# TEORIA DE CONVOLUCION

RAFAEL S. LLERENA P.

MONOGRAFIA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TITULO DE MATEMÁTICO

ASESOR
DOCTOR EN MATEMATICAS RUBEN D. ORTIZ ORTIZ



UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMATICAS
CARTAGENA D. T. Y C.
2008

*Dedicado a la memoria de Rafael I. LLerena V.*

# AGRADECIMIENTOS

*A Margarita y Silvia por su amor y paciencia.*

*A todos los que una y otra forma contribuyerón a mi desarrollo personal, intelectual y espiritual, gracias por su apoyo, consejos y\o criticas.*

# Índice

S

# 1. *INTRODUCCION*

En matemáticas, y en particular análisis funcional, una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones $f$ y $g$ en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen, $f$ y una versión trasladada e invertida de $g$. Una convolución es un tipo muy general de un promedio móvil, como se puede observar si una de las funciones es tomada como la función característica de un intervalo.

La convolución es un operador que surgió de manera natural en la solución de ecuaciones diferenciales e integrales usadas en diferentes campos del conocimiento que abarcan teorías que van desde la estadística hasta la física, pasando por la ingeniería eléctrica, el análisis armónico, el calculo y teoría de grupos. En todas estas disciplinas aparecía un modelo de integral de tipo convolutorio en la cual una función estaba trasladada e invertida.

No se conoce el instante exacto ni el autor que definió por primera vez la convolución pero desde su aparición se ha usado y redefinido en cada campo donde se requiere de tal forma que, manteniendo la estructura, existen versiones de la convolución dadas por Weyl, Haussdorff, Lie, Borel, Dirichlet y otros. En el proceso de aplicación de este concepto se fueron desarrollando teorías y aplicaciones, de forma tal que usando la convolución como operación binaria se han definido espacios vectoriales, grupos y distintas clases de estructuras algebraicas que han ayudado al desarrollo de las matemáticas tanto puras como aplicadas.

En esta monografía se pretende hacer un compendio de los conceptos relacionados con la convolución, las propiedades y aplicaciones. El objetivo general es buscar y sintetizar el material, que permita un manejo eficaz de la convolución y así desarrollar o analizar diferentes teorías que tiene a la convolución como base.

Este trabajo se desarrollo definiendo primero los conceptos básicos que son prerrequisitos para explicar la convolución y los teoremas en los cuales interviene, luego se demuestra el teorema principal para la convolución mediante el uso de la transformada De Laplace, que se muestra puede extenderse a otros tipos de transformadas. Por ultimo se muestran algunas aplicaciones y versiones distintas del teorema.

# 2. *PRELIMINARES*

## 2.1. *Distribuciones*

En análisis matemático, las distribuciones (también llamadas funciones generalizadas) son objetos que generalizan funciones y distribuciones de probabilidad. Esta extienden el concepto de derivada a todos las funciones integrales y son usadas para formular soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales parciales. Son de gran importancia en física e ingeniería donde muchos problemas no cotidianos llevan naturalmente a ecuaciones diferenciales muchas soluciones son distribuciones, como la distribución delta de Dirac.

## 2.2. *Idea Básica*

La idea básica es identificar las funciones con funcionales lineales abstractos en el espacio de las funciones de prueba. Los operadores en las distribuciones se pueden extender al ser trasladados a funciones de prueba.
Por ejemplo, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y sea
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave (infinitamente derivable) con soporte compacto (la cual es idénticamente nula fuera de algún conjunto acotado).
La función $\varphi$ es la función de prueba. Denotamos

$$< f, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx.$$

Este es un número real, el cual es lineal y continuamente dependiente de $\varphi$. Se puede pensar entonces que $f$ es un funcional lineal continuo en el espacio de las funciones de prueba.

Similarmente, si $\mathcal{P}$ es una distribución de probabilidad en los reales y $\varphi$ es una función de prueba, entonces

$$< \mathcal{P}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}\varphi dx.$$

Es un número real, el cual es lineal y continuamente dependiente de $\varphi$. Las distribuciones pueden ser multiplicadas con números reales y pueden ser sumadas, por lo tanto forman un espacio vectorial real. En general, *no es posible definir la multiplicación para distribuciones*, pero pueden multiplicarse con funciones infinitamente derivables.

Para definir la derivada de una distribución, debemos considerar el caso de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable e integrable. Si $\varphi$ es una función de prueba, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f'\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' dx.$$

Usando integración por partes (notese que $\varphi$ es cero fuera de un conjunto acotado y que por lo tanto ningún valor acotado será tomado en cuenta). Esto sugiere que si $\mathcal{S}$ es una distribución, se debe definir su derivada $\mathcal{S}'$ por

$$\langle \mathcal{S}', \varphi \rangle = \langle \mathcal{S}, \dot{\varphi}' \rangle.$$

Esto es obvio y consecuencia de la función, extendiendo la definición ordinaria de derivada, cada distribución se vuelve infinitamente diferenciable y las propiedades usuales de la derivada son válidas.

