1

DERLIS AMINTA VILLADIEGO RINCÓN.

Métodos Asintóticos

Trabajo realizado para optar al título de Especialista en Matemáticas Avanzadas.

DIRECTORA
ANA MAGNOLIA MARÍN.

Métodos Asintóticos

DERLIS AMINTA VILLADIEGO RINCÓN

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA
OCTUBRE 2010

Métodos Asintóticos.

DERLIS AMINTA VILLADIEGO RINCÓN

Trabajo de Grado Presentado como Requisito Parcial para Optar al Título de Especialista en Matemáticas Avanzadas

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
DIRIGIDO POR
ANA MAGNOLIA MARÍN RAMÍREZ.
MATEMÁTICA. PH, D.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA
OCTUBRE 2010

Contenido.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios, por brindarme la oportunidad de culminar mis estudios con la presentación de este maravilloso trabajo de investigación.

Quiero dedicarle este logro, a mis padres Ana y Jaime, y a mi esposo Harold Gamero, por todo su Amor y apoyo incondicional.

Además, quiero agradecer muy especialmente a la profesora Ana Magnolia, mi asesora por su atención y dedicación.

Por último agradezco a todo el equipo docente que hizó parte en la formación de mis estudios como Especialista en Matemáticas Avanzadas.

6

Introducción

Jules Henri Poincaré en 1886 introdujo la noción de expansión asintótica, este concepto permitió manipular una gran clase de series divergentes casi de la misma manera que en series de potencias convergentes, pero dado que muchas de las propiedades comúnmente asociadas con expansiones asintóticas son excluidas de la definición. En 1937 Schmidt describió una generalización de ésta y más tarde extendida por Erdély en 1961.

En el siglo XIX mas exactamente en 1820 Pierre Simon Laplace demostró una técnica que nos permite generar un desarrollo asintótico de integrales que dependen de un parámetro grande cuando éste tiende a infinito. Este método se ha utilizado para estudiar: El comportamiento asintótico de algoritmos estocásticos, "transiciones de fase", entre otros.

Una extensión del método de Laplace es el método de la fase estacionaria desarrollado para resolver integrales encontradas en el estudio de ondas de agua, utilizado por Stokes en 1850 en la investigación de la integral de Airy, y formulado en términos más generales por Kelvin en 1887. Cabe resaltar que este principio se ha aplicado a numerosos problemas de matemática y fisica como por ejemplo la hidrodinámica y al cromatografía. Otros avances en la teoría de aproximaciones asintóticas se deben a Poincaré en 1904, George Nevelli Watson en 1918, el cual, demostró un resultado significativo más conocido como el lema de Watson, que se utiliza para obtener aproximaciones asintóticas de ciertas integrales con un parámetro grande, van der Corput (1934, 1936), Bijl (1937), Erdély (1955), D.S. Jones (1966), y Cirulis (1969).

Con este trabajo se pretende utilizar las técnicas de aproximación asintóticas de integrales, tales como: El método de Laplace usado para aproximar integrales de la forma:

$$\int_a^b e^{ph(t)} f(t)dt, \quad \text{cuando} \quad p \to \infty$$

Y el método de la fase estacionaria, con el propósito de resolver integrales de la forma:

$$\int_a^b \cos[ph(t)]f(t)dt \quad y \quad \int_a^b \sin[ph(t)]f(t)dt, \quad \text{cuando} \quad p \to \infty$$

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Funciones de variación acotada y total

Definición 1.1.1. *Sea f una función sobre un intervalo finito o infinito (a,b) y sea $\sum P = \sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)|$, entonces para todo n no acotado y todos los posibles modos de subdivisión $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, con x_0 y x_n en la clausura de (a,b).*

El número

$$\vartheta_{a,b}(f) = sup \sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)|$$

se llama variación total de f en el intervalo (a,b).
Si el supremo es finito, entonces decimos que f es de variación acotada.

Nota 1.1.1. *Cuando $f(x)$ es continuamente diferenciable en $[a,b]$, entonces por el teorema del valor medio llegamos a que:*

$$\sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)| = \sum_{s=0}^{n-1} (x_{s+1} - x_s)|f'(\xi_s)|, \text{ donde } \quad x_s < \xi_s < x_{s+1}.$$

Es claro que la continuidad de $f'(x)$ implica que $|f'(x)|$ sea continua. Por tanto, de la definición de la integral de Riemann podemos afirmar que:

$$\vartheta_{a,b}(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

1.2. Función Gamma y función complementaria a la función Gamma incompleta

Definición 1.2.1. *La función Gamma se define como:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s}\, ds, \quad para \;\; x > 0.$$

La propiedad fundamental de la función Gamma es:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Integrando por partes se puede llegar a la verificación de la propiedad.

Ejemplo 1.2.1. $\Gamma(n+1) = n!$.

Ejemplo 1.2.2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$.

Definición 1.2.2. *La función complementaria a la función Gamma incompleta se encuentra definida como:*

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt.$$

1.3. Símbolos de Orden

Definición 1.3.1. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en una vecindad V de x_0. Decimos que $f(x)$ es O grande de $g(x)$, cuando $x \to x_0$ y escribimos*

$$f(x) = O(g(x)), \text{ cuando } \quad x \to x_0$$

si existe una vecindad V de x_0 y una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

También, podemos decir que $f(x)$ es de orden O grande de $g(x)$, o, $f(x)$ es asintóticamente acotado por $g(x)$.
Por lo tanto, siempre que $g(x)$ sea distinto de cero en una vecindad de x_0, excepto posiblemente en x_0 tenemos que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M.$$

El orden muestra que una función $f(x)$ se aproxima al valor del límite a la misma velocidad con lo que lo hace la función Gauge.
En la expresión anterior la función $g(x)$ es llamada función de Gauge.

Proposición 1.3.1. *Si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$, donde c es finito, entonces*

$$f(x) = O(g(x)), \text{ cuando } x \to x_0.$$

Demostración:
Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \varepsilon$.

Luego, consideremos

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} + c - c\right|$$

$$\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| + |c|$$

$$< \varepsilon + |c|.$$

Llamemos $k = \varepsilon + |c|$, entonces $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < k$. ■

Definición 1.3.2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en una vecindad de x_0. Decimos que $f(x)$ es o pequeño de $g(x)$, cuando $x \to x_0$ y escribimos*

$$f(x) = o(g(x)), \text{ cuando } \quad x \to x_0.$$

si $\forall\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V = V(\varepsilon)$ de x_0 tal que

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|, \ x \in V.$$

Esto significa que siempre que $g(x)$ sea distinto de cero en una vecindad de x_0, exceptò posiblemente en x_0, tenemos que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \text{ cuando } \quad x \to x_0.$$

Podemos decir, que $f(x)$ es de orden o pequeño de $g(x)$, cuando $x \to x_0$,o, $f(x)$ es asintóticamente más pequeño que $g(x)$.

