TRANSFERENCIA EN LOS TEXTOS DE MATEMÁTICA DE GRADO 9°

YASMIN GUZMÁN PACHECO

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA AVANZADA

CARTAGENA

2011

TRANSFERENCIA EN LOS TEXTOS DE MATEMÁTICA DE GRADO 9°

YASMÍN GUZMÁN PACHECO

ALFONSO GOMEZ MULETT

ASESOR

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA AVANZADA

CARTAGENA

2011

Nota de aceptación:

Firma del jurado.

Firma del jurado.

Firma del jurado.

INTRODUCCIÓN

A menudo las matemáticas escolares olvidan el lado didáctico y experimental de las matemáticas, la dimensión histórica y humana, su relación con otras ciencias y con el resto de la cultura o las posibilidades que nos permiten desarrollar nuestra inteligencia y el disfrutar de ella. Más que en esto el docente centra su atención en los libros de texto tomándolos como uno de los recursos más utilizados en la clase. La elección de estos supone una decisión importante, produciendo este instrumento un efecto poderoso sobre sus enfoque docente y sobre las estrategias de aprendizaje de los alumnos, dejando de lado el interés por desarrollar otros procesos de aprendizaje como es la transferencia a partir del manejo de los conceptos en los cuales los libros de textos no lo abordan de una manera acorde con la necesidad del estudiante, sacrificando la utilidad que se le pueda dar a estos conceptos, pues el docente dirige sus esfuerzos a la mecanización de estos y no a su utilización en diferentes contextos.

En los cursos de algebra se hace énfasis en la matemática instrumental o lo que es lo mismo en la parte operativa de la matemática en lo correspondiente al tratamiento de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales. Esta situación acarrea la negación del proceso de transferencia cuando no se desarrollan ejemplos de aplicación o utilización de estos conceptos en la vida diaria.

Para llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje adecuadamente, es indispensable que el estudiante sea capaz de utilizar lo aprendido en ciertas situaciones específicas fuera del ambiente escolar, por lo que es necesario empezar por la apropiación de conceptos para así lograr aplicarlo a situaciones múltiples. Es aquí donde el docente debe valorar la importancia de la aplicación de conceptos dentro de la matemática, aspecto que por las tendencias educativas han dejado relegado los textos escolares sin enfrentar esta problemática, lo cual llevó a hacer a una revisión de estos para determinar hasta qué punto el texto se constituye en un factor propiciador o inhibidor de la transferencia.

De la exposición de motivos surgió el siguiente interrogante ¿Qué tipo de transferencia de aprendizaje se da en los textos de matemática de grado 9° respecto a las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales? Para responder este interrogante se estudiaron los tipos de transferencias en el aprendizaje, para luego, mediante un análisis de textos de matemática de noveno grado, analizar cómo se da ésta en los ejercicios resueltos y planteados, y si los mismos ayudan a resolver situaciones del diario vivir.

El presente trabajo se elaboró utilizando una metodología descriptiva-comparativa y cualitativa consistente en una clasificación de los textos de matemática de 9° de educación básica secundaria ubicándolos en dos épocas, antes y después de los lineamientos curriculares según los métodos propuestos por González y Sierra (2004). El análisis de los contenidos se realizó según la dimensión pragmática aplicada a manuales escolares, propuesta por Monterrubio y Ortega (2011), luego se llevó a cabo una comparación de los temas bajo estudio confeccionando fichas y cuadros comparativos con los datos fundamentales (teoría y ejercicios) de los textos. Los contenidos de los ejercicios de los textos se analizaron ajustados al concepto clásico de transferencia dado por Perkins y Solomon (1992) mediante el análisis conceptual, el análisis didáctico cognitivo y el análisis fenomenológico, apoyados en el estudio documental.

El contenido del trabajo se dividió en tres capítulos, el primer capítulo contiene el concepto de transferencia desde su introducción hasta nuestros días, sus tipos y su aplicación en cada una de las teorías del aprendizaje y dentro de la misma matemática como tal. El capítulo dos contiene la estrecha relación que enmarca la transferencia del aprendizaje y la transposición didáctica, su historia, definición e incidencia en los libros de textos escolares. El tercer capítulo abarca las generalidades de los libros de textos y el análisis de situaciones que involucren funciones lineales, cuadrática exponenciales en los textos bajo estudio. Al final se dan las conclusiones del trabajo y una posible extensión del mismo para continuar con la investigación del problema a nivel más general.

ÍNDICE

1. TRANSFERENCIA.

El concepto fundamental en el cual se basa este trabajo es el de transferencia y los tipos que de ello se da en las teorías del aprendizaje y en particular en el aprendizaje de la matemática relacionado con las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.

1.1 DEFINICIONES DE LA TRANSFERENCIA DEL APRENDIZAJE.

La noción de transferencia del aprendizaje fue introducida en las primeras décadas del siglo XX por Edward Thorndike y Roberto S. Woodworth (1901) como “transferencia de la práctica”, al explorar en los individuos como transferían el aprendizaje de un contexto a otro. Su teoría implica que la transferencia del aprendizaje dependa de la proporción a la cual la tarea de aprendizaje y la tarea de transferencia son similares, es decir que la transferencia del aprendizaje depende de la presencia de los elementos idénticos en las situaciones nuevas y originales de aprendizaje, por lo tanto la transferencia es siempre específica y no general.

La transferencia del aprendizaje ha sido estudiada desde las teorías de las facultades mentales hasta las teorías contemporáneas (cognoscitivismo y constructivismo), esta se ha convertido en un concepto no solamente clave en la educación sino en diferentes ámbitos sociales que están directa o indirectamente relacionados con ella, por lo tanto vamos a encontrar diversas definiciones del término transferencia en función del ámbito de aplicación donde se encuentre.

La transferencia del aprendizaje es el proceso en el cual el individuo es capaz de trasladar, traspasar los conocimientos adquiridos previamente (conceptos, operaciones, estrategias, actitudes, habilidades, principios y destrezas) para enfrentarlos a nuevas situaciones, ya sean del mismo contexto escolar o de la vida diaria.

Wenzelburguer (1987) afirma que la transferencia del aprendizaje ocurre cuando lo que se aprende en una situación facilita (o inhibe) el aprendizaje o desempeño en otras situaciones, además manifiesta que si se descarta la transferencia no se justificaría la enseñanza ni la existencia de las instituciones educativas, por eso este término es tan importante en educación. También es significativo resaltar que es transferible todo lo que se aprende como habilidades psicomotrices, cognoscitiva y actitudes afectivas.

Perkins y Salomon (1992) consideran que la transferencia del aprendizaje ocurre cuando lo aprendido en un contexto o un conjunto de materiales impactan en el desempeño en otro contexto o con otros materiales relacionados, es decir la conexión o relación que existe entre lo que aprendemos o lo que sabemos con otras experiencias y contextos. Consideran que uno de los objetivos de la educación es que se logre aplicar o transferir las habilidades y conceptos que han aprendido en clase con otras áreas, temáticas o sucesos de la vida diaria, que por lo general no ocurre pues no tienden a realizar dichas conexiones con otros contextos de aprendizaje; por consiguiente, la instrucción debe estar dirigida para realizar la transferencia, de ahí que se debe mirar como un proceso flexible que ayuda al estudiante a asegurar el conocimientos en diferentes situaciones.

Es importante destacar a Bransford, Brown y Cocking (2001, c.p. Ruiz Bolívar, 2002) los cuales proponen que la transferencia del aprendizaje dependen de varios factores, entre los cuales destacan:

1. *La necesidad del aprendizaje previo.* El sujeto debe lograr un aprendizaje inicial, de apertura, que sea suficiente como para brindar soporte a la transferencia, pero toma tiempo aprender una disciplina compleja. Por ello, en la verificación de la transferencia se debe tomar en cuenta el grado en que el aprendizaje original fue comprendido.

2. *La inversión de tiempo en la tarea.* El tiempo que se dedica a la tarea, por si mismo, no es garantía de un aprendizaje sólido y con un alto potencial de transferencia; lo más importante es cómo la gente usa su tiempo mientras aprende. Conceptos tales como el de "práctica deliberada" enfatizan la importancia de ayudar a los estudiantes a monitorear su aprendizaje, buscar la retroalimentación sobre su desempeño, supervisar la eficiencia de las estrategias empleadas y evaluar el proceso y nivel de comprensión obtenido.

3. *La necesidad de la comprensión en el aprendizaje.* El aprendizaje con comprensión tiene mayor probabilidad de facilitar la transferencia que la memorización de información textual.

4. *La variación del contexto de aprendizaje.* El aprendizaje que es promovido en una variedad de contextos tiene mayor probabilidad de ser transferido a nuevas situaciones que aquel obtenido en un único contexto. Cuando el material aprendido es multicontextualizado, el sujeto tiene mayor oportunidad de extraer rasgos relevantes de los conceptos y desarrollar una representación más flexible del conocimiento, lo cual favorece un mayor grado de generalización.

5. *La comprensión flexible del estudiante.* El sujeto desarrolla una mayor flexibilidad en la comprensión acerca del cuándo, dónde, por qué y cómo usar el conocimiento para resolver nuevos problemas, si aprende cómo extraer las ideas y los principios subyacentes de sus ejercicios de práctica en el aprendizaje.

6. *La evaluación de la transferencia.* La transferencia del aprendizaje es un proceso activo y continuo; por tanto, no debería ser evaluado puntualmente con u test de transferencia; para tal fin, se debería considerar cómo el aprendizaje previo afecta los aprendizajes posteriores bajo condiciones reales de las tareas, tal como el aumento de la velocidad en el aprendizaje en un nuevo dominio.

7. *La importancia de la experiencia previa.* Todo aprendizaje supone la transferencia de experiencias previas, inclusive en los casos de aprendizaje inicial; no obstante, ella no ocurre de manera espontánea ni es siempre evidente. De allí que un docente efectivo intente inducir la transferencia positiva mediante la identificación activa de las fortalezas que el estudiante trae a la situación de aprendizaje, extendiendo puentes entre el conocimiento del alumno y el aprendizaje de los objetivos instruccionales previstos.

8. *La necesidad de evitar la transferencia negativa.* Algunas veces el conocimiento que la gente trae a una nueva situación le impide obtener subsecuentes aprendizajes porque guía el pensamiento en una dirección equivocada. En tales casos, el docente debe ayudar al estudiante a cambiar su concepción original antes que utilizar las concepciones erradas como base para comprensiones adicionales futuras.

De lo anterior podemos resaltar lo importante que es utilizar la transferencia en las diferentes áreas del conocimiento como medio de interacción en el aprendizaje ocurrido en una situación ya sea dentro de la misma área o diferentes. De allí que el docente debe utilizarla como herramienta para que el estudiante mejore su desempeño académico.

1.2. LA TRANSFERENCIA DE LAS TEORÍAS DEL APRENDIZAJE.

Al hablar de transferencia en el aprendizaje es importante revisar las teorías del aprendizaje para conocer como esta se aplica en cada una de ellas. Partimos de la teoría de la disciplina mental que considera que la transferencia es una consecuencia automática del ejercicio mental es decir de la ejercitación de la memoria, la fuerza de voluntad y la perseverancia, mientras que la teoría de la percepción descrita como un proceso de asociación de ideas entre nuevas con otras ya existentes, de allí parte para discurrir que la transferencia ocurre cuando esas ideas o conceptos adquiridos se asocian con ideas nuevas o afines.

Por otra parte tenemos el conexionismo el cual postula que la transferencia entre varias situaciones se produce cuando en ellas existen elementos en común, elementos idénticos, Thorndike de tal forma que, siempre que haya elementos comunes entre ambas se producirá de forma casi automática el fenómeno de transferencia. En este orden de ideas encontramos el conductismo clásico de Watson y operante de Skinner. El primero considera que el aprendizaje se descompone en una cadena de conexiones estimulo-respuesta, de allí que la transferencia en el aprendizaje se da cuando un estimulo propicia la misma respuesta. Skinner considera que la base para transferir lo aprendido es el repertorio de operantes condicionados o respuestas, es decir la probabilidad donde pueda ocurrir determinadas respuestas en el futuro. Para la teoría de la configuración se considera que la transferencia se da a través de la transposición, entendiendo la transposición como el proceso de usar el conocimiento de la estructura interna de una situación como ayuda para manejar variaciones de esta situación, luego esta transferencia o transposición sucede cuando se reconoce las relaciones significativas en dos patrones de situaciones o relaciones entre conceptos. La teoría de la configuración va más allá de la teoría de los elementos idénticos, luego dichos patrones son más que un estimulo, pues es la relación entre dos conceptos.

En contraposición con la teoría de la disciplina mental y el conexionismo encontramos la teoría de la generalización y la teoría cognoscitiva las cuales consideran que la transferencia no es automática. En la primera teoría la transferencia ocurre a través de ideas, métodos y sobre todo generalizaciones, principios, reglas y leyes aplicadas en diversas situaciones; y para la segunda teoría, la transferencia sucede a causa de similitudes preceptúales entre situaciones y en forma de generalizaciones conceptos o intuiciones que se desarrollan en una situación y pueden ser aplicables en otras. Los cognoscitivitas afirman que hay muchos factores que pueden influir en el proceso de transferencia centradas en el estudiante como la edad, habilidad mental, personalidad, estabilidad de aprendizaje, uso eficiente de experiencias pasadas, exactitud de lo aprendido y la aceptación de métodos, procedimientos, principios, sentimientos e ideas.

1.3. TIPOS DE TRANSFERENCIA.

Dentro de la transferencia distinguimos diversos tipos, siendo los más comunes la transferencia positiva, negativa, cercana y lejana y las rutas de donde se da cada una de ellas (Salomon y Perkins 1998). La transferencia positiva se define como un proceso en el cual el aprendizaje en un contexto mejora el desempeño en otro contexto, por ejemplo; quien habla un idioma encuentra más fácil aprender el idioma relacionado con el primero. La transferencia negativa se refiere al proceso por medio del cual el aprendizaje en un contexto impacta negativamente en otro contexto es decir, cuando el aprendizaje de una tarea interfiere en el aprendizaje de una segunda. Por otra parte cuando se transfieren contenidos entre situaciones o contextos muy similares o por el contrario se transfieren entre contextos en apariencias remotos y ajenos unos de otros: El primer caso se le denomina transferencia cercana, mientras que en el segundo recibe el nombre de transferencia lejana. Para el desarrollo del presente trabajo relacionado con la transferencia en los textos de matemáticas de 9º se analizan el tipo de transferencia cercana y lejana, que se da en los problemas sobre funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, además se investiga que tanto pueden ser un propiciador o inhibidor de la transferencia los libros de textos.

Gagne (1970) identifica dos tipos de transferencia: lateral y vertical. La transferencia lateral se refiere al aprendizaje adquirido previamente y su utilización en la nueva tarea, sobre el cual se realizará la transferencia, es decir, el aprendizaje anterior es fundamental para el aprendizaje posterior, por ejemplo: el conocimiento previo que debe tener un estudiante de secundaria para graficar funciones lineales, cuadráticas o exponenciales. Por otra parte la transferencia vertical tiene lugar cuando el conocimiento previamente adquirido permite comprender una nueva tarea ambas de la misma naturaleza o nivel de complejidad, por ejemplo las operaciones realizadas con funciones.

En resumen, teniendo en cuenta la clasificación realizada por Schunk 2004, p.220, la transferencia puede ser:

Tipo	Características
Cerca	Coincida entre las situaciones, original y los contextos de la transferencia son similares.
Lejos	Poca coincidencia entre las situaciones, la original y los ajustes de la transferencia es disímil.
Positivo	Qué se aprende en un contexto aumenta el aprendizaje en un diverso ajuste.[1]
Negativo	Qué se aprende en un contexto obstaculiza o retrasa el aprender en un diverso ajuste.[1]
Vertical	El conocimiento de un tema anterior es esencial adquirir nuevo conocimiento.[2]
Horizontal	El conocimiento de un tema anterior es no esencial sino útil aprender un nuevo tema.[2]
Literal	Transferencias intactas del conocimiento a la nueva tarea.
Figural	Utilice un cierto aspecto del conocimiento general para pensar o para aprender sobre un problema.
Camino bajo	Transferencia de habilidades establecidas en la moda casi automática.
Mejor camino	La transferencia implica formulaciones tan conscientes de la abstracción de conexiones entre los contextos.