***Definición 2.1.*** ***La Delta De Dirac*** *(también llamada función Delta de Dirac) es la distribución definida por la relación*

$$< \delta, \varphi >= \varphi(0).$$

*Esta es la derivada de la función unitaria de Heaviside. En efecto, para cualquier función de prueba $\varphi$*

$$\begin{aligned} < H', \varphi > &= - < H, \varphi' >= - \int_{\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= - \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) - \varphi(\infty) \\ &= \varphi(0) =< \delta, \varphi > \end{aligned}$$

*Así $H' = \delta$, y $\varphi(\infty) = 0$, a causa del soporte compacto. Similarmente, la derivada de la Delta de Dirac es la distribución*

$$\delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$$

*Esto es un ejemplo de una distribución la cual no es una función o una distribución de probabilidad.*

***Definición 2.2. Soporte De Una Distribución:*** *Sea $U, V$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con $V \subseteq U$. Sea $E_{VU} : D(V) \to D(U)$ el operador que extiende una función de soporte compacto en $V$ a una función de soporte compacto en $U$, la restricción $\mathcal{P}_{VU}$ es la transpuesta de $E_{VU}$ definida por*

$$\langle \mathcal{P}_{VU}\mathcal{S}, \phi \rangle = \langle \mathcal{S}, E_{VU} \rangle,$$

*para todo $\phi$ en $D(V)$. Sea $\mathcal{S} \in D(u)$ una entonces se dice que $\mathcal{S}$se anula en un conjunto $V \subset U$ si $\mathcal{S}$ esta en el núcleo del mapeo restricción $\mathcal{P}_{VU}$. Explícitamente $\mathcal{S}$ se anula en $V$ si*

$$\langle \mathcal{S}, \varphi \rangle = 0,$$

*para todo $\varphi$ en $C^{\infty}(U)$ con soporte en $V$. Sea $V$ el conjunto abierto maximal en el cual la distribución $\mathcal{S}$ se anula, esto es $V$ es la unión de todos los conjuntos abiertos* *en los cuales $\mathcal{S}$ se anula. El soporte de $\mathcal{S}$ denotado sop$\mathcal{S}$ es el complemento de $v$ en $U$. Por tanto*

$$sop\mathcal{S} = U - \cup\{V/\mathcal{P}_{VU}\mathcal{S} = 0\}.$$

*Se dice que la distribución $\mathcal{S}$ tiene soporte compacto si su soporte es un conjunto compacto. Explícitamente, $\mathcal{S}$ tiene soporte compacto si existe un subconjunto compacto $K$ de $U$ tal que para cada función de prueba $\varphi$ cuyo soporte esta completamente fuera de $K$ tenemos que $\mathcal{S}(\varphi) = 0$. Las distribuciones de soporte compacto definen funciones continuas lineales en el espacio $C^{\infty}(U)$. La topología en $C^{\infty}(U)$ esta definida de tal forma que $\varphi_k$ converge a cero si y solo si todas las derivadas de $\varphi_k$ convergen uniformemente a cero en cada subconjunto compacto de $U$.*

**Lema 2.1.** *Todo funcional lineal continuo en el espacio $C^{\infty}(U)$ define una distribución de soporte compacto.*

## 2.3. *Transformadas*

### 2.3.1. *Transformada de Laplace*

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ definida para todos los números reales $t \geq 0$ es la función $F(s)$ definida por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

siempre y cuando la integral este definida.
El limite inferior de $0^-$ es una notación breve que significa

$$\lim_{\varepsilon \to o^-} \int_{-\varepsilon}^{\infty}$$

y asegura la inclusión de la función Delta de Dirac $\delta(t)$ en el cero, si extiende un impulso de $f(t)$ en cero.

El parámetro $s$ es en general un numero complejo $s = \sigma + i\omega$. Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la hacen muy útil en el análisis de sistemas lineales, la ventaja más significativa radica en que la integración y la derivación se convierten en multiplicación y división por $s$. Esto permite transformar las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, más fáciles de resolver. Ya resueltas se utiliza la transformada inversa de Laplace para revertir en el dominio del tiempo.

***Definición* 2.3. *Transformada bilateral de Laplace:*** *Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También es posible definir en forma alterna la transformada bilateral De Laplace extendiendo los límites de integración a todo el eje real. De este modo la transformada unilateral se convierte en un caso especial de la transformada bilateral donde la función que será transformada multiplicada por la función unitaria de Heaviside. La transformada bilateral de Laplace se define por la integral*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

***Definición* 2.4. *Transformada inversa de Laplace:*** *La transformada inversa de laplace esta dada por la siguiente integral compleja*

$$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-st} F(s)ds.$$

*Donde $\gamma$ es un número real, tal que el camino de integración esta en la región de convergencia de $F(s)$ para lo cual se requiere normalmente $\gamma > Re(s_{\mathcal{P}})$ para todas las singularidades $s_{\mathcal{P}}$ de $i^2 = -1$. Si para todas las singularidades están en el semiplano* *izquierdo, esto es para toda $Re(s_{\mathcal{P}}) < 0$, entonces $\gamma$ puede igualarse a cero y la anterior integral inversa se convierte en la transformada inversa de Fourier.*

