SOBRE EL CONCEPTO DE LA MEDIATRIZ Y SUS GENERALIZACIONES

Trabajo de grado que presenta
JOSUE DE JESUS BEDOYA MARRUGO
Para obtener el título de matemático

Asesor de Tesis
ANA MAGNOLIA MARIN RAMIREZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas

Cartagena de Indias D. T. y C.

2010

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con todo mi corazón a mi madre

Adela Marrugo y a mi padre Cesar Bedoya,

que aunque partió de este mundo, se que él está feliz por mi logro.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco todo mi esfuerzo y sacrificio a Jesucristo el Dios todo poderoso que me dice: "No temas, porque yo estoy contigo; no desmayes porque yo soy tu Dios que te esfuerzo; siempre te ayudare, siempre te sostendré con la diestra de mi justicia. (Isaías 41; 10)".A la doctora Ana Magnolia Marín Ramírez por apoyarme y a todos mis compañeros de estudio, que estuvimos hasta el final.

Gracias...

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Pierre Fermat (1601 - 1665) y René Descartes (1596 - 1650), obsesionados por la necesidad de métodos cuantitativos en la geometría e impresionados por el poder del algebra, iniciaron la aplicabilidad de esta al estudio de la geometría, creando los sistemas de coordenadas al asociar ecuaciones algebraicas a curvas y superficies. Está idea ha sido una de las más ricas y fructíferas en el desarrollo de las matemáticas.

Tanto Fermat como Descartes estaban motivados por las necesidades de la ciencia y por un interés en la metodología. Especialmente Descartes (el primer gran filosofo moderno, fundador de biología moderna, un físico de categoría y matemático solo incidentalmente) hizo de la metodología el objetivo principal de toda su obra.

Cabe destacar para su estudio, lo que ya todos conocemos como los puntos notables del triangulo; en los que se destacan el concepto de mediatriz.

Se sabe que la definición de más conocida de Mediatriz es; "la recta perpendicular a los lados del triangulo que pasa por su punto medio"; esto es, sea $\{a, b, c\}$ los vértices del triangulo

$$m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

y

$$m' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$$

y sea O el punto de intersección de las mediatrices por m y m'.

Observemos que

$$d(0,a)^2 = \| \overrightarrow{0a} \|^2 = \| \overrightarrow{0m} \|^2 + \| \overrightarrow{ma} \|^2 = \| \overrightarrow{0m} \|^2 + \| \overrightarrow{mb} \|^2 = \| \overrightarrow{0b} \|^2 = d(0,b)^2$$

Análogamente, $d(0,a) = d(0,c)$. El triángulo $\{0,b,c\}$ es, pues, isósceles y su altura corta a $\overline{cb}$ en el punto medio. El punto "0" es, por tanto, la intersección de las tres mediatrices y se llama circuncentro."0" es el centro de una circunferencia que pasa por a, b y c : la circunferencia circunscrita al triangulo.

Ahora el concepto de mediatriz que hablamos anteriormente tiene validez en un espacio de dos dimensiones; la pregunta que nos formularíamos y que vamos a desarrollar en este trabajo es: ¿Cómo sería la definición de mediatriz si situamos un segmento en un ambiente tridimensional?. Para poder responder a éste interrogante hemos dividido este trabajo en dos capítulos:

En el primer capítulo, definiremos todos los conceptos que nos ayudaran a resolver más adelante la situación problema.

En el segundo, abordaremos realmente en el tema que vamos a tratar y concluiremos con la definición de mediatriz, cuando un segmento está situado en un espacio tridimensional.

1. PRELIMINARES

Definición* 1.1. *(Espacio Vectorial) *Un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *es un conjunto* $\mathbb{E}$ *no vacio junto con*

a. *Una operación* $+$, *a la que llamaremos suma, que cumple las siguientes propiedades:*

$*$ *Es asociativa:* $u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{E}$,

$*$ *Es conmutativa:* $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{E}$,

$*$ *Existe en elemento* $\overrightarrow{0}$ *tal que* $u + \overrightarrow{0} = u \quad \forall u, v \in \mathbb{E}$,

$*$ *Para todo* $u \in \mathbb{E}$ *existe otro elemento, que se denota por* $-u$, *tal que*

$$u + (-u) = \overrightarrow{0}$$

b. *Una aplicación:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (a, u) & \longrightarrow & au \end{array}$$

que denominaremos producto por elementos de $\mathbb{K}$, *que cumple:*

$*$ $a(u + v) = au + av, \quad \forall a \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{E}$,

$*$ $(a + b)u = au + bu, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, u \in \mathbb{E}$,

$*$ $(ab)u = a(bu) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, u \in \mathbb{E}$,

$*$ $1u = u \quad \forall u \in \mathbb{E}$, *donde 1 es la unidad del cuerpo* $\mathbb{K}$.