1.4. Expansiones asintóticas

Definición 1.4.1. *Una sucesión de funciones $\{\delta_n(x)\}$, definida en una vecindad V de x_0 es una sucesión asintótica, cuando $x \to x_0$, si para cada $n = 1, 2, 3, \cdots$, tenemos que*

$$\delta_{n+1}(x) = o[\delta_n(x)], \text{cuando} \quad x \to x_0.$$

donde $\{\delta_n(x)\} \neq 0$ para $x \neq x_0$ y $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Definición 1.4.2. *Si $\delta_n(x)$ es una sucesión asintótica de funciones, cuando $x \to x_0$, decimos que:*

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n(x),$$

es una expansion asintótica o aproximación asintótica de $f(x)$, si para cada N

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(x) + R_N, \text{ cuando } \quad x \to x_0.$$

donde,

$$R_N = O(\delta_{n+1}(x)), \text{ cuando } \quad x \to x_0.$$

los coeficientes a_n, son términos independientes de x.
Además, también podemos decir que si R_N se aproxima a cero más rápido que los términos de la serie parcial cuando $x \to \infty$ para un N fijo, entonces la serie es una serie asintótica.

Teorema 1.4.1 (Formula de Taylor con resto). *Sea f una función que admita derivada n-ésima $f^{(n)}$ finita en todo el intervalo abierto (a, b) y $f^{(n-1)}$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que $x_0 \in [a, b]$. Entonces, para todo x de $[a, b]$, $x \neq x_0$, existe un punto x_1 interior al intervalo, que une a x con x_0 tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n-1}(x), \text{ donde } R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Si $x_0 = 0$, entonces la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n-1}(x), \text{ donde } R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} x^n$$

recibe el nombre de series de Maclaurin con resto.

Teorema 1.4.2. *Toda serie de Maclaurin es una expansión asintótica.*

Demostración:
Sea $f(x)$ una función que posee una serie de Maclaurin y sea r el radio de convergencia de la serie, entonces:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n-1}(x).$$

donde, $R_{n-1}(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_1)}{n!} x^n$ y $|x_1| < |x| < r$, *con* $r \neq 0$

Luego, para un n fijo, consideremos: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{R_{n-1}(x)}{x^n}$.

Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n-1}(x)}{x^n} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^n(x_1) x^n}{n!} \right) \left(\frac{1}{x^n} \right)$$

$$= \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

En consecuencia, $R_{n-1}(x) = O(x^n)$ cuando $x \to x_0$.
Por tanto,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}x^k + O(x^n).$$

Así,

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}x^k.$$

■

Ejemplos 1.4.1.

(i). $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$, *cuando* $x \to 0$.

(ii). $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$, *cuando* $x \to 0$.

(iii). $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$, *cuando* $x \to 0$.

(iv). $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$, *cuando* $x \to 0$.

(v). $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$, *cuando* $x \to 0$.

(vi). $(1+x)^p = 1 + px + p\frac{(p-1)}{2!}x^2 + p\frac{(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + 0(x^4)$, *cuando* $x \to 0$.

Definición 1.4.3. *Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son llamadas asintóticamente equivalentes cuando $x \to x_0$, si*

$$f(x) - g(x) = o(g(x)), \quad cuando \quad x \to x_0.$$

En este caso escribimos

$$f(x) \sim g(x), \quad cuando \quad x \to x_0.$$

Proposición 1.4.1. *$f(x) \sim g(x)$, cuando $x \to x_0$, si y sólo si en una vecindad de x_0*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Demostración:
Si $f(x) \sim g(x)$, entonces $f(x) - g(x) = o(g(x))$.
Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

En consecuencia
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Por otro lado: Si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g(x)}{g(x)} = 0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0.$$

Así,
$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

■

Lema 1.4.1. *Si α y k son números fijos tales que $\alpha < 1$ y $k > 0$, entonces*
$$\int_k^\infty e^{ix\nu} \nu^{\alpha - 1}\, d\nu = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Demostración:
Consideremos la integral
$$\int_k^\infty e^{ix\nu} \nu^{\alpha-1}\, d\nu.$$

Integrando por partes, tenemos

$$\int_k^\infty e^{ix\nu} \nu^{\alpha-1}\, d\nu = \frac{1}{ix} e^{ix\nu} \nu^{\alpha-1} \Big|_k^\infty - \frac{(\alpha - 1)}{ix} \int_k^\infty e^{ix\nu} \nu^{\alpha-2}\, d\nu$$

$$= \frac{1}{ix} e^{ixk} k^{\alpha-1} + \frac{(1-\alpha)}{ix} \int_k^\infty e^{ixk} \nu^{\alpha-2}\, d\nu, \qquad \alpha < 1.$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$\left| \int_k^\infty e^{ix\nu} \nu^{\alpha-1}\, d\nu \right| \leq \frac{k^{\alpha-1}}{|i| x} |e^{ixk}| + \frac{(1-\alpha)}{|i| x} \int_k^\infty |e^{ixk}| \nu^{\alpha-2}\, d\nu$$

$$= \frac{k^{\alpha-1}}{x} + \frac{(1-\alpha)}{x}\int_k^\infty \nu^{\alpha-2}\,d\nu, \;\; por\ ser\ \alpha < 1,\ |i| = |e^{ixk}| = 1,\ k > 0$$

$$= \frac{k^{\alpha-1}}{x} + \frac{(1-\alpha)}{x}\left[\left.\frac{\nu^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\right|_k^\infty\right]$$

Entonces,

$$\left|\int_k^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu\right| \le \frac{k^{\alpha-1}}{x} + \frac{k^{\alpha-1}}{x} = 2k^{\alpha-1}\frac{1}{x}.$$

Luego, por definición de O grande concluimos que

$$\int_k^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu = O\left(\frac{1}{x}\right), \;\; cuando\ x \to \infty.$$

■

Lema 1.4.2. *Para la integral*

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu.$$

Asumiendo que

(i). $\phi(\nu)$ *es seccionalmente continua y* $\phi'(\nu)$ *tiene a lo más un número infinito de discontinuidades e infinitas en el intervalo* $(0, \infty)$,

(ii). $\phi(\nu) = o(\nu^{\alpha-1})$ *y* $\phi'(\nu) = o(\nu^{\alpha-2})$, *cuando* $\nu \to 0+$, *donde* α *es una constante en el intervalo* $(0,1)$,

(iii). $\vartheta_{k,\infty}(\phi)$ *es finito para cada constante positiva.*

(iv). $\phi(\nu) \to 0$, *cuando* $\nu \to \infty$,

entonces, la integral converge uniformemente para $x \ge X$, *donde* X *es cualquier constante positiva, y* $\Phi(x) = o(x^{-\alpha})$, *cuando* $x \to \infty$.

