Pozos de potencial poco profundo para la ecuación de Schrödinger.

Trabajo de grado que presenta

FABIAN ENRIQUE YEPEZ GARCIA

para obtener el titulo de matemático.

Asesor de Tesis:

ANA MAGNOLIA MARIN., Ph. D.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMATICAS

CARTAGENA D.T y C

2008.

Dedico este trabajo con todo cariño a
mis padres Apolinar Yepez e Inirida Garcia.

Doy gracias a Dios y a la Virgen María en primer lugar,
a mis hermanos,
a la universidad de Cartagena,
a la Dra. Ana Magnolia Marin Ramirez por su enorme apoyo,
y a todos los amigos que me apoyaron de un modo u otro y que es
imposible enumerar aquí.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Schrödinger, desarrollada por el físico austriaco, Erwin Rudolf Josef Alexander en 1925, describe la dependencia temporal de los sistemas mécano cuántico. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica, donde representa un papel análogo a las leyes de Newton en la mecánica clásica.

La ecuación de Schrödinger fue establecida para $n = 1$ y en el caso radialmente simétrico para $n = 2$ se hizo en el famoso libro de Landau & Lifshitz (ver [5]) y después fue demostrado en el caso general en dimensión 2 por Simón (ver [7]).

El método usado por estos autores es muy diferente y consiste brevemente en lo siguiente: Landau & Lifshitz construyen una asintótica de la función propia en los dominios donde $V \equiv 0$ y $V \not\equiv 0$ separadamente y las une, así la asintótica de la función propia no es uniforme y el método es solo aplicable en el caso de dominios radialmente simétricos para $n = 2$.

La asintótica de los valores propios es obtenida de las condiciones de pegamento, de otra forma, Simón reduce el problema a una ecuación para los valores propios (Ecuación secular) la cual resuelve por medio de la expansión de Taylor usando el teorema de función implícita; así en ésta aproximación la asintótica de la función propia no aparece del todo.

Más aún, el método de Simón no es sencillo porque él usa, por ejemplo la teoría de operadores núcleares.

Un método alternativo al estudio de la ecuación de Schrödinger para hacer las descripciones de la mecánica cuántica fue desarrollado simultánea e independientemente por W. Heisenberg.

Un año más tarde se demostró que ambas alternativas son matemáticamente equivalentes.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo han sido conocidas desde el descubrimiento de la misma para los potenciales del oscilador armónico y del átomo de hidrógeno, que eran los casos más urgentes e interesantes a resolver para la física de entonces. No obstante, fue hasta la década siguiente cuando comienza un estudio más riguroso de dicha ecuación desde el punto de vista matemático, habiendose explorado cómo obtener las soluciones respectivas para otros casos del potencial $U(x)$.

A partir de allí la investigación matemática de la ecuación de Schrödinger ha sido inagotable.

Consideremos la ecuación unidimensional de Schrödinger

$$(-\triangle + U)\psi = E\psi \qquad (*)$$

Cuando U describe un potencial poco profundo (es decir, $U = \varepsilon V(x)$, $V(x) \in C_0^\infty(R), \varepsilon \to 0$) tiene exactamente un valor propio $E_0 = -\beta^2, \beta \in R$, por debajo del espectro esencial en el caso cuando $\int_R V(x)dx \leq 0$.

Este trabajo ha sido dividido en dos capítulos.

El primer capítulo tiene los conceptos preliminares necesarios para el desarrollo de ésta monografía y así ayudar a la comprensión del mismo.

En el segundo capítulo, se demuestra el problema principal (Teorema 2.1) de Pozos de potencial poco profundo para la ecuación de Schrödinger de los autores Petr Zhevandrov y Anatoli Merzon.

En este problema principal se escriben los detalles de la demostración y consiste en construir una asintótica de la función propia ψ correspondiente al valor propio E de ecuación (*), suponiendo que $C_1 \geq \| \psi \| \geq C_2 > 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, donde C_1 y C_2 no dependen de ε y la norma es la de $L_2(R)$.

El aporte que hago en el desarrollo de ésta monografía es escribir los detalles no dados por los autores Petr Zhevandrov y Anatoli Merzon del articulo Pozos de potencial poco profundos para la ecuación de Schrödinger (ver [1]).

Capítulo 1

PRELIMINARES

Definición 1.1 (Laplaciano). El laplaciano es un operador diferencial de segundo orden, denotado por $\triangle$. En coordenadas cartesianas bidimensionales, el laplaciano es $\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Definición 1.2. Con $C_o^\infty(\mathbb{R})$ denotamos el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables que se anulan fuera de un conjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Definición 1.3. Si el movimiento del fluido es irrotacional, el vector velocidad v puede ser representado por el gradiente de un potencial escalar ϕ llamado el potencial de la velocidad

$$v = \nabla \phi.$$

El potencial de la velocidad es dado por la integral de linea

$$\phi(x,t) = \int_{x_o}^{x} \sum u_i dx_i,$$

8

donde el límite inferior x_o es arbitrario y el límite superior es el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Definición 1.4. De la ecuación de Schrödinger

$$(-\Delta + U)\psi = E\psi,$$

se tiene que:

a. Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$.

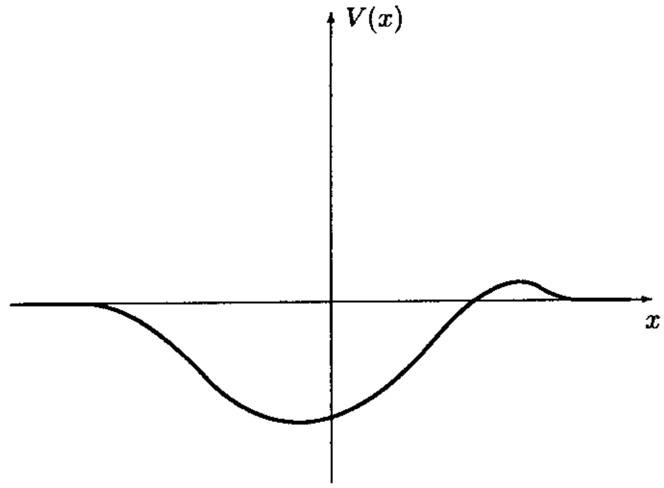
b. $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función potencial que describe un pozo de potencial de poca profundidad; esto quiere decir que

$$U = \varepsilon V(x),$$

con $V(x) \in C_o^\infty(\mathbb{R})$.

c. $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función de onda. Una función de onda es una herramienta matemática que la mecánica cuántica utiliza para describir cualquier sistema físico. Es una función de un espacio que se compone de los estados posibles del sistema de los números complejos. Las leyes de la mecánica cuántica (es decir la ecuación de Schrödinger) describen como evoluciona la función de onda en el tiempo. Los valores de la función de onda son las amplitudes de probabilidad de los números complejos.

d. E es la energía total de la partícula cuyo movimiento es descrito por dicha ecuación.