---

[1] De Cree y de Macaulay (2000).

[2] De Ormrod (2004).

Mejor camino/el alcanzar delantero	Situaciones de abstracción de un contexto de aprendizaje a un contexto potencial de la transferencia.
Mejor camino/al revés el alcanzar	Abstracción en las características del contexto de la transferencia de una situación anterior donde estaban doctos las nuevas habilidades y conocimiento.

1.4. TRANSFERENCIA EN LA MATEMÁTICA.

Para abordar la transferencia en la matemática es necesario conocer algunos estudios que se han hecho en este campo, encontramos Luz Manuel Santos Trigo (1997), en su artículo *La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* plantea la importancia de la transferencia del conocimiento con el fin que el estudiante sea capaz de utilizar sus recursos matemáticos en la solución de problemas en diferentes contextos. Además, recomienda que dentro de la instrucción es importante tener en cuenta las actividades donde el estudiante tenga la oportunidad de justificar matemáticamente el uso de ciertos recursos y estrategias asimismo comunicar en forma oral y escrita los procesos utilizados. De allí que la actividad de reformular o diseñar problemas ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades y estrategias que les permitan discutir la información desde distintos puntos de vistas.

Para Sánchez y López (2011), en su artículo *La transferencia del aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción* realizan un estudio donde muestran la influencia del conocimiento formal, intuitivo y procedimental en el proceso de aprendizaje algorítmico y la transferencia positiva y negativa del conocimiento matemático, pues cuando no se transfieren adecuadamente los conocimientos previos se convierte en un obstáculo para comprender la estructura organizada de los pasos que componen el algoritmo. Además consideran que los recursos utilizados por el docente o los libros de textos interfieren en la transferencia del conocimiento aritmético.

Para Encinas (2001) en su artículo *Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del cálculo aprendidos en el contexto del movimiento a otros,* indaga sobre ¿qué obstáculos se presentan a los estudiantes al transferir conceptos y métodos del cálculo diferencial aprendidos en el contexto del movimiento a otros contextos distintos tales como: la variación de áreas, volúmenes, temperaturas, energías u otras magnitudes físicas o al contexto de la matemática misma? además de considerar que muchos profesores desarrollan la actividad de enseñanza de la matemática y, en particular del Cálculo, en forma expositiva, es decir, consideran que enseñar es equivalente a "explicar" algún concepto, teorema o procedimiento que luego es necesario "ilustrar" con ejemplos. Por lo general la explicación y los ejemplos se presentan utilizando fundamentalmente representaciones analíticas. En este proceso, el papel de la mayoría de los estudiantes, se reduce a escuchar al profesor y tomar nota de lo que escribe en el tablero como recurso para tratar de retener lo "enseñado" para efectos de poder "utilizarlo" en la resolución de los problemas que, seguramente el profesor le pedirá que resuelva como prueba de que ha aprendido. Otra característica de la enseñanza tradicional es que las explicaciones y los ejemplos, por lo general, se hacen en el contexto de la matemática misma, bajo el supuesto de que si éstos son entendidos en lo general, podrán ser utilizados en los diversos casos particulares que son considerados como problemas de aplicación.

Este trabajo toma como base la propuesta de Arechiga (2009) y se desarrollara el tema de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales presentes en los textos de matemáticas de 9º.

Aréchiga (2000), en su propuesta *problema de la transferencia en las matemáticas,* destaca dos atributos fundamentales como ciencia formal poco utilizados por el docente en su que hacer matemático. Dichos atributos son el rigor y el vigor de las matemáticas, el primero se refiere al conjunto de leyes y propiedades, tales como axiomas, teoremas corolarios que dan sustento al armazón de las matemáticas, que permiten la obtención de conocimientos a partir de otros, el segundo se puede concebir como la fortaleza que tiene la matemática al interactuar con otras ciencias o disciplinas como la física, la química, la economía, entre otras, considerando así que las características anteriores que posee la matemática hace que se facilite la transferencia de los propios conocimientos matemáticos. El término transferencia es entendido como la aplicación de las matemáticas a otras ciencias y no es solo eso, sino que implica la aplicación del aprendizaje previo dentro del mismo contexto matemático. Además propone que el aprendizaje de las matemáticas debe darse en tres etapas, en la primera abarca conceptos matemáticos o ideas matemáticas, que permiten elaborar un conocimiento organizado y más adelante comunicarlo; se desarrollan habilidades especificas asociadas de dos aspectos como la regla de decisión intelectual y el conjunto de referencia formado por el uso de dicha regla; en la segunda etapa los conceptos o ideas de la etapa anterior se generalizan dando paso a los teoremas, fórmulas, algoritmos, propiedades, corolarios, axiomas, postulados, principios, etc., que nos señalan un camino especifico para un trabajo matemático y en la tercera etapa se relacionan las dos etapas anteriores es decir los conceptos matemáticos y sus reglas o condiciones que dan paso a la transferencia, es decir la aplicación de estos a las distintas disciplinas.

2. TRANSFERENCIA Y TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

En esta parte estudiaremos el concepto de transposición didáctica y su incidencia en la transferencia en el aprendizaje como concepto fundamental en la apropiación del conocimiento como por parte del docente como del estudiante.

2.1. HISTORIA DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA.

La noción de transposición didáctica se le atribuye al francés Michel Verret (1975), quien en su tesis de doctorado en sociología, estudió la distribución temporal de las actividades de los estudiantes, define la didáctica "como la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido de aquellos que aprenden". Verret (1975, p. 139, Gómez, 2005)

Considera además, que no se puede enseñar un objeto sin ser transformado: "Toda practica de enseñanza de un objeto presupone, en efecto; la transformación previa de su objeto en objeto de enseñanza" Verret (1975, p. 140, Gómez, 2005). Esta transformación va más allá de un trabajo de separación y de transformación implica selección. La transmisión didáctica va en efecto a privilegiar el logro, la continuidad y la síntesis.

- *El logro, porque el saber transmitido al estudiante, se ha operado una clasificación: las investigaciones "no exitosas" no serán presentadas. los titubeos, los tanteos y los fracasos de la investigación serán de esta forma ahorrados o evitados a los alumnos;*

- *La continuidad, porque la transmisión didáctica no tendrá en cuenta las interrupciones y la huella del tiempo sobre las investigaciones: ella supone "la transmisión histórica exitosa de las investigaciones exitosas".*
- *La síntesis, porque en la transmisión de los saberes a los alumnos, los momentos fuertes de la investigación serán detenidos para "hacer la economía del detalle" Verret (1975, p. 141, Gómez, 2005).*

Por otro lado, para Varret la transmisión de los saberes supone la definición explicitas del saber a transmitir es decir la publicación del saber y el control sistematizados de los aprendizajes según los procedimientos de verificación, es decir el control social de los aprendizajes. Además de la transmisión de los saberes establece la diferencia entre los saberes como aquellos que pueden ser enseñados y enseñables con aquellos que no pueden ser enseñables o no escolarizados para lo cual divide la práctica teórica del saber que dé lugar a prácticas de aprendizajes especializados llamado sincretización del saber, cada una de estas debe separarse el saber y la persona, es decir, la despersonalización del saber, para luego dar lugar a la programación del saber es decir, la organización y secuencias razonables de estos. En cuanto a los saberes no escolarizable distinguimos aquellos que serán socialmente no escolarizables, como saberes reservados y aristocráticos y con aquellos que serian gnoseológicamente no escolarizables como saberes totales, personales o empíricos. Nos remitiremos nuevamente a Verret (1978) para ampliar cada uno de ellos.

"esas condiciones, al mismo tiempo que definen el campo de transmisibilidad escolar, definen su campo de intransmisibilidad:

- *serán socialmente no escolarizable*

1°- los saberes reservados (saberes esotéricos, saberes iniciáticos), en tanto escaparían a la publicidad.

2°- los saberes aristocráticos, en tanto pretenderían eludir las exigencias de un control social públicamente definido según normas universales que excluyen todo privilegio sectorial.

- *serían gnoseológicamente no escolarizables*

  1°- los saberes totales o con pretensión de totalidad, en tanto oponiéndose a los procedimientos analíticos; sus aprendizajes se resistirían también a los programaciones organizadas y en secuencias progresivas.

  2°- los saberes personales, en tanto estarían consustancialmente vinculados con personas insustituibles.

  3°- los saberes empíricos, en tanto su sincretismo los conduce previamente a la adquisición global y personal, por los medios intuitivos de la familiaridad mimética, sin que se sepa nunca precisamente cuando se aprende ni exactamente qué se aprende. ¿Sabemos siquiera que aprendemos a hablar, a escuchar, a vestirnos, a hacer bromas?" Verret (1975, pp. 147-148).

Más tarde en 1985 Chevallard retoma el tema de traslación del conocimiento el cual llama transposición didáctica para diferenciarlo, pues va más allá de la traslación de conocimiento sino que va a la adaptación y selección del conocimiento científico para adaptarlo a sistemas educativos y propiamente al campo de la matemática. Chevallard estudia junto con Joshua la noción de distancia (entre dos puntos) dicho concepto fue introducido en 1906 por Maurice Frechet quien creó este objeto matemático para sus demostraciones en el análisis funcional. Chevallard y Joshua se interesaron en pasar esta noción del dominio de la matemática sabia (objeto de saber matemático) a aquellos programas de las instituciones educativas (objeto a enseñar), existiendo así una gran diferencia entre el concepto para el cual fue creado e introducirlo en el programa de séptimo grado de geometría. De allí que la transposición didáctica va a dar una noción de distancia de un modo muy diferente.

2.2. DEFINICIÓN DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA.

El concepto de transposición didáctica nace de la relatividad del saber al interior del cual se presenta, más específicamente se refiere a la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en "conocimiento para ser enseñado" (Chevallard, 1985).

Según Chevallard (1985) la transposición didáctica es:

> "*un conjunto del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que un objeto del saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica*" Chevallard (1985, p.39, Gómez, 2005).

Así mismo Chevallard distingue entre una transposición didáctica *stricto sensu* y una *sensu lato*, la primera hace referencia a la transformación de un contenido del saber matemático en una adaptación didáctica de ese objeto, mientras la segunda hace referencia al estudio científico del proceso de transposición la cual puede explicarse a través del siguiente esquema.

Objeto del saber $\longrightarrow$ objeto a enseñar $\longrightarrow$ objeto de enseñanza.

Aquí se tiene en cuenta “el objeto del saber, el objeto a enseñar y el objeto y el objeto de enseñanza en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explicito, de la practica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido” Chevallard (1991. p.46, Solarte, 2006).

Además, Chevallard define el sistema didáctico como un objeto preexistente que se lleva a cabo entre el sujeto que enseña (maestro), el sujeto que aprende (estudiante) y los contenidos que son estudiados y aprendidos (saberes) y la relación entre estos constituye lo que él llama relación didáctica. (Ver figura 1).

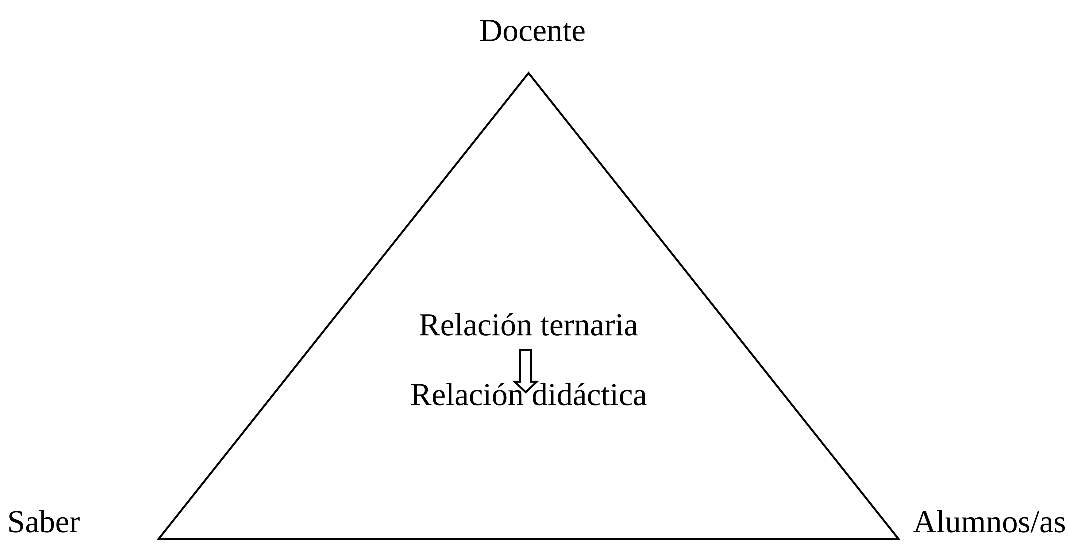


Figura 1. Sistema didáctico

Considerando así que cada asignatura y cada unidad didáctica es un nuevo sistema didáctico conformado por esta terna en la cual es fundamental establecer los “sistemas de enseñanzas referentes a los cuadros institucionales, a los medios materiales, a aquellos que toman decisiones como pedagogos y asesores pedagógicos y a los padres de los estudiantes” (D’ Amore, 2006), con el fin que el saber no debe ser ni demasiado cercano, ni demasiado distante del saber socio familiar. En este sentido si el saber enseñado es demasiado cercano al saber matemático es incomprensible para la familia, pero si es demasiado distante le resta importancia, lo que se pretende es que haya un equilibrio entre estas posibilidades. De allí que el maestro debe tomar en cuenta al sistema didáctico y al ambiente social y cultural, es decir a la noosfera en la que actúa. La noosfera es entonces “la esfera donde se piensan”- donde se piensa acerca del sistema de enseñanza, es la intermediaria entre el sistema escolar y el ambiente social más allá de la escuela. (Ver figura 2).En otras palabras es un área en la que se hallan todos aquellos que se interesan en el sistema de enseñanza.

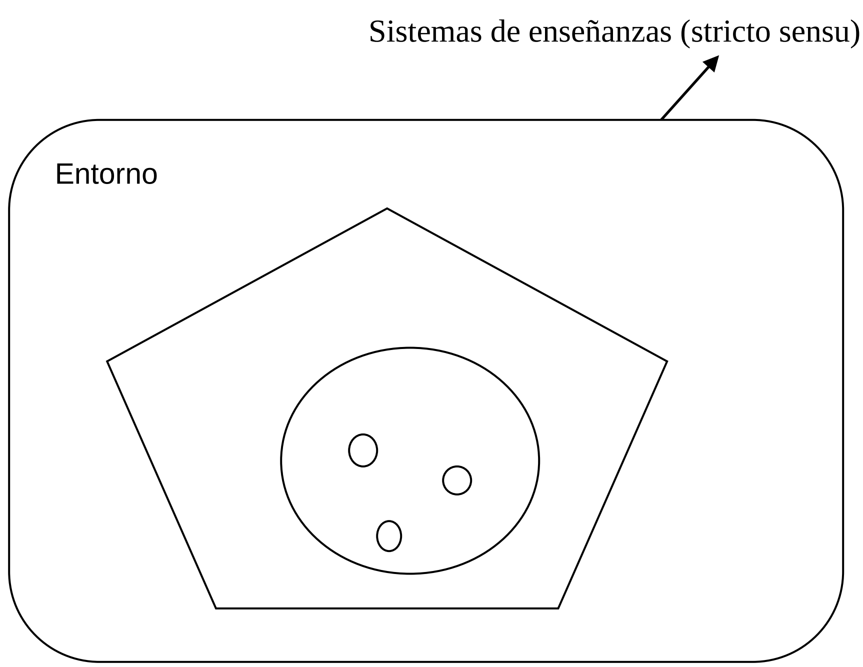


Figura 2. La noosfera.

Así la transposición didáctica consiste en extraer un elemento del saber de su contexto para recontextualizarlo en el contexto elementalmente único de una clase.

2.3. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN LOS TEXTOS ESCOLARES.

Según Solarte (2006) los textos son registros de la realidad, estos son considerados como recursos didácticos en la educación, ya que proponen un camino, un enfoque y una perspectiva que marca el proceso de construcción del conocimiento además; tienen un propósito para la enseñanza que no solo es el de enseñar, sino el de contribuir en la formación para el aprendizaje; esto se logra a través del diseño de sus actividades al presentar los conceptos, las cuales deben influir en el proceso de transformación del pensamiento.