Demostración:
Integrando por partes, tenemos que

$$\Phi(x) = \frac{1}{ix}e^{ix\nu}\phi(\nu)\Big|_0^\infty - \frac{1}{ix}\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu.$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
|\Phi(x)| &\leq \left|\frac{1}{ix}e^{ix\nu}\phi(\nu)\Big|_0^\infty\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \\
&= \frac{1}{|ix|}|e^{ix\nu}\phi(\nu)|\Big|_0^\infty + \frac{1}{|ix|}\left|\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \\
&\leq \frac{1}{x}|\phi(\nu)|\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty |\phi'(\nu)|\,d\nu.
\end{aligned}
$$

Dado que $\phi(\nu) = o(\nu^{\alpha-1})$ y $\phi'(\nu) = o(\nu^{\alpha-2})$, entonces $\forall\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$|\phi(\nu)| \leq \varepsilon|\nu^{\alpha-1}| \;\; y \;\; |\phi'(\nu)| \leq \varepsilon|\nu^{\alpha-2}|, \;\; cuando \;\; \nu \to 0+.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|\Phi(x)| &< \frac{\varepsilon}{x}|\nu^{\alpha-1}|\Big|_0^\infty + \frac{\varepsilon}{x}\int_0^\infty \left|\nu^{\alpha-2}\right|\,d\nu \\
&= \frac{\varepsilon}{x}\nu^{\alpha-1}\Big|_0^\infty + \frac{\varepsilon}{x}\int_0^\infty \nu^{\alpha-2}\,d\nu, \quad \nu > 0 \\
&= \frac{\varepsilon}{x}\nu^{\alpha-1}\Big|_0^\infty + \frac{\varepsilon\nu^{\alpha-1}}{x(\alpha-1)}\Big|_0^\infty, \\
&= 0, \;\; ya \;\; que \;\; \alpha \in (0,1).
\end{aligned}
$$

Entonces, la integral $\Phi(x)$ converge absoluta y uniformemente a cero.
En efecto, por el lema (1.4.1) tenemos que

$$\left|\int_k^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu\right| \leq 2k^{\alpha-1}\frac{1}{x}.$$

Luego, aplicando límite cuando $k \to 0$ se tiene que

$$\left|\int_k^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu\right| \to 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{k\to 0}\left|\int_k^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu\right| = \left|\int_0^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}\,d\nu\right|.$$

Por otra parte, sean ν_1 y ν_2 dos números cualesquiera excediendo todas las discontinuidades fijadas e infinitas de $\phi(\nu)$ y $\phi'(\nu)$.
Ahora bien, integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| &= \left|\frac{1}{ix}e^{ix\nu}\phi(\nu)\Big|_{\nu_1}^{\nu_2} - \frac{1}{ix}\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \\ &\leq \left|\frac{e^{ix\nu_2}\phi(\nu_2) - e^{ix\nu_1}\phi(\nu_1)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \\ &\leq \left|\frac{e^{ix\nu_2}\phi(\nu_2)}{ix}\right| + \left|\frac{e^{ix\nu_1}\phi(\nu_1)}{ix}\right| + \frac{1}{x}\int_{\nu_1}^{\nu_2} \left|e^{ix\nu}\phi'(\nu)\right|\,d\nu \\ &\leq \frac{|\phi(\nu_2)|}{x} + \frac{|\phi(\nu_1)|}{x} + \frac{1}{x}\int_{\nu_1}^{\nu_2} |\phi'(\nu)|\,d\nu.\end{aligned}$$

puesto que $|e^{ix\nu_1}| = |e^{ix\nu_2}| = |i| = 1$ y $x > 0$.
Entonces, de acuerdo a la nota (1.1.1) tenemos:

$$\left|\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| \leq \frac{|\phi(\nu_2)|}{x} + \frac{|\phi(\nu_1)|}{x} + \frac{\vartheta_{\nu_1,\nu_2}(\phi)}{x}.$$

Por la condición (iii) $\vartheta_{\nu_1,\nu_2}(\phi)$ es finito. Por lo tanto, existe un $M > 0$ tal que $\vartheta_{\nu_1,\nu_2}(\phi) \leq M$.
Luego, fijemos ν_1 y apliquemos límite cuando $\nu_2 \to \infty$. Esto es

$$\lim_{\nu_2\to\infty}\left|\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| \leq \lim_{\nu_2\to\infty}\frac{|\phi(\nu_2)|}{x} + \lim_{\nu_2\to\infty}\frac{|\phi(\nu_1)|}{x} + \lim_{\nu_2\to\infty}\frac{\vartheta_{\nu_1,\nu_2}(\phi)}{x}.$$

Pero, por la condición (iv), $\phi(\nu_2)$ converge a cero, cuando $\nu_2 \to \infty$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{\nu_2\to\infty}\left|\int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| &\leq \left(\frac{1}{x}\right)\lim_{\nu_2\to\infty}|\phi(\nu_1)| + \left(\frac{1}{x}\right)\lim_{\nu_2\to\infty}\vartheta_{\nu_1,\nu_2}(\phi) \\ &= \frac{|\phi(\nu_1)|}{x} + \frac{M}{x}.\end{aligned}$$

En consecuencia, la integral $\Phi(x)$ converge en su límite superior cuando $x \geq X$.
Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ las condiciones (i) y (iii) muestran que existe un número finito y positivo k tal que en $(0,k]$ las funciones $\phi(\nu)$ y $\phi'(\nu)$ son continuas, y

$$|\phi(\nu)| \leq \varepsilon|\nu^{\alpha-1}| \;\; y \;\; |\phi'(\nu)| \leq \varepsilon|\nu^{\alpha-2}|, \;\; cuando \;\; \nu \to 0+.$$

Ahora, sea $x \geq \frac{1}{k}$ y consideremos la integral

$$\int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu$$

Entonces, integrando por partes y aplicando desigualdad triangular tenemos:

$$\left|\int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| \leq \left|\frac{e^{ix\nu}}{ix}\phi(\nu)\Big|_0^{\frac{1}{x}}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{x}|\nu^{\alpha-1}|\Big|_0^{\frac{1}{x}} + \frac{\varepsilon}{x}\int_0^{\frac{1}{x}} |\nu^{\alpha-2}|\,d\nu$$

$$= \frac{\varepsilon}{x}\nu^{\alpha-1}\Big|_0^{\frac{1}{x}} + \frac{\varepsilon}{x}\int_0^{\frac{1}{x}} \nu^{\alpha-2}\,d\nu, \quad \nu > 0$$

$$= \frac{\varepsilon}{x^\alpha} + \frac{\varepsilon\nu^{\alpha-1}}{x(\alpha-1)}\Big|_0^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{x^\alpha} + \frac{\varepsilon}{x^\alpha(\alpha-1)}$$

$$= \frac{\alpha\varepsilon}{(\alpha-1)x^\alpha}.$$

Como $0 < \alpha < 1$, entonces $-1 < \alpha - 1 < 0$. Por tanto $\frac{\alpha}{\alpha-1} < 0$, $y \quad 0 < \frac{1}{\alpha}$.
Así,

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} < \frac{1}{\alpha}.$$

En consecuencia,

$$\left|\int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha x^\alpha}. \tag{1.1}$$

Ahora, consideremos la integral

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu.$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que la función $\phi(\nu)$ es seccionalmente continua y $\phi(\nu) \to 0$ cuando $\nu \to \infty$, tenemos que

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu = \frac{\phi(\nu)e^{ix\nu}}{ix}\Big|_{\frac{1}{x}}^{\infty} - \frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu$$

