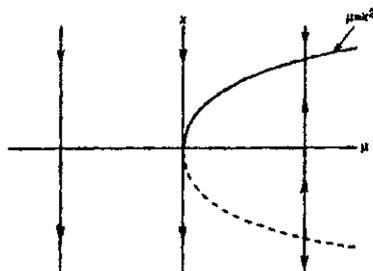


Figura 2.21: Diagrama de bifurcación del sistema (2.83).

En la figura 2.21 las flechas a lo largo de las líneas verticales representan el flujo generado por (2.83) a lo largo de la dirección  $x$ . Entonces, para  $\mu < 0$ , (2.83) no tiene puntos fijos, y el campo vectorial es decreciente en  $x$ . Para  $\mu > 0$ , (2.83) tiene dos puntos fijos. Un simple análisis de estabilidad muestra que uno de los puntos fijos es estable (representado por una rama sólida de la parábola) y el otro punto fijo es inestable (representado por una rama quebrada de la parábola). Además, es claro que, dado un campo vectorial  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ) sobre  $\mathbb{R}^1$  teniendo solamente dos puntos fijos “hiperbólicos”, uno

debe ser estable y el otro inestable.

Este es un ejemplo de "bifurcación". Nos referimos a  $(x, \mu) = (0, 0)$  como un "punto de bifurcación" y el valor del parámetro  $\mu = 0$  como un "valor de la bifurcación".

A la figura 2.21 nos referimos como un "diagrama de bifurcación". Este tipo particular de bifurcación (es decir, donde en un lado del valor del parámetro no existen puntos fijos y del otro lado existen dos puntos fijos) nos referimos como una "bifurcación nodo-silla".

Formalizamos que se entiende por el término "bifurcación".

**Definición 2.22 ([20])** *Un punto fijo  $(x, \mu) = (0, 0)$  de una familia uni-paramétrica de un campo vectorial uni-dimensional se dice que experimenta una "bifurcación" en  $\mu = 0$ , si el flujo para  $\mu = 0$  cerca a cero y  $x$  cerca a cero no es "cualitativamente el mismo" como el flujo cerca a  $x = 0$  en  $\mu = 0$ .*

El propósito de esta sección es derivar condiciones bajo las cuales una familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensionales presentará una bifurcación nodo-silla teniendo como referencia el ejemplo 2.2.3 de [20] (pág. 220-224). Estas condiciones involucran derivadas de los campos vectoriales evaluadas en el punto de bifurcación y son obtenidas por una consideración geométrica de la curva de puntos fijos en el plano  $(\mu, x)$  en una vecindad del punto de bifurcación.

En el ejemplo 8 se tiene una *única* curva de puntos fijos, parametrizada por  $x$ , pasa a través de  $(x, \mu) = (0, 0)$ . Denotamos la curva de puntos fijos por  $\mu(x)$ .

La curva de puntos fijos satisface dos propiedades:

1. Es tangente a la línea  $\mu = 0$  en  $x = 0$ , es decir,

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0. \quad (2.87)$$

2. Está completamente a un costado de  $\mu = 0$ . Localmente, esto se satisfecerá si tenemos

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0. \quad (2.88)$$

Ahora, se considera una familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensionales general

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1. \quad (2.89)$$

Supóngase que (2.89) tiene un punto fijo en  $(x, \mu) = (0, 0)$ , es decir,

$$f(0, 0) = 0. \quad (2.90)$$

Además, supóngase que el punto fijo es no hiperbólico, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (2.91)$$

Ahora, si tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \quad (2.92)$$

entonces, por el *teorema de la función implícita*, existe una *única* función

$$\mu = \mu(x), \quad \mu(0) = 0 \quad (2.93)$$

definida para  $x$  suficientemente pequeño tal que  $f(x, \mu(x)) = 0$  (obsérvese que (2.92) se cumple en el ejemplo 8).

Ahora, queremos derivar condiciones en términos de derivadas de  $f$  evaluadas en  $(\mu, x) = (0, 0)$ ; así que tenemos

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0, \quad (2.94)$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0. \quad (2.95)$$

Las ecuaciones (2.94) y (2.95), junto con (2.90), (2.91) y (2.92), implican que  $(\mu, x) = (0, 0)$  es un punto de bifurcación en el que se da la bifurcación nodo-silla.

Podemos derivar expresiones para (2.94) y (2.95) en términos de derivadas de  $f$  en el punto de bifurcación por derivación implícita de  $f$  a lo largo de la curva de puntos fijos.

Usando (2.92), tenemos

$$f(x, \mu(x)) = 0. \quad (2.96)$$

Diferenciando (2.96) con respecto a  $x$  se tiene

$$\frac{df}{dx}(x, \mu(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x). \quad (2.97)$$

Evaluando (2.97) en  $(\mu, x) = (0, 0)$ , obtenemos

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)}; \quad (2.98)$$

entonces vemos que (2.91) y (2.92) implican que

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0, \quad (2.99)$$

es decir, la curva de puntos fijos es tangente a la línea  $\mu = 0$  en  $x = 0$ .  
Diferenciando (2.97) una vez más con respecto a  $x$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2}(x, \mu(x)) = 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \left( \frac{d\mu}{dx}(x) \right)^2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu, \mu(x)) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(x). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Evaluando (2.100) en  $(\mu, x) = (0, 0)$  y usando (2.98) se sigue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) = 0$$

o

$$\frac{d^2 \mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)}. \quad (2.101)$$

Luego, (2.101) es diferente de cero probado que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0. \quad (2.102)$$

En resumen, para que (2.89) experimente una bifurcación nodo-silla debemos tener

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

(condiciones de punto fijo no hiperbólico) y

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0. \quad (2.104)$$

La ecuación (2.103) implica que una única curva de puntos fijos pasa a través de  $(\mu, x) = (0, 0)$ , y (2.104) implica que la curva se sitúa localmente sobre un costado de  $\mu = 0$ . Será claro que el signo de (2.101) determina sobre que lado de  $\mu = 0$  se sitúa la curva. En la figura 2.22 se muestran ambos casos sin indicar exactamente el tipo de estabilidad que se presentan en las diferentes ramas.

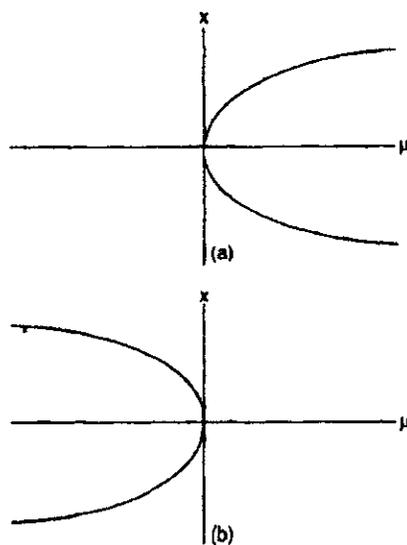


Figura 2.22: a)  $\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) / \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)\right) > 0$ ; b)  $\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) / \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)\right) < 0$ .

Finalizamos nuestra discusión de bifurcación nodo-silla con la siguiente observación:

Considere una familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensional general, teniendo un punto fijo no hiperbólico en  $(x, \mu) = (0, 0)$ . La expansión

en potencias de Taylor de este campo vectorial está dada por

$$f(x, \mu) = a_0\mu + a_1x^2 + a_2\mu x + a_3\mu^2 + O(3). \quad (2.105)$$

Los cálculos muestran que la dinámica de (2.105) cerca de  $(\mu, x) = (0, 0)$  es cuantitativamente la misma que la de los siguientes campos vectoriales

$$\dot{x} = \mu \pm x^2. \quad (2.106)$$

Luego, (2.106) puede ser vista como la “*forma normal*” de la bifurcación nodo-silla. Vemos que, en el estudio de la bifurcación nodo-silla, todos los términos de  $O(3)$  y más, serán despreciados y la dinámica no será cuantitativamente cambiada. El teorema de la función implícita fue la herramienta que permitió verificar este hecho.

## 2.4. Un par de valores propios imaginarios puros: “la bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré”

Consideremos el camino más simple en que un punto fijo puede ser no hiperbólico; es decir, la matriz asociada con el campo vectorial linealizado cerca del punto fijo tiene un par de valores propios imaginarios puros, con el resto de valores propios teniendo partes real diferente de cero.

Considere el campo vectorial

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (2.107)$$

donde  $g$  es  $C^r$  ( $r \geq 5$ ) en algún conjunto suficientemente grande conteniendo el punto fijo de nuestro interés. El punto fijo es denotado por  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$ , es decir,

$$g(y_0, \lambda_0) = 0. \quad (2.108)$$

Estamos interesados en cómo la estructura orbital cerca de  $y_0$  cambia cuando  $\lambda$  varía. En esta situación la primera cosa que debemos examinar es la linealización del campo vectorial cerca del punto fijo, que está dado por

$$\dot{\xi} = D_y g(y_0, \lambda_0) \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.109)$$

Supóngase que  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  tiene valores propios imaginarios puros con los  $n - 2$  valores propios restantes teniendo partes real no cero. Conocemos que los puntos fijos son no hiperbólicos; luego, la estructura orbital del campo vectorial linealizado cerca de  $(y, \lambda) = (0, 0)$  debe revelar una pequeña información concerniente a la naturaleza de la estructura orbital del campo vectorial no lineal (2.107) cerca de  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$ .

Afortunadamente, tenemos un procedimiento sistemático para analizar este problema. Por el teorema de la variedad central (Ver [20] capítulo 2), se tiene que la estructura orbital cerca de  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$  está determinada por el campo vectorial (2.107) restringido a la variedad central. Esta restricción da una familia  $p$ -paramétrica de campos vectoriales sobre una variedad central  $bi$ -dimensional, pero asumimos una sola escala de parámetros, es decir,  $p = 1$ . Si existen varios parámetros en el problema, se consideran todos excepto uno como fijo.

Sobre la variedad central el campo vectorial (2.107) tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\lambda(\mu) & -Im\lambda(\mu) \\ Im\lambda(\mu) & Re\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1(x, y, \mu) \\ f^2(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \quad (2.110)$$

donde  $f^1$  y  $f^2$  son no lineales en  $x$  y  $y$ , y  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$  son los valores propios del campo vectorial linealizado cerca del punto fijo en el origen (Ver más detalles de la ecuación (2.110) en [20] pág. 220).

Obsérvese que el hecho de reducir la variedad central da como resultado (2.110), es decir, primero transformamos el punto fijo a el origen y entonces, si es necesario, hacemos una transformación lineal de coordenadas tal que el campo vectorial (2.107) quede en la forma (2.110). Además, recordemos que el valor propio denotado por  $\lambda(\mu)$  no puede ser confundido con el vector de parámetros en (2.107), denotado por  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ , que consecuentemente restringimos a un escalar y etiquetado por  $\mu$ . Lo denotamos de ahora en adelante como

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \quad (2.111)$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \\ \omega(0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.112)$$

El siguiente paso es transformar (2.110) en la forma normal. La forma normal está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5) \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x - \alpha(\mu)y + (b(\mu)x - a(\mu)y)(x^2 + y^2) + O(|x|^5, |y|^5).\end{aligned}\quad (2.113)$$

Será más conveniente si se trabaja (2.113) en coordenadas polares; lo cual está dado por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(\mu)r + b(\mu)r^2 + O(r^4).\end{aligned}\quad (2.114)$$

Ya que estamos interesados en la dinámica cerca de  $\mu = 0$ , es natural expandir en potencias de Taylor los coeficientes de (2.114) cerca de  $\mu = 0$ . La ecuación (2.114) queda como

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^4).\end{aligned}\quad (2.115)$$

donde “'” denota la diferenciación con respecto a  $\mu$ . Además se ha usado el hecho de que  $\alpha(0) = 0$ .

Nuestro objetivo es entender la dinámica de (2.117) para  $r$  y  $\mu$  pequeños. Esto se lleva a cabo en dos pasos:

- p1 Despreciar los términos de orden superior de (2.117) y estudiar el resultado “truncado” de la forma normal.
- p2 Mostrar que las dinámicas exhibidas por la forma normal truncada son cuantitativamente invariantes cuando se considera la influencia de los términos de orden superior despreciados.