Definición 1.5. Se dice que una función tiene soporte compacto si el conjunto donde no es nula conforma un conjunto cerrado y acotado. Por ejemplo si se tiene una función $f(x)$, el soporte de $f(x)$ es:
$supp f = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \neq 0\}$.
si el *supp* de f es cerrado y acotado, entonces es compacto.

Definición 1.6. El espectro esencial de un operador consiste de todos los puntos del espectro excepto valores propios aislados de multiplicidad finita. Hemos así añadido al espectro continuo:

1. Cualesquiera valores propios incrustados en el espectro continuo o en sus orillas.
2. Cualesquiera puntos límites del espectro y
3. valores propios, si los hay, de multiplicidad infinita.

Examinando varios casos, está visto que los puntos del espectro esencial puede caracterizarse por vectores propios aproximados (posiblemente incluyendo verdaderos vectores propios) como sigue:

λ está en el espectro esencial H si y sólo si existe una sucesión $\{V_j\}_1^\infty$ de vectores unitarios linealmente independientes (o, si se prefiere, mutuamente ortogonales) tales que $\|H_{V_j} - \lambda_{V_j}\| \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow \infty$.

Definición 1.7. Si $\left|\frac{f(x)}{\phi(x)}\right|$ es acotada, escribimos $f(x) = O\{\phi(x)\}$, $x \longrightarrow \infty$. En otras palabras, f es de orden que no excede a ϕ.

Definición 1.8. $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2(-\infty, \infty)$ es el espacio vectorial de las funciones de variable real con cuadrado integrable, en el sentido de lebesgue, es decir, si $f \in \mathbb{L}_2$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty,$$

para $f \in \mathbb{L}_2$ definimos la norma de f por:

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.9. Una función ψ_n, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ es la asintótica de la función propia ψ si satisface $\|\psi - \psi_n\| = O\{\varepsilon^{n+1/2}\}$.

Definición 1.10. La transformada de Fourier es una aplicación que hace corresponder a una función f con valores complejos y definidos en la recta, otra función $\tilde{f}$ definida de la siguiente manera

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Propiedades

a. $(\widetilde{D^k\psi})(p) = (-iu)^k \tilde{\psi}(p)$.

b. $(\widetilde{a\psi})(p) = a\tilde{\psi}(p)$.

c. $(v * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)\psi(y)dy$.

d. $(\widetilde{v\psi})(p) = (\tilde{v} * \tilde{\psi})(p)$.

Ejemplo:

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Hallar $\tilde{f}(p)$.

Solución:

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ipx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1e^{ipx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{e^{ipx}}{ip}\Big|_{-a}^{a}\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{e^{ipa} - e^{-ipa}}{ip}\Big) = \frac{2}{ip\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{e^{ipa} - e^{-ipa}}{2}\Big) = \frac{2}{ip\sqrt{2\pi}} \sinh(ipa),$$

luego $\tilde{f}(p) = \frac{2}{ip\sqrt{2\pi}} \sinh(ipa)$.

Definición 1.11. Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, decimos que f es complejo-diferenciable en el punto z_o de U si existe el siguiente límite

$$f'(z_o) = \lim_{z \longrightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}.$$

Definición 1.12 (Funciones Holomorfas)**.** Son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto U del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciables en cada punto de U.

Definición 1.13. Sea U un abierto en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $a \in U$. Se dice que f es una función analítica en el punto a si existe una sucesión de números complejos $\{C_k\}$ y número real $r > 0$ tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

y la serie converge absolutamente en el disco $|z - a| < r$. Si la función es analítica en cada punto del conjunto U se dice que la función es analítica en U.

Definición 1.14. Una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es entera si es holomorfa en todo el plano complejo. Esto indica que la función es entera cuando es analítica en todo plano complejo. Carece de singularidades, es decir que para cada $z_o \in \mathbb{C}$, existe una bola $B(z_o, \varepsilon)$ tal que para todo $z \in B(z_o, \varepsilon)$ tenemos que $f(z)$ se puede escribir como una serie de potencias en z.

En símbolos $\forall z_o \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0$ tal que $|z - z_o| < \varepsilon$ implica que $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, donde los $a_i \in \mathbb{R}$ sólo depende de z_o.

Definición 1.15. La serie de Mclaurin de una función f infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto $(-r, r)$ se define de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

donde $n!$ es el factorial de n y $f^{(n)}(0)$ indica la n-ésima derivada en el punto 0.

Definición 1.16. Con $S(\mathbb{R})$ denotamos el espacio de funciones de decaimiento rápido que contienen las funciones de valor complejo $\phi(x) = \phi(x_1, \cdots, x_n)$ tienen las siguientes propiedades:

1. $\phi(x)$ es infinitamente diferenciable, esto es, $\phi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.
2. $\phi(x)$ y sus derivadas de todos los ordenes, se anulan en el infinito más rápido que el inverso de cualquier polinomio.

La propiedad (2) puede ser expresada por la desigualdad $|x^p D^k \phi(x)| < C_{pk}$ donde $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ y $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ son n-uplas de enteros no negativos y C_{pk} es una constante que depende de p, k y $\phi(x)$.

Definición 1.17. Los niveles de energía de una partícula de masa m, confinada en una región unidimensional en la que existe un potencial $E_p(x)$ vienen dados por la solución de la ecuación Schrödinger independiente del tiempo.

$$\frac{-h^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + E_p(x)\psi = E\psi,$$

con las condiciones de contorno $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$, es decir, E es la energía de un nivel, si la solución de la ecuación de Schrödinger $\psi(x)$ tiende asintóticamente a cero para grandes valores de x.

Definición 1.18. La función Delta es una función generalizada, es decir, es un funcional lineal continuo sobre un espacio de funciones infinitamente diferenciables. La función delta puede ser definida como el límite de una clase de sucesiones delta.
La función delta es algunas veces llamada *función delta de Dirac.*
La función delta de Dirac $\delta(x-\varepsilon)$ tiene algunas propiedades importantes:

1. $\delta(x-\varepsilon)=0\ ,\ \ x\neq\varepsilon.$
2. $\int_a^b \delta(x-\varepsilon)dx = \begin{cases} 0, & a,b<\varepsilon\ \ ,o,\ \varepsilon<a,b, \\ 1, & a\leq\varepsilon\leq b. \end{cases}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\varepsilon)dx=1.$

La ecuación $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\varepsilon)dx=1$ es un caso especial de la expresión $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\varepsilon)f(x)dx = f(\varepsilon)$, donde $f(x)$ es una función suficientemente pequeña.

Definición 1.19. Una sucesión delta δ_n es una sucesión de funciones fuertemente maximizadas para las cuales

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)f(x)dx=f(0),$$

cuando $n\longrightarrow\infty$ es una función delta y $f(x)$ es acotada, integrable y continua en $x=0$.

Definición 1.20. (Pozo de Potencial). Según el principio de conservación de la energía, la energía mecánica $E=K+U$ es constante. Es decir,

$$E=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}Kx^2=constante.$$

Las gráficas de energía potencial en función de la posición x son parábolas. La energía mecánica E está estrechamente relacionada con la amplitud del movimiento.