***Lema 2.2.*** *PROPIEDADES*

- *Linealidad:*

$$\mathcal{L}\{af(w) + bg(w)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},$$

*Siendo a,b constantes arbitrarias y $f(w), g(w)$ las transformadas de Laplace de $f(t), g(t)$.*

- *Potencia n-esima:*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{S^{n+1}},$$

*si n es un número natural.*

Estas propiedades y otras más son también válidas para la transformada inversa de Laplace

### 2.3.2. *Transformada de Fourier*

***Definición 2.5.*** *Sea $f$ una función Lebesgue integrable, esto es $f \in L^1(\mathbb{R})$ ó $f \in L^1(\mathbb{C})$, la transformada de Fourier es la función*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

*Esta integral tiene sentido, pues el integrado es una función integrable. Por medio de una desigualdad sencilla se demuestra que la transformada de Fourier $F(t)$ es una función acotada. Además el teorema de convergencia dominada demuestra que $F(f)$ es continua.*

La trasformada de Fourier así definida goza de una serie de propiedades de continuidad que garantizan que puede extenderse a espacios de funciones mayores e incluso a espacios de funciones generalizadas. Son varias las notaciones, para la transformada entre ellas $\mathfrak{F}[f]$, $\hat{\mathrm{f}}$, $F(f)$.

***Definición* 2.6. *Transformada inversa de Fourier*:** *Sea $f$ una función Lebesgue integrable, se define*

$$\mathfrak{F}^{-1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

*Notese que la única diferencia entre la transformada y la transformada inversa es el signo negativo en el exponente del integrado.*

## 2.4. *Relación entre la transformada de Laplace y otras transformadas*

### 2.4.1. *Transformada de Fourier*

La transformada de Fourier es equivalente a la evaluación de la transformada bilateral de Laplace con argumentos complejo $s = iw$ ó $s = 2\pi f_i$. Así tenemos

$$\begin{aligned} F(w) &= \mathfrak{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_s = iw \\ &= F(s)|_s = iw = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt} f(t) dt. \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión excluye el factor escalar $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ que es a menudo incluido en la transformada de Fourier.

### 2.4.2. *Transformada de Mellin*

La transformada de Mellin y su inversa se relaciona con la transformada bilateral de Laplace por un simple cambio de variable. Consideremos la trasformada de Mellin

$$G(s) = \mathcal{M}\{g(\theta)\} = \int_0^\infty \theta^s g(\theta) \frac{d\theta}{\theta},$$

haciendo $\theta = e^{-t}$ obtenemos la transformada bilateral de Laplace.

### 2.4.3. *Transformada Z*

La transformada Z es simplemente la transformada De Laplace de una señal idealmente vibrada, obtenida con la sustitución $Z = e^{sT}$ donde $T = 1/f_s$ es el periodo de vibración y $f_s$ es la frecuencia la relación, la relación estará dada por

$$X_q(s) = \int_{o^-}^\infty x_q(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty x[n]e^{-nsT} = X(z)|_{z=e^{sT}},$$

donde $x_q(t) = x(t)\Delta_T(t) = x(t)\sum_{n=0}^\infty \delta(t-nT)$.

### 2.4.4. *Transformada de Borel*

Es idéntica a la transformada de Laplace, por lo que muchas veces se confunden. La transformada generalizada de Borel extiende la definición de la transformada de Laplace a funciones que no son de orden exponencial.

Dado que la transformada unilateral de Laplace es un caso especial de la transformada bilateral De Laplace y que esta se puede expresar como transformada de Fourier, Mellin, Borel o transformada Z, los resultados obtenidos en la teoría de Laplace son validos para cada una de las otras transformadas.

16

# 3. *TEORIA DE CONVOLUCIONES*

***Definición* 3.1.** *Sean $f$ y $g$ funciones, la convulsión de $f$ y $g$ se denota por $f * g$ y se define como la integral*

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

*Aunque el símbolo $t$ es usado, esto no representa el dominio en el tiempo.*

Más generalmente, si $f$ y $g$ son funciones de valor complejo en $\mathbb{R}^d$ entonces su convolución puede ser definida como la integral

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

cual está bien definida si y solo si $f$ y $g$ decrecen suficientemente rápido en el infinito de manera que la integral exista. Las condiciones para la existencia de la convolución pueden variar dado que $g$ puede anularse en el infinito acompañada del rápido de decrecimiento de $f$. La pregunta sobre la existencia puede involucrar diferentes condiciones sobre $f$ y $g$.

El rango de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones. En el caso de un rango de integración finito $f$ y $g$ se considerada a menudo como extendidas periódicamente, en ambas direcciones, tal que el termino $g(t-\tau)$ no implique una violación en el rango.