Observemos que la condición (a) asegura que $(\mathbb{E}, +)$ es un grupo conmutativo.

Definición* 1.2. *(Subespacio Vectorial) *Sea* $\mathbb{E}$ *Un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Un subcinjunto no vacio* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ *se llama Subespacio Vectorial de* $\mathbb{F}$ *si:*

1. $u, v \in \mathbb{F} \Rightarrow u + v \in \mathbb{F}$,

8

2. $u \in \mathbb{F}, k \in \mathbb{K} \Rightarrow ku \in \mathbb{F}$,

Definición* 1.3. *(Vectores L.I. y L.D.) *Un conjunto de vectores $\mathbb{S}$ se llaman linealmente independiente si toda combinación lineal de vectores de $\mathbb{S}$ nula tiene todos sus coeficientes nulos:*

$$a^1 v_1 + \cdots + a^m v_m = \overrightarrow{0}, v_i \in \mathbb{S}, i = 1, \ldots, m \Rightarrow a^1 = \cdots = a^m = 0.$$

En caso contrario, diremos que $\mathbb{S}$ es linealmente Dependiente.

Definición* 1.4. *(Bases de un Espacio Vectorial) *Una bases de un espacio vectorial $\mathbb{E}$ es un sistema de generadores linealmente independientes.*

Ejemplo 1.1 En $\mathbb{R}^2, (1,0)$ y $(0,1)$ son linealmente independientes, esto es, sean $a, b \in \mathbb{K}$ luego se tiene:

$$a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$$

$$(a,0) + (0,b) = (0,0)$$

$$(a,b) = (0,0) \Rightarrow a = 0 \ \ y \ \ b = 0$$

Luego los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ son linealmente independientes y forman una base para $\mathbb{R}^2$

Definición* 1.5. *(Dimensión de un Espacio Vectorial) *La dimensión de un espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es el número de elementos de sus bases, si son finitas.Si no lo son, diremos que $\mathbb{E}$ es de dimensión infinita.*

Ejemplo 1.2

a. $\mathbb{K}^2$ es de dimension 2 sobre $\mathbb{K}$

b. $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ es de dimension nm sobre $\mathbb{K}$

Definición* 1.6.** ***(Suma Directa de Espacios Vectoriales) *Sean* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$*. llamaremos suma directa de* $\mathbb{E}$ *y* $\mathbb{F}$ *al conjunto de* $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$ *con las operaciones:*

$$(u,v)+(u_1,v_1)=(u+u_1,v+v_1)$$

$$K(u,v)=(Ku,Kv)$$

donde $u,v\in\mathbb{E},u_1,v_1\in\mathbb{F}$ *y* $K\in\mathbb{K}$*. Con estas operaciones* $\mathbb{E}\times\mathbb{F}$ *es un espacio vectorial, que designaremos por* $\mathbb{E}\oplus\mathbb{F}$

Definición* 1.7.** ***(Producto Interior) *Sean* $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in\mathbb{E}$ *dos vectores, entonces el producto interior de* $\overrightarrow{a}$ *y* $\overrightarrow{b}$*, denotado por* $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$*, esta dado por*

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j$$

Definición* 1.8.** ***(Norma) *Sea* $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. una norma* $\mathbb{E}$ *es una aplicación*

$$\begin{aligned}\|\|:\mathbb{E}&\longrightarrow\mathbb{R}\\(v)&\longrightarrow\|v\|\end{aligned}$$

que cumple

a. $\|v\|=0\Leftrightarrow v=\overrightarrow{0}$;

b. $\|Kv\| = |k|\|v\|$;

c. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Desigualdad triangular).*$|k|$*indica el valor absoluto si* $k \in \mathbb{R}$ *y el modulo si* $k \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1.3. La aplicación $u \longrightarrow \sqrt{u \cdot u}$ es una norma de $\mathbb{E}$. Para demostrar esto, debemos demostrar primeramente la desigualdad de Cauchy-Schwarz como sigue:

$$|u \cdot v|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \quad \forall u, v \in \mathbb{E}$$

Ahora si $v = \overrightarrow{0}$, la desigualdad es cierta. Supongamos $v \neq \overrightarrow{0}$ y consideremos

$$k = \frac{uv}{u \cdot v}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq (u - kv) \cdot (u - kv) \\
&= u \cdot u - k(v \cdot u) - \overline{k}(u \cdot v) + k\overline{k}(v \cdot v) \\
&= u \cdot u - \tfrac{(uv)(v \cdot u)}{v \cdot v} - \tfrac{(\overline{uv})(u \cdot v)}{v \cdot v} + \tfrac{(uv)(\overline{v \cdot v})}{v \cdot v} \\
&= u \cdot u - \tfrac{(uv)(\overline{u \cdot v})}{(v \cdot v)} \\
&= u \cdot u - \tfrac{|u \cdot v|^2}{(v \cdot v)},
\end{aligned}$$

de donde

$$|u \cdot v|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

De acuerdo con lo demostrado, sabemos que la condición (a) de norma resulta de que el producto escalar es definido positivo.