Cuando la partícula alcanza su desplazamiento máximo, se detiene y vuelve hacia la posición de equilibrio. En este instante, V=O, por lo que no hay energía cinética; la energía mecánica (constante) es, pues, igual a la energía potencial en ese punto.

Cuando una partícula se abandona desde una altura en un carril sin rozamiento cuya forma sea la de la curva de energía potencial, se dice que el movimiento tiene lugar en un "pozo de energía potencial".

Capítulo 2

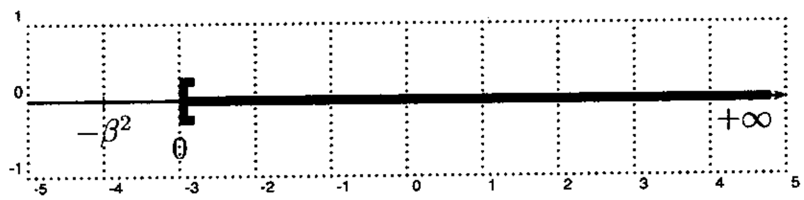
ASÍNTOTA DE LA FUNCIÓN PROPIA ψ

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$(-\Delta + U)\psi = E\psi, \tag{2.1}$$

donde U describe un pozo de potencial (es decir, $U = \varepsilon V(x)$ donde $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \varepsilon \longrightarrow 0$).

Es bien conocido que (2.1) tiene exactamente un valor propio $E_0 = -\beta^2$, $\beta \in \mathbb{R}$, a la izquierda del espectro esencial $[0, +\infty)$ en el caso cuando $\int_{\mathbb{R}} V(x)dx \leq 0$.



En el trabajo estamos estudiando el interés del autor de construir una asíntota uniforme de la función propia en esta situación suponiendo que

$$C_1 \geq \|\psi\| \geq C_2 > 0 \ \ cuando \ \ \varepsilon \longrightarrow +0, \tag{2.2}$$

donde C_1, C_2 no dependen de ε y la norma es la de $L_2(\mathbb{R})$.

Se denota

$$\tilde{V}(p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx} V(x) dx,$$

donde $\tilde{V}$ denota la transformada de Fourier de V.

Lemma 1. *Sea $\phi(t)$ una función entera tal que $\phi(t) \in S(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces cuando $\mu \longrightarrow 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k \int_{r_1} \frac{\phi(t)}{t^{k+2}} dt + \mu^{2([\frac{n}{2}]+1)} \int_{r_1} \frac{\phi(t)dt}{t^{2([\frac{n}{2}]+1)}(t^2-\mu^2)}$$
$$+ \frac{\pi}{\mu} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (i\mu)^k \frac{\phi^k(0)}{k!} + \frac{(i\mu)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \phi^{n+1}(ti\mu) dt \right\}, \tag{2.3}$$

donde $\alpha_k = (1+(-1)^k)/2$.

Demostración. Consideremos la integral $\int_r \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2}$, donde

$$\begin{aligned} r := &\{t : t = z + 0i, \ z \in (-\infty, 0]\}. \\ &\bigcup \{t : t = zi, \ z \in [0, \mu - \eta], \ \eta << \mu\}. \\ &\bigcup \left\{t : t = i\mu + \eta e^{-i\theta}, \ \theta \in [-3\pi/2, \pi/2]\right\}. \\ &\bigcup \{t : t = (\mu - \eta - z)i, \ z \in [0, \mu - \eta]\}. \\ &\bigcup \{t : t = z + 0i, \ z \in [0, \infty]\}. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\int_{r} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2} + \int_{C_\eta} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2},$$

donde C_η denota la circunferencia con centro en $i\mu$ y de radio η recorrida en sentido de las manecillas del reloj; esta última integral es igual a $-2\pi i Res \frac{\phi(t)}{t^2+\mu^2}$, $t = i\mu$, como la función $\frac{\phi(t)}{t^2+\mu^2}$ solo tiene singularidades en $\pm i\mu$, las integrales de la misma a lo largo de γ y γ_1 son iguales y se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2} = \int_{\gamma_1} \frac{\phi(t)dt}{t^2+\mu^2} + \frac{\pi}{\mu}\phi(i\mu), \tag{2.4}$$

como $\mu \longrightarrow 0$, $|\mu^2/t^2| < 1$ para t en γ_1. Reconocemos entonces en el último integrando una serie geométrica convergente, por lo que esa integral es

$$\int_{\gamma_1} \frac{\phi(t)}{t^2}\Big(\sum_{j=0}^{m}\Big(-\frac{\mu^2}{t^2}\Big)^j + \Big(-\frac{\mu^2}{t^2}\Big)^{m+1}/\Big(1+\frac{\mu^2}{t^2}\Big)\Big)dt,$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, la cual, definiendo $k = 2j$ y $n = 2m$, puede escribirse en la forma de los dos primeros términos del segundo miembro de (2.3).

Por otra parte, según el desarrollo finito de McLaurin para ϕ (que es entera),

$$\phi(i\mu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}(i\mu)^k + \frac{1}{n!}\int_0^{i\mu} \phi^{(n+1)}(\varepsilon)(i\mu-\varepsilon)^n d\varepsilon.$$

Factorizando $(i\mu)^n$ en el integrando, haciendo $t = \varepsilon/i\mu$, simplificando y sustituyendo este resultado en el último término del miembro derecho de (2.4), se obtiene el tercer término de (2.3). ★

Lemma 2 (Desigualdad de Peetre). *Para todo $s \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon, \theta \in \mathbb{R}^n$, se tiene*

$$\lambda^s(\varepsilon) \leq 2^{|s|}\lambda^{|s|}(\varepsilon-\eta)\lambda^s(\eta),$$

donde $\lambda(\varepsilon) = (t+|\varepsilon|^2)^{1/2}$ definida sobre $\mathbb{R}^n$, más general $\lambda^s(\varepsilon) = (1+|\varepsilon|^2)^{s/2}$ para $s \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. La desigualdad triangular para la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ nos da

$$(1+|\varepsilon|) = (1+|\varepsilon-\eta+\eta|) \le (1+|\varepsilon-\eta|+|\eta|),$$

se tiene que $|\eta| < 1+|\eta|$, luego

$$(1+|\varepsilon|) = (1+|\varepsilon-\eta+\eta|) \le (1+|\varepsilon-\eta|)(1+|\eta|).$$