17

$$= \sum_{s=1}^{m} \frac{e^{ixd_s}}{ix}\{\phi(d_s-) - \phi(d_s+)\} - \frac{e^i}{ix}\phi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{k} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu$$

$$- \frac{1}{ix}\int_{k}^{\infty} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu.$$

donde $d_1, d_2, \cdots, d_m$ son los puntos para los cuales la función $\phi(\nu)$ es discontinua. Además, por definición de expansión asintótica

$$O\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{s=1}^{m} \frac{e^{ixd_s}}{ix}\{\phi(d_s-) - \phi(d_s+)\} - \frac{e^i}{ix}\phi\left(\frac{1}{x}\right), \quad \textit{cuando} \ \ x \to \infty. \tag{1.2}$$

Ahora, analicemos el valor absoluto de la integral $\frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{k} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{k} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \le \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{k} |\phi'(\nu)|\,d\nu.$$

Por hipótesis, $|\phi'(\nu)| < \varepsilon|\nu^{\alpha-2}|$, $\forall\varepsilon > 0$.
Por tanto,

$$\left|\frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{k} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| < \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{k} \varepsilon\nu^{\alpha-2}\,d\nu,$$

$$= \left.\frac{\varepsilon\nu^{\alpha-1}}{x(\alpha-1)}\right|_{\frac{1}{x}}^{k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\alpha-1)x}\left(k^{\alpha-1} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - k^{\alpha-1}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{x(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

En consecuencia,

$$\left|\frac{1}{ix}\int_{\frac{1}{x}}^{k} e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| < \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x^{\alpha}}. \tag{1.3}$$

Por último, consideraremos el valor absoluto de la integral $\frac{1}{ix}\int_k^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu$. Entonces,

$$\left|\frac{1}{ix}\int_k^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \leq \frac{1}{x}\int_k^\infty |\phi'(\nu)|\,d\nu$$

$$= \frac{1}{x}\vartheta_{k,\infty}(\phi).$$

Luego, por definición de O grande y puesto que $\vartheta_{k,\infty}(\phi)$ es finito para cada constante positiva k, podemos concluir que

$$\frac{1}{x}\vartheta_{k,\infty}(\phi) = O\left(\frac{1}{x}\vartheta_{k,\infty}(\phi)\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Así

$$\left|\frac{1}{ix}\int_k^\infty e^{ix\nu}\phi'(\nu)\,d\nu\right| \leq O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1.4}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.4) llegamos a que:

$$\left|\int_{\frac{1}{x}}^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| \leq O\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1.5}$$

En consecuencia

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu = \int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu + \int_{\frac{1}{x}}^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu$$

Entonces,

$$\left|\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| \leq \left|\int_0^{\frac{1}{x}} e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| + \left|\int_{\frac{1}{x}}^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right|.$$

Luego, por las ecuaciones (1.1) y (1.5) obtenemos

$$\left|\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty$$

$$= \frac{\varepsilon}{x^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\right) + 2O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha(1-\alpha)x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty.$$

Pero, cuando $x \to \infty$ vemos que $O\left(\frac{1}{x}\right)$ converge a cero. Por tanto, de la definición de o pequeño concluimos que

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\phi(\nu)\,d\nu = o(x^{-\alpha}).$$

■

Lema 1.4.3. *Sean λ, μ y k constantes positivas, entonces*

$$\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}, xk\right)$$

se puede expresar como una serie asintótica para un parámetro positivo x suficientemente grande.

Demostración:
Puesto que

$$\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}, xk\right) = \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-1}\,ds$$

entonces, integrando sucesivas veces por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}, xk\right) &= \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left[-e^{-s}s^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}\Big|_{kx}^{\infty} + \left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-2}\,ds\right] \\
&= \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left[e^{-kx}(kx)^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1} + \left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-2}\,ds\right] \\
&= \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x} - \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-2}\Big|_{kx}^{\infty} + \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-3}\,ds \\
&= \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x} + \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}e^{-kx}(kx)^{\frac{\lambda}{\mu}-2} \\
&\quad + \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-3}\,ds \\
&= \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x} + \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-2}e^{-kx}}{x^2} + \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\int_{kx}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-3}\,ds \\
&= \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x} + \frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-2}e^{-kx}}{x^2} - \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-3}\Big|_{kx}^{\infty}
\end{aligned}$$

20

$$+\ \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-3\right)\int_{kx}^{\infty} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-4}\,ds$$

$$=\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x}+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-2}e^{-kx}}{x^2}+\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}e^{-kx}(kx)^{\frac{\lambda}{\mu}-3}$$

$$+\ \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-3\right)\int_{kx}^{\infty} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-4}\,ds$$

$$=\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x}+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-2}e^{-kx}}{x^2}+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-3}e^{-kx}}{x^3}$$

$$+\ \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-3\right)\int_{kx}^{\infty} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-4}\,ds.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu},xk\right)=\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}e^{-kx}}{x}+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-2}e^{-kx}}{x^2}+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-3}e^{-kx}}{x^3}+\ldots+\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-N}e^{-kx}}{x^N}$$

$$+\ \frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{\mu}-N\right)\int_{kx}^{\infty} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-N-1}\,ds.$$

Luego, para un N fijo, sea

$$R_N=\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{\mu}-N\right)\int_{kx}^{\infty} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-N-1}\,ds\,.$$

Entonces, R_N converge a cero cuando $x\to\infty$. En consecuencia, la serie es una serie asintótica. ■

Nota 1.4.1. *De la demostración del lema anterior y por la definición de expansión asintótica podemos concluir que*

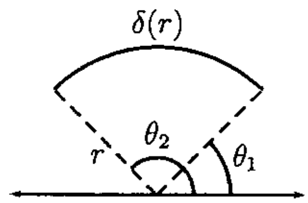
$$R_N=O\left(\frac{k^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-N-1}e^{-kx}}{x^{N+1}}\right)\quad \textit{cuando } x\to\infty$$

$$=O\left(\frac{e^{-kx}}{x^{N+1}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{x^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu},xk\right)=O\left(\frac{e^{-kx}}{x}\right).$$

Teorema 1.4.3 (Tercer Lema de Jordan). *Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y $f(z)$ una función analítica (con la posible excepción de un número finito de singularidades) definida en el sector de circunferencia $\delta(r)$ del semiplano superior $y \geq 0$, delimitado por $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$ y radio r*



tal que $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\delta(r)} f(z)e^{iaz}dz = 0.$$

La demostración de este teorema puede verse en el libro de Derrick William R, Variable compleja con aplicaciones.

Teorema 1.4.4 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado simple y sobre los puntos de C, entonces*

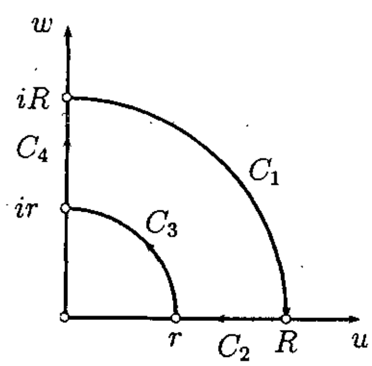
$$\int_C f(z)dz = 0.$$

La demostración de este teorema puede verse en el libro de Derrick William R, Variable compleja con aplicaciones.