Para demostrar (b), observemos que $(kv) \cdot (kv) = k\overline{k}(v \cdot v)$.

Para demostrar (c), hacemos

$$(u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v$$

$$(u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v + (u\cdot v + \overline{u\cdot v})$$

$$\begin{aligned}(u+v)\cdot(u+v) &\leq u\cdot u + v\cdot v + 2\mid u\cdot v\mid \\ &\leq u\cdot u + v\cdot v + 2\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v} \\ &= (\sqrt{u\cdot u}+\sqrt{v\cdot v})^2,\end{aligned}$$

de donde

$$\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)} \leq \sqrt{u\cdot u}+\sqrt{v\cdot v}$$

***Definición* 1.9.** *(**Ortonormalidad.**) Se dice que un conjunto de vectores $S=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots,\overrightarrow{u_k}\}$ en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto ortonormal si:*

$$\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j} = 0 \qquad si\ \ i\neq j,\ \ i,j=1,2,3,...,n\ \ (1)$$

$$\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j} = 1 \qquad si\ \ i=j,\ \ i,j=1,2,3,...,n\ \ (2)$$

si satisface la ecuación (1), se dice que el conjunto es ortogonal.

***Definición* 1.10.** *(**Complemento Ortogonal**) Sea H en subespacio de $\mathbb{R}^n$. El complemento ortogonal de H, denotado por $H^\perp$, está dado por*

$$H^\perp = \{x\in\mathbb{R}^n : \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{h}=0,\ \ para\ \ todo\ \ \overrightarrow{h}\in H\}$$

***Definición* 1.11.** *(**Espacio Afín**) Un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto $A\neq\phi$, un espacio vectorial $\mathbb{E}$ y una aplicación*

$$\varphi : A\times A \longrightarrow \mathbb{E}$$

Que cumple

a.

$$\begin{aligned}\varphi : A &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (q) &\longrightarrow \varphi(p,q) \qquad es\ biyectiva\ \forall p\in A\end{aligned}$$

b.

$$\varphi(p,q) + \varphi(q,r) = \varphi(p,r) \ \forall p,q,r \in A$$

escribiremos

$$\varphi(p,q) = \overrightarrow{pq}$$

y diremos que p y q son respectivamente el origen y el extremo del vector $\overrightarrow{pq}$. con esta notación, la condición (b) establece que

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$$

Los elementos de A se llaman puntos. $\mathbb{E}$ se llama el espacio vectorial asociado a A, definimos la dimensión de A como la dimensión de $\mathbb{E}$.

Definición 1.12. ***(Variedades Lineales)***

Sea $(A, \mathbb{E}, \varphi)$ un espacio afín.

Sea $a \in A$ y $\mathbb{F}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{E}$ se llama variedad lineal que pasa por "a" y tiene la dirección $\mathbb{F}$ al subconjunto de A

$$\{b \in A / \overrightarrow{ab} \in \mathbb{F}\}$$

Para indicar $u = ab$, usaremos las notaciones

$$u = b - a, \qquad b = a + u$$

con esta notación, por ejemplo, $T_u(a) = a + u$.

Una variedad lineal es, pues, un conjunto del tipo $\{b \in A / b = a + u, u \in \mathbb{F}\}$, que designaremos por $\{a + \mathbb{F}\}$.

Observemos que $A = a + \mathbb{E}$ es también una variedad lineal.

Definición* 1.13. *(Dimensión de una Variedad) *La dimensión de una variedad lineal $a + \mathbb{F}$ es la dimensión de su dirección $\mathbb{F}$. Las variedades de dimensión "0" son los puntos de A. Las variedades de dimensiones $1, 2$ y $(n-1)$ se llaman rectas, planos e hiperplanos, respectivamente ($n = dim\mathbb{E}$)*

Definición* 1.14. *(Sistema de Referencia) *Sea A^3 un espacio afín y $\mathcal{R} = \{O, V_1, V_2, V_3\}$ una cuaterna de puntos , se dice que $\mathcal{R}$ constituye un sistema de referencia del espacio afín A^3, cuando los vectores $\overrightarrow{OV_1}, \overrightarrow{OV_2}, \overrightarrow{OV_3}$ forman una base de $V^3(\mathbb{R})$. O es el origen del sistema de referencia.*

Si $\overrightarrow{OV_1} = \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{OV_2} = \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{OV_3} = \overrightarrow{U_3}$, entonces se tiene $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\}$ es un sistema de referencia