Siguiendo a Chevallard (1985, p 69) considera que la transposición didáctica debe tener en cuenta la desincretizacion del saber (división teórica de los campos de saber), la despersonalización del saber (la separación del saber y de la persona), la programabilidad de la adquisición del saber, la publicidad del saber y el control social de los aprendizajes que él denomina la puesta en texto del saber lo cual conduce a hablar de la textualización del saber que implica la delimitación de saberes parciales de los cuales se expresa en un discurso autónomo. Este proceso produce una desincretizacion del saber, es decir la modificación del saber producto de la conciliación entre el estudiante, el docente y el saber, en este caso es pertinente hablar de las nociones matemáticas y las nociones paramatemáticas entendiendo la primera como el objeto del saber y la segunda como las que sirven de soporte a las nociones matemáticas por ejemplo el concepto de función cuadrática son nociones paramatemáticas, la noción de función y la noción de función potencial las cuales a su vez se enmarcan dentro de un modelo más general como lo es el concepto de función polinómial como noción protomatemática.

Los textos de matemáticas difieren de los científicos por las características propias de conocimiento escolar, por el lenguaje y términos cotidianos e inusual al nombre científico, por su organización en unidades las cuales consta de varios temas precedido de una introducción que expone brevemente el propósito de la misma y algunos al final de cada unidad presentan un diagrama o resumen que reflejan los contenidos que la integran al igual que unas actividades complementarias de los temas tratados.

Según Gómez (1997) en los libros de texto se pueden identificar distintos métodos de presentación del contenido como intento de dar solución a los problemas de enseñanza, entre ellos están el método de regalo que enfatizan el aprendizaje sobre ejemplos ilustrativos sin hacer justificaciones o fundamentos; el método razonado es aquel que pone de manifiesto la lógica de las reglas y hacen el análisis de las leyes que la sustentan; el método de las repeticiones es el que busca el aprendizaje mecánico, mientras que el intuitivo es aquel apoyado en imágenes concretas huyendo del formalismo abstracto. El método de actividades es aquel que introduce actividades que no son complementarias sino que forman parte del mismo proceso de aprendizaje; por último, el método orientado a la estructura que enfatizan los conceptos básicos de los procedimientos y las relaciones estructurales sobre las que se basan.

De lo anterior podemos decir que el conocimiento que aparece en los textos escolares es producto de la transposición didáctica, de allí que el conocimiento matemático, debe ser desglosado, dividido en partes para ser evaluado, se buscan ejemplos comprensibles, se utilizan esquemas o diagramas que describan las aplicaciones de conceptos constituyéndose así un texto con fines didácticos pero reduciendo la esencia fundamental del concepto como consecuencia de una descontextualización del concepto.

Además de lo señalado, los textos de estudio concurren a un fenómeno de deshistorización donde no tiene importancia las circunstancias que dieron origen al conocimiento, el cual toma una forma ahistórica. Al introducir un concepto en el sistema de enseñanzas, se presentan aplicaciones que no guardan relación con los que originalmente concibieron el concepto como lo es caso del concepto de matriz que lo definen en los textos escolares de secundaria y algunos textos universitarios como arreglos rectangulares de números en filas y columnas encerrados en un par de paréntesis redondos o cuadrados, utilizando este concepto para organizar datos donde se establece la relación precio o cantidad o hallar valores como en el siguiente ejemplo:

Si las matrices son iguales ¿Cuál es el valor de los términos desconocidos?

$$\begin{pmatrix} a & 5 & 2 \\ -3 & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & b & 2 \\ -d & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$a =$ _____ $b =$ _____ $e =$ _____ $f =$ _____

$$\begin{pmatrix} x+1 & 0 & y+3 \\ 23 & z & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y & -2 \\ z+20 & 3 & z-5 \end{pmatrix}$$

$x =$ _____ $y =$ _____ $z =$ _____

Mientras que en los libros de textos científico se define como una función M del conjunto $I \times J \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en $\mathbf{R}$ tal que $M((i,j)) = a_{i,j}$

En cuanto a la organización de los temas en básica primaria se introduce el concepto de logaritmo como una operación inversa de la potenciación la cual consiste en hallar el exponente de la potencia careciendo del sentido para lo cual fue creado. De este modo podemos mirar la transposición didáctica desde dos puntos de vitas: como proceso y como resultado, el primero se refiere al conjunto de transformaciones que experimenta un concepto para ser introducido al sistema de enseñanzas y el segundo como la diferencia que podemos establecer entre el conocimiento matemático y este mismo en el sistema de enseñanza. Por consiguiente para la elaboración de un libro de texto se debe delimitar que parte del significado del concepto se presentara y seleccionar ejemplos y problemas que se utilizaran para contextualizar los conocimientos y así evitar interpretaciones inadecuadas para su comprensión.

2.4. TRANSFERENCIA EN EL APRENDIZAJE Y TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA.

Cuando hablamos de transposición didáctica nos referimos a la adaptación del conocimiento científico o saber matemático para ser enseñado en las instituciones educativas, a partir de allí el conocimiento sufre una serie de deformaciones que es lo que los autores de texto plasman en los libros convirtiéndose estos en una herramienta clave para el que hacer pedagógico de los docentes, pues es el que guía el contenido de su enseñanza generando ciertas dificultades en los estudiantes para aplicar lo visto en el aula en otras situaciones, áreas o contextos, que es lo que conocemos como transferencia del aprendizaje.

De allí partimos para comparar la influencia de la transposición didáctica en la transferencia del aprendizaje, considerando en primer lugar que la transposición didáctica se convierte en un obstáculo tanto didáctico como epistemológico, es obstáculo didáctico porque la situación didáctica planteada en aras por lograr un buen aprendizaje presenta una situación diferente a la forma como se originó el conocimiento; y es epistemológico porque el conocimiento se presenta en forma pragmática , cualquier que sea el obstáculo dificulta la transferencia del aprendizaje ya que el aprendiente pretende aplicar un conocimiento que no es exacto ni original, es decir obstáculos para la transferencia ya que al perderse la esencia del concepto resulta difícil mirar como realmente se presenta este en la transferencia.

En segunda instancia tenemos algunos libros de textos que son productos de la transposición didáctica en cuanto a su estructura, contenido, metodología basada en el esquema de teoría y práctica y la existencia de conceptos auxiliares que en algunos casos son necesarios, convirtiéndose estos en impedimento para comprender los contenidos de enseñanza perdiéndose la esencia del conocimiento y la probabilidad que el estudiante transfiera lo aprendido ante diferentes situaciones.

En tercer lugar tenemos la misma transposición didáctica que el maestro hace al explicar un contenido de enseñanza tratando de buscar estrategias que simplifiquen aun más los contenidos de la misma trayendo como consecuencia la dificultad para transferir lo aprendido.

En este orden de ideas encontramos a D’Amore (2006) el cual considera la estrecha relación que hay entre la transposición didáctica y la transferencia del aprendizaje y al respecto dice que es indispensable que los programas transfieran los saberes, corresponde a los maestros en su práctica inventar ejercicios, poner en marcha modalidades a través de las cuales estos saberes tengan un sentido, y vigilar la práctica de los estudiantes. La transposición conduce entonces al problema de la transferibilidad de lo que se ha aprendido, al enraizamiento de los conceptos que se relacionan al interior de los saberes ya poseídos.

En este sentido es necesario meditar sobre lo que proponen los programas de matemáticas escolares los cuales deben propiciar experiencias a los estudiantes en las diversas aplicaciones de la matemática al igual que la adecuación y selección de estrategias ante situaciones concretas, con el fin que los estudiantes aprendan a formular las preguntas claves, analizar y conceptualizar problemas, definir el problema y el objetivo, descubrir pautas y similaridades, buscar los datos apropiados, experimentar, transferir habilidades y estrategias a nuevas situaciones y utilizar sus conocimientos de base para aplicar la matemática. Este proceso de transferencia no es automático, sino que en este caso debe ser propiciado por los libros de textos mediante los ejercicios propuestos a los estudiantes. Este es el caso que se tratara en el siguiente capítulo.

3. TRANSFERENCIA PRESENTE EN LOS LIBROS DE TEXTOS DE MATEMATICA DE 9° GRADO

En esta parte estudiaremos el tipo de transferencia cercana – lejana presente en los libros de textos de 9° grado en cuanto a las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales.

3.1. GENERALIDADES DE LOS LIBROS DE TEXTOS.

Antes de analizar los conceptos a investigar en los libros de textos es necesario afinar algunos aspectos metodológicos.

El texto puede considerarse como: objeto de estudio, material de consulta, registro de actividades del alumno o colección de ejercicios propuestos y problemas para resolver. El libro de texto es el que utiliza habitualmente el profesor a lo largo de un curso como elemento orientador de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La práctica de la enseñanza está determinada más por los textos que por los decretos y reformas educativas. Según González y Sierra (2004), "la producción de los libros de textos se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a corrientes didácticas y epistemológicas en uso." (p 391)

De acuerdo con lo anterior los libros se clasifican en tres clases según la forma como se presenta el contenido. Expositivo cuando los temas matemáticos se presentan como enunciados, reglas y procedimientos aparentemente aislado y sin conexión a la realidad, pero obedece en cierta forma a alguna presentación de la matemática. Tecnológicos cuando la presentación de los conceptos inducen a la mecanización, siguiendo un estilo conductista con la intensión de adquirir destrezas sobre ciertos procesos mediante la ejercitación. Comprensivo cuando la presentación de los conceptos obedece a una construcción formal de la matemática, estableciendo una relación adecuada de los conceptos estudiados con otros conceptos.

Para el examen de las definiciones y ejercicios se hará un análisis exhaustivo (Monterrubio y Ortega 2011) detallando los contenidos según su presentación, secuenciación y organización en los textos, las conexiones de conceptos estudiados con otros conceptos y las actividades o problemas que tienen por objeto la transferencia.

En términos generales consideramos como sinónimos las expresiones textos escolares, textos guías, textos de estudio y manuales escolares, los cuales se caracterizan por ser libros impresos producidos por la editoriales y que se utilizan en la escuela para la comunicación de los conocimientos, estos textos tienen en común que ellos obedecen a las políticas de estado con base a las políticas curriculares y que han sido impresos con ánimo educativo y a nivel comercial.

Los textos bajo estudio son los siguientes:

- Losada, De Losada y Mateus (1978) Matemática en Acción 4. McGRAW – HILL LATINOAMERICANA, S.A.
- Estrada, Moreno y Novoa (2005) Espiral 9° Norma S.A.
- Arévalo y Cols (2008) Glifos 9°. Procesos matemáticos. Libros & libros S.A.

3.2. FUNCIONES LINEALES

Una relación es un subconjunto de un producto cartesiano A x B siendo A y B conjuntos. La relación es funcional, si todo elemento de A aparece como primera componente de los pares de la relación, y para cualesquiera dos pares (x, z) y (x, y) que pertenezcan a la relación se tiene que y = z. Las relaciones funcionales se llaman funciones.

De este concepto de función partimos para averiguar como éste se presenta en los libros de textos de matemática de noveno grado.

Comenzamos con el texto matemática en Acción 4 (1978).

En primer lugar no dan una definición de función sino que recuerdan lo que es una función lineal definiéndola como:

"Una función lineal f *es una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *de la forma* $f : x \to mx + b$ *o* $f(x) = mx + b$.

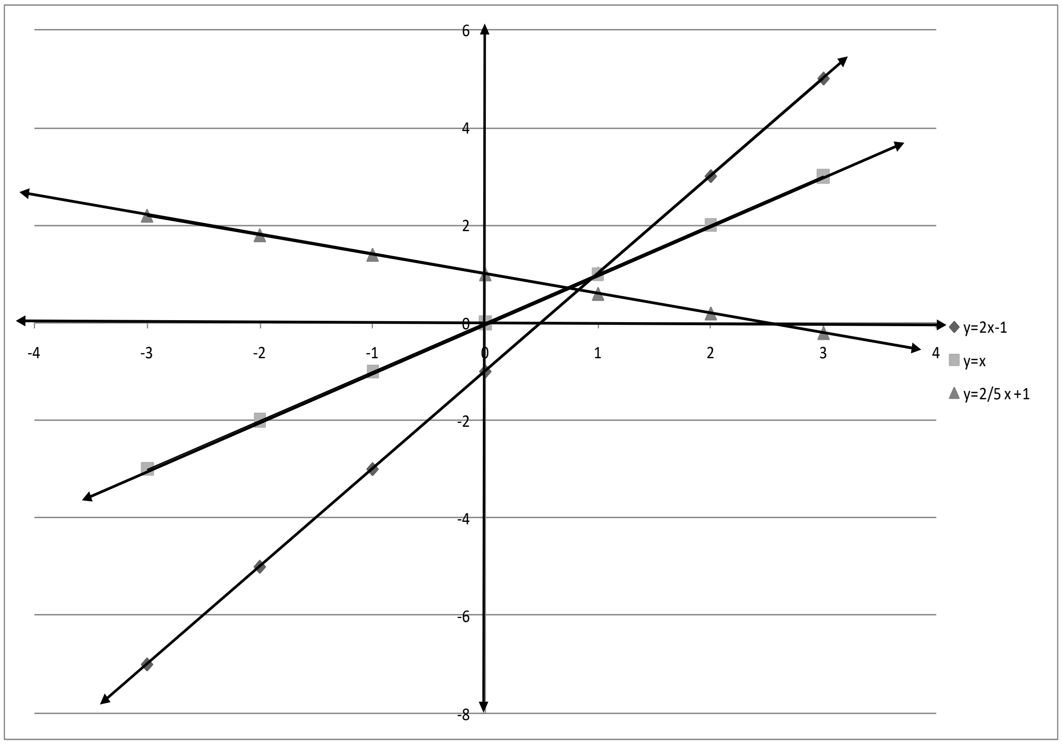
Seguido de ejemplos:

1. $f(x) = x$
2. $g(x) = 2x - 1$
3. $h(x) = -\frac{2}{5}x + 1$

Parte de lo visto en el texto anterior al presente (Matemática en Acción 3) se toma como conocimiento previo para referirse a la gráfica de una función lineal, para tal fin se expresan de la siguiente forma:

"La gráfica de una función lineal en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *es una línea recta. Es por ello que se llaman funciones lineales"*

Ejemplo:



Continuamos agregando que

"Por conveniencia de notación, a veces escribimos $f(x) = x$ o $g(x) = 2x - 1$ o $h(x) = -\frac{2}{5}x + 1$.

Cuando se trata de funciones lineales también se acostumbran a escribirlas de la siguiente forma. $ax + by = c$.

Nota: no se permite que a y b sean simultáneamente iguales a 0.

Ejemplos escritos en esta forma, las ecuaciones anteriores son:

$$x - y = 0, \qquad 2x - y = 1, \qquad \frac{2}{5}x + y = 0$$

Desde el punto de vista de la representación de una función no considera los conjuntos de partida y llegada aunque señala que es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ **.** La definición de función se plantea como una asignación.

Cuando se escribe la expresión $ax + by = c$, esta representación corresponde a una ecuación, de tal manera que allí más bien debería especificarse que las parejas (x, y) que definen la función (relación) obedecen a dicha ecuación.

Valdría la pena preguntarse si los estudiantes distinguen los conceptos de función y ecuación, y si ¿una ecuación permite representar una función?; ya que este hecho se presenta cuando se agrega:

"Decimos que una pareja ordenada (x, y) es una solución de una ecuación lineal si *la pareja satisface la ecuación; por ejemplo (2, 2) es solución de la ecuación* $x - y = 0$, *puesto que 2-2=0. En cambio (-1, -3) no es solución de la ecuación* $x - y = 0$ *puesto que -1-3≠0.*

Ejercicios propuestos.

Hallar cinco soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones lineales. Para ellos tomemos los tres primeros.