Así que

$$\begin{aligned}\lambda^2(\varepsilon) &= (1+|\varepsilon|^2)\\ &\le 1+|\varepsilon|^2+2|\varepsilon|\\ &= (1+|\varepsilon|)^2\\ &\le (1+|\varepsilon-\eta|)^2(1+|\eta|)^2.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(1+|\eta|)^2 &\le (1+|\eta|)^2+(1-|\eta|)^2\\ &= 1+2|\eta|+|\eta|^2+1-2|\eta|+|\eta|^2\\ &= 2+2|\eta|^2\\ &= 2(1+|\eta|^2)\\ &= 2\lambda^2(\eta).\end{aligned}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned}(1+|\varepsilon-\eta|)^2 &\le (1+|\varepsilon-\eta|)^2+(1-|\varepsilon-\eta|)^2\\ &= 1+2|\varepsilon-\eta|+|\varepsilon-\eta|^2+1-2|\varepsilon-\eta|+|\varepsilon-\eta|^2\\ &= 2+2|\varepsilon-\eta|^2\\ &= 2(1+|\varepsilon-\eta|^2)\\ &= 2\lambda^2(\varepsilon-\eta),\end{aligned}$$

luego

$$\lambda^2(\varepsilon) \leq (2\lambda^2(\varepsilon - \eta))(2\lambda^2(\eta)),$$

$$\lambda^2(\varepsilon) \leq 2^2\lambda^2(\varepsilon - \eta)\lambda^2(\eta),$$

para $s \geq 0$, elevando esta desigualdad a la potencia $s/2$, se tiene

$$(\lambda^2(\varepsilon))^{s/2} \leq (2^2\lambda^2(\varepsilon - \eta)\lambda^2(\eta))^{s/2},$$

$$\lambda^s(\varepsilon) \leq 2^{|s|}\lambda^{|s|}(\varepsilon - \eta)\lambda^{|s|}(\eta).$$

Ahora se prueba la desigualdad para $s \leq 0$.

La desigualdad triangular para la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ nos da

$$(1 + |\eta|) = (1 + |\eta - \varepsilon + \varepsilon|) \leq (1 + |\eta - \varepsilon| + |\varepsilon|),$$

se tiene que $|\varepsilon| < 1 + |\varepsilon|$, luego

$$(1 + |\eta|) = (1 + |\eta - \varepsilon + \varepsilon|) \leq (1 + |\eta - \varepsilon|)(1 + |\varepsilon|).$$

Así que

$$\begin{aligned}
\lambda^2(\eta) &= (1 + |\eta|^2) \\
&\leq 1 + |\eta|^2 + 2|\eta| \\
&= (1 + |\eta|)^2 \\
&\leq (1 + |\eta - \varepsilon|)^2(1 + |\eta|)^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(1 + |\varepsilon|)^2 &\leq (1 + |\varepsilon|)^2 + (1 - |\varepsilon|)^2 \\
&= 1 + 2|\varepsilon| + |\varepsilon|^2 + 1 - 2|\varepsilon| + |\varepsilon|^2 \\
&= 2 + 2|\varepsilon|^2 \\
&= 2(1 + |\varepsilon|^2) \\
&= 2\lambda^2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

De igual forma

$$
\begin{aligned}
(1+|\eta-\varepsilon|)^2 &\leq (1+|\eta-\varepsilon|)^2+(1-|\eta-\varepsilon|)^2 \\
&= 1+2|\eta-\varepsilon|+|\eta-\varepsilon|^2+1-2|\eta-\varepsilon|+|\eta-\varepsilon|^2 \\
&= 2+2|\eta-\varepsilon|^2 \\
&= 2(1+|\eta-\varepsilon|^2) \\
&= 2\lambda^2(\eta-\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Luego

$$\lambda^2(\eta) \leq (2\lambda^2(\eta-\varepsilon))(2\lambda^2(\varepsilon)),$$

$$\lambda^2(\eta) \leq 2^2\lambda^2(\eta-\varepsilon)\lambda^2(\varepsilon),$$

para $s \leq 0$, elevando esta desigualdad a la potencia $-s/2$, se tiene

$$(\lambda^2(\eta))^{-s/2} \leq (2^2\lambda^2(\eta-\varepsilon)\lambda^2(\varepsilon))^{-s/2},$$

$$\lambda^{-s}(\eta) \leq 2^{-s}\lambda^{-s}(\eta-\varepsilon)\lambda^{-s}(\varepsilon),$$

que puede reescribirse como

$$\lambda^{s}(\varepsilon) \leq 2^{-s}\lambda^{-s}(\varepsilon-\eta)\lambda^{s}(\eta).$$

Esto completa la prueba. ★

Teorema 2.1 (Ecuación de Schrödinger, el caso de dimensión 1). *Sea*

$$\int_{\mathbf{R}} V(x)dx < 0, \tag{2.5}$$

entonces

$$\psi_n(x) = \mu_n^{3/2}\int_{\mathbf{R}} e^{ipx}\frac{a_0(p)+\varepsilon a_1(p)+\cdots+\varepsilon^n a_n(p)}{p^2+\mu_n^2}dp, \tag{2.6}$$

$n = 0,\ 1,\ 2, \cdots$, *es la asíntota de la función propia* ψ *que satisface la condición (2.2) y que pertenece al valor propio*

$$E = -\mu_n^2 + O(\varepsilon^{n+5/2}), \tag{2.7}$$

esto es

$$\|\psi - \psi_n\| = O(\varepsilon^{n+1/2}) \quad \textit{cuando } \varepsilon \longrightarrow +0. \tag{2.8}$$

Además,

$$\mu_n = \varepsilon(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \cdots + \varepsilon^n\beta_n), \quad \beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0), \quad a_0(p) = \frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)},$$

y los valores restantes de $\beta_1, \cdots, \beta_n$ *y las funciones* $a_1, \cdots, a_n$ *se determinan por los sistemas (2.19 - 2.22).*

Demostración. Se construirá una solución aproximada de

$$-\psi'' + \varepsilon V(x)\psi = E\psi, \tag{2.9}$$

ya sabemos (aunque será obtenido de este hecho) que en caso $\int V(x)dx < 0$ la energía $E = O(\varepsilon^2)$, $E = -\mu^2$.

Después de tomar la transformada de fourier de (2.9) se tiene

$$\begin{aligned}(\widetilde{-\psi''})(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ipx}(-\psi''(x))dx = (-ip)^2\tilde{\psi}(p) = -i^2p^2\tilde{\psi}(p)\\ &= -(-1)p^2\tilde{\psi}(p) = p^2\tilde{\psi}(p),\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}&(\widetilde{-\psi''})(p) = p^2\tilde{\psi}(p),\\ &(\widetilde{V(p)\psi(p)}) = (\widetilde{V\psi})(p) = (\tilde{V} * \tilde{\psi})(p) = \int \tilde{V}(p-p')\psi(p')dp',\end{aligned}$$

luego

$$(\varepsilon\widetilde{V(p)\psi(p)}) = \varepsilon\int \tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p')dp'.$$

Ahora

$$(\widetilde{E\psi})(p) = (-\widetilde{\mu^2\psi})(p) = -\mu^2\tilde{\psi}(p).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
p^2\tilde{\psi}(p) + \varepsilon \int \tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p')dp' &= -\mu^2\tilde{\psi}(p), \\
p^2\tilde{\psi}(p) + \mu^2\tilde{\psi}(p) &= -\varepsilon \int \tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p')dp', \\
\tilde{\psi}(p^2+\mu^2) &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p')dp', \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

donde la tilde denota transformada de Fourier. Para $x \notin Supp\ V(x)$ se tiene que $V(x) = 0$. Así que (2.10) se tiene que $-\psi'' = E\psi$ entonces $-\psi'' = -\mu^2\psi$ ya que $E = -\mu^2$. Luego $\psi'' - \mu^2\psi = 0$. Esta ecuación diferencial la podemos resolver de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\psi'' - \mu^2\psi &= 0, \\
m^2 - \mu^2 &= 0, \\
m^2 &= \mu^2, \\
m &= \sqrt{\mu^2}, \\
m &= \pm\mu.
\end{aligned}$$

La solución general de $\psi'' - \mu^2\psi = 0$ viene dada por $\psi(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$, luego $\psi(x) \sim Ce^{-\mu|x|}$.