## 3.1. *Propiedades*

La convolución define un producto en el espacio lineal de las funciones integrables. Este producto satisface las siguientes propiedades, las cuales formalmente indican que el espacio de las funciones integrables con el producto dado por la convolución es un algebra conmutativa sin identidad. Otros espacios lineales de funciones, tales como el espacio de funciones continuas de soporte compacto, son cerrados bajo convolución y también forman un algebra conmutativa.

- *Conmutativa*: $f * g = g * f$.
- *Asociativa*: $(f * g) * h = g * (f * h)$.
- *Distributiva*: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.
- *Asociativa con multiplicación escalar*: $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$ Para todo número real o complejo $\alpha$.
- *Elemento inverso*: Muchas funciones tienen un elemento inverso $f^{-1}$ el cual satisface la relación
$$f^{-1} * f = \delta.$$
Donde $\delta$ es la función Delta de Dirac. Estas funciones forman un grupo abeliano con la convolución como operación de grupo.
- *Invariante bajo translaciones*: La convolución conmuta con las traslaciones, esto es
$$\mathcal{T}_x(f * g) = (\mathcal{T}_x f) * g = f * (\mathcal{T}_x g),$$
donde $\mathcal{T}_x f$ es la traslación de la función $f$ por $x$ definida por
$$(\mathcal{T}_x f)(y) = f(y - x)$$
Además, bajo ciertas condiciones, la convolución es la más general de las operaciones binarias invariantes de traslación.

*Lema 3.1. Convolución invariante: Supongase que $S$ es un operador lineal actuando en funciones que conmutan con las traslaciones, esto es*

$$\mathcal{S}(\mathcal{T}_x f),$$

*para todo $x$.*

*Entonces $S$, esta dada por la convolución con una función (o distribución) $g_s$, esto es, $\mathcal{S}f = g_s * f$ por lo tanto cualquier operación invariante de traslación se puede representar como una convolución.*

- *Regla de la derivación*: Para funciones $f$ y $g$, en el caso de una variable se tiene

$$\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx},$$

donde $\frac{d}{dx}$ es la derivada. En el caso de varias dimensiones

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

y la convolución es derivable tantas veces como lo sean $f$ y $g$ juntas.

## 3.2. *Tipos de Convolución*

### 3.2.1. *Convolución discrecta*

Sean $f$ y $g$ funciones de valor complejo definidas en el conjunto de los enteros, se define la convolución discreta de $f$ y $g$ como

$$(f * g)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m].g[n-m],$$

siendo m y n enteros.

Esto demuestra en la multiplicación discreta de dos polinomios, donde los coeficientes del producto están dados por la convolución de las sucesiones de los coeficientes originales extendida con ceros para los términos no presentes. Esto se conoce como el producto de Cauchy de los coeficientes de dos polinomios.

### 3.2.2. *Convolución circular*

Sean $f$ y $g$ funciones tales que $g = g_T$ es periódica con periodo $T$ y $f$ no es periódica (en general), entonces se define la convolución circular como

$$(f * g_T)(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} \Big[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\tau + kT) \Big] g_T(t-\tau) d\tau,$$

donde $t_0$ es arbitrario.

La sumatoria es una extensión periódica de la función $f$. Si la duración de $f$ esta limitada al intervalo $[t_0, t_0 + T]$, entonces solo el termino $k = O$ es importante obteniéndose

$$(f * g_T)(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) g_T(t-\tau) d\tau,$$

Si $g_T$ es una extensión periódica de otra función $g$, entonces $f * g_T$ es conocida como convolución circular, cíclica o periódica.

### 3.2.3. *Convolución circular discreta*

Cuando $g_N$ es una función periódica con periodo $N$ y $f$ no es periódica (en general) entonces se define la convolución circular discreta como

$$(f * g_N)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \Big( \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[m+kN] g_N[n-m] \Big)$$

Siendo k, n, m, N enteros. Se tiene que $f * g_N$ es también periódica. Cuando $g$

esta limitada al intervalo $[0, N-1]$, la convolución se reduce a

$$\begin{aligned}
(f * g_N)[n] &= \sum_{m=0}^{n} f[m]g[n-m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} f[m]g[N+n-m] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} f[m]g[n-m][modN] \\
&= (f *_N g)[n]
\end{aligned}$$

La rotación $(f *_N g)$ para esta convolución recalca que la operación se realiza sobre el grupo cíclico de los enteros modulo N.

### 3.2.4. *Convolución de grupos*

Se $G$ cierto grupo dotado de una medida (por ejemplo, un grupo topológico localmente compacto de Haussdorf con la medida de Haar). Sean $f$ y $g$ funciones de valor real o complejo y m-integrable en $G$, se define la convolución de $f$ y $g$ como

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(xy^{-1})dm(y).$$

En el grupo del círculo $T$ con la medida de Lebesgue se puede definir la convolución del modo siguiente. Sea $g$ fijo en $L^1(T)$, se tiene el siguiente operador actuando en el espacio de Hilbert $L^2(T)$.

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(y)g(x-y)dy.$$

El operador $T$ es compacto. Un cálculo directo muestra que su adjunta $T^*$ es una convolución con $\overline{g}(-y)$.