1. $x - y = 0$
2. $x + y = 0$
3. $2x + 3y = 0$

De acuerdo con Chevallard (1985) y Solarte (2005) el texto hace la transposición didáctica del concepto de función de tal manera que la funda en el concepto de ecuación produciéndose lo que se llama la desincretización del saber tratando de conseguir un puente de comunicación entre el docente y el estudiante. Este hecho es recurrente en los ejercicios propuestos donde debería decirse que la ecuación representa una función y la cual debería expresarse como tal. La presentación del concepto comienza formal pero se vuelve informal mediante los ejemplos pues el objetivo es conectar los conceptos de función lineal y ecuación lineal.

Luego aparece el siguiente subtitulo.

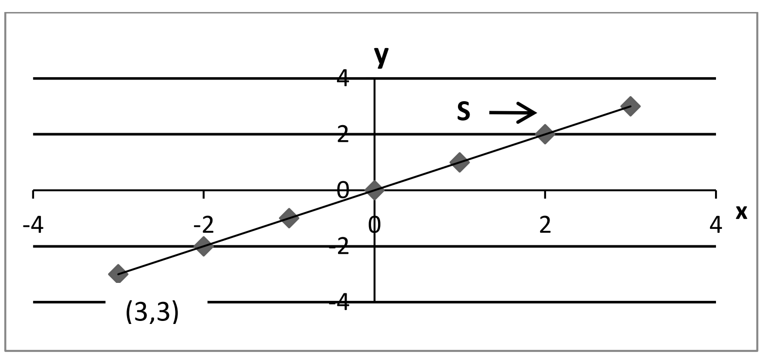
"Conjunto solución de una ecuación lineal.

Consideremos la ecuación lineal $x - y = 0$.

El conjunto solución de esta ecuación es $S = \{(x, y) / x - y = 0\}$

S tiene un número infinito de elementos. Además como apreciamos en la figura anterior, la gráfica de S en el R x R es una línea recta. Cada elemento de S está representado por un punto sobre la recta.

Así:



Para la aplicación de este tema presentan algunos ejemplos de casos concretos como los que se siguen a continuación.

Ejemplo 1.

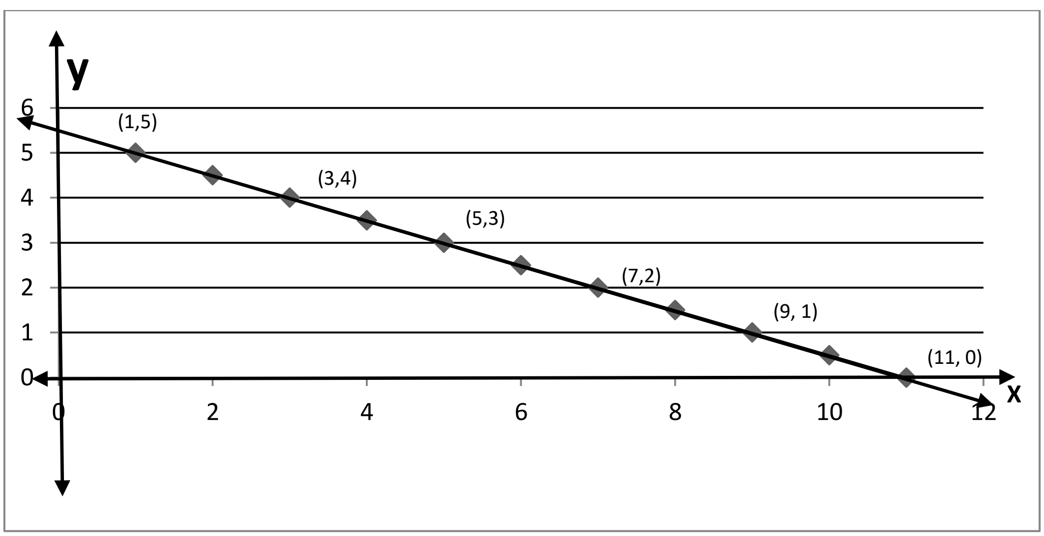
“Consideremos la siguiente pregunta:

Si se tiene solamente monedas de 5 y 10 centavos. ¿De cuantas maneras se pueden formar grupos de 55 centavos?

Si denotamos por x el número de monedas de 5 centavos y por y el número de monedas de 10 centavos, este problema puede formularse de la siguiente manera: $5x+10y=55$

Claro está que hacemos algunas restricciones sobre los valores que puede tomar x *y* y*. Deben ser positivos o ceros, pues no podemos tener -2 monedas y deben ser enteros puesto que tampoco se puede tener* $\frac{1}{3}$ *de ninguna de las monedas.*

Hagamos la gráfica de esta ecuación lineal.



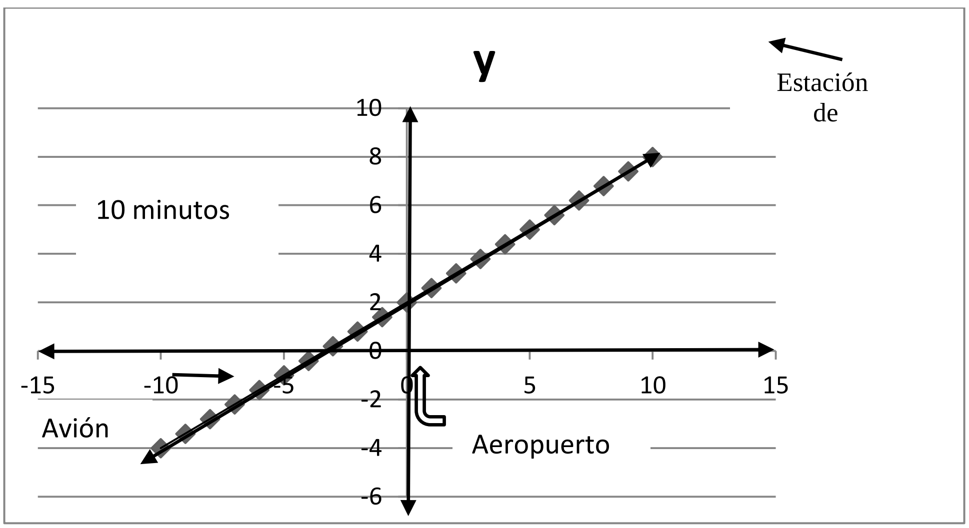
Como podemos observar, la gráfica de esta ecuación pasa por los puntos (1,5) (3, 4) (5, 3) (7, 2) (9, 1) (11, 0) o sea que hay 6 maneras de obtener 55 centavos que son:

Una moneda de 5 y 5 monedas de 10, 3 monedas de 5 y 4 monedas de 10, 5 monedas de 5 y 3 monedas de 10, etc.

Ejemplo 2.

Un avión se encuentra a tres kilómetros al sur y a cinco kilómetros al oeste de un aeropuerto, y unos minutos más tarde se encuentra a dos kilómetros directamente al norte del aeropuerto. Si se sabe que el avión está volando en línea recta, ¿pasará por encima de una estación de rastreo que se encuentra a 20 kilómetros al norte y 12 al este del aeropuerto?

Podemos representar la información dada en este problema con la siguiente figura:



Usando los dos puntos dados sobre la trayectoria recta del avión, podemos hallar la ecuación. Sabemos que $y = mx + b$.

Pero b=2 y $m = \frac{2-(-3)}{0-(-5)} = \frac{3}{5}$

La ecuación de la trayectoria es $y = \frac{3}{5}x + 2$

Ahora, veamos si el punto (12, 20) se encuentra sobre esta recta. Sustituyendo los valores x=12, y=20 obtenemos $20 \neq \frac{46}{5}$. *Por lo tanto, no pasará sobre la estación de rastreo.*

Ejemplo 3:

Una fábrica produce dos clases A y B de dulces que venden a $2,40 y $1,90 la libra, respectivamente. ¿Cuántas libras de cada producto puede producir para poder vender un total de $2500?

Sea x el número de libras de clase A y y el número de libras de clase B. Entonces, el problema anterior se puede formular por medio de la siguiente ecuación línea: $2,40x + 1,90y = 2500$

Nuevamente anotamos que los valores de x y y en esta ecuación no pueden ser negativos.

Naturalmente, si introducimos condiciones adicionales sobre los costos y capacidad de producción podremos considerar problemas difíciles como: ¿Cuántas libras de cada producto debe producir la fábrica para obtener la mayor ganancia posible? Esta forma parte de la llamada programación lineal que empezaremos a estudiar en el libro 5 de esta serie.

En el ejemplo 1 se intenta hacer una transferencia cercana del concepto de función, no obstante observamos que hay problemas de conceptualización ya que el dominio y el rango de la función quedan restringidos a enteros positivos lo cual hace perder el sentido de función real. De esta manera el problema muestra una transferencia negativa según Brasnford, Brown, Cocking(2001).

Con respecto al ejemplo 2 nuevamente transpone el concepto de función lineal como una ecuación lineal valiéndose de una representación grafica y para ello utiliza el concepto de pendiente cuya definición se encuentra en el libro anterior (Matemática en Acción 3) lo cual introduce cierta discontinuidad en la secuencia de los contenidos ya que el estudiante no es posible que recuerde las propiedades de la línea recta.

El ejemplo 3 se comporta como los dos anteriores excepto que trata de llegar a los estudiantes a una transferencia lejana aplicada a conceptos que se estudiaran posteriormente.

En síntesis podemos decir lo siguiente: la introducción del concepto es informal, la ubicación de concepto en el texto corresponde al programa curricular del curso, ilustrado con algunas gráficas y ejemplos que permiten en cierta forma transferir el conocimiento. Es de anotar que esta transferencia es mínima pues los ejercicios llevan a la mecanización del concepto, clasificándose como un texto tecnológico, invirtiéndose tiempo en la tarea sin muchos meritos para la comprensión del concepto de función lineal.

Ahora bien, analicemos el segundo texto que corresponde a Espiral de 9°:

Antes de introducir al tema de funciones el texto presenta una serie de actividades preparatorias como se siguen a continuación.

Veamos los dos primeros ejemplos de ellos.

1. *Soluciona las siguientes ecuaciones.*

   a. $2x = 10$ *b.* $x + 5 = 2x - 2$

2. *Evalúa el siguiente polinomio en los valores x dado:*

   a. $f(x) = -2x + 5, x = 1, -2, 3$ *b.* $f(x) = x + 2, x = 0, 1, -2$

3. *En el plano cartesiano, traza la grafica de las siguientes funciones.*

   a. $f(x) = x$ *b.* $f(x) = -x$

Este texto no presenta el concepto de función ni función lineal pues parte de que si el estudiante está usando este texto es porque ya vio el anterior (Espiral 8).Luego presenta una parte de la aplicación de las funciones lineales como es el caso de la recta y su pendiente, ecuación de la recta, rectas paralelas y perpendiculares y ecuaciones lineales en dos variables.

Es conveniente remitirnos al texto anterior es decir Espiral 8 para analizar en el texto el concepto de función y función lineal para que el alumno lo aplique en este.

Antes de empezar consideremos lo siguiente.

"Existe una relación de dependencia entre variables cuando los valores de una variable dependen de otros valores".

"La expresión que muestra la relación de dependencia de una de las variables respecto a la otra se denomina regla o fórmula".

Ejemplo 1.

Se quiere construir un campo deportivo en forma rectangular de largo x *y de ancho* z *, el cual se cercará con 1400 metros lineales de malla.*

a. *Encontremos una fórmula que exprese el área del campo deportivo y dependa del largo* x.
b. *En cada caso hallemos el área del campo si el largo* x *mide: 100m, 200m, 250m, 350m, 400m y 500m.*
c. *Hallemos un valor de* x *para el cual tenga sentido encontrar el área del campo.*

Solución:

a. *Representemos con las letras A y P el área y el perímetro del campo deportivo, respectivamente. Entonces:*

$$A = xz \qquad\qquad P = 2x + 2z$$

Como se utilizan 1400 metros lineales de malla para cercar el campo, entonces $2x + 2z = 1400$.

Esta ecuación la podemos simplificar dividiendo ambos lados entre 2:

$$\frac{2x+2z}{2} = \frac{1400}{2}$$

$$\frac{2(x+z)}{2} = 700$$ *(Factorizamos 2 en* $2x + 2z$ *)*

$$x + z = 700$$ *(Simplificamos el 2)*

Despejando z tenemos: $z = 700 - x$

Reemplacemos esta expresión de z en la fórmula del área:

$$A = xz$$

$$A = x(700 - x)$$

b. *Esta fórmula para el área sólo depende de la medida del largo x, es decir,* $A(x) = x(700 - x)$.

Hallemos las posibles medidas del área del campo deportivo para los valores dados a x. Para ello, realizaremos estos valores en la expresión $A(x) = x(700 - x)$.

Longitud del largo x en m	*Área del campo deportivo en m²*
100	*60000*
200	*100000*
250	*112500*
350	*122500*
400	*120000*
500	*100000*

c. *Varios son los posibles valores, por ejemplo: x =750m, que aunque tiene sentido como medida para la longitud de este lado, no da lugar a un valor correcto de área: A=750*(700-750)=750*(-50)= -37500.*

Los valores que puede tener la variable x, para que se halle correctamente un valor para el área, son todos los números reales que pertenecen al intervalo cerrado de números reales [0, 700]. Observemos que para cada valor de x en [0, 700] existe un único valor A(x), asignado por la regla A(x)=x(700 - x). Por tanto, no es posible que algún x tenga dos o más valores A(x). Estas características nos llevan a constituir el concepto de función.

Definición de función:

"Una función en los números reales, es una regla que hace corresponder a cada elemento de un subconjunto del conjunto de números reales un único número real"

Ejemplo 2:

Enunciado.

Un depósito de agua potable, de forma cilíndrica, tiene 8 m de altura y 2 m de radio en su base. Representemos con la variable x el nivel del agua potable en el depósito, medido en metros.

a. *Escribamos una fórmula para el volumen de agua en el depósito cuando el nivel del agua es x metros.*
b. *¿Cuál es el mayor conjunto de números reales donde se pueden tomar valores para la variable x?*
c. *¿En cuánto tiempo el depósito estará completamente lleno?*

En general.

La ecuación que representa una función, por lo general, se denota con $f(x)$, donde y=f(x) y se dice que "la variable y es la función de la variable x, de acuerdo con la regla f ". La variable x se llama variable independiente, y el conjunto de números reales de donde puede tomar valores se denomina dominio de la función f. La variable y se llama variable dependiente, y el conjunto de números reales de donde puede tomar valores recibe el nombre de recorrido o rango de la función.

Ejemplo 3:

Determinemos cuál de las siguientes ecuaciones define una función y expliquemos por qué.

a. $y-4x=2$ *b.* $x^2+y^2=100$ *c.* $y^3-x=8$

Definición de función lineal

"Una función f es lineal cuando corresponde a una expresión de la forma $y=f(x)=ax$, donde a es una constante, x es la variable dependiente y la variable

independiente es y *; además,* $x \in \mathbb{R}$ *y* $y \in \mathbb{R}$ *. La gráfica de la función lineal pasa por el origen de coordenadas."*

Ejemplo:

Determinemos si los datos de la tabla corresponden a una función lineal.

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	*0*	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

De lo anterior podemos establecer que enmarcan el concepto de función como una regla o fórmula de correspondencia entre los números reales; podríamos preguntarnos si todas las reglas o fórmulas modelan situaciones que definen funciones. Se considera además el dominio y rango de la función como los valores que puede tomar las variables (x , y) respectivamente.

No toda función se puede representar como una regla si tomamos como dominio el conjunto de personas y como codominio los números reales, al asignarle a cada persona su edad estamos construyendo una función a la que no le corresponde una formula es una regla que no se puede expresar por una fórmula.

De acuerdo con Gómez (2005) los libros de texto son producto de la transposición didáctica de esta manera el concepto de función se centra en una fórmula o regla produciéndose así una descontextualización del concepto para su aplicación. El contenido aquí se presenta como actividades que forman parte importante en la construcción del concepto.

En los ejemplos 1 y 2 se evidencia una transferencia lateral según Gagne (1970), pues el estudiante debe tener claro ciertos temas anteriores para su resolución y comprensión, como lo son los conceptos de perímetro, área y volumen pero a la vez se presenta una deficiencia ya que el dominio y el rango quedan limitados a un intervalo cerrado, introduciendo un concepto que no ha sido aclarado o estudiado con anterioridad, puesto que un intervalo cerrado es un subconjunto de los números reales, generando en el estudiante una transferencia negativa.