Lema 1.4.4.

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}d\nu = \frac{e^{\alpha\pi i/2}}{x^\alpha}\Gamma(\alpha) \quad (0 < \alpha < 1, \ \ x > 0).$$

Demostración:
La restricción $\alpha \in (0,1)$ es necesaria, ya que la integral diverge en su límite inferior cuando $\alpha \leq 0$ y en su límite superior cuando $\alpha \geq 1$.
Vamos a integrar $f(\nu) = e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}$ alrededor del contorno indicado en la figura y luego colocamos $r \to 0$ y $R \to \infty$:



El entorno admite las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned}
C_1 &: \quad \nu(\theta) = Re^{i\theta} \quad 0 < \theta < \pi/2 \\
C_2 &: \quad \nu(u) = u \quad r < u < R \\
C_3 &: \quad \nu(\theta) = re^{i\theta} \quad 0 < \theta < \pi/2 \\
C_4 &: \quad \nu(w) = iw \quad r < w < R.
\end{aligned}$$

Al integrar sobre la trayectoria C_4, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_4} f(\nu)d\nu &= \int_r^R e^{ix(iw)}(iw)^{\alpha-1} i dw \\
&= i^\alpha \int_r^R e^{-xw} w^{\alpha-1} dw \\
&= \frac{i^\alpha}{x^\alpha} \int_{xr}^{xR} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad \text{donde} \quad t = xw \\
&= \frac{e^{\alpha\pi i/2}}{x^\alpha} \int_{xr}^{xR} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.
\end{aligned}$$

Luego, al colocar $r \to 0$ y $R \to \infty$, tenemos

$$\int_{C_4} f(\nu)d\nu = \frac{e^{\alpha\pi i/2}}{x^\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Al integrar sobre la trayectoria C_3 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} f(\nu)d\nu &= \int_0^{\pi/2} e^{ix(re^{i\theta})}(re^{i\theta})^{\alpha-1} ire^{i\theta} d\theta \\
&= ir^\alpha \int_0^{\pi/2} e^{ixre^{i\theta}} e^{i\theta(\alpha-1)} d\theta \\
&= ir^\alpha \int_0^{\pi/2} e^{i(xre^{i\theta}+\theta(\alpha-1))} d\theta.
\end{aligned}$$

Por otro lado, acotando la integral obtenida tenemos

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int_0^{\pi/2} e^{i(xre^{i\theta}+\theta(\alpha-1))} d\theta \right| &\leq |ir^\alpha| \int_0^{\pi/2} \left| e^{i(xre^{i\theta}+\theta(\alpha-1))} \right| |d\theta| \\
&= |r^\alpha| \int_0^{\pi/2} |d\theta| \\
&= r^\alpha \int_0^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} r^\alpha.
\end{aligned}$$

Luego, al colocar $r \to 0$ se tiene

$$\left| \int_{C_3} f(\nu) d\nu \right| = 0.$$

Entonces,

$$\int_{C_3} f(\nu) d\nu = 0.$$

Ahora, para calcular la integral sobre la trayectoria C_1 tomemos $g(\nu) = \nu^{\alpha-1}$, entonces

$$\lim_{|\nu|\to\infty} g(\nu) = 0, \quad \text{ya que} \quad \alpha - 1 < 0.$$

Entonces, usando el Tercer Lema de Jordan, tenemos

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} g(\nu) e^{ix\nu} d\nu = 0.$$

Finalmente, observemos que la función $f(\nu) = e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1}$ es analítica sobre su dominio. Entonces, usando el Teorema de Cauchy-Goursat se tiene

$$\int_{C_4} f(\nu) d\nu - \int_{C_1} f(\nu) d\nu - \int_{C_2} f(\nu) d\nu + \int_{C_3} f(\nu) d\nu = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_4} f(\nu) d\nu - \int_{C_2} f(\nu) d\nu = 0.$$

Al colocar $r \to 0$ y $R \to \infty$ concluimos que

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\nu^{\alpha-1} d\nu = \int_{C_2} f(\nu) d\nu = \int_{C_4} f(\nu) d\nu = \frac{e^{\alpha\pi i/2}}{x^\alpha}\Gamma(\alpha).$$

■

Capítulo 2

Métodos Asintóticos

2.1. Método de Laplace

Teorema 2.1.1. *Sea x un parámetro positivo y sean a y b números que pueden ser finitos o infinitos con $b > a$ tal que a, b y las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son independientes de x, donde $p(t)$ puede ser real y $q(t)$ real o compleja. Además de:*

(i). *$p(t) > p(a)$, para todo $t \in (a, b)$ y para todo $c \in (a, b)$ el ínfimo de $p(t) - p(a)$ en $[c, b)$ es positivo.*

(ii). *$p'(t)$ y $q(t)$ son continuas en una vecindad de a, excepto posiblemente en a.*

(iii). *Cuando $t \to a$*

$$p(t) - p(a) \sim P(t-a)^{\mu} \quad y \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}.$$

La primera de estas relaciones es diferenciable y siendo P, μ y λ constantes positivas (enteras o diferentes), y Q es una constante distinta de cero real o compleja.

(iv).

$$I(x) = \int_a^b e^{-xp(t)} q(t)\, dt$$

converge absolutamente para todo x suficientemente grande.

Entonces

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{-xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad cuando \;\; x \to \infty.$$

Demostración:
Supongamos que a es finito y un punto mínimo de $p(t)$ ocurre en $t = a$ y tomemos m un número bastante cercano a $''a''$, entonces en el intervalo $(a, m]$, se tiene que $p'(t)$ es continua y positiva. Por tanto $p(t)$ es creciente en (a, m).
Luego, podemos tomar

$$\nu = p(t) - p(a)$$

25

Y, consideremos la integral

$$\int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt \,.$$

Entonces,

$$\int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt = \int_0^{p(m)-p(a)} e^{-x\nu} f(\nu)d\nu, \;\; donde \;\; f(\nu) = q(t)\frac{dt}{d\nu} = \frac{q(t)}{p'(t)}$$

$$= \int_0^k e^{-x\nu} f(\nu)d\nu \,, \;\; donde \;\; k = p(m) - p(a).$$

Como $p(t) > p(a)$, para todo $t \in (a, b)$ y m es un número muy cercano a $''a''$, entonces k es finito y positivo, además, $f(\nu)$ es continua cuando $\nu \in (0, k]$ por ser $q(t)$ y $p'(t)$ funciones continuas.
Luego, dado que la relación $p(t) - p(a) \sim P(t-a)^{\mu}$ es diferenciable cuando $t \to a$, entonces

$$t-a \sim \left(\frac{\nu}{P}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \;\; p(t) \sim P(t-a)^{\mu} + p(a) \;\; y \;\; p'(t) \sim \mu P(t-a)^{\mu-1} + p'(a), \;\; cuando \;\; \nu \to 0+.$$

Por lo tanto,

$$p'(t) \sim \mu P(t-a)^{\mu-1}, \quad p'(a) = 0.$$

Ahora, puesto que $f(\nu) = \dfrac{q(t)}{p'(t)}$ y $q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}$, entonces

$$f(\nu) \sim \frac{Q(t-a)^{\lambda-1}}{\mu P(t-a)^{\mu-1}}$$

$$\sim \frac{Q\left[\left(\frac{\nu}{P}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]^{\lambda-1}}{\mu P\left[\left(\frac{\nu}{P}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]^{\mu-1}}$$

$$\sim \frac{Q\left[\left(\frac{\nu}{P}\right)\right]^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}}{\mu P}$$

$$\sim \frac{Q\nu^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}.$$

Por consiguiente $f(\nu) \sim \dfrac{Q\nu^{(\frac{\lambda}{\mu})-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}$, *cuando* $\nu \to 0+$.