La transformada de Fourier de $\psi(x) \sim e^{-\mu|x|}$ es

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(p') = (\widetilde{e^{-\mu|p'|}}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip'x} e^{-\mu|x|} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\int_{-\infty}^{0} e^{\mu x + ip'x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\mu x + ip'x} dx \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\int_{-\infty}^{0} e^{x(\mu + ip')} dx + \int_{0}^{\infty} e^{x(-\mu + ip')} dx \Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\Big[\frac{e^{x(\mu+ip')}}{\mu + ip'} \Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\frac{e^{x(-\mu+ip')}}{-\mu + ip'} \Big] \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{1}{\mu + ip'} - \frac{1}{-\mu + ip'} \Big),
\end{aligned}$$

ya que $e^{-\mu|x|}$ es una función de decrecimiento rápido

$$\tilde{\psi}(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\mu}{\mu^2 + (p')^2}.$$

Luego $(\widetilde{e^{-\mu|p'|}}) = \frac{\mu}{\mu^2+(p')^2}$.

La transformada de esta función es una sucesión de tipo δ. Un ejemplo importante de una sucesión delta es

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{m}{1 + m^2(p')^2}.$$

Sea $m = \frac{1}{\mu}$, entonces

$$S_m = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\mu}}{1 + (\frac{1}{\mu})^2 (p')^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\mu}}{1 + \frac{(p')^2}{\mu^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\mu^2 + (p')^2}{\mu^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{\mu^2}{\mu(\mu^2 + (p')^2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{\mu^2 + (p')^2}$$

luego $S_m(\mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{\mu^2+(p')^2}$.

Por definición se tiene que $\lim\limits_{\mu \longrightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{\mu^2+(p')^2} = \delta(x)$. Por tanto $(\widetilde{e^{-\mu|x|}})$ es una sucesión tipo δ.

Calculemos la integral $\frac{-\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{V}(p - p') \tilde{\psi}(p') dp'$.

Sea $x = p - p'$, entonces $p' = p - x$, luego $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{V}(x)\tilde{\psi}(p - x)dx =$
$-\varepsilon(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}) \int \tilde{V}(x)\tilde{\psi}(x - p)dx = -\varepsilon(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}})\tilde{V}(p)$.
Sea $C = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}$, luego $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{V}(p - p')\tilde{\psi}(p')dp' = -\varepsilon C\tilde{V}(p)$. Por consiguiente de $\tilde{\psi}(p)(p^2 + u^2) = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{V}(p - p')\tilde{\psi}(p')dp'$, se tiene que $\tilde{\psi}(p)(p^2 + u^2) = -\varepsilon C\tilde{v}(p)$, de donde $\tilde{\psi}(p) = \frac{-\varepsilon C\tilde{V}(p)}{p^2+u^2}$.
Sea $Const = -\varepsilon C$ y $A(p) = \tilde{V}(p)$, que es una función de $S(\mathbb{R})$ (por las propiedades de la transformada de fourier), luego

$$\tilde{\psi}(p) = const\frac{A(p)}{p^2 + u^2}, \tag{2.11}$$

como $E = -\mu^2$ de (2.10), se tiene

$$(p^2 - E)\tilde{\psi}(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p - p')\tilde{\psi}(p')dp'. \tag{2.12}$$

Se busca la solución aproximada de la ecuación (2.12) como lo sugiere (2.11), es decir, en la forma

$$\tilde{\psi}(p) = \varepsilon B_n \frac{A_n(p)}{p^2 + \varepsilon^2 B_n^2} \tag{2.13}$$

con $A_n(p) = a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \cdots + \varepsilon^n a_n(p)$ para buscar la asintótica respecto a ε, suponiendo que $a_0(p) \neq 0$. Sea

$$B_n = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \cdots + \varepsilon^n\beta_n. \tag{2.14}$$

El nivel de energía aproximada es

$$E_n = -\varepsilon^2 B_n^2. \tag{2.15}$$

Se buscará la solución que satisface las condiciones de normalización

$$a_0(0) = 1, \quad a_k(0) = 0, \quad k = 2, \cdots, n. \tag{2.16}$$

El objetivo es construir tales valores de $\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n$ y funciones $a_o(p), \cdots, a_n(p)$ tal que $\tilde{\psi}_n(p)$ satisfaga la ecuación (2.12) hasta un orden

$O(\varepsilon^{n+2})$,

donde $\|O(\varepsilon^{n+2})\| \leq Const\ \varepsilon^{n+2}$.

Sustituyendo (2.13) y (2.15) en (2.12) se obtiene una ecuación equivalente

$$
\begin{aligned}
(p^2 - E)\tilde{\psi}(p) &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\tilde{\psi}(p')dp', \\
[p^2 - (-\varepsilon^2 B_n^2)]\Big(\varepsilon B_n \frac{A_n(p)}{p^2 + \varepsilon^2 B_n^2}\Big) &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\Big(\varepsilon B_n \frac{A_n(p')}{(p')^2 + \varepsilon^2 B_n^2}\Big)dp', \\
(p^2 + \varepsilon^2 B_n^2)\Big(\varepsilon B_n \frac{A_n(p)}{p^2 + \varepsilon^2 B_n^2}\Big) &= -\frac{\varepsilon^2 B_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\Big(\frac{A_n(p')}{(p')^2 + \varepsilon^2 B_n^2}\Big)dp', \\
\varepsilon B_n A_n(p) &= -\frac{\varepsilon^2 B_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\Big(\frac{A_n(p')}{(p')^2 + \varepsilon^2 B_n^2}\Big)dp'.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Desarrollando el lado izquierdo de (2.17) en ε y usando (2.13) y (2.14)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon B_n A_n(p) &= \varepsilon(\beta_o + \varepsilon\beta_1 + \cdots + \varepsilon^n \beta_n)(a_o(p) + \varepsilon a_1(p) + \cdots + \varepsilon^n a_n(p)) \\
&= \varepsilon\beta_o a_o(p) + \varepsilon^2 \beta_o a_1(p) + \cdots + \varepsilon^{n+1}\beta_o a_n(p) \\
&+ \varepsilon^2 \beta_1 a_o(p) + \varepsilon^3 \beta_1 a_1(p) + \cdots + \varepsilon^{n+2}\beta_1 a_n(p) \\
&\vdots \\
&+ \varepsilon^{n+1}\beta_n a_o(p) + \varepsilon^{n+2}\beta_n a_1(p) + \cdots + \varepsilon^{2n+1}\beta_n a_n(p) \\
&= \varepsilon\beta_o a_o(p) + \varepsilon^2(\beta_o a_1(p) + \beta_1 a_o(p)) \\
&+ \varepsilon^3(\beta_o a_2(p) + \beta_1 a_1(p) + \beta_2 a_o(p)) + \cdots \\
&+ \varepsilon^{n+1}(\beta_o a_n(p) + \cdots + \beta_n a_o(p)) + \varepsilon^{n+2}(\beta_1 a_n(p) + \cdots \\
&+ \beta_n a_1(p)) + \varepsilon^{n+2}(\varepsilon\beta_n a_2(p) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\beta_n a_n(p)) \\
&= \varepsilon\beta_o a_o(p) + \varepsilon^2(\beta_o a_1(p) + \beta_1 a_o(p)) + \varepsilon^3(\beta_o a_2(p) + \beta_1 a_1(p) \\
&+ \beta_2 a_o(p)) + \cdots + \varepsilon^{n+1}(\beta_o a_n(p) + \cdots + \beta_n a_o(p)) \\
&+ \varepsilon^{n+2}[(\beta_1 a_n(p) + \cdots + \beta_n a_1(p)) + (\varepsilon\beta_n a_2(p) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\beta_n a_n(p))].
\end{aligned}
$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon^k \Big(\sum_{i=0}^{k} \beta_i a_{k-i}(p) \Big) + \varepsilon^{n+2} R_{n+2}(\varepsilon, \overline{\beta}, \overline{a}), \tag{2.18}$$