*Paso 1.* Despreciando los términos de orden superior en (2.117) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2,\end{aligned}\quad (2.116)$$

donde por comodidad definimos

$$\begin{aligned}
 \alpha'(0) &\equiv d, \\
 a(0) &\equiv a, \\
 \omega(0) &\equiv \omega, \\
 \omega'(0) &\equiv c, \\
 b(0) &\equiv b.
 \end{aligned}
 \tag{2.117}$$

Analizando los campos vectoriales dinámicos tenemos siempre que empezar con la situación simple; es decir, tenemos que encontrar los puntos fijos y estudiar la naturaleza de su estabilidad. Sin embargo, el procedimiento con (2.116) es diferente por la naturaleza del sistema de coordenadas. Para precisar, los valores de  $r > 0$  y  $\mu$  para los cuales  $\dot{r} = 0$  (con  $\dot{\theta} \neq 0$ ), corresponden a órbitas periódicas de (2.116). Veamos el siguiente

**Lema 2.5** Para  $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$ ,  $\mu$  suficientemente pequeño

$$(r(t), \theta(t)) = \left( \sqrt{-\frac{\mu d}{a}}, \left[ \omega + \left( c - \frac{bd}{a} \right) \right] t + \theta_0 \right)
 \tag{2.118}$$

es una órbita periódica para (2.116).

**Prueba:** Ver [20] pág. 272.□

La estabilidad de la órbita periódica se establece con el siguiente

**Lema 2.6** La órbita periódica es

- i) asintóticamente estable para  $a < 0$ ;
- ii) inestable para  $a > 0$ .

**Prueba:** Ver [20] pág. 272.□

Obsérvese que debemos tener  $r > 0$ . Así, (2.118) es solamente la posible órbita periódica para (2.116). Luego, para  $\mu \neq 0$ , (2.116) posee una única órbita periódica teniendo una amplitud de  $O(\sqrt{\mu})$ . Concerniendo los detalles de estabilidad de la órbita periódica y si ésta existe para  $\mu < 0$  o  $\mu > 0$ ; de (2.118) se tiene que existen cuatro posibilidades:

1.  $d > 0, a > 0$

2.  $d > 0, a < 0$
3.  $d < 0, a > 0$
4.  $d < 0, a < 0$ .

Examinaremos cada uno individualmente; sin embargo, obsérvese que en todos los casos el origen es un punto fijo que es

estable en  $\mu = 0$  para  $a < 0$ ,  
 inestable  $\mu = 0$  para  $a > 0$ .

- a)  $d > 0, a > 0$ . En este caso el origen es un punto fijo inestable para  $\mu > 0$  y un punto fijo asintóticamente estable para  $\mu < 0$ , con una órbita periódica inestable para  $\mu < 0$ . (Nota: si el origen es estable para  $\mu < 0$ , entonces la órbita periódica será inestable); ver figura 2.23 a).
- b)  $d > 0, a < 0$ . En este caso para  $\mu < 0$ , el origen es un punto fijo asintóticamente estable y para  $\mu > 0$  es un punto fijo inestable, con una órbita periódica asintóticamente estable para  $\mu > 0$ . Ver figura 2.23 b).
- c)  $d < 0, a > 0$ . En este caso, el origen es un punto fijo inestable para  $\mu < 0$  y un punto fijo asintóticamente estable para  $\mu > 0$ , con una órbita periódica inestable para  $\mu > 0$ . Ver figura 2.24 a).
- d)  $d < 0, a < 0$ . En este caso el origen es un punto fijo asintóticamente estable para  $\mu < 0$  y un punto fijo inestable para  $\mu > 0$ , con una órbita periódica asintóticamente estable para  $\mu < 0$ . Ver figura 2.24 b).

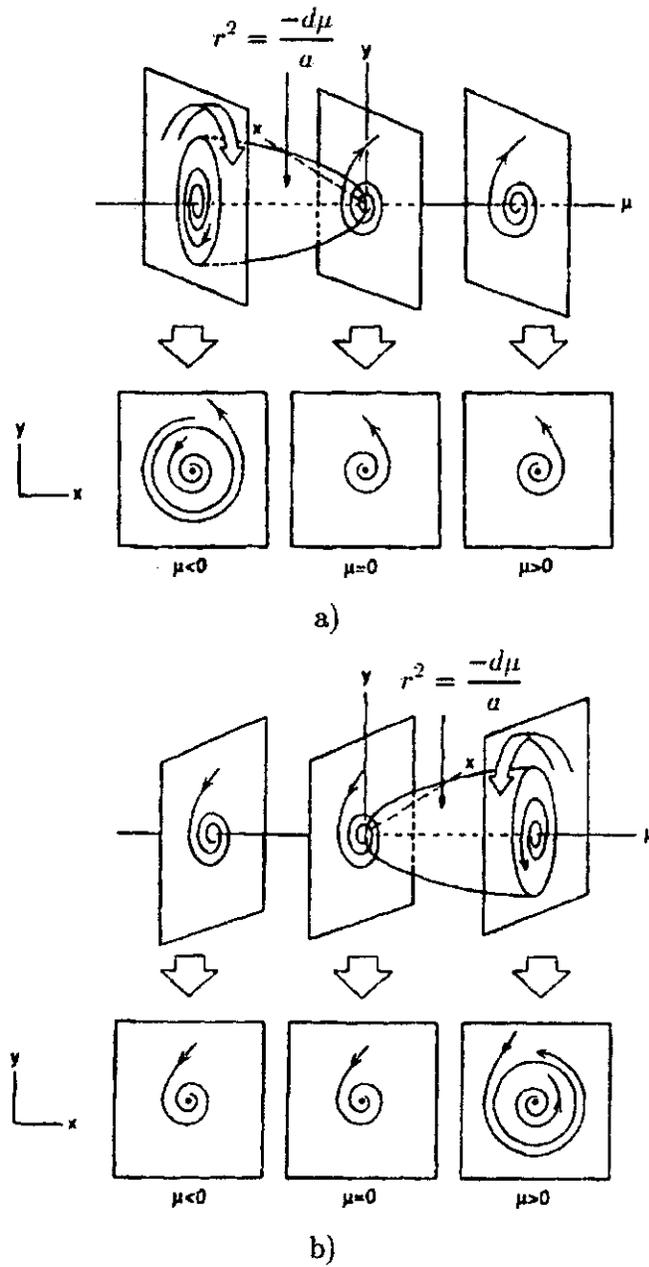


Figura 2.23:

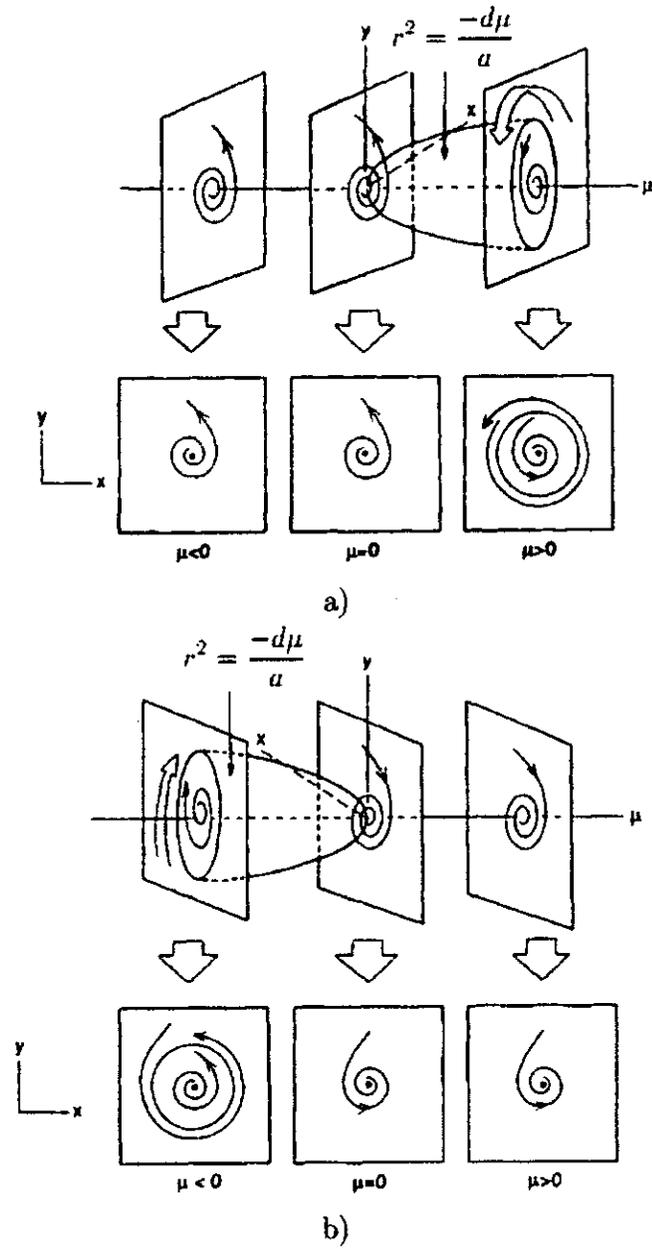


Figura 2.24:

**Teorema 2.19 (Bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré [20])** *Considere la forma normal completa de (2.117). Entonces para  $\mu$  suficientemente pequeño, los casos 1, 2, 3 y 4 descritos anteriormente se cumplen*

**Prueba 1** (Utilizando el teorema de Poincaré-Bendixson)

Bosquejo

Empecemos considerando la forma normal truncada de (2.116) y el caso  $a < 0, d > 0$ . La coordenada  $r$  está dada por

$$r = \sqrt{-\frac{\mu d}{a}}$$

Elegimos  $\mu > 0$  suficientemente pequeño y se considera el anulador en el plano,  $A$ , dado por

$$A = \{(r, \theta) = /r_1 \leq r \leq r_2\},$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son elegidos tales que

$$0 < r_1 < \sqrt{-\frac{d\mu}{a}} < r_2.$$

Para (2.116), se puede verificar que sobre la frontera de  $A$ , el campo vectorial dado por la forma normal truncada (2.116) está apuntando *estrictamente* al interior de  $A$ . Luego  $A$  es una región invariante positiva (ver figura 2.25).

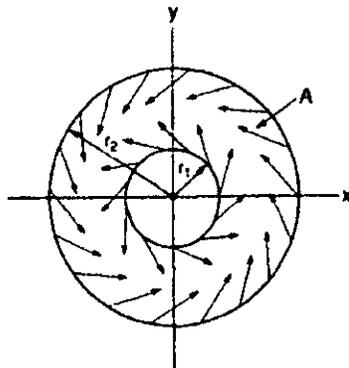


Figura 2.25:  $d < 0, a < 0$ .

Luego,  $A$  no contiene puntos fijos, así, por el teorema de Poincaré-Bendixson,  $A$  contiene una órbita periódica estable.

Ahora, considere la forma normal completa de (2.117). Tomando  $\mu$  y  $r$  suficientemente pequeños, los términos  $O(\mu^2 r, \mu r^2, r^5)$  se pueden hacer más pequeños que el resto de la forma normal (es decir, la forma normal trunca-  
cada de (2.116)). Por tanto, tomando  $r_1$  y  $r_2$  suficientemente pequeños,  $A$  tiene una región invariante positiva que no contiene puntos fijos. Luego por el teorema de Poincaré-Bendixson,  $A$  contiene una órbita periódica estable. Los tres casos restantes pueden ser tratados similarmente; sin embargo, en los casos donde  $a > 0$  el flujo de tiempo invertido (es decir,  $t \rightarrow -t$ ) debe ser considerado.

**Prueba 2** (*Utilizando el método de promedio*)

Bosquejo

Considere la siguiente rescalamiento de (2.117)

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \varepsilon r, \\ \theta &\rightarrow \frac{\theta}{\varepsilon}, \\ t &\rightarrow \frac{t}{\varepsilon}, \\ \mu &\rightarrow \varepsilon^2 \mu. \end{aligned} \tag{2.119}$$

La ecuación (2.117) entonces queda como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon(d\mu r + ar^3) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta} &= \omega + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.120}$$

La ecuación (2.120) está en la forma estándar para aplicar el método de promedio. Por tanto la prueba se sigue inmediatamente.  $\square$

## 2.5. Estabilidad de bifurcaciones bajo perturbaciones.

Recuerde que nuestra motivación central es el estudio de la naturaleza de la estructura orbital *cerca* de un punto fijo no hiperbólico de un campo vectorial. La palabra clave aquí es *cerca*. Tenemos que ver que un punto fijo

no hiperbólico puede ser asintóticamente estable o inestable. Sin embargo, tenemos que ver que “campos vectoriales próximos” pueden tener estructura orbital muy diferente.