Retomando Espiral 9 encontramos un primer ejemplo:

"Comprobemos que los puntos (5, 0) y (1, -8) están en la gráfica de la ecuación $2x - y = 10$.

Solución:

Si reemplazamos $x = 5$, $y = 0$, en la ecuación obtenemos:

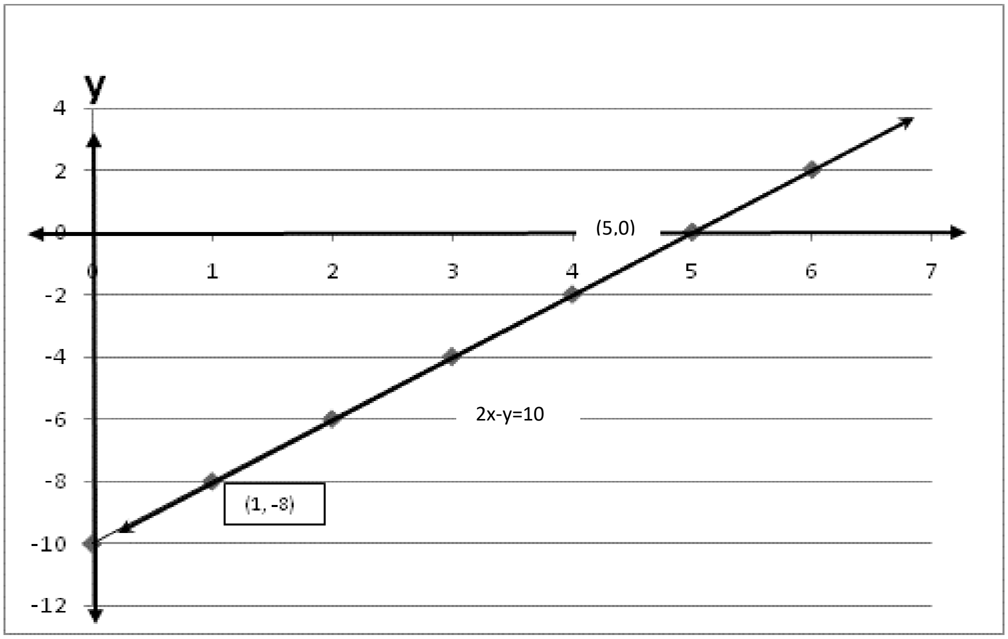
$2(5) - (0) = 10$

$10 - 0 = 10$ que es una igualdad.

En forma similar,

$2(1) - (-8) = 10$

$2 + 8 = 10.$



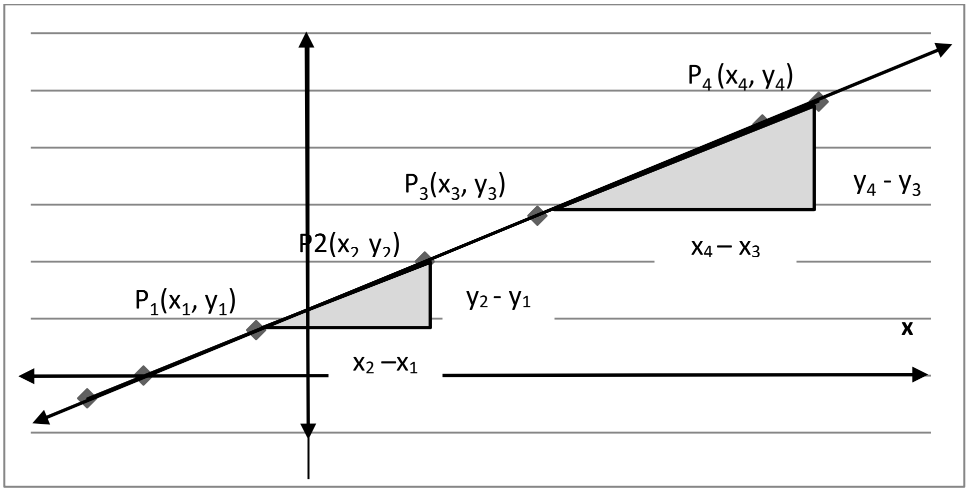
En cuanto a la recta y su pendiente encontramos lo siguiente:

“Una característica principal de la gráfica de una línea recta es su pendiente. La pendiente se refiere a la inclinación, (creciente o decreciente) de la recta.

Seleccionemos en una recta cuatro puntos y formemos dos parejas $\{P_1, P_2\}$ *y* $\{P_3, P_4\}$*. Dibujemos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa está sobre la recta y los catetos son paralelos a los ejes coordenados. Observemos que los triángulos que se han formado son semejantes, sin importar los puntos que consideramos; por lo tanto, la razón entre los catetos de esos triángulos es la misma para todos ellos. En particular,*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Esta razón indica la medida de la inclinación de la recta respecto al eje horizontal y se representa con la letra m.



La pendiente m, de una recta no vertical que pasa por los puntos

$$(x_1, y_1) \text{ y } (x_2, y_2) \text{ es: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

El orden de los puntos no tiene importancia.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Veamos el siguiente ejemplo 2.

Hallemos tres puntos que estén en la recta que pasa por el punto (2,3) y que tiene pendiente $m = \frac{4}{3}$.

Solución:

La pendiente nos da la información acerca de los incrementos en las coordenadas x y y cuando vamos de

Un punto a otro de la recta. Digamos que (x_1, y_1)*= (2,3), entonces:*

$$m = \frac{4}{3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - 3}{x_2 - 2}$$

Para calcular los valores de x y y solucionamos las siguientes ecuaciones:

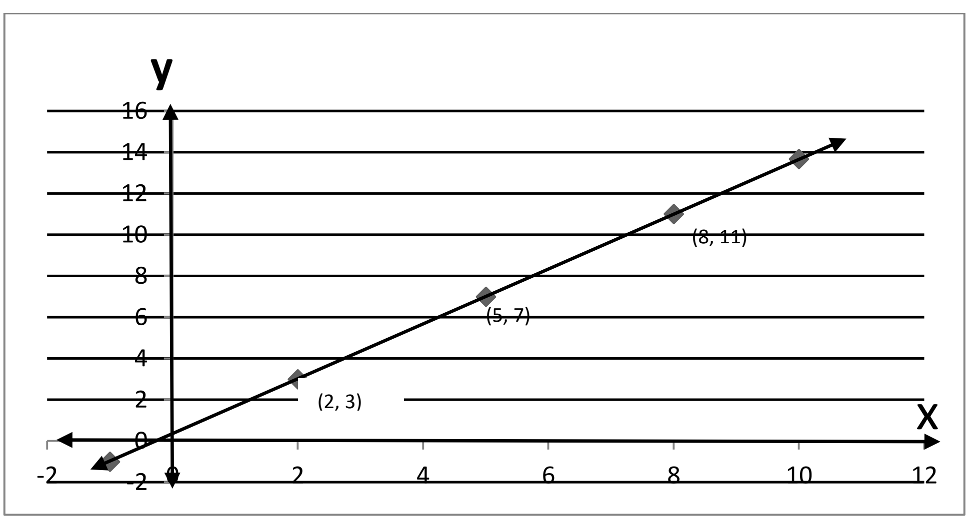
$y_2 - 3 = 4$ y $x_2 - 2 = 3$ y obtenemos que $y_2=7$ y $x_2=5$, por consiguiente el punto (5, 7) está en la recta. Observemos que los incrementos en x y en y al ir a (5, 7) son los datos por $m=\frac{4}{3} = \frac{incremento}{incremento}$

Observemos que también qué $m=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$*; procediendo en forma análoga a como lo hicimos anteriormente tenemos que* $m=\frac{8}{6}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-3}{x_2-2}$*. De esta forma tenemos un nuevo punto al solucionar las ecuaciones $y_2 - 3 = 8$ y $x_2 - 2 = 6$. Este es el punto (8, 11).*

En forma similar tenemos:

$m=\frac{4}{3}=\frac{-4}{-3}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-3}{x_2-2}$ *y solucionando obtenemos* $y_2-3=-4$ *y* $x_2-2=-3$*, es decir, el punto (-1, -1).*

Veamos la gráfica.



En este ejemplo las afirmaciones presentes son verdaderas pero no están bien explicadas por que esta proporción define a un mismo racional que se expresa con distinto numerador y denominador.

En general:

"Si $m = \frac{p}{q}$ *y* (x_1, y_1) *son la pendiente y el punto de la recta respectivamente, entonces los puntos* $(x_2, y_2)=(x_1 + kq, y_1 + kp)$*, donde k es cualquier entero, están en la recta que pasa por* (x_1, y_1) *con pendiente m".*

Además:

"La ecuación de la recta la podemos escribir como: $m(x - x_1)= y - y_1$*."*

"La recta horizontal que pasa por (x_1, y_1) *tiene ecuación* $y = y_1$ *y su pendiente es* $m=0$*."*

"La recta vertical que pasa por (x_1, y_1) *tiene ecuación* $x = x_1$ *y tiene pendiente infinita."*

"La ecuación de una recta que no sea vertical con pendiente m y que pasa por (x_1, y_1) *se puede representar como:* $m(x - x_1)= y - y_1$*."*

Ahora veamos los dos primeros ejercicios de los propuestos.

Ejercicios propuestos:

1. *Calcula la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.*
   a. *(7, -3); (0,4)* b. *(2, -1); (-2, -2)*
2. *Encuentra dos puntos distintos que estén en las rectas dadas. Verifica su pendiente.*

Recta	*Punto* P_1	*Punto* P_2	*Pendiente m*
$Y= - 2x + 3$			

Y = - 3x + 1			
2y = x + 6			
-y + 2x = 4			

Agrega que:

"Una recta está formada por los punto (x, y) que satisfacen una ecuación de la forma ax + bx = c, en donde a, b, c son números reales."

Forma de la ecuación de una recta:

En general, una expresión de la forma ax + by = c determina una recta. Si conocemos la pendiente m (definida) y un punto (x_1, y_1) *de ella, podemos expresar la ecuación de la recta en una de las siguientes formas:*

$$y - y_1 = .m(x - x_1)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1.$$

$$y = mx - mx_1 + y_1.$$

$$y = mx + d, \text{ con } d = - mx + y_1.$$

(d se denomina corte con el eje Y)

En esta parte debemos aclarar que tanto los coeficientes como las variables son números reales.

Además:

"Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente"

"Dos rectas que no sean ni horizontal ni verticales son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1"

Veamos algunos ejercicios propuestos:

1. *Completa la siguiente tabla escribiendo la ecuación de la recta dada en las formas pedidas.*

$y = mx + b$	$ax + by = c$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y = -4x + 5$		
	$2x + 3y = 4$	
		$y - 2 = (x - 5)$
	$2x = 5$	
	$0x + 2y = 8$	

2. *Determina si la recta l_1 es igual a la recta l_2.*

l_1	l_2	*Iguales (I) o Distintas (D)*
$y = 3x + 1$	$y = 3x + 2$	
$x + y = 2$	$-x - y = -2$	
$y - 2 = 5(x - 1)$	$2y - 4 = 10(x - 1)$	
$x = 2$	$x = 4$	

De lo expuesto anteriormente podemos deducir lo siguiente:

Por la forma como presenta el contenido el texto se clasifica como tecnológico debido a que las actividades tanto resueltas como propuestas conducen a un aprendizaje mecánico es decir la memorización de fórmulas para aplicarlas en ejercicios. En cuanto a la presentación de conceptos lo introducen de manera formal y la secuencia de los contenidos es pertinente a los temas tratados, pero los ejercicios no son adecuados para que se dé la transferencia.

Siguiendo este orden analicemos el tercer texto Glifos 9° Procesos matemáticos.

Iniciemos como presenta el texto el concepto de función:

"Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una correspondencia que asigna a cada elemento x ϵ A un único elemento y ϵ B. De esta forma una función es un conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$*."*

El ***dominio*** *de una función* f *es el conjunto de todos los elementos que tienen una única imagen. El* ***rango*** *de una función es el conjunto de imágenes.*

Por ejemplo:

Para cada función específica el dominio y el rango.

a. $g(x) = \{(2,3);(4,7);(5,2);(3,9);(1,6)\}$

El dominio es el conjunto de las primeras componentes:

$$A = \{2, 4, 5, 3, 1\}$$

Y el rango es el conjunto de imágenes, es decir, la segunda componente:

$$B = \{3, 7, 2, 9, 6\}$$

b. $f(x) = 2x + 3$

Tanto el domino como el rango están formados por el conjunto de los números reales, ***R.***

c. $y = \sqrt{x-3}$

Si $y=\sqrt{x-3}$*, x – 3 > 0, entonces x >3, Dominio= {x ϵ□ /x > 3}. Para hallar el rango se despeja x en función de y: x=* y^2 *+ 3. Rango= Reales, □ .*

La definición de función se concibe como una correspondencia única entre los elementos de dos conjuntos lo cual lo hace formal, admite el conjunto de partida y llegada es decir el dominio y rango de la función respectivamente. Sin embargo en el ejemplo c encontramos un error pues la función está definida para el valor x= 3 es decir para todos los x ϵ R tal que x ≥ 3, luego el rango de la función son los reales no negativos.

Veamos ahora unas generalidades o propiedades que cumplen las funciones:

"Se dice que una función es ***monótona creciente*** *si para cada valor de* $x_0 = a$*, existe un número menor* $x_1 = a - h$ *y un número mayor* $x_2 = a + h$*, de tal manera que la relación entre las imágenes sea:*

$$f(a+h) < f(a) < f(a+h)$$ *, siendo h > 0."*

"Una función es ***monótona decreciente*** *si para cada valor de x =a, existe un valor menor x = a – h y un valor mayor x = a + h, de tal manera que la relación entre las imágenes sea:*

$$f(a+h) > f(a) > f(a+h)$$

En este orden observemos los conceptos de máximos y mínimos de una función.

"Se tiene una ***valor máximo*** *cuando la función pasa se monótona creciente a monótona decreciente.* (□ □)

"Se tiene un ***valor mínimo*** *cuando la función pasa de monótona decreciente a monótona creciente.* (□ □)

Continuamos con continuidad en una función:

*"Una función es **continua** en todos los puntos del dominio si al realizar el trazo de la función se puede verificar que no tiene saltos ni cortes".*

Veamos dos ítems de los ejercicios propuestos.

1. Ubica los puntos en un plano cartesiano, determina si se trata de una función o no.

a.

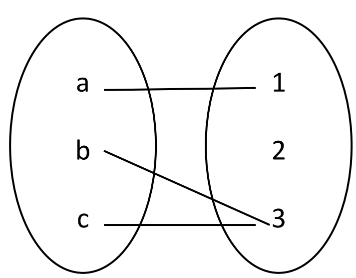
x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

b.

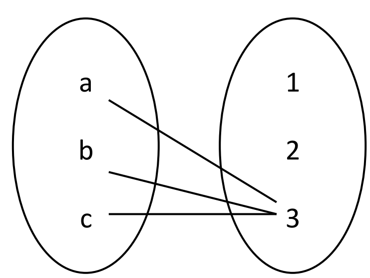
x	0	1	2	3	2	3
y	1	2	3	4	5	6

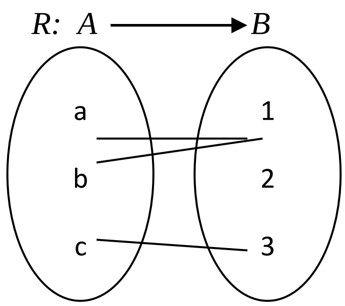
2. *Observa los diagramas sagitales y explica por qué representa una relación funcional.*

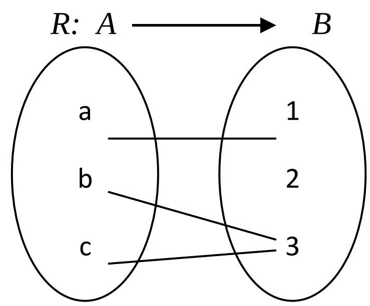
R: $A \longrightarrow B$



R: $A \longrightarrow B$







Veamos cómo se presenta en el texto el concepto de función lineal:

"¿Qué tiene en común las siguientes funciones?