Luego,

$$\int_0^k e^{-x\nu} f(\nu)d\nu = \int_0^k e^{-x\nu} f(\nu)d\nu + \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu - \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu$$

$$= \int_0^k e^{-x\nu} f(\nu)d\nu + \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu - \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^k e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu$$

$$- \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu$$

$$= \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \left[\int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu - \int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu\right]$$

$$+ \int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu.$$

Ahora, sea $s = x\nu$, entonces

$$\int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{x}e^{-s}\left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Así,

$$\int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu = \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \;,\quad \frac{\lambda}{\mu} > 0. \tag{2.1}$$

Luego, analicemos la integral

$$\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu.$$

Sea $s = x\nu$, entonces

$$\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu = \int_{xk}^\infty e^{-s}\Big(\frac{s}{x}\Big)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}x^{-1}ds$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\int_{xk}^\infty e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds.$$

Luego, de acuerdo a la nota (1.4.1)

$$\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu = \frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}, xk\right) = O\left(\frac{e^{-kx}}{x}\right).$$

En consecuencia, existe $L > 0$ tal que

$$\left|\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}\,d\nu\right| < L\left(\frac{e^{-kx}}{x}\right).$$

Y como las funciones exponenciales crecen más rápidamente que las potencias, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$

$$L\left(\frac{e^{-kx}}{x}\right) < \varepsilon x^{\frac{-\lambda}{\mu}}.$$

Así,

$$\left|\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}\,d\nu\right| < \varepsilon x^{\frac{-\lambda}{\mu}}. \tag{2.2}$$

Ahora, analicemos la integral

$$\int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu.$$

Dado que $f(\nu) \sim \dfrac{Q\nu^{(\frac{\lambda}{\mu})-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}$, cuando $\nu \to 0+$, entonces

$$f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} = o\left(\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right), \quad \textit{cuando } \nu \to 0+.$$

En consecuencia, para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V = V(\varepsilon)$ de cero tal que

$$\left|f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right| < \varepsilon\left|\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right|, \quad \nu \in V$$

$$= \frac{\varepsilon|Q|\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}.$$

28

Entonces

$$\left|\int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu)-\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu\right| \leq \int_0^k \left|e^{-x\nu}\left[f(\nu)-\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]\right| d\nu$$

$$< \frac{\varepsilon|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\int_0^k e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu.$$

Luego, sea $s = x\nu$. Entonces,

$$\frac{\varepsilon|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\int_0^k e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu = \frac{\varepsilon|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\int_0^{xk}\frac{1}{x}e^{-s}\left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds$$

$$= \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\int_0^{xk} e^{-s}s^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds$$

$$= \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left[\int_0^{\infty} e^{-s}(s)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds - \int_{xk}^{\infty} e^{-s}(s)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}ds\right]$$

$$= \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left[\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu},xk\right)\right]$$

$$< \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Entonces,

$$\left|\int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu)-\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu\right| < \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{2.3}$$

Ahora, dado que

$$\int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]}q(t)dt = \int_0^k e^{-x\nu}f(\nu)d\nu$$

$$= \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left[\int_0^{\infty} e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu - \int_k^{\infty} e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu\right]$$

$$+\int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu)-\frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu.$$

Entonces, de las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) llegamos a que

$$\left|\int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]}q(t)dt\right| \leq \frac{|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left|\int_0^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu\right| + \frac{|Q|}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\left|\int_k^\infty e^{-x\nu}\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}d\nu\right|$$

$$+\left|\int_0^k e^{-x\nu}\left[f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right]d\nu\right|$$

$$< \frac{|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} + \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Por otra parte: Sea $\eta = \underset{[m,b)}{inf}\{p(t)-p(a)\}$ y sea X un valor para el cual $I(x)$ es absolutamente convergente con $x \geq X$ de acuerdo a la condición (i) sabemos que η es positivo. Entonces,

$$xp(t) - xp(a) = (x - X)[p(t) - p(a)] + X[p(t) - p(a)].$$

En consecuencia, de la definición de ínfimo

$$(x - X)[p(t) - p(a)] + X[p(t) - p(a)] \geq (x - X)\eta + X[p(t) - p(a)]$$

Por lo tanto

$$xp(t) - xp(a) \geq (x - X)\eta + X[p(t) - p(a)],$$

$$-[xp(t) - xp(a)] \leq -\{(x - X)\eta + X[p(t) - p(a)]\},$$

$$e^{-[xp(t)-xp(a)]} \leq e^{-\{(x-X)\eta+X[p(t)-p(a)]\}}.$$

Luego, puesto que

$$\left|\int_m^b e^{xp(a)-xp(t)}q(t)dt\right| \leq \int_m^b \left|e^{xp(a)-xp(t)}q(t)\right| dt$$

Pero,

$$\int_m^b \left|e^{xp(a)-xp(t)}q(t)\right| dt = \int_m^b e^{xp(a)-xp(t)}|q(t)|dt$$

$$\leq e^{-(x-X)\eta+Xp(a)}\int_m^b e^{-Xp(t)}|q(t)|dt.$$

Dado que por hipótesis $I(x)$ converge absolutamente en X, entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\left| e^{xp(a)} \int_m^b e^{-xp(t)} q(t)dt \right| < \varepsilon(b-m)e^{-(x-X)\eta + Xp(a)} = \frac{\varepsilon(b-m)e^{Xp(a)}}{e^{(x-X)\eta}}$$

Donde, $e^{Xp(a)}$, η, $b-k$ y $x-X$ son no negativas.
Luego, por ser la función exponencial más rápida que cualquier potencia, podemos afirmar que

$$\left| e^{xp(a)} \int_m^b e^{-xp(t)} q(t)dt \right| < \varepsilon x^{\frac{-\lambda}{\mu}}, \quad \textit{cuando } x \to \infty. \tag{2.4}$$

Entonces

$$\left| \int_a^b e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt \right| = \left| \int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt + \int_m^b e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt \right|$$

$$\leq \left| \int_a^m e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt \right| + \left| \int_m^b e^{x[p(a)-p(t)]} q(t)dt \right|$$

$$< \frac{|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} + \frac{\varepsilon|Q|}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \varepsilon x^{\frac{-\lambda}{\mu}}.$$