**Ejemplo 9 (La bifurcación nodo-silla, [20] pág. 279)**

Considere la familia uni-paramétrica de campos vectoriales uni-dimensional

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1, \quad (2.121)$$

con

$$f(0, 0) = 0, \quad (2.122)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (2.123)$$

Por su parte, anteriormente se concluyó que las condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0, \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \quad (2.125)$$

eran condiciones suficientes para que el campo vectorial (2.121) experimentara una bifurcación nodo-silla en  $\mu = 0$ . La pregunta que responderemos es la siguiente:

¿ Si una familia uni-paramétrica de campos vectoriales satisfaciendo (2.122), (2.123), (2.124) y (2.125) es “perturbada”, la familia de campos vectoriales uni-dimensional resultará cuantitativamente con la misma dinámica ?

Tendremos respuesta a ésta pregunta una vez se explique que se entiende por el término “perturbada”.

Hacemos esto primero eliminando por completo los parámetros. Considere el campo vectorial uni-dimensional

$$\dot{x} = f(x) = a_0 x^2 + O(x^2), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (2.126)$$

donde, en la expansión de Taylor de  $f(x)$ , se ha omitido la constante y los términos  $O(x)$ , ya que queremos que (2.126) tenga un punto fijo no hiperbólico en  $x = 0$ . Puesto que  $x = 0$  es un punto fijo no hiperbólico, la estructura orbital cerca de  $x = 0$  del campo vectorial cerca de (2.126) debe ser muy

diferente. Consideramos campos vectoriales cercanos a (2.126) y empotrando (2.126) en una familia uni-paramétrica de campos vectoriales como sigue

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu + a_0 x^2 + O(x^3). \quad (2.127)$$

La adición del término " $\mu$ " en (2.127) puede vista como una perturbación de (2.126) añadiendo términos de orden inferior en la expansión de Taylor del campo vectorial cerca del punto fijo no hiperbólico.

Obsérvese que (2.127) satisface (2.122), (2.123), (2.124) y (2.125); luego,  $(x, \mu) = (0, 0)$  es un punto de bifurcación nodo-silla. Si añadimos términos  $O(x^3)$  o más, vemos que esto no tiene efecto sobre la naturaleza de la bifurcación, ya que la bifurcación nodo-silla está completamente determinada por (2.122), (2.123), (2.124) y (2.125), es decir, los términos  $O(x^2)$  y menor. Perturbaremos (2.127) añadiendo más términos de orden menor. Por ejemplo,

$$\dot{x} = f(x, \mu, \varepsilon) = \mu + \varepsilon x + a_0 x^2 + O(x^3). \quad (2.128)$$

En este caso, tenemos una familia bi-paramétrica de campos vectoriales unidimensionales teniendo un punto fijo no hiperbólico en  $(x, \mu, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ . Sin embargo, la naturaleza de la bifurcación nodo silla (es decir, la geometría de la curva(s) de un punto fijo pasando a través de punto de bifurcación) está completamente determinada por (2.122), (2.123), (2.124) y (2.125). Luego, la adición del término " $\varepsilon x$ " en (2.128) no introduce un nuevo fenómeno dinámico en (2.127) (probado que  $\mu \neq 0$ ).

### Ejemplo 10 (Bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré, [20] pág. 283)

Del teorema 2.19 se tiene que la forma normal de la bifurcación de Hopf-Andronov-Poincaré está dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu dr + ar^3, & (r, \theta) &\in \mathbb{R}^+ \times S^1, & \mu &\in \mathbb{R}^1. \\ \dot{\theta} &= w + c\mu + br^r \end{aligned}$$

Queremos estudiar como la bifurcación cerca de  $(r, \mu) = (0, 0)$  estudiada anteriormente, cambia cuando es perturbada. Consideremos tres puntos de vista:

1. El teorema 2.19 dice que para,  $a \neq 0, d \neq 0$ , los términos de orden superior (es decir,  $O(r^4)$ ) no afectarán la dinámica de (2.129) cerca de  $(r, \mu) = (0, 0)$ .
2. Ya que  $w$  es una constante, para  $(r, \mu)$  pequeño, a fin de determinar la naturaleza de las soluciones bifurcando el origen, necesitamos solamente preocuparnos cerca de la componente  $\dot{r}$  del campo vectorial (2.129).
3. Debido a la estructura de la parte lineal del campo vectorial,  $r = 0$  es un punto fijo para  $\mu$  suficientemente pequeño y no se presentan términos de igual orden en  $r$  en la componente  $\dot{r}$  de la forma normal.

Usando estos tres puntos, vemos que para  $a \neq 0, d \neq 0$ , las perturbaciones no permitidas por la estructura del campo vectorial (ver punto 3) alternarán cuantitativamente la naturaleza de la bifurcación cerca de  $(r, \mu) = (0, 0)$ .

De los ejemplos 9-10 podemos concluir que, en familias uni-paramétricas de campos vectoriales, las bifurcaciones "más" típicas son *nodo-silla* y *Hopf-Andronov-Poincaré*.

## 2.6. Disección geométrica de modelos neuronales

Las oscilaciones en los modelos neuronales se caracterizan por fases alternantes de comportamientos cercanos al equilibrio y trenes de oscilaciones de picos (ver figura 2.26). Estas fases se llaman fase pasiva y fase activa respectivamente. En el caso de la actividad eléctrica de las membranas de sistemas biológicos, la escala de tiempo lenta de las oscilaciones es del orden de las décimas de segundo y la de los picos es del orden de los milisegundos.

Rinzel y Wang describieron cualitativamente algunos mecanismos para la generalización de oscilaciones. La idea básica es que existen procesos lentos que modulan la generación rápida de picos. Para clasificar los patrones consideraron sistemas de la forma

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ (Rápido)} \\y' &= \varepsilon G(x, y), \quad y \in \mathbb{R}^m \text{ (Lento)}\end{aligned}$$

con  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Un análisis de bifurcación global del sistema rápido, tomando las variables

lentas como parámetros da la estructura que coincide con los diferentes patrones observados y que surgen en las membranas. En este caso,  $\varepsilon$  representa la razón *lento/rápido* de las escalas de tiempo. Una descripción detallada se encuentra en [19]. Sólo mencionamos las características principales de los osciladores cuadrados y elípticos.

- **Osciladores cuadrados.** Presenta una onda similar a un cuadrado (ver figura 2.26 2B derecha). Está basada en una biestabilidad de un estado de equilibrio y un estado de actividad rápida de picos en el subsistema rápido y un cambio periódico entre ellos.
- **Osciladores elípticos** Involucra una bifurcación de Hopf subcrítica. Las oscilaciones comprenden un cambio lento entre un estado de equilibrio y el estado de picos rápidos y que son biestables en el subsistema rápido (ver figura 2.26 D, mitad). La fase pasiva exhibe oscilaciones amortiguadas u oscilaciones crecientes y su trayectoria pasa a través de la bifurcación de Hopf (ver figura 2.26 D, derecha).

El comportamiento grupal de las neuronas se modela mediante sistemas dinámicos acoplados del tipo rápido-lento.

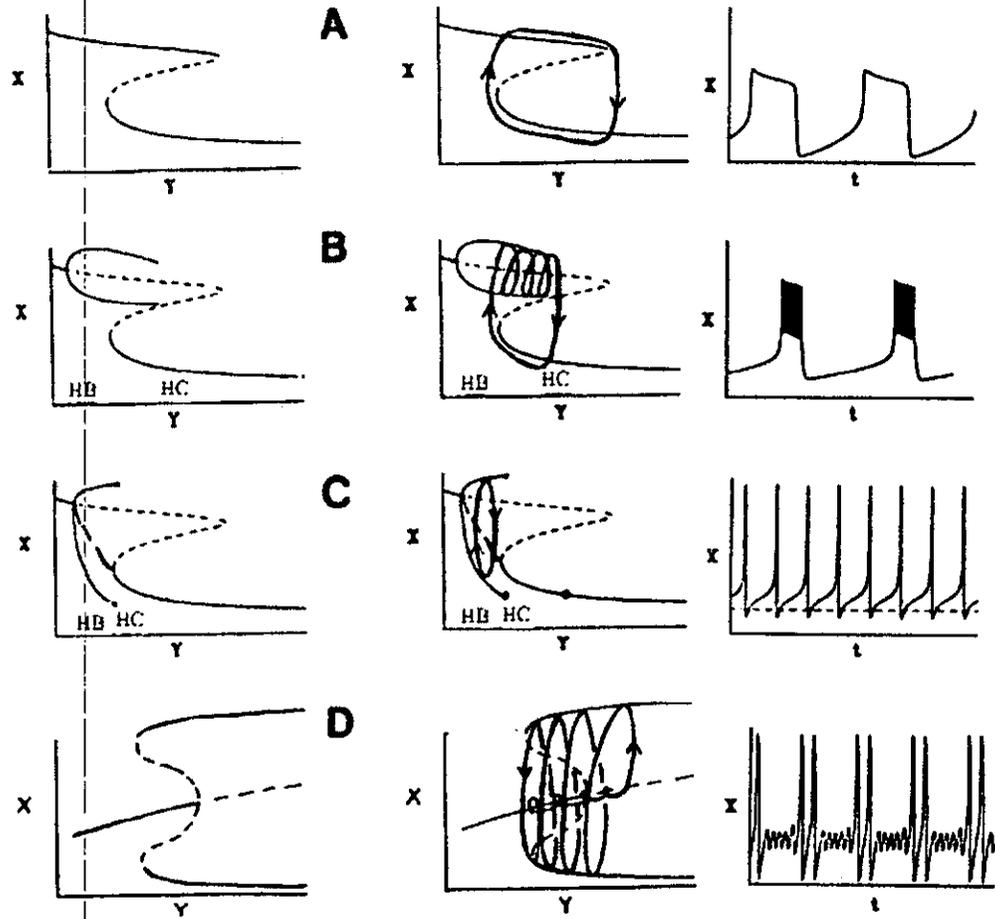


Figura 2.26: *Izquierda:* Diagrama de bifurcación de órbitas periódicas a soluciones de equilibrio en el subsistema (rápido), con variables lentas como parámetros. Las soluciones periódicas mínima y máxima son presentadas aquí. *Centro:* Representación esquemática de las trayectorias onduladas, de ruptura o picos continuos proyectadas sobre el correspondiente diagrama de bifurcación en la columna de la izquierda. *Derecha:* Curso en el tiempo de una variable rápida para el correspondiente diagrama del centro. HC= Bifurcaciones Homoclínicas, HB=Bifurcación de Hopf.

## Capítulo 3

# Sincronización de osciladores cuadrados caóticos

El término *oscilador cuadrado* indica que la evolución en el tiempo del voltaje del sistema que representa el comportamiento caótico de una neurona durante la propagación del potencial de acción, tiene forma de una onda cuadrada (ver figura 2.26 B). Esto ocurre cuando la solución del sistema entra en su fase rápida la cual explicaremos en la medida que avancemos.

Por simplicidad, asumimos que las neuronas individualmente son idénticas. Ahora, en nuestro modelo motivado por la ecuación de Hodgkin-Huxley (o su variación como en el modelo de FitzHugh-Nagumo, Hindmarsh-Rose [13]) asumimos que el potencial de membrana intracelular y la corriente de la neurona satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}v' &= f_1(v, w, y) \\w' &= f_2(v, w, y) \\y' &= \varepsilon g(v, w, y)\end{aligned}\tag{3.1}$$

con  $0 < \varepsilon \ll 1$ . El subsistema conteniendo las dos primeras ecuaciones es llamado *el subsistema rápido* denotado por (FS). La última ecuación es llamada *la ecuación lenta*.

Consideramos las siguientes hipótesis:

- (H1) El conjunto de puntos de equilibrio de (FS) consiste de una curva en forma de S de  $y$  en el plano  $(v, y)$  denotada por  $S$ . Existen  $y_\lambda$  y  $y_\rho$  en  $\mathbb{R}$  tales que el número de puntos de equilibrio de (FS) es igual a 1 cuando  $y \in (-\infty, y_\lambda)$ , igual a 3 cuando  $y \in (y_\lambda, y_\rho)$  e igual a 1 cuando

$y \in (y_\rho, \infty)$ . Denotamos la rodilla derecha (localizada sobre la rama inferior) por  $P_\rho = (v_\rho, w_\rho, y_\rho)$  y la rodilla izquierda (localizada sobre la rama superior) por  $P_\lambda = (v_\lambda, w_\lambda, y_\lambda)$ . También denotamos las ramas superior, media e inferior de  $S$  por  $U, M$  y  $L$  respectivamente.