Definición* 1.15. *(Vector Posición) *Sea $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\}$ un sistema de referencia afín, si $A \in \mathbb{E}$ al vector libre $\overrightarrow{OA}$, se le denomina vector de posición del punto A.*

Definición* 1.16. *(Espacio Afín Euclideo) *Un espacio afín real $(A, \mathbb{E})$ se llama espacio afín Euclideo, si en $\mathbb{E}$ hay un producto escalar, es decir, si $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial Euclideo. Dados dos puntos de un espacio afín Euclideo, $p, q \in A$, se llama distancia entre p y q al número real*

$$d(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\|.$$

La aplicación $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada par $(p, q) \in A \times A$ el número real se llama aplicación distancia y cumple las siguientes propiedades para todo $p, q, r \in A$:

a. $d(p, q) \geq 0$; $d(p, q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$

b. $d(p, q) = d(q, p)$

c. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ *(desigualdad triangular)*

d. $d(p,q) \geq | d(p,r) - d(r,q) |$

Definición* 1.17. *(Distancia- Espacio Métrico) *Sea A un conjunto cualquiera, no vacío. Llamamos distancia en A a una aplicación:*

$$\begin{array}{rcl} d : A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) \end{array}$$

que verifica las condiciones siguientes:

a. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \ \ \forall x, y \in A$

b. $d(x,y) = d(y,x), \ \ \forall x, y \in A$

c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \ \forall x, y, z \in A$

2. PROBLEMA PRINCIPAL

Sea $\mathcal{E}$ un espacio afín Euclideo de dimensión arbitraria. Sea $r \geq 1$ un numero natural y sea

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

un sistema de $r+1$ puntos afínmente independientes. El conjunto $\mathcal{M}(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r) = \{X \in \mathcal{E}/d(X, A_0) = d(X, A_i),\ \forall i \in [1, r]\}$, formado por todos los puntos del espacio que equidistan de los lados, reciben el nombre de mediatriz del sistema.

Estableceremos que le mediatriz nunca es vacía, destacando un punto (único) de ella que está en el subespacio A generado por los puntos dados y al que daremos el nombre de circuncentro del sistema. En realidad, la mediatriz va a cubrir todo un subespacio afín: el de codimensión r que pasa por el circuncentro y sea perpendicular al subespacio sustentado por los puntos.

2.1. El punto medio de dos puntos dados está en la mediatriz de ambos

***Proposición* 2.1.** *Dados dos puntos A y B afínmente independientes (es decir distintos), su mediatriz contiene cuando menos al punto medio C del segmento $[A, B]$.*

Demostración: Sean A y B dos puntos distintos o afínmente independientes, mostraremos que su mediatriz contiene al menos un punto medio del segmento [A, B].
Primeramente fijaremos un origen "O" a efectos de tomar vectores de posición, luego llamemos

$$C = \frac{A+B}{2},$$

ahora mostraremos que $d(C,A) = d(C,B)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
d(C,A) &= \|A - C\| \\
&= \|A - \tfrac{A+B}{2}\| \\
&= \|\tfrac{2A-(A+B)}{2}\| \\
&= \|\tfrac{2A-A-B}{2}\| \\
&= \|\tfrac{A-B}{2}\| \\
&= \|\tfrac{(-1)(B-A)}{2}\| \\
&= |-1|\|\tfrac{(B-A)}{2}\| \\
&= 1 \cdot \|\tfrac{(B-A)}{2}\| \\
&= \|\tfrac{(B-A)}{2}\| \\
&= \|B - \tfrac{A+B}{2}\| \\
&= \|B - C\| \\
&= d(C,B),
\end{aligned}$$

luego $C \in \mathcal{M}(A,B)$ ■

Hemos probado que si A y B son puntos distintos entonces su mediatriz contiene por lo menos al punto medio C del segmento [A,B].

2.2. Mediatriz de un sistema de dos puntos

***Proposición* 2.2.** *Dados dos puntos A y B afínmente independientes, su mediatriz coincide con el hiperplano perpendicular a $\langle A,B\rangle$ que pasa por su punto medio C.*

Demostración: Sean A y B dos puntos distintos o afínmente independientes, mostraremos que su mediatriz coincide con el hiperplano, perpendicular a $\langle A, B\rangle$ que pasa por su punto medio C.