Así,

$$\left| \int_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt \right| < \frac{|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{\varepsilon|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} + \frac{\varepsilon|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \varepsilon x^{\frac{-\lambda}{\mu}} e^{-xp(a)}.$$

Ahora, dividiendo la desigualdad anterior por la expresión $\dfrac{|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)$, por ser ésta distinta de cero, podemos obtener:

$$\left| \int_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt \left(\frac{|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right)^{-1} \right| < 1 + \frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \varepsilon + \frac{\varepsilon \mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}{|Q|\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

Entonces,

$$\left| \int_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt \left(\frac{|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right)^{-1} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} + \varepsilon + \frac{\varepsilon \mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}{|Q|\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \to \infty} \left[\int_a^b e^{-xp(t)} q(t)dt \left(\frac{|Q|e^{-xp(a)}}{\mu(xP)^{\frac{\lambda}{\mu}}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right)^{-1} \right] = 1.$$

Por lo tanto

$$\int_a^b e^{-xp(t)}q(t)dt \sim \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{e^{-xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad \textit{cuando} \ \ x \to \infty.$$

■

Ejemplo 2.1.1.
Obtener la aproximación de la siguiente integral

$$I(x) = \int_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos(nt)dt, \qquad x \to \infty.$$

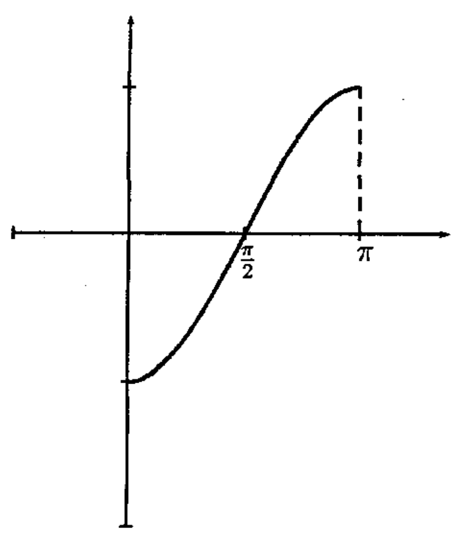
Solución:
Sea

$$p(t) = -\cos(t) \quad y \quad q(t) = \frac{1}{\pi}\cos(nt).$$

Luego, $p'(t) = \sin(t)$. *En consecuencia*

$$\begin{aligned} &p'(t) = 0, \ \ en \ \ t = 0 \\ &p'(t) > 0, \quad t \in [0, \pi] \\ &p''(t) = \cos(t), \ \textit{entonces}\ p''(0) = 1 \end{aligned}$$

Así que, 0 *es un mínimo y* $p(t)$ *es una función creciente.*



Gráfica de $p(t) = -\cos(t)$, *donde* $t \in [0, \pi]$.

Luego, por series de Taylor

$$p(t) = -\cos(t) = -1 + \frac{t^2}{2!} + O(t^4), \ \textit{entonces} \ \ p(t) - (-1) = \frac{(t-0)^2}{2} + O(t^4)$$

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\cos(nt) = \frac{1}{\pi} + O(t^2) = \frac{1}{\pi}(t-a)^{\lambda-1} + O(t^2), \ \ \lambda = 1$$

Por consiguiente

$$p(t) - (-1) \sim \frac{(t-0)^2}{2}, \quad y \quad q(t) \sim \frac{1}{\pi}(t-a)^{\lambda-1}.$$

Por lo tanto,

$p(0) = -1, \quad P = \dfrac{1}{2}, \quad \mu = 2, \quad Q = \dfrac{1}{\pi}, \quad \lambda = 1 \ \ y \ \ \Gamma\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}.$

Entonces, para un n fijo, se tiene que

$$I_n(x) \backsim (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} e^x, \quad x \to \infty.$$

Ejemplo 2.1.2.

Obtener la aproximación de la siguiente integral

$$I(x) = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}} e^{x(2t-t^2)} dt, \quad x \to \infty.$$

Solución:

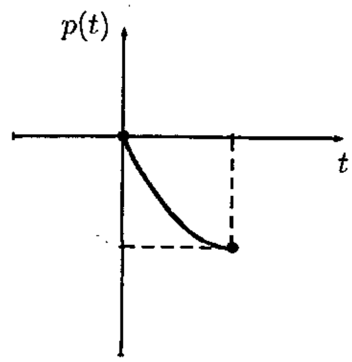
Sea

$$p(t) = -(2t - t^2) \quad y \quad q(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces, $p'(t) = -2 + 2t$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} &p'(t) = 0, \ en \quad t = 1 \\ &p'(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,1] \\ &p''(t) = 2, \ entonces \ \ p''(1) = 2 \end{aligned}$$

Luego, 1 es un mínimo y $p(t)$ es una función decreciente.



Gráfica de $p(t) = -(2t - t^2)$, donde $t \in [0,1]$.

Luego, por series de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} p(t) &= p(1) + (t-1)p'(t) + \frac{1}{2}(t-1)^2 p''(1) + \cdots \\ &= -1 + (t-1)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Entonces

$$p(t) - (-1) = (t-1)^2 + \cdots$$

Y,

$$\begin{aligned} q(t) &= q(1) + q'(1)(t-1)^1 + \frac{1}{2}q''(1)(t-1)^2 + \cdots \\ &= 2^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\lambda-1} + (t-1)^2 + \cdots, \quad donde\ \lambda = 1 \end{aligned}$$

Así que

$$p(t) - (-1) \sim (t-1)^2 \quad y \quad q(t) \sim 2^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\lambda-1}.$$

Por lo tanto, $P = 1, \quad \mu = 2, \quad Q = 1, \quad \lambda = 1 \quad y \quad \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}.$

En consecuencia,

$$\int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}} e^{x(2t-t^2)} dt \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^x.$$

Ejemplo 2.1.3.
Obtener la aproximación de la siguiente integral

$$I(x) = \int_{-2}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt, \quad x \to \infty.$$

Solución:

$$\int_{-2}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt = \int_{-2}^{-1} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt + \int_{-1}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt.$$

Sea

$$p(t) = -3t^2 - 2t^3 \quad y \quad q(t) = e^t.$$

Entonces, $p'(t) = -6t - 6t^2$.
En consecuencia,

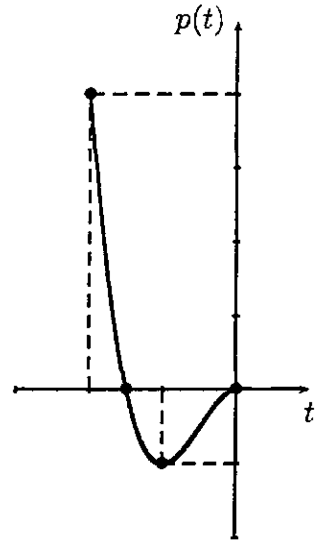
$$p'(t) = 0, \ en \ \ t = 0 \ \ ó \ t = -1$$

$$p'(t) < 0, \quad t \in [-1, 0], \ entonces \ \ p(t) \ \ es\ decreciente$$

$$p'(t) > 0, \quad t \in [-2, -1], \ entonces \ \ p(t) \ \ es\ creciente$$

$$p''(t) = -6 - 12t, \ entonces \ \ p''(0) = -6 \ \ ó \ p''(-1) = 6.$$

Vemos entonces que -1 *es un mínimo.*



Gráfica de $p(t) = -3t^2 - 2t^3$, *donde* $t \in [-2, 0]$.