- (H2) La rama inferior,  $L$ , consiste de puntos de equilibrio estables para (FS) y la rama media,  $M$ , de puntos de equilibrio inestables que son puntos silla para (FS). La rama superior es más complicada que los casos considerados por Terman [17]. Para los intervalos  $y_b \leq y < y_h$  y  $y_H < y \leq y_B$ , existen familias uni-paramétricas de soluciones periódicas de (FS), denotadas por  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Ambas familias de soluciones periódicas tienen una bifurcación de Hopf en un extremo y terminan en una órbita homoclínica de puntos silla en la rama media. Estos puntos homoclínicos son denotados como  $p_h = (v_h, w_h, y_h)$  y  $p_H = (v_H, w_H, y_H)$ . Ver figura 3.1.  $P_1$  y  $P_2$  son estables para (FS) con  $y$  fijo.

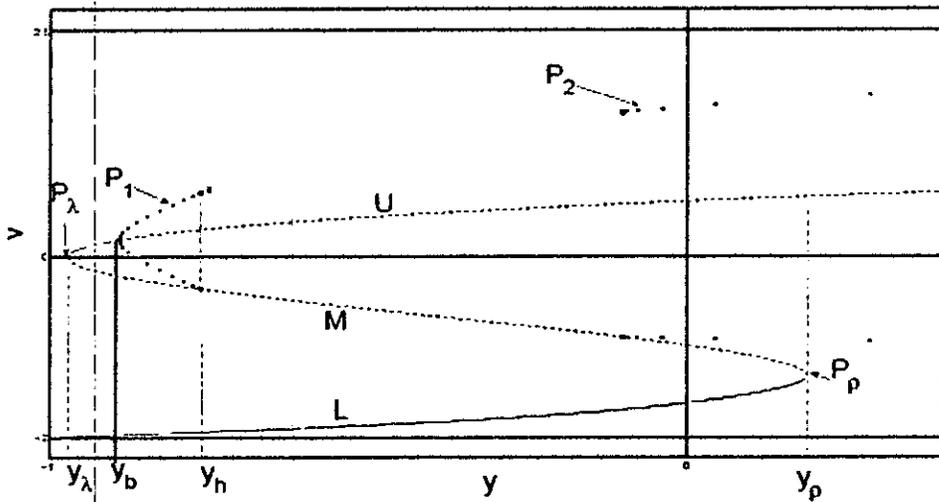


Figura 3.1: Diagrama de bifurcación del (FS) para la ecuación (3.1).

- (H3) Para la dinámica lenta, la  $y$ -dependiente superficie nula  $N \equiv \{(v, w, y) / g(v, w, y) = 0\}$  intersecta a la curva  $S$  en un único punto fijo  $p_h$  y más

abajo de  $M$  hacia  $P_\rho$ , y  $N$  es bastante cercano a  $P_\rho$  en distancia. Como es típico,  $U \subset \{g < 0\}$ ,  $P_1(t) \subset \{g < 0\}$  y  $P_2(t) \subset \{g < 0\}$  mientras que  $L \subset \{g > 0\}$ . Aseguramos que el punto  $P_\rho$  es no degenerado como se describe en [9]. Sea  $F = (f_1, f_2)$ . Entonces  $D_x F(P_\rho)$  tiene un valor propio negativo y un valor propio cero. Además, sean  $\eta, \chi$  los vectores propios correspondientes a el valor propio cero de  $D_x F(P_\rho)$  y  $(D_x F(P_\rho))^T$ , con  $\langle \chi, D_x F(P_\rho) \rangle \neq 0$  y  $\langle \chi, D_{xx} F(P_\rho)(\eta, \eta) \rangle \neq 0$ . Suponemos también condiciones análogas sobre  $P_\lambda$ . Geométricamente, esto implica que  $P_\rho$  y  $P_\lambda$  se comportan como parábolas. Por otro lado consideramos que existe una única trayectoria estable  $r_\rho$  tal que  $r_\rho(t) \rightarrow P_\rho$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y  $r_\rho(t) \rightarrow P_2(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para (FS). Suposiciones análogas también se cumplen para  $P_\lambda$ .

Ahora, con las hipótesis dadas anteriormente, el comportamiento de una sola célula se entiende bien por Terman [17] y Lee y Terman [9]. Presentamos dos resultados.

**Teorema 3.1 (Terman [17] y Lee y Terman [9])** *Supongamos que (H1)-(H3) se cumplen para la ecuación (3.1). Entonces existen  $\varepsilon_i^+ \rightarrow 0^+$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\delta_i \leq C_i e^{-k/\varepsilon_i}$ , tales que la solución periódica de ruptura (Bursting) alternada entre  $L$  y  $P_2$  está únicamente determinada y es asintóticamente estable para todo  $\varepsilon > 0$  excepto para  $\varepsilon \in \bigcup_i (\varepsilon_i - \delta_i, \varepsilon_i + \delta_i)$ .*

**Teorema 3.2 (Terman [17])** *Asumimos que (H1)-(H3) se cumplen para la ecuación (3.1). La solución de ruptura caótica existe para todo  $\varepsilon > 0$  y para  $k = k(\varepsilon)$ . Existe un entero  $N = N(\varepsilon)$  y números reales  $\{k_j\}$ ,  $1 \leq j \leq N(\varepsilon)$  con  $k_j \leq k_{j+1}$  tal que para  $k \in [k_{2j}, k_{2j+1}]$  el mapeo de retorno  $\Pi(k, \varepsilon)$  cerca de la rama inferior del punto de equilibrio del sistema rápido en  $y = y_H$  da lugar a la dinámica  $j$ -Fibonacci.*

Las soluciones de ruptura mencionadas en el teorema 3.1 son soluciones regulares sin movimiento caótico. En el caso de nuestro interés las soluciones se comportan caóticamente.

En el estudio previo de Terman [17], la función nula  $g(v, w, y)$  es linealmente dependiente en un parámetro  $k$ , que el nivel de glucosa en el modelo pancreático. El parámetro puede ser ajustado de tal forma que cuando  $k$  es pequeño, la ecuación (3.1) da lugar a soluciones periódicas de ruptura y cuando  $k$  está por encima de cierto valor, la ecuación (3.1) tiene picos continuos.

En el plano  $(\varepsilon, k)$  existe una región ajustada o de cuña donde el correspondiente mapa de Poincaré inducido por la ecuación (3.1) presenta una dinámica de Fibonacci que caracteriza la dinámica caótica.

Varias células tienen las características mencionadas anteriormente. Por ejemplo, el modelo de Morris-Lecar [17] y el modelo de Hindmarsh-Ross (HR)[1]. En este trabajo estudiamos el modelo (HR) (un prototipo para la teoría de Hodgkin-Huxley) numéricamente. Para ello usamos el software XPPAUT para motivar nuestro estudio de sistemas acoplados. El significado biológico de las suposiciones fueron cuidadosamente explicados en [17].

La variable  $v$  representa el *voltaje*, la variable  $w$  es la *variable de recuperación*,  $\tilde{y}$  es la *corriente interna* y el parámetro  $Inj$  es la *corriente inyectada* en la neurona. Entonces consideremos el sistema

$$\begin{aligned} v' &= w + \phi(v) - \tilde{y} + Inj \\ w' &= \psi(v) - w \\ \tilde{y}' &= -r\tilde{y} + rS(v - c) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde  $Inj = 3,281$ ,  $r = 0,0021$ ,  $c = -1,6$ ,  $S = 4,0$ ,  $\phi(v) = 3v^2 - v^3$ ,  $\psi(v) = 1 - 5v^2$ .

Las condiciones iniciales son  $v = 0$ ,  $w = 0, \tilde{y} = -2$ . La variable  $Inj - \tilde{y} = y$  corresponde a la variable lenta en la ecuación (3.1). La figura 3.2 muestra la trayectoria caótica de la ecuación (3.2).

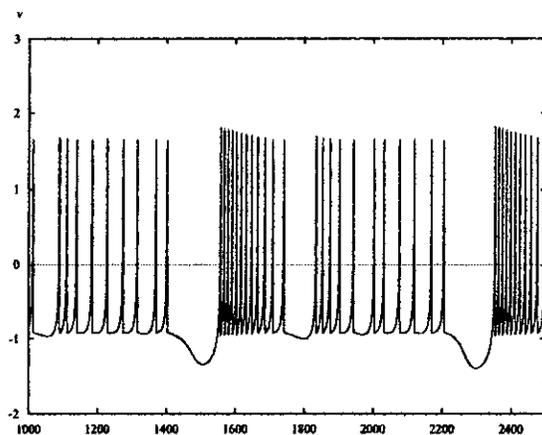


Figura 3.2: Una trayectoria caótica de la ecuación (3.2).

### 3.1. Osciladores acoplados.

Hay un número de maneras en que las neuronas pueden comunicarse entre si. Los dos mecanismos más comunes son el acoplamiento difusivo (brecha de empalmes) o acoplamiento sináptico a través de neurotransmisores. En general, un modelo de acoplamiento difusivo es una conexión eléctrica directa de dos neuronas, y el acoplamiento sináptico describe la conexión mediante la liberación de neurotransmisores cuando otras se activan.

Motivados en los trabajos de Somers y Kopell [15] y Arbarbanel en [1], consideramos los sistemas acoplados

$$\begin{aligned}
 v_1' &= f_1(v_1, w_1, y_1) + \alpha(-v_1 - V_c)H(X_c + v_2) \\
 w_1' &= f_2(v_1, w_1, y_1) \\
 y_1' &= \varepsilon g(v_1, w_1, y_1) \\
 v_2' &= f_1(v_2, w_2, y_2) + \alpha(-v_2 - V_c)H(X_c + v_1) \\
 w_2' &= f_2(v_2, w_2, y_2) \\
 y_2' &= \varepsilon g(v_2, w_2, y_2).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Denotamos  $U_1 = (v_1, w_1, y_1)$  y  $U_2 = (v_2, w_2, y_2)$ . El parámetro constante  $\alpha > 0$  representa la *fuerza de acoplamiento*,  $(-X_c)$  es el *umbral* y  $V_c$  el *potencial de reversa*, que es una magnitud de la respuesta al umbral. Recuerde que  $L$  es la rama inferior de una sola neurona. Para  $U_1 \in L, U_2 \in L$ , tenemos  $(-v_1 - V_c) > 0$  y  $(-v_2 - V_c) > 0$  y por lo tanto de [15] tenemos que los acoplamientos son excitatorios. La función  $H(\cdot)$  es la *función de Heaviside* dada por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiamos primero las soluciones numéricas del modelo acoplado (HR):

$$\begin{aligned}
 v' &= w + \phi(v) - \tilde{y} + Inj - \alpha(v + 1,4)H(G + 0,85) \\
 w' &= \psi(v) - w \\
 \tilde{y}' &= -r\tilde{y} + rS(v - c) \\
 G' &= L + \phi(G) - D + Inj - \alpha(G + 1,4)H(v + 0,85) \\
 L' &= \psi(G) - L \\
 D' &= -rD + rS(G - c)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde todas las condiciones de la ecuación (3.2) se cumplen junto con las condiciones iniciales  $G = 0$ ,  $L = 0,2$ ,  $D = -3,02$ . Las variables  $Inj - \tilde{y} = y_1$  y  $Inj - D = y_2$  corresponden a las variables lentas de la ecuación (3.3). Para este caso la fuerza de acoplamiento es  $\alpha = 0,2$ .

Encontramos que las soluciones son bastante sincronizadas en una solución de ruptura que es regular y elegante como se muestra en la figura 3.3.

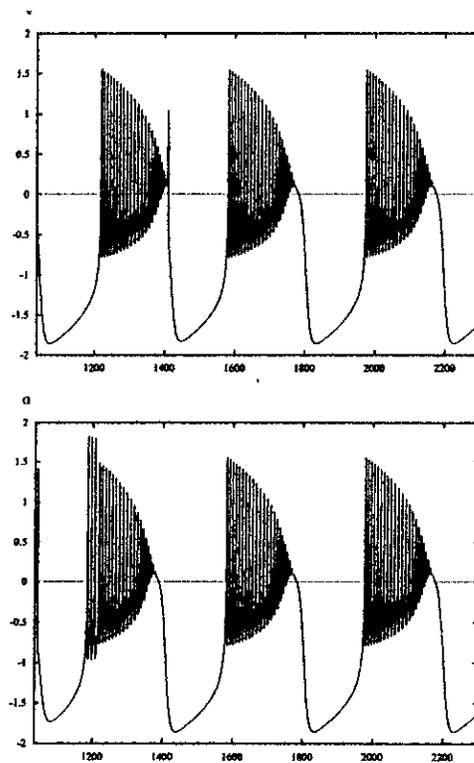


Figura 3.3: Las soluciones convergen rápidamente a una solución de ruptura regular periódica.