$f(x) = 4x + 9$ $\qquad$ $g(t) = -5t + 8$

$h(y) = -y + 15$ $\qquad$ $j(x) = -\frac{1}{3}x - 2$

Las funciones así definidas de este tipo pertenecen al grupo de funciones polinómicas de primer grado.

Toda función de la forma $f(x) = mx + b$*; donde* x *es una variable, y* m*,* b *son constantes y* $m \neq 0$*, es una función polinómica de primer grado.*

Una función polinómica de primer grado $f(x) = mx + b$ *se denomina* ***lineal*** *cuando* $b = 0$*, y* ***afín*** *cuando* $b \neq o$*.*

Estos son ejemplos de funciones lineales:

$y = 3x + 2$; $\qquad$ $y = -5x + 2$; $\qquad$ $y = 2x$

Analicemos los siguientes ejercicios resueltos.

1. *¿De las siguientes funciones cuáles son de primer grado?*

$f(x) = 3x + 9$ $\qquad$ $i(x) = 4x^2 + ax - 2$ $\qquad$ $h(y) = 15 - y$

$j(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2$ $\qquad$ $g(t) = -5t + 8$

Solución:

Las funciones que cumplen para ser de primer grado son $f(x)$, $g(t)$, $h(y)$. *Las funciones* $j(x)$ *y* $i(x)$ *no son lineales ni afines, pues el exponente de la variable es 2.*

2. *Identifica los valores de* m *y* b *en las siguientes funciones.*

a. $y = -4x - 1$ *b.* $f(x) = \frac{2}{3}x + 10$ *c.* $y = x - 3$

Solución:

a. $y = -4x - 1$ *b.* $f(x) = \frac{2}{3}x + 10$ *c.* $f(x) = x - 3$

$m = -4$ $m = \frac{2}{3}$ $m = 1$

$b = -1$ $b = 10$ $b = -3$

En este orden definen:

"*La* ***pendiente de una recta*** *indica el grado de inclinación de la misma. Cuando más grande sea el valor que representa la pendiente, la inclinación será mayor. Si la línea recta tiene la forma* $f(x) = mx + b$, m *es la pendiente.*"

"Cuando una recta tiene la forma $f(x) = mx + b$, *el punto de corte con el eje* y *se da en el punto (0,* b *), por esto* b *es la* ***ordenada de origen****."*

"Dos funciones lineales son ***paralelas*** *si el cociente entre sus pendientes es igual a 1."*

"Si dos rectas que representan funciones lineales o afines forman un ángulo recto, el producto de sus pendientes es igual a – 1, por tanto son ***perpendiculares****.*

Revisemos los siguientes ejemplos:

1. *Dada la función lineal* $y = 4x - 9$, *indica la pendiente y los puntos de corte con los ejes* x *y* y.

Solución

Función dada: $y = 4x - 9$

Pendiente: $m = 4$

Corte con el eje y *:* $(0, -9)$

Corte con el eje x *:* $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

2. *Determina si las rectas definidas por* $2y + 3x = -5$ *;* $8y + 12x + 20 = 0$ *son paralelas o perpendiculares.*

Solución:

Expresemos las ecuaciones dadas en la forma pendiente – intercepto, es decir, en la forma $y = mx + b$ *.*

$2y + 3x = -5$*, entonces:* $2y = -3x - 5$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

$8y + 12x + 20 = 0$*, entonces:* $8y = -12x - 20$

$$y = -\frac{12}{8}x - \frac{20}{8}$$

Simplificando: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ *:*

La ecuación $2y + 3x = -5$*, tiene pendiente* $m = -\frac{3}{2}$ *y la ecuación* $8y + 12x + 9 + 20 = 0$*, tiene pendiente* $m = -\frac{3}{2}$*.*

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas.

Ejercicios y problemas propuestos.

Veamos dos de ellos.

1. *Escribe las siguientes situaciones como una función lineal, determina la pendiente y la ordenada al origen.*

a. *El costo de producción de cierto artículo es $ 5000 y se paga un costo fijo mensual de $3000000.*
b. *El formulario de inscripción al parqueadero A tiene un costo de $ 10000 y el costo diario de parqueo es $ 5000.*
c. *Danilo tiene ahorrado $ 10000 y cada día retira $ 5000.*
d. *La cantidad de dinero recaudado por la venta de boletas para una rifa cuyas boletas tienen un costo de $ 4000.*

2. *El parqueadero A tiene un costo de afiliación de $ 20000 con el fin de obtener una tarifa preferencial de $ 2000 el día. El parqueadero B tiene un costo de afiliación de $ 5000 y una tarifa preferencial de $ 3000 diarios.*

a. *Representa cada situación como una función lineal.*
b. *Si Juan guarda su carro 10 días, ¿en qué parqueadero es más económico?*
c. *¿Es correcto afirmar que el parqueadero B es más económico?*
d. *¿En cuál de los dos parqueaderos se ahorra dinero guardando el automóvil 40 días?*
e. *Carolina guardara su automóvil por 15 días. ¿Qué parqueadero conviene más?*
f. *¿Explica cada caso usando las gráficas de las funciones?*

Por otra parte el texto tiene una secuencia adecuada al presentar las propiedades que cumple las funciones, sin embargo las definiciones carecen de carácter formal como es el caso de continuidad de una función que lo presenta de manera intuitiva al igual para hallar los máximos y mínimos de una función produciéndose así una descontextualización del concepto para lo cual fue creado, estos conceptos así expuestos genera en el estudiante confusión, pues le toca desaprender y volver a aprender los conceptos como originalmente fueron establecidos llevándolo a una transferencia negativa. Ahora bien analizando los ejemplos y los ejercicios propuestos encontramos que en el segundo ejemplo no se aclara que dos funciones lineales también son paralelas si tienen igual pendiente además podemos observar que las rectas no son paralelas ni perpendiculares, son coincidentes pues tienen igual pendiente y el mismo término independiente, en este también se evidencia una confusión en el concepto de ecuación con el de función. En los ejercicios propuestos se puede establecer una transferencia cercana y lateral inmediata pues trata de ilustrar el concepto pero en la solución de problemas no se da una metacognición del concepto.

En resumen podemos establecer lo siguiente: la introducción del concepto es formal, algunos conceptos en el texto no corresponde al programa curricular del grado como lo es la continuidad de una función, tanto los ejercicios propuestos como los ejemplos conducen a un aprendizaje, mecánico lo cual permite clasificarlo como un texto tecnológico; además, los problemas propuestos en cierta manera conduce a una transferencia cercana y lateral pero inmediata.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente cuadro.

FUNCION LINEAL					
TEXTO	TIPO DE TEXTO	CONCEPTOS INTRODUCTORIOS	TIPO DE DEFINICIÓN	SECUENCIA DE CONTENIDOS	TRANSFERENCIA

Matemática en Acción 4.	Tecnológico.	Función lineal	Informal	Función lineal	Cercana Lejana
Espiral 9°	Tecnológico	Función. Dominio y Rango.	Formal	Función lineal. Pendiente de la recta. Ecuación de la recta. Forma de la ecuación de una recta.	No se da.
Glifos 9° Procesos Matemáticos.	Tecnológico	Función. Dominio y Rango. Monotonía creciente y decreciente. Valor máximo y mínimo. Continuidad.	Formal	Función lineal. Función afín. Funciones lineales paralelas. Funciones lineales perpendiculares.	Cercana Lejana

3.3. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

La función cuadrática define como $f(x) = ax^2+bx+c$, donde *a. b y c* son números reales. El dominio de la función son todos los números reales y el rango es especifico para cada función. De este concepto partimos para comparar como este se presenta en los textos de matemática de noveno grado.

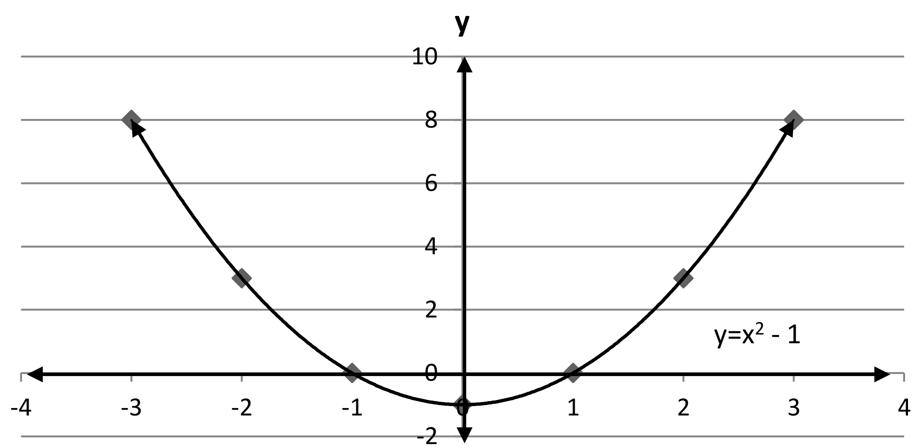
Siguiendo en el orden impuesto iniciamos con el texto Matemática en Acción 4 que al respecto dice:

"*Si la mayor potencia de* x *que aparece en una función polinómica es* x^2 *, decimos que se trata de una función cuadrática y que el polinomio es de grado 2". Una función cuadrática tiene la forma* $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *donde* $a_2 \neq 0$.

Algunos ejemplos son:

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad h(x) = x^2 - 1$$

Con mayor frecuencia escribimos $h(x) = x^2 - 1$*, el ejemplo anterior tiene la siguiente gráfica.*



Las gráficas de las funciones cuadráticas son parábolas. La relación gráfica del conjunto de parejas $\{(x, y) \mid ax^2 + bx + c = y, a \neq 0\}$ *es una parábola.*

Ejercicios propuestos:

1. Hacer la grafica de los siguientes conjuntos de puntos:

a. $A = \{(x, y) \mid y = 2x^2 + 1\}$ b. $A = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2x + 1\}$

En el texto Matemática en Acción es poca la información que se encuentra sobre las funciones cuadráticas, su definición es formal, los ejercicios propuestos y resueltos no llevan a establecer ningún tipo de transferencia, al igual que en las funciones lineales el texto se remite al texto anterior como base (Matemática en Acción 3).

Continuando con el segundo texto Espiral 9°, al abordar el tema de función lineal hace unas actividades previas en las que se puede afirmar que está presente la transferencia lateral referidos a la factorización de polinomios, veamos algunos de ellos.

"1. Factoriza las siguientes expresiones.

a. x^2+2x *b.* x^2-2x+1 *c.* x^2-x-12

2. Completa las siguientes expresiones.

a. $x^2+2x+\_\_\_\_\_=(x+1)^2$ *b.* $3(x^2+x+\_\_\_\_\_\_\_)=3\left(x+\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

En este texto se define la función cuadrática como:

"La familia de las funciones cuadráticas está formada por expresiones de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, con las siguientes características:

- x es la variable independiente y puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales.
- a, b, c son números reales y a es una constante diferente de cero.
- y es la variable dependiente.
- su gráfica es una parábola.

Introduce el concepto de función cuadrática de manera formal, aunque se tiene que y es la variable independiente y en su definición no aparece, el dominio está implícito al decir que x puede tomar cualquier valor real pero su rango no está definido, hay que aclarar su gráfica es una parábola pero no toda parábola representa una función cuadrática.

Veamos el siguiente ejemplo:

Determinemos si la expresión $f(x) = -x^2 + 4$ *corresponde a una función cuadrática y tracemos su gráfica.*

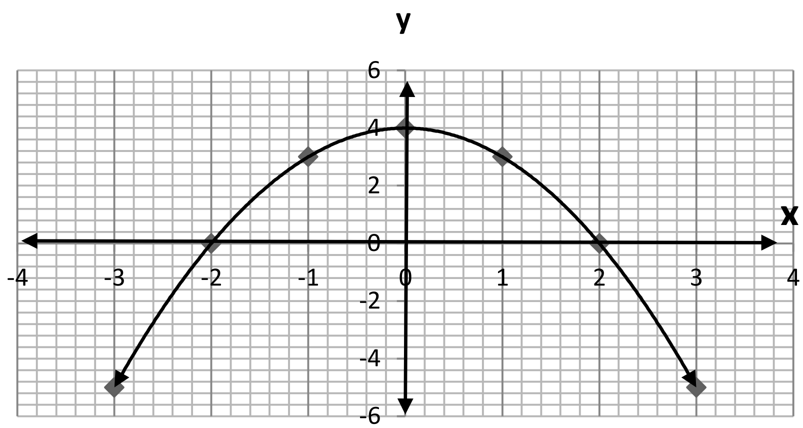
Solución:

La expresión $f(x) = -x^2 + 4$ *la podemos escribir como* $f(x) = -x^2 + 4 = -x^2 + 0x + 4$ *donde* $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, *por lo tanto, la función* $f(x) = -x^2 + 4$ *corresponde a una función cuadrática.*

Para trazar la gráfica, asignamos arbitrariamente algunos valores a la variable independiente, x, *y con ellos hallamos los valores correspondientes de la variable independiente, y, obteniendo parejas ordenadas* (x, y) *que corresponden a puntos de la parábola en el plano cartesiano.*

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x) = -x^2 + 4$	-5	0	3	3.75	4	3.75	3	0	-5

Ahora ubicamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos con una curva "adecuada".



Ejemplo 2:

Tracemos la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 1$ *y determinemos los puntos de intersección con los ejes.*

Solución:

Elaboramos una tabla de valores para $x \in R$ *donde* $f(x) = x^2 - 1$. *Para hallar el punto de intersección con Y hacemos* $x = 0$ *y calculamos y; de manera similar, para la intersección con X hacemos* $y = 0$ *y calculemos* x. *Por lo tanto:*

Intersección en y *:* $f(0) = 0^2 - 1 = -1$. *Luego el punto es (0. – 1).*

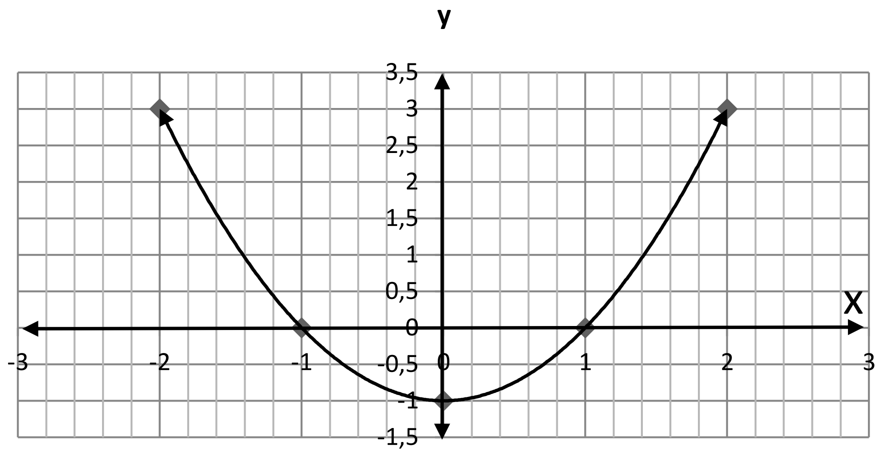
Intersección en x *:* $x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$x - 1 = 0$ *o* $x + 1 = 0$, *de donde* $x = 1$ *o* $x = -1$. *Con el eje Y hay dos puntos de intersección, en (1, 0) y (0, - 1).*

Al ubicar en el plano cartesiano estas parejas ordenadas y unirlas con una línea curva, obtenemos la grafica de la figura 3.

En la grafica vemos que la parábola interseca al eje Y en el punto (0, -1) y al eje X en los puntos (-1, 0) y (1, 0).