donde $\overline{\beta} = (\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n)$, $\overline{a} = (a_o, a_1, \cdots, a_n)$ y $R_{n+2}(\bullet, \bullet, \bullet) = \beta_1 a_n(p) + \cdots + \beta_n a_1(p) + \varepsilon \beta_n a_2(p) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \beta_n a_n(p)$ es el polinomio en sus argumentos.

Sustituyendo en lema (2.2), $\mu = \varepsilon B_n$, $\phi(t) = \varepsilon B_n \tilde{V}(p-t) A_n(t)$ y calculando los coeficientes de ε^0, ε^1, ε^2 y observando también como figuran $\beta_o, \cdots, \beta_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ en los coeficientes enteros de ε^n, se obtiene el desarrollo de la integral en el lado derecho de la ecuación (2.17)

$$\varepsilon B_n \int_{\mathbf{R}} \frac{\tilde{V}(p-t) A_n(t) dt}{t^2 + \varepsilon^2 B_n^2} = \pi a_o(0) \tilde{V}(p) - \varepsilon \pi \Big\{ \beta_o \Big[i a_o(0) \tilde{V}'(p) - i a_o'(0) \tilde{V}(p)$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_o(t) dt \Big] - a_1(0) \tilde{V}(p) \Big\}$$

$$- \varepsilon^2 \pi \Big\{ \beta_o \Big[i a_1(0) \tilde{V}'(p) - i a_1'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_1(t) dt \Big] +$$

$$\beta_o^2 \Big[\frac{1}{2} a_o(0) \tilde{V}''(p) - a_o'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_o''(0) \tilde{V}(p) \Big]$$

$$+ \beta_1 \Big[i a_o(0) \tilde{V}'(p) - i a_o'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_o(t) dt \Big] - a_2(0) \tilde{V}(p) \Big\}$$

$$+ \cdots$$

$$- \varepsilon^n \pi \Big\{ \beta_o \Big[i a_{n-1}(0) \tilde{V}'(p) - i a_{n-1}'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_{n-1}(t) dt \Big] +$$

$$\beta_o^2 \Big[\frac{1}{2} a_{n-2}(0) \tilde{V}''(p) - a_{n-2}'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_{n-2}''(0) \tilde{V}(p) \Big]$$

$$+ \beta_1 \Big[i a_{n-2}(0) \tilde{V}'(p) - i a_{n-2}'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_{n-2}(t) dt \Big] + \cdots +$$

$$+ \beta_{n-1} \Big[i a_o(0) \tilde{V}'(p) - i a_o'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_o(t) dt \Big]$$

$$- a_n(0) \tilde{V}(p) \Big\} + \varepsilon^{n+1} S_{n+1}(p, \varepsilon, \overline{\beta}, \overline{a})$$

donde $S_{n+1}(p, \varepsilon, \overline{\beta}, \overline{a}) = \int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t) A_n(t) P_{n+1}(t, \varepsilon, \overline{\beta})}{t^{m(n)}(t^2 - \varepsilon^2 B_n^2)} dt +$

28

$\int_0^1 Q_{n+1}(t,\varepsilon,\overline{\beta})\frac{\partial^{n+1}}{\partial T^{n+1}}(\tilde{V}(p-t)A_n(t))|_{T=it\varepsilon B_n}dt$, $P_{n+1}(\bullet,\bullet,\bullet)$, $Q_{n+1}(\bullet,\bullet,\bullet)$ son polinomios de sus argumentos, $m(n)\in\mathbb{N}$ y $m(n)\longrightarrow\infty$ cuando $n\longrightarrow\infty$.

Multiplicando la expresión obtenida por $\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{-\varepsilon^2B_n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\tilde{V}(p-t)A_n(t)dt}{t^2+\varepsilon^2B_n^2}=\\
&\Big(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\Big)\pi a_o(0)\tilde{V}(p)+\varepsilon\pi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\Big)\Big\{\beta_o\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)\\
&-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]-a_1(0)\tilde{V}(p)\Big\}\\
&+\Big(\frac{\varepsilon^3\pi}{\sqrt{2\pi}}\Big)\Big\{\beta_o\Big[ia_1(0)\tilde{V}'(p)-ia_1'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_1(t)dt\Big]\\
&+\beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_o(0)\tilde{V}''(p)-a_o'(0)\tilde{V}'(p)+\frac{1}{2}a_o''(0)\tilde{V}(p)\Big]\\
&+\beta_1\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]\\
&-a_2(0)\tilde{V}(p)\Big\}+\cdots\\
&\Big(\frac{\varepsilon^{n+1}\pi}{\sqrt{2\pi}}\Big)\Big\{\beta_o\Big[ia_{n-1}(0)\tilde{V}'(p)-ia_{n-1}'(0)\tilde{V}(p)\\
&-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-1}(t)dt\Big]+\\
&\beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_{n-2}(0)\tilde{V}''(p)-a_{n-2}'(0)\tilde{V}'(p)+\frac{1}{2}a_{n-2}''(0)\tilde{V}(p)\Big]\\
&+\beta_1\Big[ia_{n-2}(0)\tilde{V}'(p)-ia_{n-2}'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-2}(t)dt\Big]\\
&+\cdots+\\
&+\beta_{n-1}\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]\\
&-a_n(0)\tilde{V}(p)\Big\}.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon B_nA_n(p)=-\frac{\varepsilon^2B_n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\tilde{V}(p-p')A_n(p')}{(p')^2+\varepsilon^2B_n^2}dp'$, donde $A_n(p)=a_o(p)+\varepsilon a_1(p)+\cdots\varepsilon^na_n(p)$ y $B_n=\beta_o+\varepsilon\beta_1+\cdots+\varepsilon^n\beta_n$, luego $\varepsilon\beta_oa_o(p)+\varepsilon^2(\beta_oa_1(p)+$