Sea $X \in \mathcal{E}$ donde X es un punto cualquiera del espacio afín $\mathcal{E}$, de donde se tiene que:

$$d^2(X,A) = XA \cdot XA = (XC + CA) \cdot (XC + CA)$$

$$d^2(X,A) = XC \cdot XC + CA \cdot CA + 2XC \cdot CA$$

$$d^2(X,A) = \|XC\|^2 + \|CA\|^2 + 2XC \cdot CA \tag{2.1}$$

$$d^2(X,B) = XB \cdot XB = (XC + CB) \cdot (XC + CB)$$

$$d^2(X,B) = XC \cdot XC + CB \cdot CB + 2XC \cdot CB$$

$$d^2(X,B) = \|XC\|^2 + \|CB\|^2 + 2XC \cdot CB \tag{2.2}$$

Ahora Restamos (2.2) con (2.1) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d^2(X,B) - d^2(X,A) &= \|XC\|^2 + \|CB\|^2 + 2XC \cdot CB \\
&- (\|XC\|^2 + \|CA\|^2 + 2XC \cdot CA) \\
&= \|XC\|^2 + \|CB\|^2 + 2XC \cdot CB \\
&- \|XC\|^2 - \|CA\|^2 - 2XC \cdot CA \\
&= 2XC \cdot CB - 2XC \cdot CA \\
&= 2XC(CB - CA) \\
&= 2XC \cdot AB
\end{aligned}$$

de donde hemos tenido en cuenta que $\|CB\| = \|CA\|$, por ser C el punto medio de $[A, B]$. De èsta manera $d(X,B) = d(X,A)$, llegando a que $XC \cdot AB = 0$, siendo esta ultima igualdad la ecuación del hiperplano a la recta $\langle A, B\rangle$ que pasa por su punto medio C.

Así hemos demostrado que si A y B son puntos afínmente independientes entonces su mediatriz coincide con el hiperplano perpendicular a $\langle A, B\rangle$ que pasa por su punto medio C.

■

2.3. Mediatriz de un sistema finito de puntos

***Teorema* 2.3.** *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\},$$

de $r+1$ *puntos afínmente independientes, su mediatriz es no vacía y constituye una subespacio afín de codimensión* r.

Demostración: Se sabe que para cualquier $X \in \mathcal{E}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} d^2(X, A_1) &= XA_1 \cdot XA_1 = (XC_1 + C_1A_1)\cdot(XC_1 + C_1A_1) \\ &= XC_1 \cdot XC_1 + C_1A_1 \cdot C_1A_1 + 2XC_1 \cdot C_1A_1 \\ &= \|XC_1\|^2 + \|CA_1\|^2 + 2XC_1 \cdot C_1A_1 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2(X, A_2) &= XA_2 \cdot XA_2 = (XC_1 + C_1A_2)\cdot(XC_1 + C_1A_2) \\ &= XC_1 \cdot XC_1 + C_1A_2 \cdot C_1A_2 + 2XC_1 \cdot C_1A_2 \\ &= \|XC_1\|^2 + \|CA_2\|^2 + 2XC_1 \cdot C_1A_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

si restamos (2) de (1) se tiene:

$$
\begin{aligned}
d^2(X, A_2) - d^2(X, A_1) &= \|XC_1\|^2 + \|CA_2\|^2 + 2XC_1 \cdot C_1A_2 \\
&- (\|XC_1\|^2 + \|CA_1\|^2 + 2XC_1 \cdot C_1A_1) \\
&= \|XC_1\|^2 + \|CA_2\|^2 + 2XC_1 \cdot C_1A_2 \\
&- \|XC_1\|^2 - \|CA_1\|^2 - 2XC_1 \cdot C_1A_1 \\
&= 2XC_1 \cdot C_1A_2 - 2XC_1 \cdot C_1A_1 \\
&= 2XC_1 \cdot (C_1A_2 - C_1A_1) \\
&= 2XC_1A_1A_2
\end{aligned}
$$

de donde se tiene que $\|C_1A_2\| = \|C_1A_1\|$, por ser C_1 el punto medio de $[A_1, A_2]$, luego $d(X, A_1) = d(X, A_2)$, llegando a que $XC_1A_1A_2 = 0$.

Ahora calculemos de la misma manera $d^2(X, A_2) = d^2(X, A_3)$, para cualquier $X \in \mathcal{E}$

$$
\begin{aligned}
d^2(X, A_2) &= XA_2 \cdot XA_2 = (XC_2 + C_2A_2) \cdot (XC_2 + C_2A_2) \\
&= XC_2 \cdot XC_2 + C_2A_2 \cdot C_2A_2 + 2XC_2 \cdot C_2A_2 \\
&= \|XC_2\|^2 + \|CA_2\|^2 + 2XC_2 \cdot C_2A_2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2(X, A_3) &= XA_3 \cdot XA_3 = (XC_2 + C_2A_3) \cdot (XC_2 + C_2A_3) \\
&= XC_2 \cdot XC_2 + C_2A_3 \cdot C_2A_3 + 2XC_2 \cdot C_2A_3 \\
&= \|XC_2\|^2 + \|CA_3\|^2 + 2XC_2 \cdot C_2A_3 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

si restamos (4) de (3) se tiene:

$$\begin{aligned}
d^2(X,A_3)-d^2(X,A_2) &= \|XC_2\|^2+\|CA_3\|^2+2XC_2\cdot C_2A_3\\
&- (\|XC_2\|^2+\|CA_2\|^2+2XC_2\cdot C_2A_2)\\
&= \|XC_2\|^2+\|CA_3\|^2+2XC_2\cdot C_2A_3\\
&- \|XC_2\|^2-\|CA_2\|^2-2XC_2\cdot C_2A_2\\
&= 2XC_2\cdot C_2A_3-2XC_2\cdot C_2A_2\\
&= 2XC_2\cdot(C_2A_3-C_2A_2)\\
&= 2XC_2A_2A_3
\end{aligned}$$

de donde hemos tenido en cuenta que $\|C_2A_3\| = \|C_2A_2\|$, por ser C_2 el punto medio de $[A_2, A_3]$, luego $d(X,A_2) = d(X,A_3)$, llegando a que $XC_2A_2A_3 = 0$, es obvio y el procedimiento es el mismo para $d(X,A_3) = d(X,A_4)$, con C_3, punto medio de $[A_3,A_4]$ y $XC_3A_3A_4 = 0$, $d(X,A_4) = d(X,A_5)$ y C_4 punto medio de $[A_4,A_5]$ y además $XC_4A_4A_5 = 0$ y así sucesivamente hasta llegar a que para cada valor $i \in [1,r]$, se tiene que $d(X,A_i) = d(X,A_0)$ con $XC_iA_0A_i = 0$, donde C_i es el punto medio de $[A_0,A_i]$, los puntos de la mediatriz, por lo tanto, dichos puntos son las soluciones del siguiente sistema lineal completo de r- ecuaciones:

$$XC_1\cdot A_0A_1 = XC_2\cdot A_0A_2 = \cdots = XC_r\cdot A_0A_r = 0$$

Los vectores fila de la matriz de coeficientes son los

$$A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_r,$$

que son linealmente independientes.

El sistema será, pues, compatible y las soluciones serán un subespacio afín de codimensión r. ■

2.4. Existencia del circuncentro

***Teorema* 2.4.** *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\},$$

de $r + 1$ puntos afínmente independientes, su mediatriz corta en un solo punto C al subespacio afín $\mathcal{A}$ determinado por ellos.

Demostración: Sea

$$X = A_0 + \lambda_1 A_0A_1 + \lambda_2 A_0A_2 + \cdots + \lambda_r A_0A_r,$$

La ecuación parametrica-vectorial del subespacio A y sea

$$[w_{ij}] = [A_0A_i \cdot A_0A_j], \;\; donde \;\; i, j \in [1, r],$$

La matriz del producto escalar relativa a la base

$$\{A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_r\}$$

del subespacio vectorial director se tratará de una matriz regular de orden r. El posible corte de A con la mediatriz, se deducirá de estudiar el sistema que resulte al llevar el valor genérico de sus puntos a todas y cada una de las ecuaciones que determinaban la mediatriz. Para cada una de las ecuaciones, será

$$XC_j \cdot A_0A_j = 0$$

$$(C_j - X) \cdot A_0A_j = 0$$

$$C_j \cdot A_0A_j = X \cdot A_0A_j$$

$$\tfrac{1}{2}(A_0 + A_j) \cdot A_0A_j = (A_0 + \lambda_1 A_0A_1 + \lambda_2 A_0A_2 + \cdots + \lambda_r A_0A_r) \cdot A_0A_j$$

$$\tfrac{1}{2}(A_0 + A_j) \cdot A_0A_j = A_0 \cdot A_0A_j + \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}(A_0 + A_j) \cdot A_0A_j - A_0 \cdot A_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}A_0A_0A_j + \tfrac{1}{2}A_jA_0A_j - A_0 \cdot A_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}A_0A_0A_j - A_0 \cdot A_0A_j + \tfrac{1}{2}A_jA_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{A_0A_0A_j - 2A_0 \cdot A_0A_j}{2} + \tfrac{1}{2}A_jA_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$-\tfrac{1}{2}A_0A_0A_j + \tfrac{1}{2}A_jA_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}A_jA_0A_j - \tfrac{1}{2}A_0A_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}(A_j - A_0) \cdot A_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}A_0A_j \cdot A_0A_j = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

$$\tfrac{1}{2}w_{jj} = \lambda_1 w_{1j} + \lambda_2 w_{2j} + \cdots + \lambda_r w_{rj}$$

para $j \in [1, r]$.

Evidentemente, se trata de un sistema de Cramer de orden r, cuya única solución servirá para construir el punto C buscado. ■

2.5. Ortogonalidad del punto de corte

***Teorema* 2.5.** *Dado un sistema finito*

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r\},$$

de $r+1$ puntos afínmente independientes, su mediatriz es perpendicular al subespacio A en el punto C de corte de ambos.