Luego, por series de taylor

$$\begin{aligned} p(t) &= p(-1) + (t-(-1))p'(-1) + \frac{1}{2}(t-(-1))^2 p''(-1) + \ldots \\ &= -1 + 3(t+1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p(t) - (-1) &= 3(t+1)^2 + \ldots, \\ p(t) - (-1) &\sim 3(t-(-1))^2 \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} q(t) &= q(-1) + q'(-1)(t-(-1)) + \ldots \\ &= e^{-1} + (t+1)e^{-1} + \ldots \end{aligned}$$

En consecuencia, $q(t) \sim e^{-1}(t-(-1))^{\lambda-1}$, *donde* $\lambda = 1$

Así,

$$P = 3, \quad \mu = 2, \quad Q = e^{-1}, \quad \lambda = 1 \quad y \quad \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, puesto que

$$\int_{-2}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt = \int_{-2}^{-1} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt + \int_{-1}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt$$

Entonces,

$$\int_{-2}^{-1} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{x-1} \quad y \quad \int_{-1}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{x-1}$$

Por tanto

$$\int_{-2}^{0} e^t e^{x(3t^2+2t^3)} dt \sim \left(\frac{\pi}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{x-1}$$

2.2. Método de la Fase Estacionaria

Teorema 2.2.1. *Sea x un parámetro positivo y supongamos que en la integral $I(x) = \int_a^b e^{ixp(t)} q(t)\,dt$, los límites de integración a y b son independientes de x, a es finito y b puede ser finito o infinito con $b > a$, las funciones $p(t)$ y $q(t)$ son independientes de x, $p(t)$ es real y $q(t)$ puede ser real o compleja. Además, de:*

(i). En (a,b), las funciones $p'(t)$ y $q(t)$ son continuas, $p'(t) > 0$, y $p''(t)$ y $q'(t)$ tiene al menos un número finito de discontinuidades e infinitas.

(ii). Cuando $t \to a+$

$$p(t) - p(a) \sim P(t-a)^{\mu}\,, \quad y \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1},$$

La primera de estas relaciones es diferenciable. Aquí P, μ y λ son constantes positivas, y Q es una constante real o compleja.

(iii). $\vartheta_{k,b}\left\{\dfrac{q(t)}{p'(t)}\right\}$ es finita para cada constante $k \in (a,b)$.

(iv). Cuando $t \to b-$, $\dfrac{q(t)}{p'(t)}$ tiende al límite finito a, y este límite es cero cuando $p(b) = \infty$.

Suponiendo que $\lambda < \mu$ y la primera de las relaciones de la condición (ii) es dos veces diferenciable y la segunda es diferenciable. Entonces:

$$I(x) \sim e^{\frac{\lambda \Pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{-ixp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad cuando \;\; x \to \infty.$$

Demostración:
Supongamos que a es finito y un punto mínimo de $p(t)$ ocurre en $t = a$. Luego, tomemos $\nu = p(t) - p(a)$.
Ahora, consideremos la integral

$$I(x) = \int_a^b e^{ixp(t)} q(t)\,dt$$

Entonces,

$$I(x) = e^{ixp(a)} \int_a^b e^{ixp(t)-ixp(a)} q(t)\, dt$$

$$= e^{ixp(a)} \int_0^{p(b)-p(a)} e^{ixp(t)-ixp(a)} q(t)\, dt$$

$$= e^{ixp(a)} \int_0^{\beta} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu, \quad donde\ \beta = p(b) - p(a) \ \ y \ \ f(\nu) = q(t)\frac{dt}{d\nu} = \frac{q(t)}{p'(t)}.$$

Luego, podemos llegar a que:

$$f(\nu) \sim \frac{Q\nu^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad cuando\ \nu \to 0+.$$

Ahora bien

$$\int_0^{\beta} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu = \int_{\infty}^{\beta} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu + \int_0^{\infty} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu$$

$$= \int_{\infty}^{\beta} \frac{e^{ix\nu} Q\nu^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} d\nu + \int_0^{\infty} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu$$

$$= \int_{\infty}^{\beta} \frac{e^{ix\nu} Q\nu^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} d\nu + \int_0^{\infty} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu - \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu$$

$$+ \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu$$

$$= \left[\frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu + \int_{\infty}^{\beta} \frac{e^{ix\nu} Q\nu^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} d\nu \right]$$

$$+ \left[\int_0^{\infty} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu - \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu \right]$$

$$= \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \left[\int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu - \int_{\beta}^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{(\frac{\lambda}{\mu})-1} d\nu \right]$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \left[f(\nu) - \frac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \right] d\nu.$$

Ahora, analicemos cada una de las integrales:
Por el lema (1.4.4), tenemos que

$$\frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_0^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1} d\nu = e^{\frac{\lambda \Pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \; \textit{con} \quad \lambda,\ \mu,\ x > 0 \ \text{ y } \ \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1).$$

Ahora, por el (1.4.1) podemos llegar a que

$$\frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} \int_{\beta}^{\infty} e^{ix\nu} \nu^{(\frac{\lambda}{\mu})-1} d\nu = \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Además, no es complicado mostrar que $\phi(\nu) = f(\nu) - \dfrac{Q\nu^{\frac{\lambda}{\mu}-1}}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}}$ satisface las condiciones del lema (1.4.2). Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} e^{ix\nu} \phi(\nu) d\nu = o\left(\frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right), \quad x \to \infty.$$

Entonces,

$$\int_a^b e^{ixp(t)} q(t)\, dt = e^{ixp(a)} \int_0^{\beta} e^{ix\nu} f(\nu) d\nu$$

$$= e^{\frac{\lambda \Pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{ixp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} - e^{ixp(a)} \frac{Q}{\mu P^{\frac{\lambda}{\mu}}} O\left(\frac{1}{x}\right) + e^{ixp(a)} o\left(\frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right), \quad x \to \infty.$$

Dado que por hipótesis $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, entonces $x > x^{\frac{\lambda}{\mu}}$. En consecuencia, $x^{-1} < x^{\frac{-\lambda}{\mu}}$.
Por lo tanto,

$$\int_a^b e^{ixp(t)} q(t)\, dt = e^{\frac{\lambda \Pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{ixp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}} + e^{ixp(a)} o\left(\frac{1}{x^{\frac{\lambda}{\mu}}}\right), \quad x \to \infty.$$

Entonces, por la definición de expansión asintótica concluimos que

$$\int_a^b e^{ixp(t)} q(t)\, dt \sim e^{\frac{\lambda \pi i}{2\mu}} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{ixp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad x \to \infty.$$

$\blacksquare$