Denotamos la familia de soluciones,  $S_\alpha(y)$ , de los puntos de equilibrio de (FS) para el sistema sincronizado de la ecuación (3.3).

$$\begin{aligned} v' &= f_1(v, w, y) - \alpha(v + V_c) \\ w' &= f_2(v, w, y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$y' = \varepsilon g(v, w, y).$$

El cálculo numérico de la bifurcación para (FS) de la ecuación (3.5) indica que cuando  $\alpha > \alpha_0^-$  la familia de soluciones periódicas  $P_1$  y  $P_2$  será separada de la rama intermedia y se fusionarán en una rama continua  $P_\alpha$ . La familia periódica  $P_\alpha$  empezará en una bifurcación de Hopf en su rama superior en  $y = y_b$  y  $y = y_B$  como lo muestra la figura 3.4.

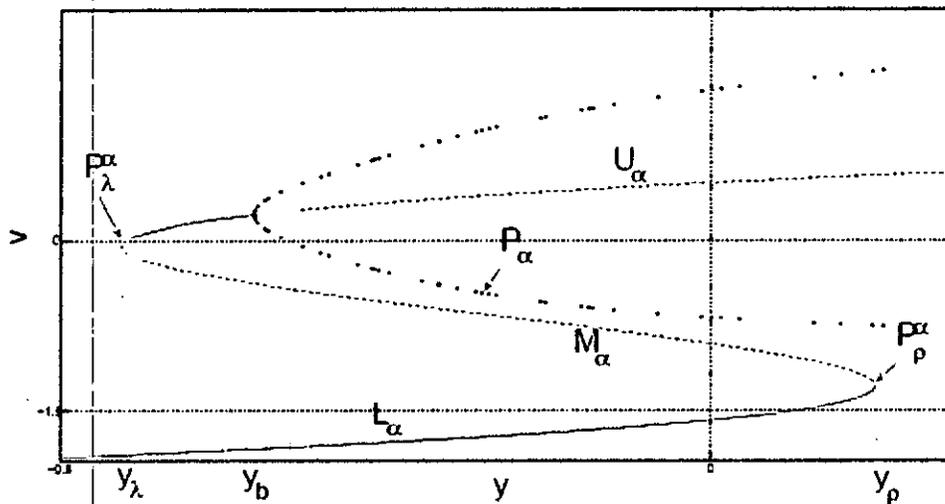


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación del (FS) para la ecuación (3.5) en el ejemplo de (HR) con  $\alpha = 0,2$ .

Denotamos la rama superior del nuevo diagrama de bifurcación  $U_\alpha$  y la rama inferior  $L_\alpha$ .

Damos ahora nuestras hipótesis finales:

- (H4) Supongamos que existe un único valor  $\alpha_0$  tal que cuando  $\alpha \rightarrow \alpha_0^-$ ,  $y_h$  y  $y_H$  colapsan mutuamente. Si  $\alpha > \alpha_0$ , entonces la familia de soluciones periódicas  $P_\alpha$  será separada de la rama media.
- (H5) La fuerza de acoplamiento  $\alpha$  es elegida de tal manera que la rodilla izquierda  $P_\lambda^\alpha$  está entre la brecha de  $P_1$  y  $P_2$ , es decir,  $y_h < y_\lambda^\alpha < y_H$ . Esto restringe el valor de la fuerza de acoplamiento  $\alpha$ .

### 3.2. Sincronización de las soluciones regulares de ruptura.

Denotamos  $F$  como la unión de todas las variedades rápidas de  $L$  a  $U$  o  $P_2$  y de  $U$  o  $P_2$  a  $L$  para la ecuación (3.2). Similarmente, sea  $F_\alpha$  la unión de las variedades rápidas de  $L_\alpha$  a  $U_\alpha$  o  $P_\alpha$ , y de  $U_\alpha$  o  $P_\alpha$  a  $L_\alpha$  para la ecuación (3.5).

**Teorema 3.3 (Resultado principal)** *Supóngase que (H1)-(H5) se cumplen. Entonces existe una solución periódica  $U(t, \varepsilon, \alpha)$  con periodo  $T(\varepsilon, \alpha)$  para la ecuación (3.3) tal que*

- (1)  $\text{dist}(U(t, \varepsilon, \alpha), L \cup F \cup P_\alpha \cup U_\alpha \cup F_\alpha) = O(\varepsilon)$ , y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon, \alpha) = T(\alpha) > 0$
- (2) *Existe  $\delta > 0$  tal que cuando cualquier par de soluciones de ruptura acopladas  $(v_i, w_i, y_i)$   $i = 1, 2$  con condiciones iniciales satisfaciendo  $|(v_1, w_1, y_1) - (v_2, w_2, y_2)| \leq \delta$ ,  $|(v_i, w_i, y_i)(t) - U(t + t_0, \varepsilon, \alpha)| \leq M_0 e^{-\cot t}$  para algún  $t_0$ ,  $i = 1, 2$ , es decir, ambas soluciones de ruptura se sincronizan a la solución periódica  $U(t, \varepsilon, \alpha)$  en la medida que transcurre el tiempo.*

#### Bosquejo de la prueba del teorema 3.3

Analizando las soluciones, notamos que la variedad lenta  $L$  es estable con respecto a (FS). Es decir, el operador linealizado de (FS) cerca a  $L$  tiene dos valores propios con parte real negativa excepto cerca de la rodilla derecha para la ecuación (3.1).

Para  $y_B^\alpha \leq y \leq y_B^\alpha$ , la rama  $U_\alpha(y)$  está rodeada por  $P_\alpha(y)$  desde afuera. A lo largo de ambas secciones de  $U_\alpha(y)$  a la izquierda y a la derecha de  $P_\alpha(y)$ , el operador de (FS) de la ecuación (3.5) tiene un par de valores propios complejos de partes real negativa, excepto para la rodilla izquierda  $P_\lambda^\alpha$ . Para la rama periódica  $P_\alpha$ , los *multiplicadores de Floquet* son 1 y  $\mu$ ,  $|\mu| < 1$ .

Usamos los resultados clásicos de Fenichel [4] para asegurar la existencia de variedades invariantes estables de la ecuación (3.5) cerca de la variedad lenta y solo analizar los flujos dentro de la vecindad de las variedades invariantes  $L, U_\alpha, P_\alpha$ .

Note que las soluciones inicialmente siguen a  $L$  en vez de  $L_\alpha$  porque  $H \equiv 0$  (función de Heaviside) cuando ambas células están en la rama inferior.

Comenzamos ambas soluciones de la ecuación (3.3) en puntos iniciales diferentes en la rama inferior  $L$ . Sin pérdida de generalidad, sea  $U_1(t)|_{t=0}$  en la rodilla derecha  $P_\rho$  y

$$y_1(t) - y_2(t)|_{t=0} = z > O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$z = O(\alpha)$  es independiente de  $\varepsilon$ . Además,  $y_2(t)|_{t=0}$  está a la izquierda de  $P_\rho^\alpha$ , la rodilla derecha del diagrama de bifurcación en la ecuación (3.5) con  $\alpha > 0$  (nota: por ser ésta una condición restrictiva sobre la diferencia en la posición inicial, el resultado del análisis es una *sincronización local*).

Ahora, como la naturaleza del acoplamiento que existe es excitatorio, en la terminología de Somers et al [15], ambas trayectorias se moverán a la familia periódica  $P_\alpha$  mediante una secuencia de eventos que se sustentan en el Teorema 2.18 y se desarrollan alrededor de los diagramas de bifurcación del sistema acoplado y del sistema desacoplado como se ilustra en la figura 3.5.

Estos eventos son los siguientes:

- a) Para  $0 \equiv t_1 \leq t \leq t_2(\varepsilon) = t_1 + O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ ,  $U_1(t) \in N(F)$ , es decir, dentro de la  $\varepsilon$ -vecindad de  $L$  con  $v_1 \leq (-X_c)$  mientras  $U_2(t) \in N(L)$ . De manera que la solución  $U_1$  deja la rodilla derecha y se mueve a lo largo de la vecindad rápida  $F$  (discutida anteriormente y también en [10]) pero aún se encuentra por debajo del umbral  $(-X_c)$  para afectar a la segunda neurona; la segunda solución permanece en la rama inferior por el momento. Ver figura 3.6 a).
- b) Para  $t_2 \leq t \leq t_3(\varepsilon) = t_2 + O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ ,  $U_1(t) \in N(F \cup P_2)$  y  $v_1(t) > (-X_c)$ , mientras  $U_2(t) \in N(F)$  pero  $v_2 < (-X_c)$  debajo del umbral, es decir, la solución  $U_1$  pasa el umbral y alcanza eventualmente la familia de soluciones periódicas  $P_2$  sobre la rama superior de la ecuación no excitada. La segunda solución  $U_2$  deja la rama inferior y se mueve a la variedad rápida  $F$ , porque  $U_2$  consigue excitar a  $U_1$  cuando va por debajo del umbral. Ver figura 3.6 b).
- c) Para  $t_3 \leq t \leq t_4(\varepsilon) \leq t_3 + O(1)$ , mientras  $U_2(t) \in N(F)$  y  $v_2(t) > (-X_c)$  está por arriba del umbral,  $U_1(t)$  salta lejos de  $N(P_2)$  y va hacia  $N(P_\alpha)$ , la nueva familia de soluciones periódicas del sistema sincronizado. Ver figura 3.7 a).

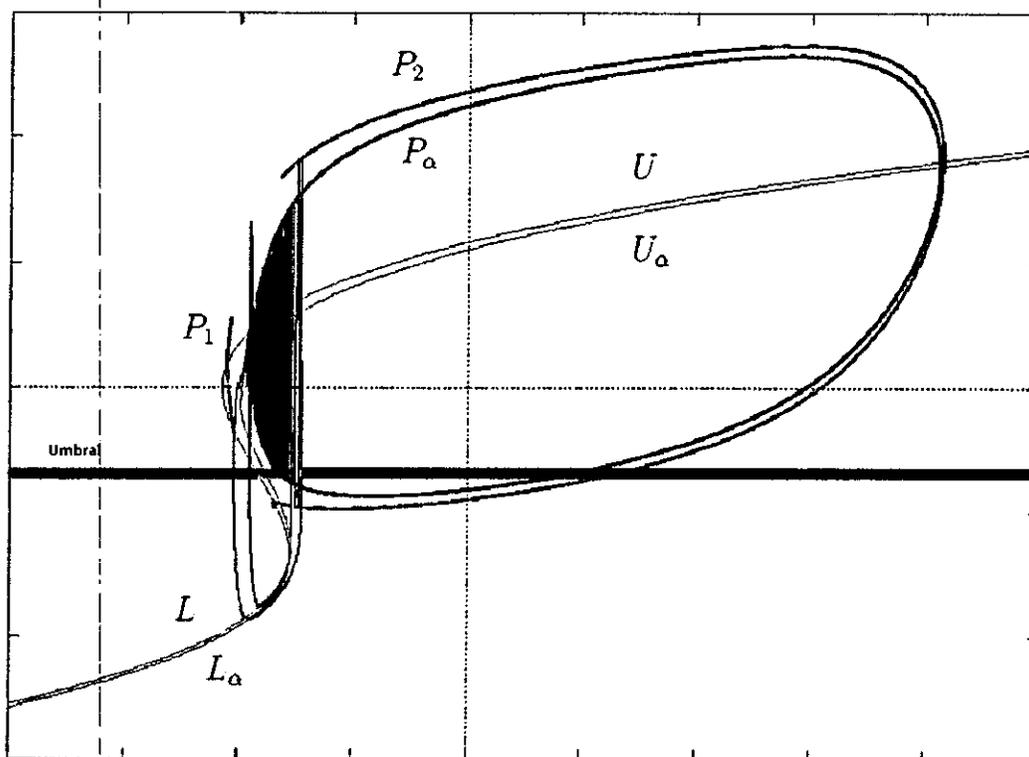


Figura 3.5: Superposición de diagramas de bifurcación (ecuaciones (3.1) y (3.5)).

- d) Para  $t_4 \leq t \leq t_5(\varepsilon) \leq t_4 + O(1)$ ,  $U_1(t)$  se mantiene dentro de  $N(P_\alpha)$ , mientras  $U_2(t) \in N(F_\alpha)$  y  $U_2(t_5) \in N(P_\alpha)$ , esto es, la solución  $U_2$  salta a la familia de soluciones periódicas sobre la rama superior de la ecuación excitada. Ver figura 3.7 b).