En general:

"En cualquier ***función cuadrática*** *de la forma* $f(x) = x^2 - k$, $k \geq 0$ *para hallar el punto de intersección con eje Y, hacemos* $y = 0^2 - k = -k$ *y el punto* $(0, -k)$, *para hallar la intersección con el eje X, hacemos* $0 = x^2 - k$ *de donde* $0 = (x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k})$ *y* $x = \sqrt{k}$ *y* $x = -\sqrt{k}$ *, con lo cual tenemos los puntos* $(\sqrt{k}, 0)$ *y* $(-\sqrt{k}, 0)$*."*

"La grafica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ *donde* a *,* b *,* c *son números reales y* $a \neq 0$*, es una parábola que abre hacia arriba si* $a > 0$ *y abre hacia abajo si*

$a < 0$*".*

Veamos el siguiente ejemplo de aplicación:

Modelemos mediante una función el área de un cuadrado de lado a *.*

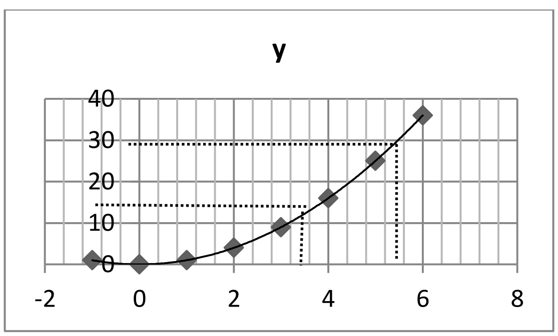
Solución:

Consideremos un cuadrado de 4 cm de lado, luego su área es 16 cm², este valor lo obtenemos aplicando la formula: el área de un cuadrado es igual al cuadrado de la medida de uno de sus lados, el cual puede expresarse como $A = x^2$*. Esta fórmula se puede reescribir como* $f(x) = x^2$*, donde* x *es la variable independiente (longitud del lado del cuadrado) que puede tomar cualquier valor positivo y* $y = f(x)$ *la variable dependiente que determina el área de un cuadrado. De esta manera la expresión* $f(x) = x^2$ *es una función que da el área del cuadrado dependiendo del valor del lado del mismo. Veamos la tabla de valores que le corresponde, donde para cada valor del dominio está el correspondiente valor en el recorrido.*

x *Longitud del lado del cuadrado en cm*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$f(x) = x^2$ *Área del cuadrado en cm²*	*1*	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*

Figura 4.

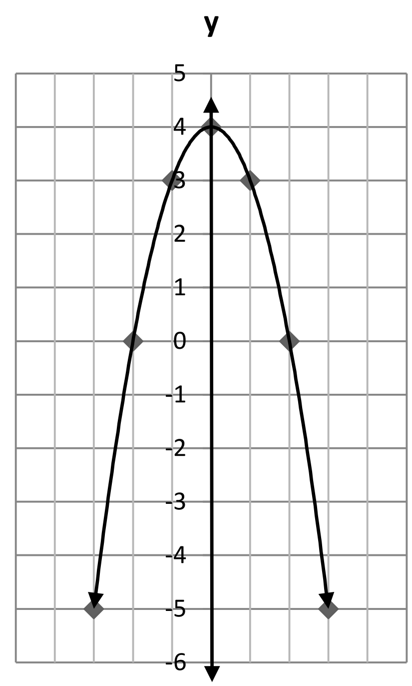
La figura 4 nos permite formar parejas ordenadas del tipo (longitud del lado, área del cuadrado), que al hacerlo corresponder puntos del plano cartesiano nos conduce a la figura 5.

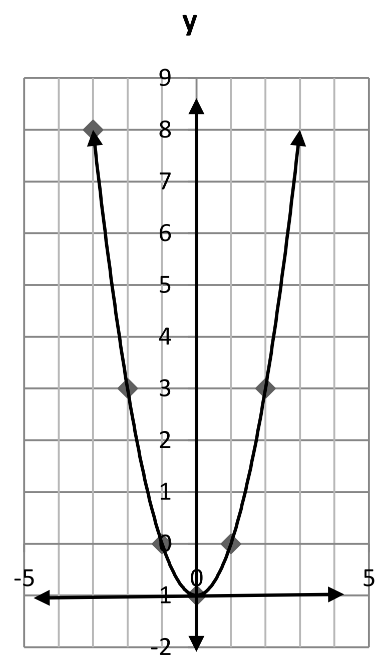


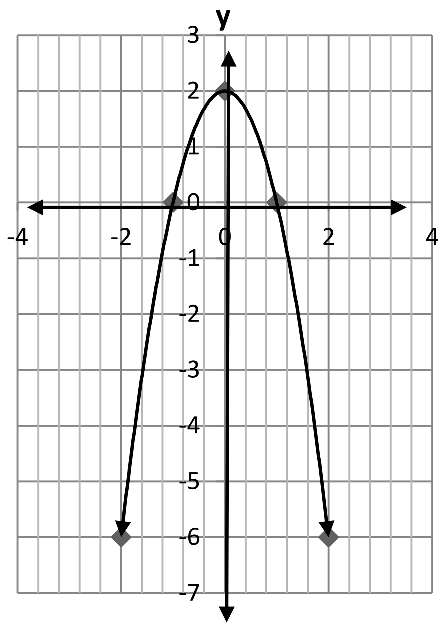
Con esta curva podemos determinar de manera aproximada el área de un cuadrado. Por ejemplo, si el lado mide 3,2 cm. nos ubicamos sobre el eje X en el punto que *consideramos debe corresponder al número real 3,2 y por el subimos verticalmente hasta encontrar la curva. Luego, este punto de la curva lo proyectamos sobre el eje Y con lo cual obtenemos el valor del área que de acuerdo con nuestro grafico debe ser aproximadamente 10,2 cm². También es posible hacer el proceso contrario, es decir, que se pueda conocer la longitud del lado de un cuadrado de su área, por ejemplo, si sabemos que el área de un cuadrado mide 30 cm² nos situamos en el eje Y en el punto correspondiente a 30, proyectamos este punto sobre la curva, ahora el punto de la curva lo proyectamos sobre el eje X llegando al número 5,4.Así, la longitud del lado del cuadrado de 30cm² de área es aproximadamente 5,4 cm. estos valores aproximados, pueden ser muy útiles cuando se trata de interpretar graficas.*

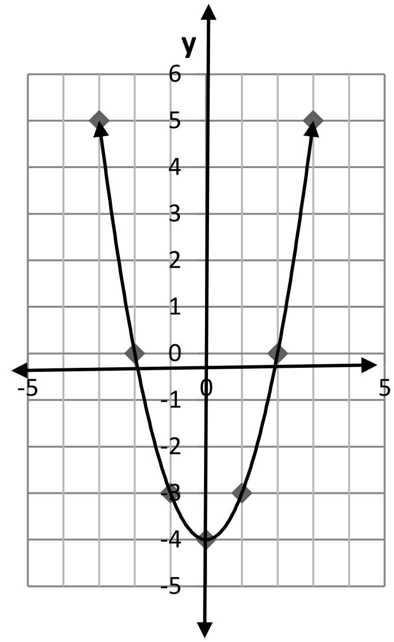
Ahora veamos si los ejercicios propuestos y problemas facilitan la transferencia.

1. *Relaciona a cada función cuadrática con la parábola que le corresponde.*









a. $f(x) = x^2 - 1$

b. $g(x) = x^2 - 4$

c. $f(x) = -2x^2 + 2$

d. $h(x) = 4 - x^2$

2. *Conexiones.*

a. *Halla las dimensiones de un triángulo rectángulo de área 60 cm², si la medida de sus catetos es 7 cm.*

b. *Halla las dimensiones del triangulo rectángulo cuya medida de sus catetos suman 31 cm y la hipotenusa mide 25cm.*

c. *Un objeto se lanza verticalmente hacia abajo desde un globo que se encuentra a una altura de 500m sobre el piso, con una velocidad inicial de 4,9 m/s.*

1. *¿Calcula el tiempo que tarda en caer el objeto al suelo?*
2. *¿En cuánto tiempo ha recorrido 100 m?*
3. *¿Con qué velocidad inicial debe ser lanzado para que tarde 10 segundos en caer?*
4. *Si el objeto se lanza desde el reposo, es decir, sin velocidad inicial, ¿cuánto tarda en caer?*

5. *Con qué velocidad inicial debe ser lanzado para que tarde la mitad de lo que demora al ser lanzado desde el reposo.*

Es muy importante destacar según Bransford y cols (2001) la importancia del aprendizaje previo y la necesidad de evitar la transferencia negativa en este sentido el texto propone unas actividades de preparación o iniciales en el que el docente debe verificar la comprensión del aprendizaje anterior y si es necesario modificar conceptos que trae el estudiante que más adelante nos conduciría a una transferencia negativa y esto es pues lo que se quiere evitar.

Aréchiga (2000) propone que el aprendizaje de las matemáticas debe darse en tres etapas. La primera abarca los conceptos matemáticos y la forma como estos están organizados para luego comunicarlos, y el texto bajo análisis ubica el concepto de función cuadrática en el programa correspondiente del curso, ilustrado con algunos gráficos y ejemplos que conducen a generalizaciones teniéndose la segunda etapa, las que más tarde son utilizadas por los estudiantes en la solución de situaciones problemas dentro de la misma matemática o en otras disciplinas, asumiéndose la tercera etapa. Según esto, el texto propicia la transferencia cercana y lateral a través de sus problemas dentro de la misma matemática y su relación con otras áreas como la física.

En este orden analicemos el contenido del texto glifos 9° Procesos Matemáticos en cuanto a las funciones cuadráticas.

Definición de función cuadrática:

“***funciones lineales de segundo grado*** *o función cuadrática es aquella función que se escribe de la forma* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, con* a*,* b*,* c*, números reales y* $a \neq 0$*.*

Las funciones $y = x^2$*;* $y = \frac{1}{2}x^2$*;* $y = -4x^2$*, son ejemplos de funciones cuadráticas.*

Además amplían que:

La grafica de una función cuadrática es una parábola, cuya dirección depende del signo del coeficiente a*.*

Para este tema propone el texto los siguientes ejercicios, veamos dos de cada uno.

1. *Escribe las funciones cuadráticas de coeficientes:*

   a. $a = -3$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -10$.

2. *Identifica los coeficientes* a*,* b *y* c *en cada función.*

   a. $y = 2 + x^2$

3. *Escribe las siguientes expresiones de la forma* $y = ax^2 + bx + c$ *.*

   a. $-x + 3 + 2x^2$

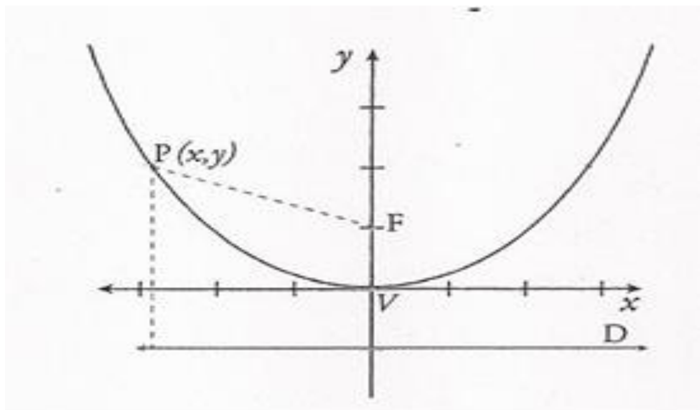
Encontramos los subtítulos representación gráfica de una función cuadrática, transformación geométrica de la función cuadrática y representación de parábolas. Veamos que nos dicen cada uno de ellos.

En cuanto a la representación de una función cuadrática inicia con el concepto de parábola para lo cual dice:

“Una ***parábola*** *es el conjunto de puntos* $p(x, y)$ *en un plano que está a igual distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz”.*

“Si F es el foco y D la directriz, el punto medio entre ellos se llama vértice”

“No todas las parábolas representan funciones cuadráticas, solo aquellas en las que la directriz es paralela al eje y *. En general, una función cuadrática se escribe de la forma* $f(x)=a(a-h)^2+k$*, lo que representa una parábola con vértice en el punto* (h,k) *”*



Además anota*: “Las parábolas pertenecen al* *conjunto de las secciones cónicas ylas que representan funciones cuadráticas son casos particulares.*

La parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ *es:*

Cóncava hacia arriba si $a > 0$.

Cóncava hacia abajo si $a < 0$.

Ejemplo 1:

Identifica si la parábola es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y cuál es el vértice.

a. $y=(x-3)^2+7$ *b.* $y=-5(x+9)^2+8$

Solución:

a. *La función es cóncava hacia arriba porque* $a > 0$ *y tiene vértice en (3,7).*
b. *La función es cóncava hacia abajo porque* $a < 0$*, ya que* $a = -5$ *y tiene vértice en (-9, 8).*

En cuanto a las transformaciones geométricas de la función cuadrática, agrega:

"La función $f(x)=x^2$ permite obtener la grafica de otras funciones cuadráticas realizando transformaciones geométricas; observa:

***Traslación horizontal**. Para trasladar la parábola a la derecha h unidades, se reemplaza x por $x-h$; y la ecuación se transforma en $y=(x-h)^2$. Si se quiere el desplazamiento a la izquierda entonces x por $(x+h)$ y la ecuación es $y=(x+h)^2$.*

***Traslación vertical.** Para que la función se desplace k unidades hacia arriba se suman un valor k, así, $y=x^2+k$.Si el desplazamiento es hacia abajo se resta el valor de k, entonces $y=x^2-k$.*

***Estiramiento vertical.** En este caso la constante de estiramiento a debe ser mayor que 1. $f(x)=ax^2$. Esto ocasiona que la gráfica quede por encima de la función $f(x)=x^2$.*

***Dilatación vertical.** La nueva gráfica queda por debajo de la gráfica de $y=x^2$, se tiene una gráfica más amplia.*

$f(x)=ax^2$; $0 < a < 1$

En cuanto a la representación de parábola tenemos:

Para realizar la gráfica de una función cuadrática se requiere determinar el corte en el eje x, el corte con el eje y y las coordenadas del vértice.

a. ***Cortes en el eje x**. Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para hallar los coretes en x hacemos $f(x)=0$ y se soluciona la ecuación $ax^2+bx+c=0$*
b. ***Corte en el eje y**. Se hace $x = 0$, en la función $f(x)=ax^2+bx+c$; entonces $f(0)=a(0)^2+b(0)+c$; $f(0)=c$; por este valor corta la gráfica al eje y.*

c. ***Coordenadas del vértice.*** *Para encontrar las coordenadas del vértice se requiere transformar* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *a la forma* $f(x) = a(x-h)^2 + k$. *Para ello se completa el cuadrado por suma y diferencia y se factoriza.*

Ejemplo 2:

Traza la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 8x + 12$.

Solución:

a. *Factorizar* $f(x) = x^2 + 8x + 12 = 0$, *entonces* $(x+6)(x+2) = 0$*; por lo tanto,* $(x+6) = 0$, $x = -6$ *y* $(x+2) = 0$, $x = -2$*; los puntos de corte con el eje son (-6, 0) y (-2, 0).*

b. *El corte en* y *es la constante* c*, luego* c *= 12.*

c. *Finalmente, completa el cuadrado:*

$y = (x^2 + 8x \quad) + 12$

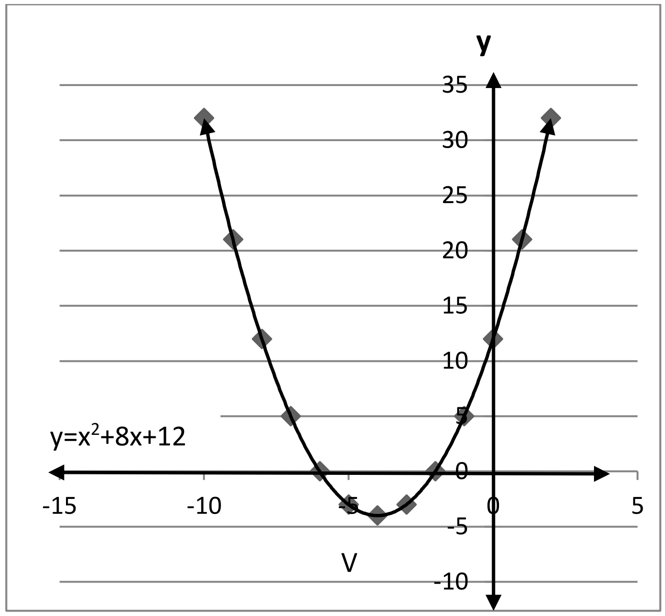
$y = (x^2 + 8x + (4)^2) + 12 - (4)^2$

$y = (x + 4)^2 + 12 - 16$

$y = (x + 4)^2 - 4$. *Forma estándar.*

Luego el vértice es (- 4, -4)

La gráfica es:



Veamos algunos de los ejemplos de aplicación propuestos por el texto*:*

1. *La función de utilidad de una empresa está dada por la función cuadrática* $u(x) = -x^2 + 600x - 5000$.