### 3.2.5. *Convolución de medidas*

Sea $\mathfrak{B}$ una familia de subconjuntos de Borel de la recta real. Sean $\mu$ y $\nu$ medidas en $\mathfrak{B}$, se define la convolución $\mu$ y $\nu$ como

$$(\mu * \nu)(A) = (\mu \times \nu), \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ \textit{para los} \ \ x + y \in A\},$$

donde $A$ esta en $\mathfrak{B}$.

En el caso en que $\mu$ y $\nu$ son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue, esto es cada una tiene una función de densidad, la convolución es también absolutamente continua. Y su función de densidad es la convolución de las dos funciones de densidad, esto es si $F(\mu)$ y $F(\nu)$ son las funciones de densidad de $\mu$ y $\nu$ tenemos

$$F(\mu * \nu) = F(\mu) * F(\nu).$$

### 3.2.6. *Convolución de Dirichlet*

Sean $f$ y $g$ dos funciones aritméticas (esto es funciones definidas de los enteros sobre los números complejos) se define la convolución de Dirichlet de $f$ y $g$ como la función aritmética $h$ dada por

$$h(n) = (f * g)(n) = \Sigma_{d/n}(f)(d)g(n/d).$$

Donde la sumatoria se extiende sobre todos los divisores positivos del entero.

Generalizando, la convolución puede ser definida para cualquier par de funciones cuadrado integrable definidas sobre un grupo topológico localmente compacto. Una generalización diferente es la convolución de distribuciones.

### 3.2.7. *Convolución de Distribuciones*

Bajo ciertas circunstancias es posible definir la convolución de una función con una distribución o incluso entre dos distribuciones.

### 3.2.8. *Convolución de una función de prueba con una distribución*

Sea $D(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$. Sea $f \in D(\mathbb{R}^n)$, una función de prueba de soporte compacto entonces la convolución con $f$ define un operador

$$C_f : D(\mathbb{R}^n) \to D(\mathbb{R}^n),$$

dada por $C_f g = f * g$, la cual es lineal y continua con respecto al espacio topológico $LF$ en $D(\mathbb{R}^n)$.
La convolución de $f$ con una distribución $\mathcal{S} \in D'(\mathbb{R}^n)$, el espacio dual de $D(\mathbb{R}^n)$ puede definirse tomando la traspuesta de $C_f$ relativa a la paridad de $D(\mathbb{R}^n)$ con el espacio $D'(\mathbb{R}^n)$ de las distribuciones.
Así por el teorema de Fubini

$$\langle C_f g, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy dx = \langle g, C_{\overline{f}} \phi \rangle,$$

donde $\overline{f}(x) = f(-x)$.
Extendiendo por continuidad, la convolución de $f$ con una distribución $\mathcal{S}$ esta definida por $\langle f * \mathcal{S}, \phi \rangle = \langle \mathcal{S}, \overline{f} * \phi \rangle$, para todas las funciones de prueba $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$.

**Lema 3.2.** *La convolución de una función de soporte compacto y una distribución es una función suave. Si la distribución $\mathcal{S}$ es de soporte compacto, entonces $f * \mathcal{S}$ es una función de soporte compacto y el teorema de convolución de Titchmarsch implica que*

$$ch(f * \mathcal{S}) = chf + ch\mathcal{S},$$

23

*donde ch denota el casco o envolvente convexo. Dado un conjunto de puntos $X$ en un espacio vectorial $V$, se define $ch(X)$ como el minimo conjunto convexo que contiene a $X$.*

### 3.2.9. *Convolución de Distribuciones*

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ entonces $f * g$ es localmente integrable y define una distribución regular

$$\begin{aligned} \langle f * g, \phi \rangle &= \int (f * g)(z)\phi(z)dz = \int \Big[ \int g(y) f(z-y) dy \Big] \phi(z) dz \\ &= \int g(y) \Big[ \int f(z-y)\phi(z)dz \Big] dy = \int g(y) \Big[ \int f(x)\phi(x+y)dx \Big] dy, \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} \langle f * g, \phi \rangle &= \int f(x) g(y) \phi(x+y) dx dy \\ &= \langle f(x) \otimes g(x), \phi(x+y) \rangle, \end{aligned}$$

donde $\phi \in D$ y $\otimes$ denotan el producto directo.

## 3.3. *Convolución y Transformadas*

### 3.3.1. *Transformada de Fourier*

Sean $F(x)$ y $G(x)$ funciones con $-\infty < x < \infty$ se define la convolución de $F$ y $G$ como

$$F * G = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) G(x-y) = H(x).$$

### 3.3.2. *Transformada de Laplace*

Sean $f$ y $g$ funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$ se define la convolución de $f$ y $g$ como la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

.

## 3.4. *Teorema de Convolución*

Este teorema posee diferentes versiones, aquí desarrollaremos el teorema para transformadas de Laplace (ver apéndice).