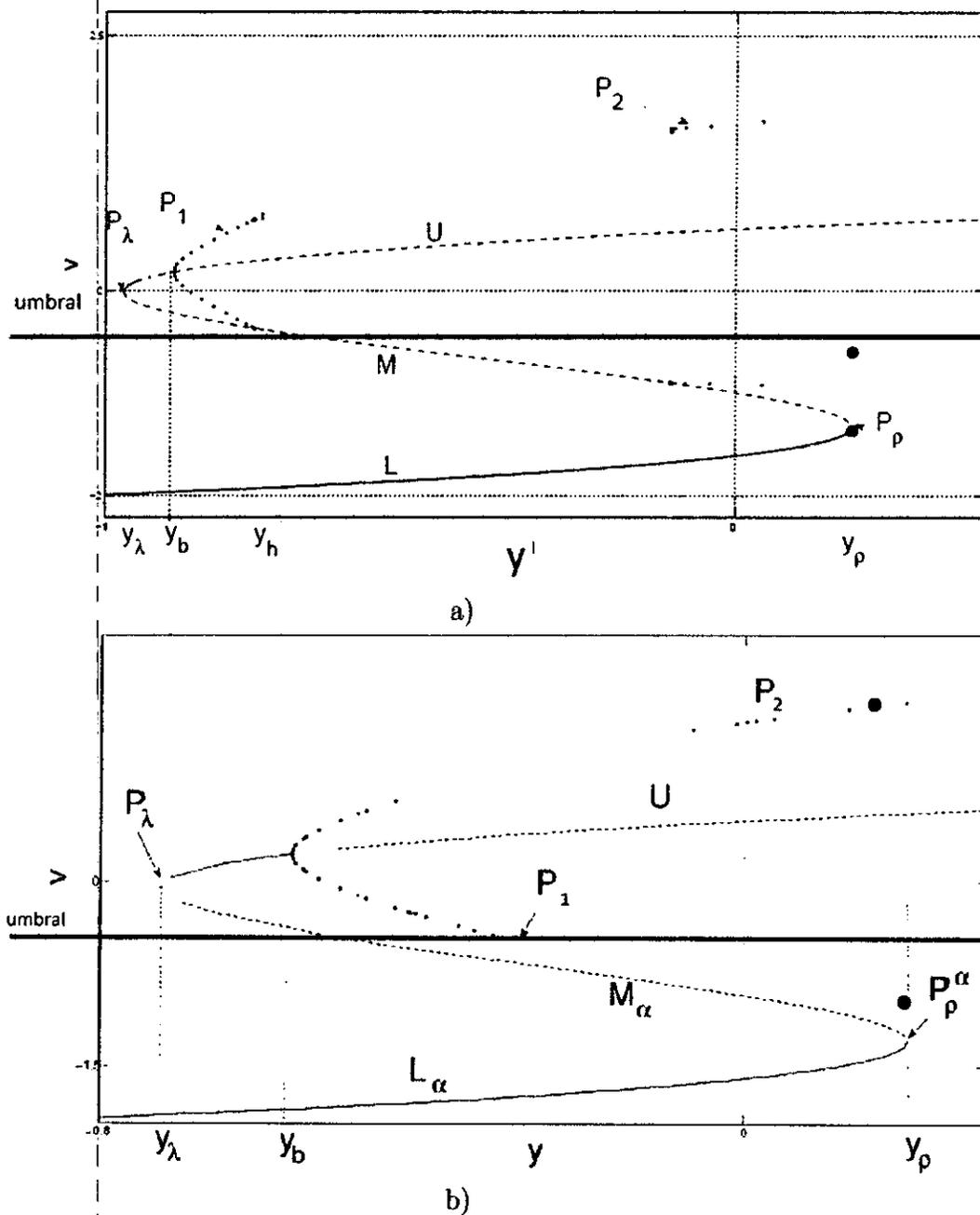


Figura 3.6: Análisis de disección geométrica del modelo neuronal (parte 1).

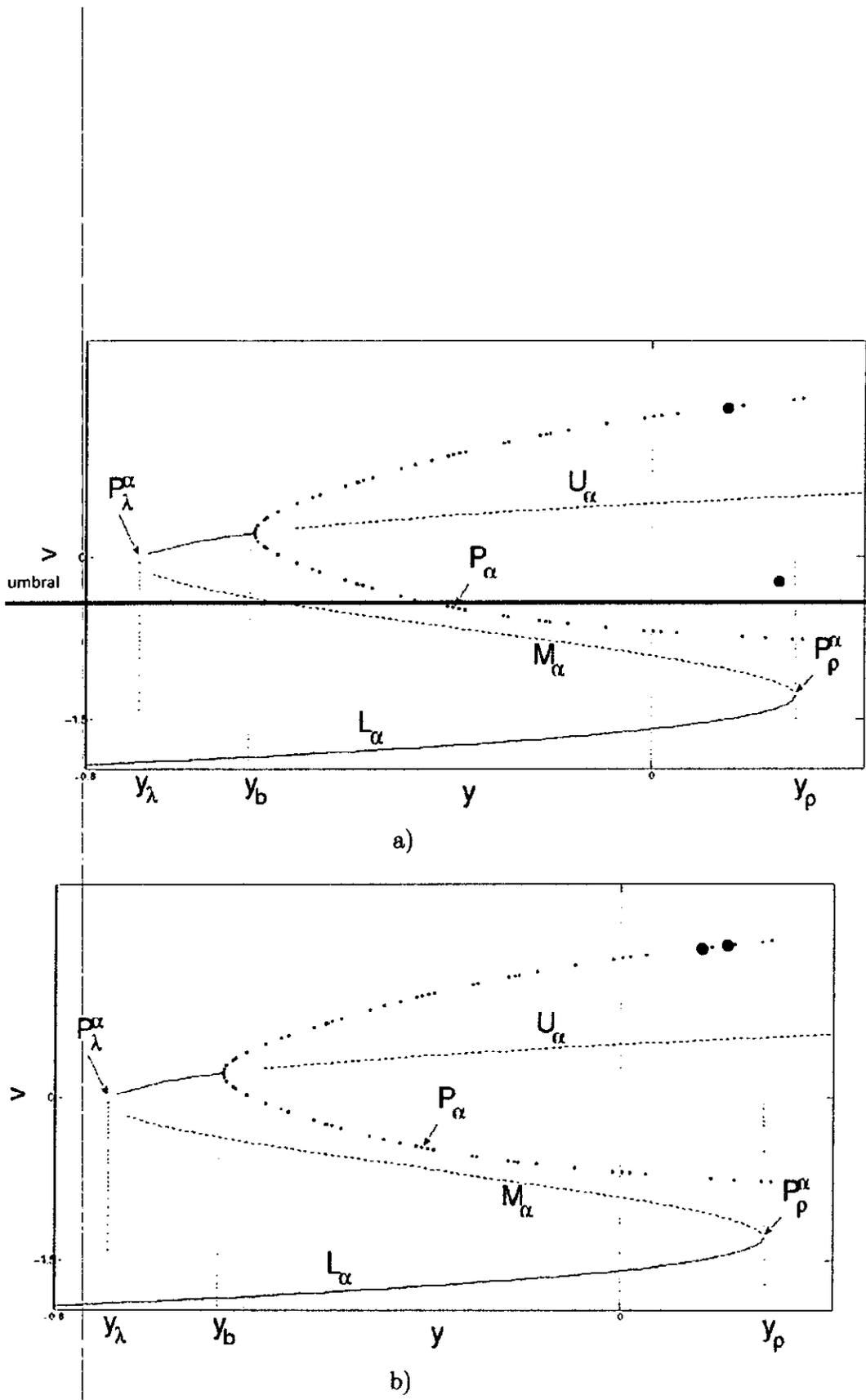


Figura 3.7: Análisis de disección geométrica del modelo neuronal (parte 2).

- e) Finalmente cuando  $t > t_5$ , ambas soluciones  $U_1(t)$  y  $U_2(t)$  se mantienen sobre  $P_\alpha$ , entonces  $|y_1(t_5) - y_2(t_5)| = z + O(\sqrt{\varepsilon})$ . De [15] se tiene que  $U_1(t)$  y  $U_2(t)$  pueden cambiar posiciones durante el salto .

Recordemos que cuando las soluciones se mueven a lo largo de las variedades lentas; en  $L, P_\alpha$  y  $U_\alpha$ , el tiempo de diferencia entre las soluciones es invariante, porque los sistemas están desacoplados y las dos neuronas son sistemas autónomos idénticos. Sin embargo, el tiempo de diferencia entre  $U_1$  y  $U_2$  tiene realmente un cambio significativo durante el salto hacia arriba y el salto hacia abajo entre variedades lentas vía una variedad rápida, igual durante la fase de diferencia en el valor  $y$  que permanece invariante (salvo una precisión de  $O(\sqrt{\varepsilon})$ ).

Calculamos la diferencia de tiempo localizándonos sobre las variedades lentas (la rama inferior, la rama superior además de la familia periódica). Para la rama inferior, la dinámica lenta satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}(v, w) &= L(y) \\ y' &= \varepsilon g(L(y), y),\end{aligned}$$

la diferencia de tiempo en la rama inferior es

$$\Delta T = \int_{y_p - z}^{y_p} \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} dy$$

donde  $y_p$  es el valor del parámetro en la rodilla derecha. Entonces sobre la variedad lenta a lo largo de la familia periódica  $P_\alpha$ , alrededor de la rama superior de las ecuaciones excitadas; usamos el metodo de promedio [14] para obtener la dinámica lenta para  $y$ .

$$\begin{aligned}(v, w) &= P_\alpha(t, y) \\ y' &= \varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

donde el movimiento promedio

$$\bar{P}_\alpha(y) = \frac{1}{\pi(y)} \int_0^{\pi(y)} P_\alpha(y) dt$$

es el promedio bajo el periodo  $\pi(y)$ . Entonces la diferencia de tiempo sobre la rama periódica puede también ser similarmente determinada como

$$\Delta T' = \int_{y_p}^{y_p - z} \frac{1}{\varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y)} dy.$$

Ahora consideramos que  $U_1$  y  $U_2$  se mueven a lo largo de  $P_\alpha$  manteniendo la diferencia de tiempo invariante y eventualmente entran a  $U_\alpha$ , la rama superior a la derecha del punto de bifurcación de Hopf. Ellas llegarán cerca de la rodilla derecha y eventualmene saltan hacia abajo en la rama inferior  $L$  en un similar escenario como los acontecidos en los saltos hacia arriba de  $U_1$  y  $U_2$ .

La razón de los saltos hacia abajo, sin embargo es diferente. Los acoplamientos que existen no son excitatorios.

Cuando una neurona salta hacia abajo y se encuentra por debajo del umbral ( $-X_c$ ), la otra que se encuentra sobre  $U_\alpha$  pasa de la variedad rápida  $F_\alpha$  a moverse sobre  $F$ . Luego, de (H1) y (H5), ambas soluciones  $U_1$  y  $U_2$  se moverán hacia la única rama estable  $L$ .

Similarmente, podemos calcular de la diferencia de tiempo invariante  $\Delta T'' = \Delta T'$  cuando viajan a lo largo de la rama superior  $U_\alpha$  para obtener una diferencia de fase horizontal  $\tilde{z}$  en la rodilla izquierda. También,  $\Delta T'''$ , la diferencia de tiempo viajando a través de la rama inferior  $L$  puede ser calculada de la fase horizontal  $\tilde{z}$ , porque la diferencia de fase es invariante durante el salto hacia abajo.

Ahora resumimos calculando la diferencia de tiempo entre dos neuronas completada una vuelta. Notemos que durante el salto, la  $y$ -diferencia es invariante (salvo un error de  $O(\sqrt{\varepsilon})$ ). Cuando viajan en las ramas superior o inferior la  $t$ -diferencia es invariante.

Para calcular las diferencias de tiempo se utilizan expansiones asintóticas en el parámetro. En [11] los teoremas 1 y 2 del capítulo I garantizan la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro  $\varepsilon$  así como su diferenciabilidad, de tal modo que la expansión asintótica es posible. Además, en el capítulo III de [11] se muestra el rigor de los cálculos.