$$\beta_1 a_o(p))+\varepsilon^3(\beta_0 a_2(p)+\beta_1 a_1(p)+\beta_2 a_o(p))+\cdots+\varepsilon^{n+1}(\beta_o a_n(p)+\cdots+\beta_n a_o(p))$$

$$= -\varepsilon\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_o(0)\tilde{V}(p)+\varepsilon^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]-a_1(0)\tilde{V}(p)\Big\}$$

$$+\varepsilon^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_1(0)\tilde{V}'(p)-ia_1'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_1(t)dt\Big]+$$

$$\beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_o(0)\tilde{V}''(p)-a_o'(0)\tilde{V}'(p)+\frac{1}{2}a_o''(0)\tilde{V}(p)\Big]$$

$$+\beta_1\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]-a_2(0)\tilde{V}(p)\Big\}+\cdots$$

$$\varepsilon^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_{n-1}(0)\tilde{V}'(p)-ia_{n-1}'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-1}(t)dt\Big]+$$

$$\beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_{n-2}(0)\tilde{V}''(p)-a_{n-2}'(0)\tilde{V}'(p)+\frac{1}{2}a_{n-2}''(0)\tilde{V}(p)\Big]$$

$$+\beta_1\Big[ia_{n-2}(0)\tilde{V}'(p)-ia_{n-2}'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-2}(t)dt\Big]+\cdots+$$

$$+\beta_{n-1}\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]-a_n(0)\tilde{V}(p)\Big\}.$$

Igualando los coeficientes de ε^k, $k=1,2,\cdots,n+1$, obtenemos el sistema para β_k, a_k, $k=0,1,\cdots,n$.

$$\beta_o a_o(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_o(0)\tilde{V}(p), \tag{2.19}$$

$$\beta_o a_1(p)+\beta_1 a_o(p)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p)-ia_o'(0)\tilde{V}(p)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]-a_1(0)\tilde{V}(p)\Big\}, \tag{2.20}$$

$$\beta_o a_2(p) + \beta_1 a_1(p) + \beta_2 a_o(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_1(0)\tilde{V}'(p) - ia_1'(0)\tilde{V}(p)$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_{r_1} \frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2} a_1(t)dt\Big]$$
$$+ \beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_o(0)\tilde{V}''(p) - a_o'(0)\tilde{V}'(p) + \frac{1}{2}a_o''(0)\tilde{V}(p)\Big]$$
$$+ \beta_1\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p) - ia_o'(0)\tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big]$$
$$- a_2(0)\tilde{V}(p)\Big\}, \tag{2.21}$$

$$\cdots$$

$$\beta_o a_n(p) + \beta_1 a_{n-1}(p) + \cdots + \beta_{n-1}a_1(p) + \beta_n a_o(p) =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_{n-1}(0)\tilde{V}'(p) - ia_{n-1}'(0)\tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-1}(t)dt\Big]$$
$$\beta_o^2\Big[\frac{1}{2}a_{n-2}(0)\tilde{V}''(p) - a_{n-2}'(0)\tilde{V}'(p) + \frac{1}{2}a_{n-2}''(0)\tilde{V}(p)\Big]$$
$$+ \beta_1\Big[ia_{n-2}(0)\tilde{V}'(p) - ia_{n-2}'(0)\tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_{n-2}(t)dt\Big] + \cdots$$
$$+ \beta_{n-1}\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p) - ia_o'(0)\tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big] - a_n(0)\tilde{V}(p)\Big\}. \tag{2.22}$$

El sistema (2.19) - (2.22) tiene solución única bajo las condiciones $a_o(0) = 1$, $a_k(0) = 0$ $k = 2, \cdots, n$ y sus soluciones $a_o, \cdots, a_n$ pertenecen a $S(\mathbb{R})$. En efecto, tomando $p = 0$ en (2.19) se tiene $\beta_o a_o(0) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}a_o(0)\tilde{V}(0)$ y teniendo en cuenta que por (2.5) $\tilde{V}(0) \neq 0$ se obtiene

$$\beta_o = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \tilde{V}(0) \quad ya\ que\ a_o(0) = 1. \tag{2.23}$$

Como $\beta_o a_o(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_o(0)\tilde{V}(p)$ y $\beta_o = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \tilde{V}(p)$, luego

$$\Big(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \tilde{V}(0)\Big)a_o(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0(0)\tilde{V}(p),$$

$$a_o(p)\tilde{V}(0) = \tilde{V}(p),$$

$$a_o(p) = \frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)}, \tag{2.24}$$

fijemos $p = 0$ en (2.20), por (2.24) y la condición $a_1(0) = 0$

$$\beta_o a_1(0) + \beta_1 a_o(0) =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(0) - ia_o'(0)\tilde{V}(0) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big] - a_1(0)\tilde{V}(0)\Big\},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[i\tilde{V}'(0) - ia_o'(0)\tilde{V}(0) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)}{t^2}\frac{\tilde{V}(t)}{\tilde{V}(0)}dt\Big]\Big\},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0)\Big[ia_o'(0)\tilde{V}(0) - ia_o'(0)\tilde{V}(0) - \frac{1}{\pi\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt\Big]\Big\},$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0)\Big[-\frac{1}{\pi\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt\Big]\Big\},$$

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{2}\tilde{V}(0)\Big[-\frac{1}{\pi\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt\Big],$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt. \tag{2.25}$$

Ahora se encuentra $a_1(p)$ de (2.20). Sustituyendo (2.23), (2.24) y (2.25) en

(2.20) y teniendo en cuenta el hecho de que $a_o(0) = 1$, se obtiene

$$\Big(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\tilde{V}(0)\Big)a_1(p) + \frac{1}{2}a_o(p)\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[ia_o(0)\tilde{V}'(p) - ia_o'(0)\tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}a_o(t)dt\Big] - a_1(0)\tilde{V}(p)\Big\}$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0))a_1(p) + \frac{1}{2}\frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0)\Big[i\tilde{V}'(p) - i\frac{\tilde{V}'(0)\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)} - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)}{t^2}\frac{\tilde{V}(t)}{\tilde{V}(0)}dt\Big] - a_1(0)\tilde{V}(p)\Big\}$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0)a_1(p) + \frac{1}{2}\frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[\tilde{V}'(0)\tilde{V}(p) - \tilde{V}'(p)\tilde{V}(0)\Big] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt\Big\}$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0)a_1(p) =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[\tilde{V}'(0)\tilde{V}(p) - \tilde{V}'(p)\tilde{V}(0)\Big] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt\Big\}$$

$$-\frac{\tilde{V}(p)}{2\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt$$

$$a_1(p) = \frac{-i}{\tilde{V}(0)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[\tilde{V}'(0)\tilde{V}(p) - \tilde{V}'(p)\tilde{V}(0)\Big] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt$$

$$+\frac{\tilde{V}(p)}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)^2}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt$$

$$a_1(p) = \frac{-i}{\tilde{V}(0)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[\tilde{V}'(p)\tilde{V}(0) - \tilde{V}'(0)\tilde{V}(p)\Big] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt$$

$$+\frac{\tilde{V}(p)}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)^2}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)\tilde{V}(t)}{t^2}dt. \tag{2.26}$$