***Teorema 3.1.*** *Teorema de convolución para transformadas de Laplace: Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial entonces*

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

*Demostración.* Sea

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau,$$
$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta,$$

con lo cual

$$=$$

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \Big[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\Big]\Big[\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta\Big] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\tau-s\beta} f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)d\beta. \end{aligned}$$

Si $\tau$ se mantiene fija y hacemos $t = \tau + \beta$, $d\tau = d\beta$ de modo que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt.$$

En el plano $t\tau$ se integra sobre la región por debajo de la línea $\tau = t$ puesto que $f$ y $g$ son continuas a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial es posible intercambiar el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \Big[ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \Big] dt = \mathcal{L}\{f * g\}. \end{aligned}$$

■

***Teorema* 3.2.** *Forma inversa del teorema de convolución para transformadas de Laplace: Sea $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g,$$

*siendo $f$ y $g$ continuas a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial.*

*Demostración.* **Metodo 1.** Como

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

el resultado requerido estará demostrado si se logra probar que

$$\mathcal{L}\Big\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \Big\} = F(s)G(s).$$

En efecto

26

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{t=0}^{\infty} e^{-s\tau}\Big[\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\Big]dt$$
$$= \int_0^{\infty}\int_{\tau=0}^{t} e^{-s\tau} f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt$$
$$= \lim_{M\to\infty} \mathcal{S}_M,$$

donde

$$\mathcal{S}_M = \int_0^M \int_{\tau=0}^{t} e^{-s\tau} F(\tau)G(t-\tau)d\tau dt,$$

haciendo $t-\tau = v$ ó $t = \tau + v$ y el teorema de transformación de integrales múltiples mediante el jacobiano se tiene

$$\mathcal{S}_M = \int_{Rt\tau}\int e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \int_{Rt\tau}\int e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v)\Big|\frac{\partial(\tau,t)}{\partial(\tau,v)}\Big|d\tau dv,$$

el jacobiano de la transformación es

$$J = \frac{\partial(\tau,t)}{\partial(\tau,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial\tau} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial\tau} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Así se llega que el mienbro izquierdo es

$$\mathcal{S}_M = \int_{Rt\tau}\int e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v)\Big|\frac{\partial(\tau,t)}{\partial(\tau,v)}\Big|d\tau dv = \int_{v=0}^{M}\int_{t=0}^{M-v} e^{-s(\tau+v)} f(t)g(v)d\tau dv.$$

Ahora definimos una nueva función

$$K(\tau,v) = \begin{cases} e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v), & si\ \tau+v \le M; \\ 0, & si\ \tau+v > M, \end{cases}$$

esta función vale cero por encima de la línea $\tau + v = M$. En términos de esta nueva función podemos expresar

$$\mathcal{S}_M = \int_{v=0}^{M}\int_{t=0}^{M-v} e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v)d\tau dv$$
$$= \int_{v=0}^{M}\int_{t=0}^{M-v} K(\tau,v)d\tau dv.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty} \mathcal{S} &= \int_0^\infty \int_0^\infty K(\tau, v)d\tau dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v)d\tau dv \\
&= \Big[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\Big]\Big[\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\Big] \\
&= F(s)G(s),
\end{aligned}$$

lo cual establece el teorema.

**Metodo 2.** Por cálculos directos se prueba

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \Big[\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\Big]\Big[\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv\Big] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+v)} f(\tau)g(v)d\tau dv \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau}\Big[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\Big]dt.
\end{aligned}$$

Siendo los pasos inversos a los usados en la demostración del teorema.

■

# 4. *APLICACIONES*

## 4.1. *Aplicaciones a Las Ecuaciones Integrales*

***Definición* 4.1. *Ecuación integral:*** *Una ecuación integral es aquella que tiene la forma*

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du,$$

*donde* $F(t)$ *y* $K(u,t)$ *son conocidas,* $a$ *y* $b$ *son constantes dadas o funciones de* $t$ *y la función* $Y(t)$ *que aparece bajo el signo integral es la que se trata de determinar. La función* $K(u,t)$ *se llama el núcleo de la ecuación integral. Si* $a$ *y* $b$ *son constantes, la ecuación se llama la ecuación integral de Fredholm. Si* $a$ *es constante y* $b = t$ *se llama ecuación integral de Volterra. Es posible transformar una ecuación diferencial lineal en una ecuación integral.*

### 4.1.1. *Ecuaciones integrales de tipo convolutorio*

*Una ecuación integral de singular importancia por sus aplicaciones es*

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du.$$

*Esta ecuación es de tipo convolutorio y puede escribirse como*

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t).$$

*Tomado la trasformada De Laplace a ambos lados y suponiendo que existen* $\pounds\{F(t)\}(s) = f(s)$ *y* $\pounds\{K(t)\}(s) = k(s)$*, encontramos por el teorema de convolución que*

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s),$$

*de donde*

$$y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)}.$$

*La solución requerida puede encontrarse tomando inversas.*

### 4.1.2. *Ecuaciones integrales de Abel*

Una importante ecuación integral de tipo Convolutorio es la ecuación integral de Abel

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{\alpha}} du = G(t),$$

donde $G(t)$ es una función dada y $\alpha$ es una constante tal que $0 < \alpha < 1$.
Unas de las aplicaciones de la ecuación integral de Abel es la de determinar la forma que debe tener un alambre si rozamiento, en un plano vertical para que una cuenta que corre a travez de el llegue a su punto mas bajo en el mismo tiempo $t$ independientemente del sitio del alambre en el cual sea colocada la cuenta. Este problema se llama el problema de la tautócrona y la forma del alambre esla de una cicloide.