23

Demostración: Puesto que el circuncentro C esta en cada uno de los hiperplanos

$$XC_j \cdot A_0A_j = 0, \ \ donde \ j \in [1, r],$$

que definen la mediatriz, podemos usarlo para escribir su ecuación. La mediatriz, por lo tanto, queda definida implícitamente por el nuevo sistema

$$XC \cdot A_0A_1 = XC \cdot A_0A_2 = \cdots = XC \cdot A_0A_r = 0$$

esto nos muestra, que la mediatriz es el complemento ortogonal del subespacio A que pasa por C. ■

Ejemplo 2.6. Hallar la ecuación del plano que divide al segmento en dos partes iguales.

Solución: Sean $(x_0, y_0, z_0) = w_1$ y $(x_1, y_1, z_1) = w_2$ con $w_1, w_2 \in R^3$ los puntos extremos de la recta $\overrightarrow{l}$ contenida en el plano α y sea el punto $(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0) = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2})$ sus puntos medios, denotados por A; además sea $\mathbf{N} = (a, b, c) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ que nos representa el vector normal; ahora aplicando la definición de producto interior tenemos que:

$$(a, b, c) \cdot (x_1 - \overline{x}_0, y_1 - \overline{y}_0, z_1 - \overline{z}_0) = 0$$

$$a(x - \overline{x}_0) + b(y - \overline{y}_0) + c(z - \overline{z}_0) = 0$$

$$ax - a\overline{x}_0 + by - b\overline{y}_0 + cz - c\overline{z}_0 = 0$$

$$ax + by + cz - a\overline{x}_0 - b\overline{y}_0 - c\overline{z}_0 = 0$$

$$ax + by + cz - (a\overline{x}_0 + b\overline{y}_0 + c\overline{z}_0) = 0$$

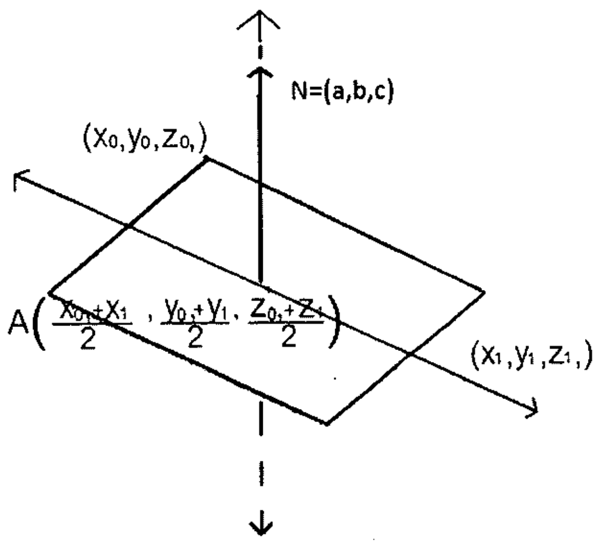

Figura 1: ejemplo 2.6.

Luego dicha ecuación; es la ecuación del plano que divide al segmento en dos partes iguales.

Ejemplo 2.7. Condición necesaria y suficiente de perpendicularidad entre recta plano.

La condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean perpendiculares en un punto, es que la recta sea perpendicular a dos rectas contenidas en el plano que pasen por el punto

(H). $r \perp \alpha,\ O \in r,\ O \in \alpha$

$a \subset \alpha,\ O \in a$

$b \subset \alpha, \ O \in b$

(T). $r \perp a \ \wedge \ r \perp b$

condición suficiente

(H). $O \in r, \ O \in \alpha$

$a \subset \alpha, \ O \in a, \ r \perp a$

$b \subset \alpha, \ O \in b, \ r \perp b$

(T). $r \perp \alpha$

Debemos probar que r es perpendicular a cualquier otra recta c, contenida en α y que pase por O. Consideremos dos puntos P y Q de la recta r, que sean simétricos respecto a O y probaremos que c es una mediatriz del segmento PQ.

Sean A y B dos puntos pertenecientes respectivamente a las rectas a y b de modo que la intersección de las rectas AB y c no sea vacía. $AB \cap c = C$, como O equidista de P y Q para probar que C es mediatriz del segmento PQ es suficiente probar que c también equidista de P y Q.

Los triángulos ABO y AQC son congruentes por tener sus tres lados respectivamente congruentes: el segmento AB es común, los segmentos AP y AQ son congruentes puesto que a es la mediatriz del segmento PQ. Análogamente con los segmentos BP y BQ.

Dado que los triángulos ABP y ABQ son congruentes, también lo son los triángulos ACP y ACQ, por lo que son congruentes los segmentos PC y QC. Esto significa que C equidista de P y Q.