Se observa de hecho que $a_1(0) = 0$. Procediendo análogamente, se obtiene β_n y a_n suponiendo que se conoce $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}, a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}$ y que $a_k(0) = 0$, $k = 2, \cdots, n-1$. Se busca $a_n(p)$ tal que $a_n(0) = 0$. Tomando

$p = 0$ en (2.22) y tomando en cuenta el hecho de que $a_o(0) = 1$, se obtiene

$$\beta_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big\{\beta_o\Big[-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}a'_{n-1}(0)\tilde{V}(0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(-t)a_{n-1}(t)}{t^2}dt\Big] + \cdots$$
$$+ \beta_{n-1}\Big[i\tilde{V}'(0) - ia'_o(0)\tilde{V}(0) - \frac{1}{\pi}\int_{r_1}\frac{\tilde{V}(p-t)a_o(t)}{t^2}dt\Big]\Big\},$$

esto es, β_n se determina de forma única. Sustituyendo la última expresión y $\beta_o, \cdots, \beta_{n-1}, a_o, \cdots, a_{n-1}$ en (2.22) se ve que $a_n(p)$ se determina de forma única puesto que $\beta_o \neq 0$. Por tanto el sistema (2.19) - (2.22) tiene solución única. ★

Demostración de que las $a_k \in S(R)$.

Para $k = 0, a_0(p) \in S(R)$ ya que $\widetilde{V}(p) \in S(R)$.

Para la función a_1, la afirmación se sigue de (2.26), la desigualdad de Peetre

$$(1+ |\, \theta\, |^2)^s \leq 2^{|s|}(1+ |\, \theta - \theta'|^2)^{|s|}(1+ |\, \theta'|^2)^s,$$

para todo θ y s en R, y la condición $\widetilde{V}(p-z) \in S(R_+)$. El primero y el tercer sumando en el lado derecho de (2.26) pertenecen a $S(R)$ porque $\widetilde{V}$ y $\widetilde{V}'$ pertenecen a $S(R)$. Veamos que el segundo sumando de (2.26) pertenece a $S(R)$. De la condición $\widetilde{V} \in S$, para $N \in \mathbb{N}$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}\Big|\partial_p^k \int_{r_1}\frac{\widetilde{V}(z)\widetilde{V}(p-z)dz}{z^2}\Big| &= \Big|\int_{r_1}\frac{\widetilde{V}(z)\partial_p^k\widetilde{V}(p-z)dz}{z^2}\Big| \\ &\leq \int_{r_1}\frac{|\widetilde{V}(z)\partial_p^k\widetilde{V}(p-z)dz|}{|\, z\,|^2} \qquad (2.27) \\ &\leq C_{K,N}\int_{r_1}\frac{|\, dz\,|}{(1+|\, z\,|^2)^N(1+|\, p-z\,|^2)^N}\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Peetre para $s = N, \theta = p$, y $\theta' = z$, obtenemos la afirmación deseada de (2.27).

Las afirmaciones correspondientes para a_k con $k > 1$, se demuestran análogamente ya que las a_k tienen terminos que son combinaciones lineales de $\widetilde{V'}(p)$ y $\widetilde{V}(p)$, además terminos de combinaciones lineales de integrales de la forma $\int_{r_1} \frac{\widetilde{V}(z)\widetilde{V}(p-z)dz}{z^2}$ y $\int_{r_1} \frac{\widetilde{V}(z)\widetilde{V}(-z)dz}{z^2}$. Esto demuestra que $a_k \in S(R)$ para $k > 1$.

La función $\widetilde{\psi}(p)$ de (2.13) resuelve la ecuación (2.12) con E_n determinado de (2.15),(2.14) hasta $O(\varepsilon^{n+2})$. Más exactamente,

$$A_\varepsilon \psi_n = E_n \psi_n + O(\varepsilon^{n+2}), \tag{2.28}$$

donde $A_\varepsilon = -\Delta + \varepsilon V$ es el operador de Schrödinger (2.1) y $O(\varepsilon^{n+2})$ se entiende en el sentido de la L_2-norma.

La energía E es el valor propio aislado del operador de Schrödinger A_ε; considerando el semieje $[0, \infty)$ y el nivel de energia aproximado $\mid E_n \mid$.
De (2.7) de $\beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widetilde{V}(0)$, $a_0(p) = \frac{\widetilde{V}(p)}{\widetilde{V}(0)}$, (2.5) se sigue que

$$C_1 \varepsilon^2 \leq \mid E_n \mid \leq C_2 \varepsilon^2, C_{1,2} > 0. \tag{2.29}$$

De (2.28) y (2.29) se sigue que

$$\| \psi_n - \langle \psi_n - \psi \rangle \psi \| \leq C\varepsilon^{n+1/2}, \tag{2.30}$$

donde $\langle \psi_n, \psi \rangle$ significa el producto escalar en L_2.
Sea $C = \langle \psi_n, \psi \rangle$, por desigualdad de Schwarz y
$\| \psi \| = 1 + O(\varepsilon^{n+1}) \quad \mid c \mid \leq 1 + O(\varepsilon^{n+1})$. De esta desigualdad y de (2.30) obtenemos

35

$$
\begin{aligned}
\| \psi_n - \psi \| &= \| \psi_n - C\psi + C\psi - \psi \| \\
&\leq O(\varepsilon^{n+1/2}) + | C - 1 | \\
&\leq O(\varepsilon^{n+1/2}).
\end{aligned}
$$

Así, esto completa la prueba del teorema 2.1.

36

Bibliografía

[1] P. Zhevandrov, A. Merzon, shallow potential wells for the schrödinger equation and water waves, Morfismos, Vol. 6, Págs. 1-13, (2002).

[2] A.-S. Bonnet- Ben Dhia, P. Joly, Mathematical analysis of guided water waves, SIAM J. Appl. Math., Vol. 53, págs. 1507-1550, (1993).

[3] C. Eckart, Phys. Rev., Vol. 28, pág. 711, (1926).

[4] R.Grimshaw,Edge waves: a long-waves theory for oceans of finite depth, J. Fluid Mech.,vol.62, págs. 775-791, (1974).

[5] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Quantum Mechanics (Pergamon. London, Sec.45), (1958).

[6] V.P. Maslov, Asymptotic Methods y theory of perturbations, Nauka, Moscow, pág. 23, (1988).

[7] B. Simón, The bound state of weakly coupled Schrödinger operator in one y two dimensions, Ann. Phys. (NY), Vol. 97, págs. 279-288, (1976).

[8] E. Schrödinger, Ann. Phys., Vol. 79, pág. 234, (1926).

[9] P. Zhevandrov, Edge waves on a gently sloping beach: uniform Asymptotics, J. Fluid Mech., Vol. 233, págs. 483-493, (1991).