***Definición 4.2. Ecuaciones Integro-diferenciales:***
*Una ecuación integro- diferencial es aquella en la cual se presentan derivadas de la función incógnita $Y(t)$.*
*Por ejemplo:*

$$Y''(t) = Y(t) + \operatorname{sen} t + \int_0^t \cos(t-u) Y(u) du,$$

*es una ecuación integro-diferencial. La solución de dichas ecuaciones, sometidas a condiciones iníciales dadas, puede frecuentemente obtenerse mediante la aplicación del teorema de convolución para la transformada De Laplace.*

### 4.1.3. *Solución distribucional de las ecuaciones integrales*

Cuando las ecuaciones integrales involucran funciones generalizadas, la solución se puede determinar más fácilmente. A menudo, es muy útil tomar la transformada de Fourier de la ecuación integral de tipo convolutorio puesto que, por medio del teorema de convolución, obtenemos una ecuación algebraica simple para resolver en la función transformada. Consideremos la ecuación integral de Volterra

$$f(x) + \int_0^x k(x-t)f(t)dt = g(x), \quad x \geq 0,$$

haciendo $h(x) = \delta(x) + k(x)$, la ecuación se puede escribir en la forma

$$h * f = g, \tag{1}$$

donde hemos extendido la funciones $f$ y $g$ para $x < 0$ para resolver esta ecuación será suficiente encontrar la distribución $h_1$ tal que

$$h * h_1 = \delta, \tag{2}$$

con lo cual la solución de (1) es

$$f = h_1 * g, \tag{3}$$

puesto que $\delta(x)$ juega el papel del elemento unidad en el algebra de convoluciones, observamos que $h_1$ es la inversa de $h = \delta + k$. Tomando la inversa de $\delta + k$, es como si tomáramos la inversa de $1 + \lambda$, así obtenemos

$$h_1 = \delta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(k^*)^n, \tag{4}$$

donde $(k^*)^n$ es la convolución producto de $k$ cuando el mismo un número $n$ veces. Cuando el Kernel (núcleo) es una función continua la serie (4) converge y por tanto se puede sustituir en (3) para llegar a la solución

$$\begin{aligned} &= h_1 * g = \left[\delta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (k^*)^n\right] * g \\ &= g + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (k^*)^n g(t)dt, \end{aligned}$$

esto es

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n k_1(t-x)dt.$$

## 4.2. *Otras Aplicaciones*

La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas:

- En estadísticas, un promedio ponderado es una convolución.
- En teoría de la probabilidad, la distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes es la convolución de cada una de sus distribuciones de probabilidad.
- En óptica, muchos tipos de (manchas) se describen con convoluciones . Una sombra (por ejemplo, la sombra en la mesa cuando tenemos la mano entre esta y la fuente de luz) es la convolución de la forma de la fuente de luz que crea la sombra y el objeto cuya sombra se esta proyectando. Una fotografía desenfocada es la convolución de la imagen correcta en el circulo borroso formado por el diagrama del iris.
- En acústica, un eco es la convolución del sonido original con una función que represente los objetos variados que lo reflejan.

- En ingeniería eléctrica y otras disciplinas, la salida de un sistema lineal (estacionario o bien tiempo- invariante o espacio- invariante) es la convolución de la entrada con la respuesta del sistema a un impulso.
- En física, allí donde halla un sistema lineal con un principio de superposición aparece una operación de convolución.

# 5. *APENDICE*

***Teorema 5.1. Teorema de la convolución para la transformada unidimensional de Fourier:*** *Si $h(x)$ es la convolución de $f(x)$ y $g(x)$ entonces*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-i\lambda x}dx = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\lambda x}dx\right\}$$

*ó*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g).$$

*Es decir la transformada de Fourier de la convolución de $f$ y $g$ es el producto de las transformadas de Fourier de $f$ y $g$.*
*También puede enunciarse un teorema análogo para la convolución en la variable trasformada. Esto es*

$$\mathcal{F}(f\cdot g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

*Demostración.* La demostración, es con algunas leves variaciones, semejante a la demostración del teorema para la trasformada De Laplace y por tanto se omitira.
Muchas veces, en el análisis de Fourier, el teorema de la convolución se presenta en las dos formas siguientes.