Sea  $z$  la diferencia inicial suficientemente pequeña, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_{y_\rho - z}^{y_\rho} \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} dy \\ &= h(z) \\ &= h(0) + h'(0)z + \frac{h''(c)}{2!}(z-0)^2, \quad \text{con } c \in (y_\rho - z, y_\rho) \\ &= h'(0)z + h.o.t. \\ \Delta T &= \left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) z + h.o.t. \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \int_{y_\rho - z}^{y_\rho} \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} dy \\
 h(z) &= T(y_\rho) - T(y_\rho - z) \\
 h'(z) &= -t(y_\rho - z)(-1) \\
 h'(z) &= t(y_\rho - z) \\
 h'(0) &= t(y_\rho) \\
 h'(0) &= t(y)|_{y=y_\rho} \\
 h'(0) &= \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\rho}
 \end{aligned}$$

**Observación:**  $T(y)$  es una función tal que  $T'(y) = t(y) = \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)}$  para  $y \in [y_\rho - z, y_\rho]$  y *h.o.t* = *high order terms* = *términos de orden superior*. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \Delta T' &= \int_{y_\rho}^{y_\rho - z} \frac{1}{\varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y)} dy \\
 &= h_1(z) \\
 &= h_1(0) + h_1'(0)z + \frac{h_1''(c_1)}{2!}(z - 0)^2, \quad \text{con } c_1 \in (y_\rho - z, y_\rho) \\
 &= h_1'(0)z + \text{h.o.t.} \\
 \Delta T' &= \left( \frac{-1}{\varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) z + \text{h.o.t.}
 \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 h_1(z) &= \int_{y_\rho}^{y_\rho - z} \frac{1}{\varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y)} dy \\
 h_1(z) &= T_1(y_\rho - z) - T_1(y_\rho) \\
 h_1'(z) &= t_1(y_\rho - z)(-1) \\
 h_1'(0) &= -t_1(y_\rho) \\
 h_1'(0) &= -t_1(y)|_{y=y_\rho} \\
 h_1'(0) &= \frac{-1}{\varepsilon g(\bar{P}_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\rho}
 \end{aligned}$$

**Observación:**  $T_1(y)$  es un función tal que  $T_1'(y) = t_1(y) = \frac{1}{\varepsilon g(P_\alpha(y), y)}$ , para  $y \in [y_\rho - z, y_\rho]$ .

Entonces la diferencia de tiempo de  $\Delta T$  se trasladará en la diferencia de fase de  $\tilde{z}$  en la rodilla izquierda

$$\begin{aligned} \Delta T' = \Delta T'' &= \int_{y_\lambda + \tilde{z}}^{y_\lambda} \frac{1}{\varepsilon g(U_\alpha(y), y)} dy \\ &= h_2(\tilde{z}) \\ &= h_2(0) + h_2'(0)\tilde{z} + \frac{h_2''(c_2)}{2!}(\tilde{z} - 0)^2, \quad \text{con } c_2 \in (y_\lambda, y_\lambda + \tilde{z}) \\ &= h_2'(0)\tilde{z} + h.o.t. \\ \Delta T''' &= \left( \frac{-1}{\varepsilon g(U_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \tilde{z} + h.o.t. \end{aligned}$$

y la diferencia de tiempo final después de retorno a  $L$  es

$$\Delta T'''' = \left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \tilde{z} + h.o.t.$$

Para ilustrar mejor estos acontecimientos ver figuras 3.8 y 3.9.

Notemos aquí que de la función de Heaviside y el tipo de acoplamiento, los sistemas están desacoplados si ambos están en  $L$  o  $U_\alpha$  y  $P_\alpha$ ,  $\Delta T' = \Delta T''$ , este es un estudio simple de los casos de sinápsis directa e indirecta descritos por terman et al [18].

Por lo tanto se maneja la razón de tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T''''}{\Delta T'} &= \frac{\Delta T'''' \Delta T'' \Delta T'}{\Delta T'' \Delta T' \Delta T} \\ &= \frac{\Delta T'''' \Delta T'}{\Delta T'' \Delta T} \\ &= \frac{\left[ \left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \tilde{z} + h.o.t. \right] \left[ \left( \frac{-1}{\varepsilon g(P_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) z + h.o.t. \right]}{\left[ \left( \frac{-1}{\varepsilon g(U_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \tilde{z} + h.o.t. \right] \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) z + h.o.t. \right]} \\ &= \frac{\left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \left( \frac{-1}{\varepsilon g(P_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) \tilde{z} z + h.o.t.}{\left( \frac{-1}{\varepsilon g(U_\alpha(y), y)} \Big|_{y=y_\lambda} \right) \left( \frac{1}{\varepsilon g(L(y), y)} \Big|_{y=y_\rho} \right) \tilde{z} z + h.o.t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(U_\alpha(y), y)|_{y=y_\lambda} g(L(y), y)|_{y=y_\rho}}{g(L(y), y)|_{y=y_\lambda} g(P_\alpha(y), y)|_{y=y_\rho}} + h.o.t \\
&\equiv \sigma.
\end{aligned}$$

Cuando la superficie nula de  $g$  está cercana, ya sea a la rodilla derecha de la rama inferior  $L$  o la rodilla izquierda de la rama superior  $U_\alpha$ , el numerador  $g(U_\alpha(y), y)|_{y=y_\lambda} g(L(y), y)|_{y=y_\rho}$  es pequeño y  $\sigma < 1$ . Por tanto, se tiene que dadas dos soluciones con diferencia inicial  $z \leq z_0$ , en el tiempo, su diferencia se hará más pequeña y

$$\Delta T(t) = O(\sigma^{\frac{t}{\pi_\alpha}}),$$

donde  $\pi_\alpha = O(\frac{1}{\epsilon})$  es el tiempo de duración cuando viajan una vez sobre la variedad lenta  $L, P_\alpha$  y  $U_\alpha$ .

## CONCLUSIONES

Después de realizar algunos experimentos numéricos con el software XPPAUT con el prototipo del modelo acoplado (HR) en la ecuación (3.4), se puede afirmar que en la medida que aumentamos la fuerza de acoplamiento sináptico  $\alpha$ , se logran soluciones de ruptura que se sincronizan cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un caso adverso sucede cuando la fuerza de acoplamiento disminuye. Por ejemplo, para  $\alpha = 0,05$ , en la ecuación (3.4) se tienen soluciones regulares de ruptura no sincronizadas (ver figura 3.10).

Por otra parte, se puede pensar en llevar estos análisis a una red de  $N$ -neuronas, siguiendo cada una el prototipo de Hindmarsh-Rose y así formar grupos neuronales que estén completamente sincronizados.

En síntesis, se puede decir que el trabajo presentado evidencia como es posible lograr que las neuronas con comportamiento dinámico caótico se ocoplen para oscilar de manera coordinada para desarrollar tareas.

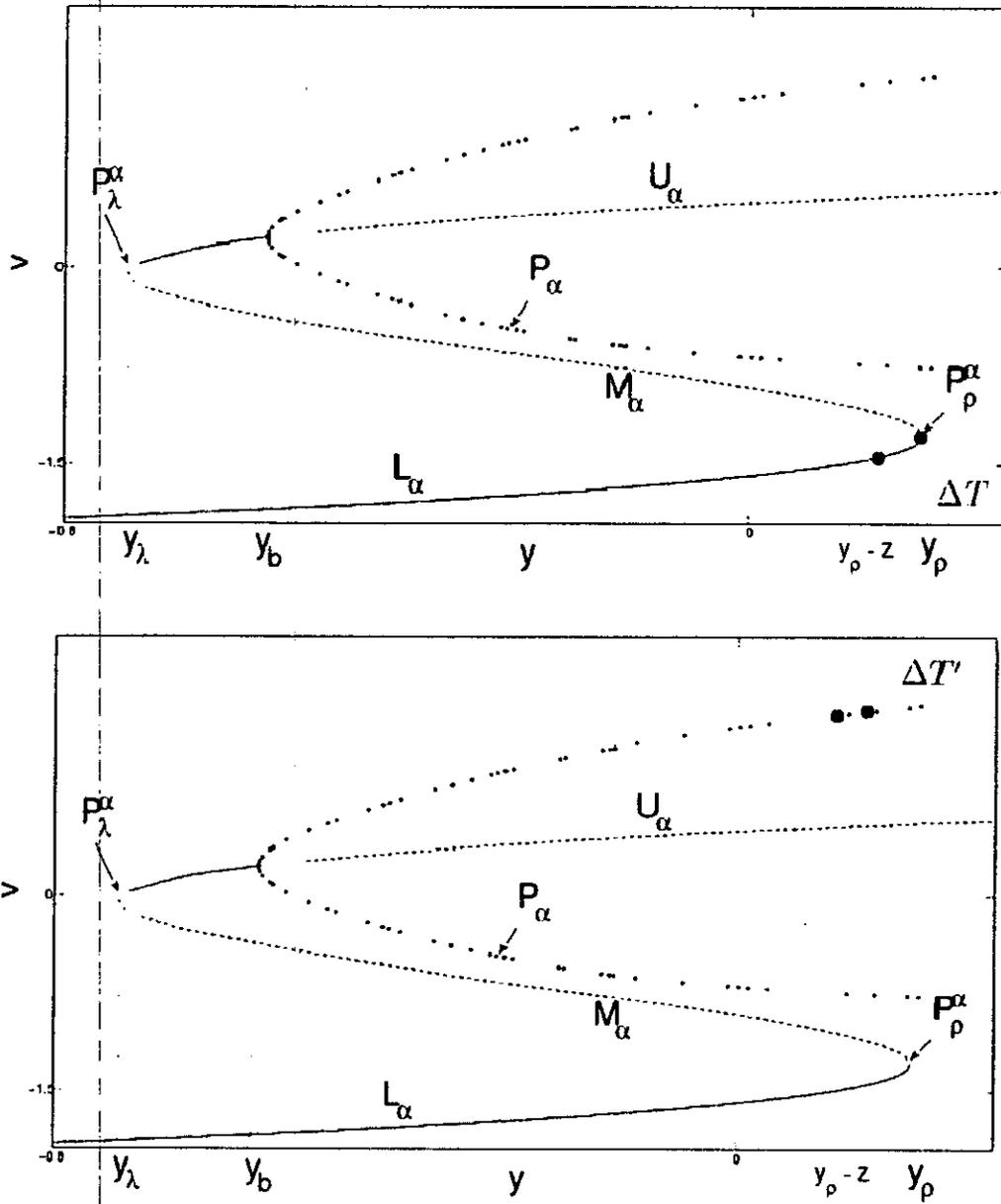


Figura 3.8: Análisis geométrico de las diferencias  $\Delta T$  y  $\Delta T'$ .