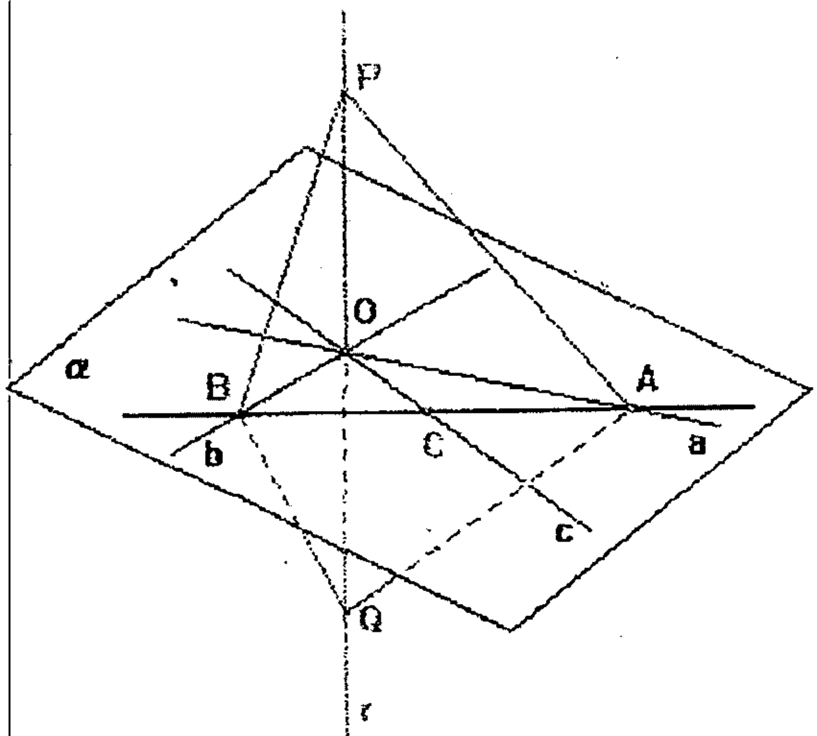

Figura 2: ejemplo 2.7.

3. CONCLUSIÓN

Todos conocemos, desde nuestra educación media el concepto de mediatriz de un segmento en un plano, cuya definición habitual es "**La recta perpendicular por su punto medio**"Pero nunca se nos vino la idea, si dicho concepto tuviera validéz en un espacio de tres dimensiones. La respuesta a ello es negativa; ya que si el segmento lo situamos en un ambiente tridimensional, dejaría de tener sentido el hablar de perpendicular en el punto medio.
En este trabajo de grado lo que hicimos fue responder el interrogante, resolviendo obviamente los teoremas propuestos y llegar a la conclusión que la definición más adecuada para la mediatriz, ya de una manera general, es la siguiente:

"**El lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos**"

La definición habitual fue el enunciado de la sección 2.2, y la construcción para la definición general de la misma lo vimos en el resto de teoremas, ya demostrados; por ésto que si pensamos en tres puntos no alineados del plano, existe la mediatriz, ya que quedan reducidas en un solo punto llamado circuncentro; y si estos puntos los colocamos en un espacio tridimensional, además del circuncentro, aparece toda una recta de puntos equidistantes de los tres, que son: el plano que determina, trazada por su circuncentro y la perpendicular.
Por éso utilizamos la métrica, para las demás demostraciones de este trabajo y afirmar que mediatriz y circuncentro son conceptos métricos que tenemos que ubicar en un espacio afín Eucidéo, esto obviamente se ve indicado por la perpendicularidad y la distancia.

BIBLIOGRAFÍA

Referencias

[1] E. Artin, Álgebra Geométrica.Limusa,1992.

[2] L. Blumenthal,A Modern View Of Geometry. Dover plublication, Inc,1980, New York.

[3] H.Coxeter,Fundamentos De Geometría.Limusa.Mexico.

[4] Alfonso Rider Moyano y Rafael Maria Rubio Ruiz,Sobre El Concepto Del A MediatríZ Y Sus Generalizaciones. Lecturas Matemáticas 2005. vol 26 ,número 2, Santa fé de Bogota,Colombia

[5] Brézis H.Analyse Fonctionnelle.Masson Editeur, de París.

[6] P.Puig; Curso de Geometria metrica Euler,1986.Madrid.

[7] Http://www.wikipedia.org//Definicion de espacio afín.html

[8] E.Hemmrling,Geometría elemental,Limusa 1986,Mexico.

[9] R. Artzy.Linear Geometry, Addison Wesley, New york.1965

[10] A. Martins.Algebra Linear e Geometrica Euclidiana,Departamento de asuntos científicos União pan - Americana, Secretaria general Organização dos estados Americanos,Washington D.C-1969.

29

[11] Manuel Castellet e Irene Llerena, Algebra Lineal y Geometría Editorial Reverté, 2000, Barcelona, España.

62468