**Teorema de la convolución en el tiempo** Si $\mathcal{F}[f(t)](w) = F(w)$ y $\mathcal{F}[g(t)](w) = G(w)$ entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g).$$

**Teorema de convolución en la frecuencia** Si

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)](t) = f(t)$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}[G(w)](t) = g(t)$$

entonces

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w) * G(w)](t) = 2\pi f(t)g(t)$$

ó

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)](t) = \frac{1}{2\pi}F(w) * G(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(w-y)dy.$$

■

***Teorema 5.2. Teorema de convolución para la transformada bidimensional de Fourier:*** *Si $h(x,y)$ es la convolución de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ entonces*

$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)g(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta.$$

***Teorema 5.3. Teorema de la convolución para grupos:****Sea $T$ un el grupo con la medida de Lebesgue. Sea $L^1(T)$ fijo, sea $\boldsymbol{T}f(x)$ un operador que actua sobre el espacio de Hilbert $L^2(T)$ dado por .*

$$\boldsymbol{T}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)g(x-y)dy.$$

*Demostración.* La demostración es muy difícil de describir y requiere teoría de representaciones (para los diferentes tipos de grupos puede ser necesaria otra teoría) junto con el teorema de Peter-Weyl del análisis armónico. Dichos cálculos se basan en la estructura de los grupos de Lie. ■

***Teorema 5.4. Teorema de convolución de Titchmarsch Unidimensional*** *Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$son funciones integrales, tales que*

$$\int_0^x \phi(t)\psi(x-t)dt = 0.$$

*En casi todo punto en el intervalo* $0 < x < k$, *entonces,* $\phi(t) = 0$ *en casi todo punto de* $(0, \lambda)$ *y* $\psi(t) = 0$ *en casi todo punto de* $(0, \mu)$ *donde* $\lambda + \mu \geq k$. *Este teorema puede ser expresado en la siguiente forma;*
*sean* $\phi, \psi$ *en* $L^1(R)$, *entonces*

$$\text{ínf}[sop(\phi * \psi)] = \text{ínf}[sop(\phi)] + \text{ínf}[sop(\psi)],$$

*si el miembro derecho es finito.*
*Similarmente se tiene*

$$\sup[sop(\phi * \psi)] = \sup[sop(\phi)] + \sup[sop(\psi)],$$

*si el miembro derecho es infinito.*
*Donde* sup *denota el supremo,* ínf *denota el ínfimo y sop denota el soporte de la función. Este teorema esencialmente establece que la ya conocida inclusión*

$$sop(\phi * \psi) \subset sop(\phi) + sop(\psi),$$

*esta cerrada y definida en la frontera.*

***Teorema 5.5. Teorema de convolución de Titchmarsch multidimensional:*** *Si* $\phi, \psi \in \varepsilon'(\mathbb{R})^n$, *entonces*

$$ch[sop(\phi * \psi)] = ch[sop(\phi)] + ch[sop(\psi)]$$

*donde ch denota el casco convexo del conjunto y* $\varepsilon'(\mathbb{R}^n)$ *denota el espacio de distribuciones con soporte compacto. Estos teoremas describen las propiedades del soporte de la convolución de dos distribuciones. La demostración de los teoremas no son elementales. Las versiones originales hechas por Fitchmarsh están basadas en el* *principio de Phragmeín-Lindelöf, la desigualdad de Jensen y los teoremas de Carleman y Valiron. Estos conceptos están fuera del contexto de esta monografía. Una versión de estos teoremas se encuentran en el Análisis Real de Yosida, capitulo 6.*

***Teorema* 5.6. *Teorema de convolución de Dirichlet:*** *Sean $f$ y $g$ funciones aritméticas definidas de los enteros positivos sobre los complejos, sean $\Delta G(f;s)$ y $\Delta G(g;s)$ las series generadoras de Dirichlet de $f$ y $g$ definidos por*

$$\Delta G(f;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$\Delta G(g;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

*entonces*

$$\Delta G(f;s)\Delta G(g;s) = \Delta G(f * g;s),$$

*para todo $s$ tal que ambas series del miembro izquierdo sean convergentes o al menos una de ellas sea absolutamente convergente.*

*Demostración.* La demostración de este teorema requiere el uso de teoremas de teoría de números y argumentos complejos, sin embargo es posible una demostración menos rigurosa si se observa que la serie de Dirichlet puede expresarse como una trasformada de Fourier, esta se encuentra en el texto de Hormander. Es de notar que la simple convergencia de ambas series en el miembro izquierdo no implica la convergencia en el miembro derecho. ■

37

# 6. BIBLIOGRAFIA


- *Arsc,J. Fourier Transforms and the theory of distributions. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.*
- *Hirchman,I.I. And Widder.D.V. The convolution transform. Princeton Universitipress. Newjersey, 1955.*
- *Estrada, R. Dirichlet convolution inverses.*
- *Zemanian, A.H. Distribution theory and transfom analysis.* $M^c graw - hill$, New *York,1965.*
- *Kilicmand, A. A note on wave equation and convolution.*
- *Yosida, K. Funcional Analysis. Springer-Verlag, Berlin,1966.*
- *Sobolev,V.I convolution of funcions. Kluwer academic publishers. 2001.*
- *Hörmander, Harmonic Analysis Stle.*




56283