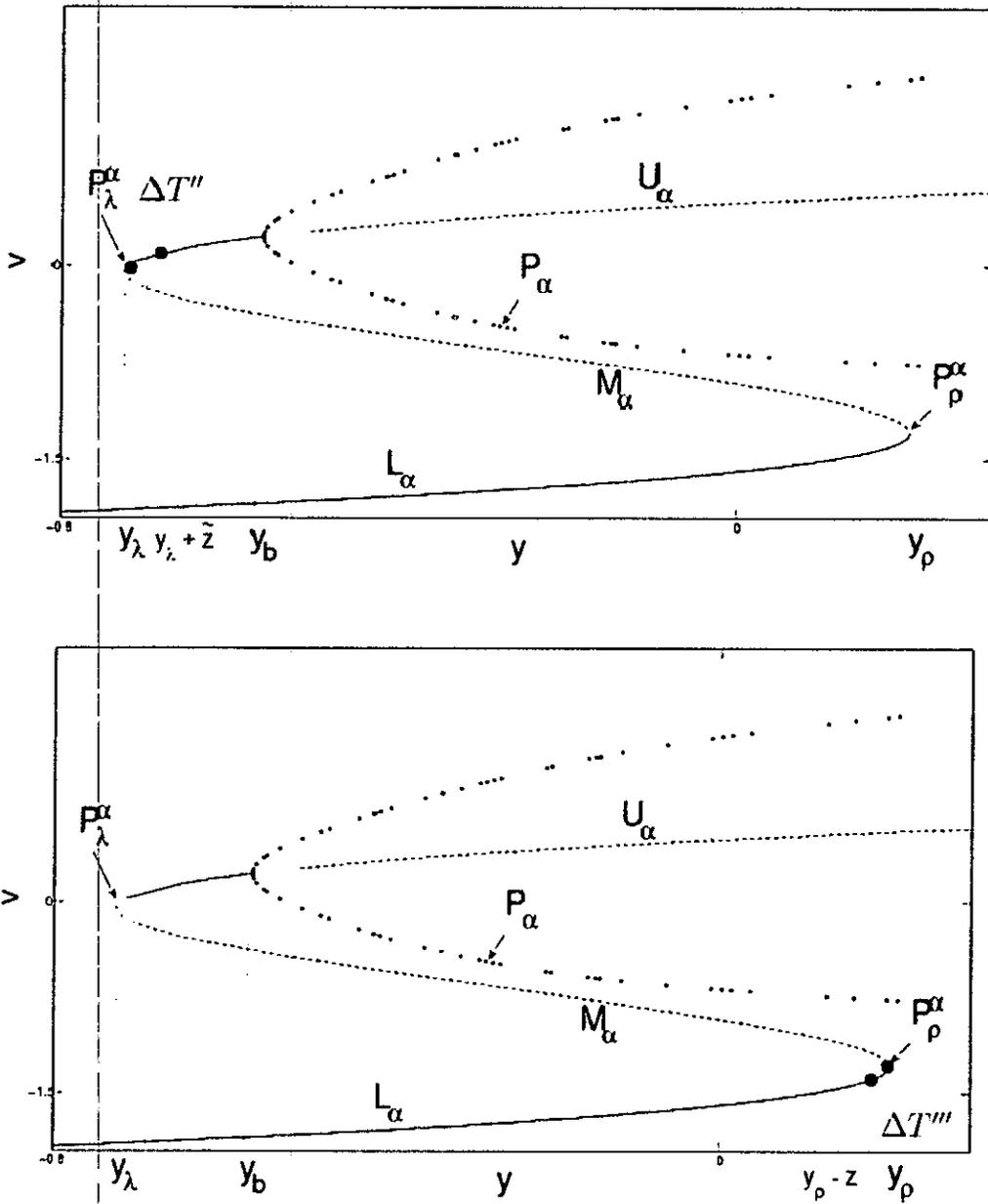
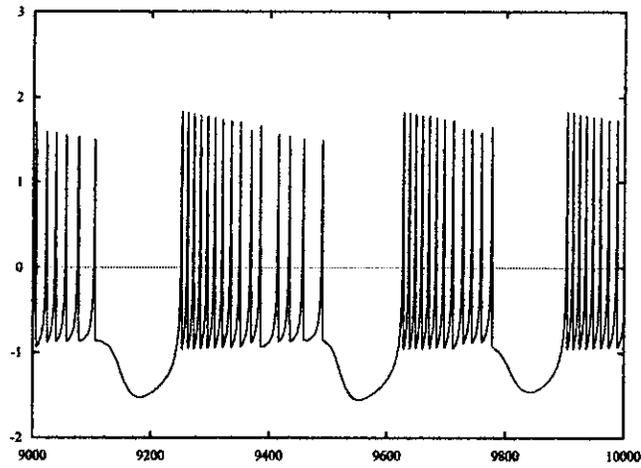


Figura 3.9: Análisis geométrico de las diferencias  $\Delta T''$  y  $\Delta T'''$  completada una vuelta.

(a)



(b)

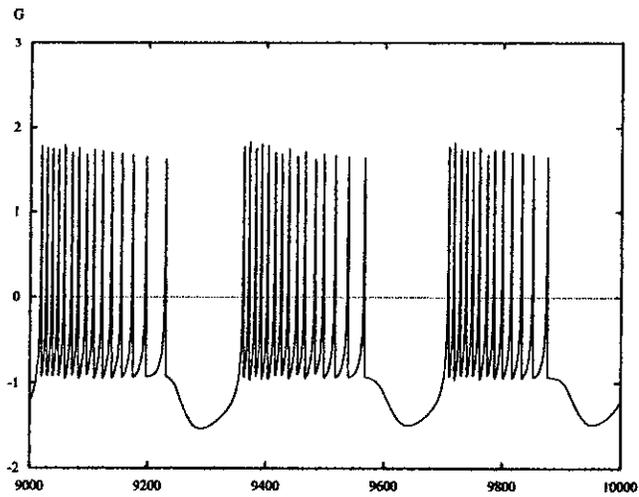


Figura 3.10: Para una fuerza de acoplamiento débil, existen soluciones de ruptura regular pero no sincronizadas en el tiempo.

## ANEXOS

A continuación se dá el código de una simulación en MATLAB para visualizar el comportamiento dinámico caótico de las neuronas y su sincronización el tiempo. El código está dado por:

```

clc
clear
z=dlmread('simulacion.dat');
teta=0:0.001:2*pi;
for k=1:10:length(z)
    hold on
    fill(z(k,4)+0.1*cos(teta),z(k,2)+0.1*sin(teta),'r')
    hold on
    fill(z(k,7)+0.1*cos(teta),z(k,5)+0.1*sin(teta),'g')
    plot(z(:,4),z(:,2),'b')
    hold on
    axis([-2 5 -2 3]);
    M(k + 1) = getframe;
end
clf
end
movie(M)

```

donde *simulacion.dat* es un archivo de datos que para los fines de este trabajo se le ha colocado el nombre de *simulacion* (el lector puede colocarle el nombre que desee).

Este archivo se genera usando el software XPPAUT de la siguiente manera:

1. Instale XPPAUT.
2. Se escribe el sistema de la ecuación (3.4) en *WordPad* o en el *block de notas* así:

```

v' = w+3*v^2-v^3-y+inj-alpha*(v+1.4)*heav(G+0.85)
w' = 1-5*v^2-w
y' = -r*y+r*S*(v-c)
G' = L+3*G^2-G^3-D+inj-alpha*(G+1.4)*heav(v+0.85)
L' = 1-5*G^2-L
D' = -r*y+r*S*(G-c)
p inj=3.281 r=0.0021 c=-1.6 S=4.0 alpha=0.2
i v=0 w=0 y=-2 G=0 L=0.2 D=-3.02
@ maxstore=1000000,total=2500,dt=0.05 XHi=2300 XLo=1035 YHi=-2 YLo=3
done

```

donde @ *maxstore*, *total*, *dt*, *XHi*, *Xlo*, *Ylo*, *YHi* son ajustes de memoria y escala para que el sistema se ejecute correctamente en XPPAUT<sup>1</sup>. A este archivo le coloca el nombre que deseé y lo guarda. Por ejemplo: "gerardo.ode"<sup>2</sup>.

3. Inserte el archivo en XPPAUT y genere las solución del sistema siguiendo la secuencia

+ .

4. Diríjase a  y luego a  y le coloca en el cuadro *file* el nombre *simulacion* y lo guarda.<sup>3</sup>
5. Guarde todo los archivos en una sola carpeta y córralo en MATLAB para ver la película (ver figura 3.11).

<sup>1</sup>Ajuste el *maxstore* en el archivo fuente agregando o quitando ceros si tiene problemas al momento de correrlo en XPPAUT.

<sup>2</sup>Esto usualmente se escribe "nombre que deseé.ode".

<sup>3</sup>Borre la palabra *test* y coloca la palabra *simulacion*, finalizando con un clic en .

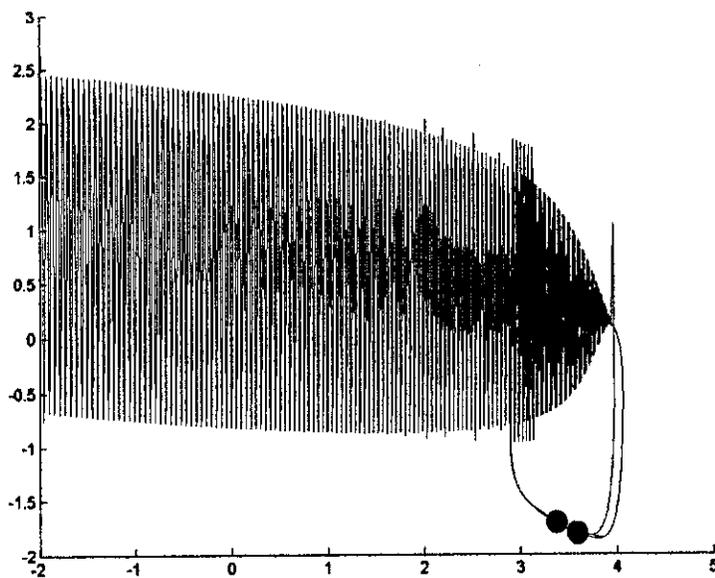
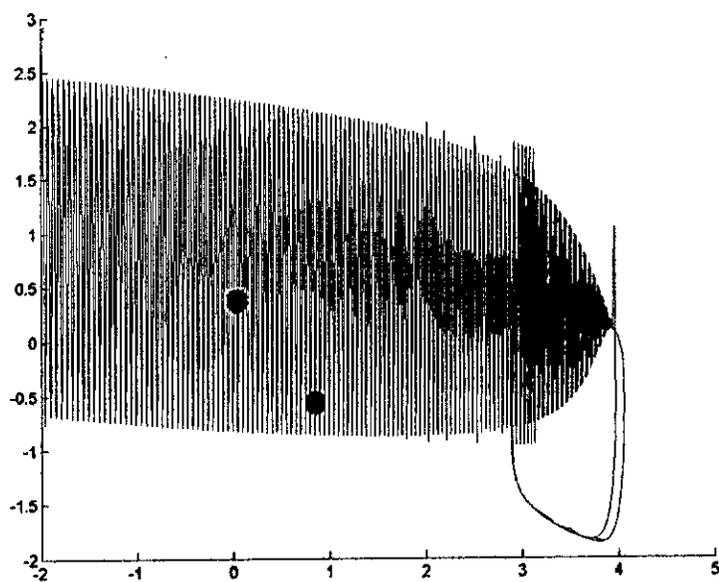


Figura 3.11: Simulación del comportamiento dinámico caótico de las neuronas con MATLAB de la ecuación (3.4).

## Bibliografía

- [1] ARBARBANEL, H., HUERTA, R., RAVINOVICH, M. I., RULKOV, N. F., ROWAT, P. F., AND SELVERSTON, A. I. Synchronized action of synaptically coupled chaotic model neurons. *Neural computation* 8 (1996), 1567–1602.
- [2] ARNOLD, V. I. *Ordinary Differential Equations*. M. I. T, 1973.
- [3] DE LA ESCOSURA LIZÁRRAGA, S. M. *Ecuaciones Diferenciales que Modelan la Propagación de Frentes de Ondas Cardíacas*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2009.
- [4] FENICHEL, N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.* (1971), 193–226.
- [5] HALE, J. *Ordinary Differential Equations*. Inc, Malabar Florida, 1980.
- [6] HODGKIN, A., AND HUXLEY, A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology* 117 (1952), 500–544.
- [7] HOLMES, P. J. A strange family of three-dimensional vectors fields near a degenerate singularity. *J. Differential Equations* 37 (1980), 382–404.
- [8] KEENER, J. P., AND SNEYD, J. *Mathematical Physiology*, vol. 8. New York,, 1998.
- [9] LEE, E., AND TERMAN, D. Uniqueness and stability of periodic bursting solutions. *J. Differentials Equations* 158 (1971), 48–78.
- [10] MISHCHENKO, E. F., KOLESOV, Y. S., KOLESOV, A. Y., AND ROZOV, N. K. *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*. New York, 1994.

- [11] MISHCHENKO, E. F., AND ROZOV, N. K. *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations*. plenum press. New York and London, 1980.
- [12] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems, Three Edition*. Texts in applied mathematics; 7, 2000.
- [13] RINZEL, J. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems. *Proceedings of International Congress of Mathematics (ed. A. M. Gleason)*, AMS (1987), 1578–1593.
- [14] SANDERS, J. A., AND VERHULST, F. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical System*. New York, 1985.
- [15] SOMERS, D., AND KOPELL, N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biol. Cybern.* 68 (1993), 393–407.
- [16] SU, J., AND PÉREZ, H. Regular bursting emerging from coupled chaotic neurons. *Discrete an continous Dynamical Systems, Suplement* (2007), 946–955.
- [17] TERMAN, D. Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes. *J. Appl. Math.* 51 (1991), 1418–1450.
- [18] TERMAN, D., KOPELL, N., AND BOSE, A. Dynamics of two mutually coupled slow inhibitory neurons. *Physica D* 117 (1998), 241–275.
- [19] WANG, A., AND RINZEL, J. Oscillatory and bursting properties of nuerons. *Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, ed. M.A. Arbib (1995), 686–691.
- [20] WIGGINS, S. *Introduction to applied nolinear dynamical systems and chaos*. Texts in applied mathematics, 1996.