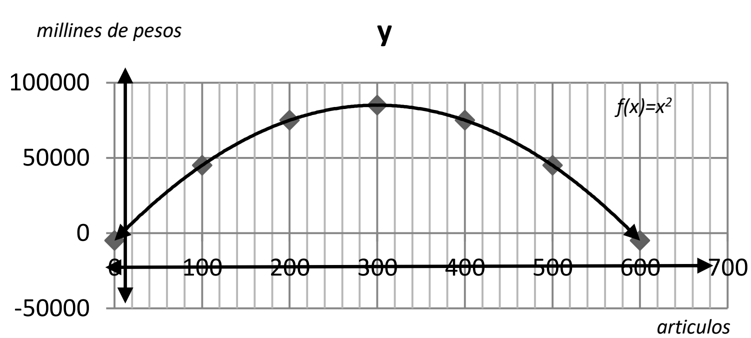
a. *Traza la gráfica de la función.*

b. *Señala la utilidad al producir y vender 100 artículos, 200 artículos, 450 artículos.*

Solución:

a. *Para realizar la gráfica se tiene en cuenta: cortes en* y, *cortes en* x *y la forma estándar para saber el vértice, como se procedió en el ejemplo 2.*

Así la gráfica de la función es:



b. *Ahora, en la ecuación se puede sustituir:*

$x = 100, \qquad x = 200, \qquad x = 450$

$u(100) = 0$, *porque es un corte en* x. *Quiere decir que para una producción y venta de artículos no hay utilidad.*

$u(200) = 30000$, *la utilidad es de $ 30000 millones.*

$u(45000) = 17500$, *la utilidad es de $ 17500 millones.*

Aunque se pensaría que entre más artículos se producen, más es la utilidad, este ejemplo demuestra que no es así en todos los casos.

Veamos dos de los problemas propuestos para verificar si hay transferencia.

1. *Un automóvil empleó cierto tiempo en recorrer 200 km. Si la velocidad hubiera sido 10 km/h más que la que llevaba inicialmente, habría tardado 1 hora menos en recorrer dicha distancia. ¿En cuánto tiempo recorrió los 200 km?*
2. *Dos botes viajan en ángulo recto después de partir de un mismo puerto y a la misma hora. Después de 1 hora, los botes se encuentran separados 13 km. Si uno de ellos viajan 7 km/h más rápido que el otro, ¿cuál es la velocidad de cada bote?*

En la representación de función cuadrática no considera el conjunto de partida y llegada, enmarca la presentación de una función cuadrática desde el punto de vista de las secciones cónicas, concepto que un estudiante en este nivel no maneja. Es importante la aclaración que no toda parábola obedece a una función cuadrática, aunque no da explicación de este hecho.

El texto menciona el concepto de directriz el cual no tiene relación con la función cuadrática; y luego se comente un error al decir que una parábola funcional la directriz es paralela al eje y.

En los ejemplos 1 y 2 se intenta hacer una transferencia cercana y lateral al utilizar la factorización para hallar el vértice de una parábola en su forma estándar.

Los problemas propuestos favorecen la transferencia cercana y lateral dentro de la misma matemática y su relación con otras áreas como la física y la geometría.

Lo anterior lo podemos resumir con el siguiente cuadro.

FUNCION CUADRATICA					
TEXTO	TIPO DE TEXTO	CONCEPTOS INTRODUC-TORIOS	TIPO DE DEFINICIÓN	SECUENCIA DE CONTENIDOS	TRANSFERENCIA
Matemática en Acción 4.	Tecnológico.	Función cuadrática.	Formal.	Función cuadrática Grafica de una función cuadrática.	No se da.
Espiral 9°	Tecnológico.	Función cuadrática. Parábola. Dominio.	Formal.	Función cuadrática Grafica de una función cuadrática. Intersección con los ejes.	Cercana. Lateral.
Glifos 9° Procesos Matemáticos.	Tecnológico.	. Función polinómica. Parábola.	Formal.	Función cuadrática. Representación gráfica de una función cuadrática. Transformación geométrica de la función cuadrática. Representación de parábolas.	Cercana. Lateral.

3.4. FUNCIÓN EXPONENCIAL.

La función exponencial se define como una función expresada en la forma $f(x) = ca^x$, con a >0, a≠0 y x cualquier número real, se llama función exponencial. El número a se llama base de la función exponencial o factor de crecimiento.

De este concepto partimos para analizar como este se presenta en los textos de matemática de noveno grado.

Siguiendo el orden ya expuesto iniciamos con el texto Matemática en acción 4 el cual define la función lineal como:

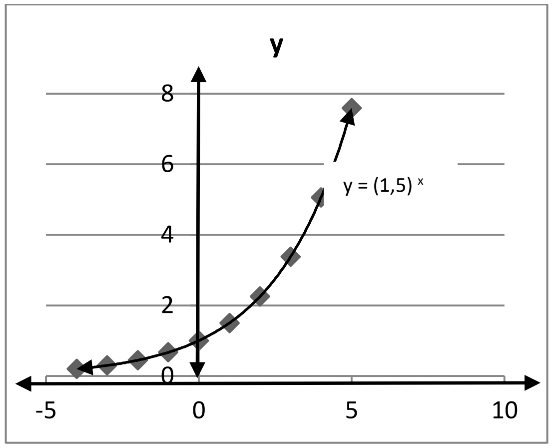
"La función $y = a^x$ *con dominio en los reales,* $x \in \mathbb{R}$ *, y* $a > 0$*. Esta es la llamada función exponencial".*

Ejemplo 1:

$y = (1,5)^x$*. Observemos que, en este caso,* $a = 1,5 > 1$.

Se hace una tabla y con ella hacemos la gráfica.

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*- 1*	*- 2*	*- 3*	*- 4*
y	*1*	*1,50*	*2,25*	*3.38*	*5,06*	*7,59*	*0,67*	*0.44*	*0.30*	*0.20*



Podemos observar varias propiedades de la función exponencial en esta gráfica.

(1). La función exponencial es siempre positiva.

(2). Es una función creciente, o sea $x_1 \geq x_2$*, entonces* $(1,5)^{x_1} \geq (1,5)^{x_2}$*. Por ejemplo si* $x_1 = 5$ *y* $x_2 = 2$*,* $(1,5)^5 = 7,59 > (1,5)^2 = 2,25$*; o también si* $x_1 = -1$ *y* $x_2 = -4$*, entonces,* $(1,5)^{-1}$ $(1,5)^{-1} = 0,67 > (1,5)^{-4} = 0,20$*. La grafica se eleva de izquierda a derecha.*

(3). La función es uno a uno pues $x_1 \neq x_2$*, entonces* $(1,5)^{x_1} \neq (1,5)^{x_2}$*. Esta última propiedad nos dice que la función exponencial tiene función inversa.*

Ejercicios de discusión:

1. *Hacer la gráfica de la función exponencial* $y = 2^x$ *y comprobar las tres propiedades anteriores.*
2. *Buscar los datos de la población de Bogotá en los últimos 50 años (con intervalos de 5 años) y construir una gráfica. Observar que es parecidas a la gráfica menor. (En realidad, se dice que la población de Bogotá ha crecido exponencialmente).*

El texto toma como punto de partida el concepto de función potencial con exponente racional, presenta el concepto de función exponencial formal pero incompleto, se puede apreciar algunas propiedades de las potencias que son de mucha ayuda para graficar, el dominio de la función es implícito al escribir que $x \in \mathbb{R}$, no se especifica su recorrido al inicio, pero cuando toma sus propiedades al expresar que la función exponencial es siempre positivo describe el rango, luego da la propiedad de que la función es creciente y biyectiva pero no considera el caso cuando la función es decreciente, es decir, no se considera el caso de $y = a^{-x}$ que también es una función exponencial.

En cuanto a los ejercicios de discusión no se evidencian ningún tipo de transferencia pues ellos solamente se limitan a construir gráficas de funciones exponenciales. En el ejercicio 2 se intenta transferir el concepto, no obstante se limita a construir una grafica sin análisis.

Seguimos con el texto Espiral 9° que define la función exponencial como:

"Una expresión de la forma $f(x) = ca^x$*, con* $a > 0$*,* $a \neq 0$ *y* x *cualquier número real, es una función exponencial. El número* a *se llama base de la función o factor de crecimiento."*

Algunos ejemplos de función exponenciales $y = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $h(x) = \pi^x$.

Las funciones $f(x) = (-2)^x$, $g(x) = 0^x$, $h(x) = 1^x$ *no son exponenciales.*

En $f(x) = (-2)^x$*, la base es menor que 0; igualmente, en* $g(x)$ *y* $h(x)$ *no se cumplen las condiciones de la definición de la función exponencial.*

Veamos cómo es, en general, la gráfica de una función exponencial.

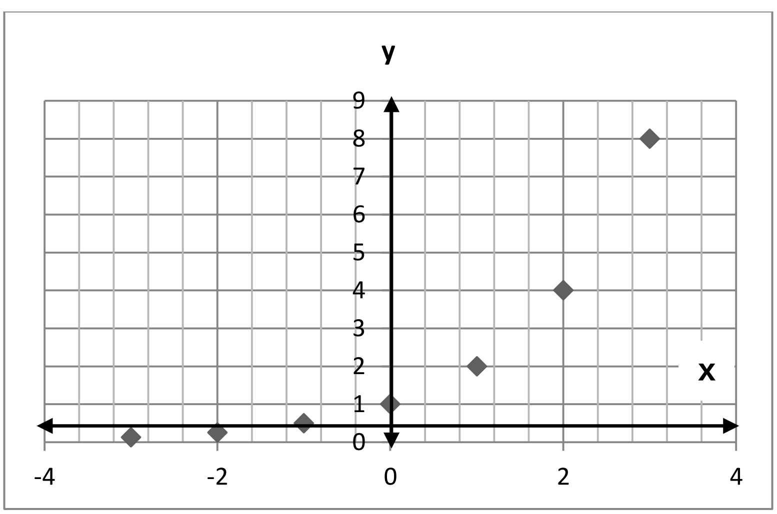
Dibujemos la grafica de la función $f(x) = 2^x$.

Solución:

La gráfica de una función exponencial se hace de la mima forma en que hemos trazado la de otras funciones.

- *Damos unos valores a la variable* x *y calculamos el valor de* 2^x *para esos valores dados.*

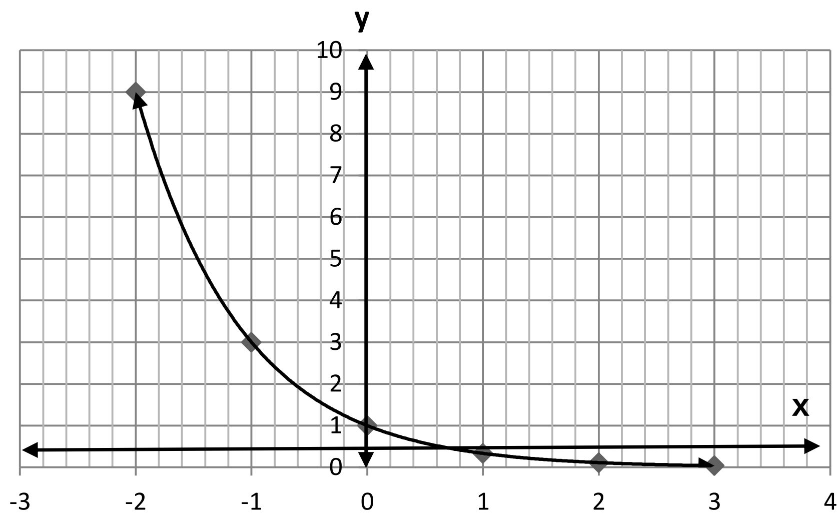
x	2^x
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
3	$2^3 = 8$
-5	$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
6	$2^6 = 64$



A medida que x *se hace más grande,* $f(x)$ *crece más rápidamente.*

A medida que x *se hace más pequeño,* $f(x)$ *tiende a cero, pero nunca alcanza este valor.*

Ahora veamos la grafica de la función $f(x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$.



En general:

Las funciones exponenciales satisfacen las siguientes propiedades.

- $a^{x}a^{y}=a^{x+y}$
- $a^{0}=1$
- $(a^{x})^{y}=a^{xy}$
- $\dfrac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$
- $a^{x}=\dfrac{1}{a^{x}}$

- *Como* $a^x > 0$ *para* $a^x \geq 0$ *y* $a^x = \dfrac{1}{a^x}$, *entonces* $a^x > 0$ *para todo* x *número real.*

Continua el texto con una aplicación de las funciones exponenciales al respecto dice:

"Una aplicación de las funciones exponenciales está relacionada con el dinero. Usualmente, al abrir una cuenta bancaria nos dice que nuestro dinero ganará un interés anual del $r\%$ *sobre el capital con el que iniciamos nuestra cuenta bancaria* C_0. *Al finalizar el primer año, deducimos que el balance de la cuenta es igual a* $C_1 = C_0 + rC_0 = C_0(1+r)$. *Si dejamos ese dinero en el banco, al finalizar el segundo año tendremos:*

$$C_2 = C_1 + rC_1 = C_1(1+r) = \underline{C_0(1+r)}(1+r) = C_0(1+r)^2$$

Si continuamos de esta forma, veamos que después de n años debe invertir C_0 *a un interés del* $r\%$ *se tendrá una cantidad igual a* $C_n = C_0(1+r)^n$ *y, además, que la sucesión* C_0, C_1, C_2 *...es una sucesión geométrica de razón*

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{C_n = C_0(1+r)^n}{C_0(1+r)^{n-1}} = (1+r)\,.$$

Este tipo de interés se conoce como ***interés compuesto*** *y es un caso especial de funciones exponenciales.*

Por ejemplo:

Si el abuelo de Fernando depositó $ 100 en su cuenta de ahorro en 1915, a un interés compuesto del 3% anual, y nunca retiró ese dinero del banco, ¿cuánto tiene el abuelo en su cuenta?

Solución:

A la fecha 2005, han transcurrido 90 años desde que hizo el depósito inicial. Entonces, después de 90 años, el abuelo tiene en su cuenta un total de

Aplicando la fórmula tenemos que:

$$C_{90} = C_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^{90} = \$1430,04.$$

Si analizamos los valores $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *a medida que* n *crece* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *también crece, aunque existe un límite de qué tan grande puede ser. Este límite es un número tan especial que cuenta con el símbolo* e*, y sus primeros dígitos son: 2,71828182.*

La función $f(x) = e^x$ *recibe el nombre de* ***función exponencial natural**.*

Ahora revisemos los problemas propuestos:

1. *Si se depositan $ 50000 en una cuenta bancaria que paga el 6% de interés compuesto anual,*

a. *¿Cuál es el saldo después de 10 años?*

b. *¿Cuál debe ser el interés anual para que el dinero se triplique en 5 años?*

2. *La población de un país fue 50000000 de habitantes en 1900 y 60000000en el 2004; supongamos que su crecimiento es en forma exponencial.*

a. *¿Cuál es su factor de crecimiento?*

b. *¿Cuántos habitantes habrá en el año 2010?*

El texto presenta la definición formal, reconociendo implícitamente su dominio pero no considera su rango, el contenido del texto se presenta en forma secuencial, la ubicación del concepto en el texto obedece al programa curricular del grado, ilustrado con algunas gráficas.

En el primer y segundo ejemplo se evidencia una transferencia cercana, lateral y vertical puesto que toma como base las explicaciones de las funciones lineales y cuadráticas y algunas consideraciones para llegar a generalizaciones.

Presenta aplicaciones de las funciones exponenciales relacionadas con el dinero (interés compuesto) y la medicina con relaciona a la radioterapia, esta última utiliza como base e. Los problemas propuestos presentan modelación de ejemplos que conducen a una transferencia cercana.

En este orden seguimos con el texto Glifos 9, Procesos Matemáticos.

Define la función lineal como:

"Una función de la forma $f(x)=a^x$ *donde* $x \in \mathbb{R}$ *,* $a \neq 1,\ \ a>0,$ *se denomina* ***función exponencial.*** *Su nombre se debe a que la variable es, en este caso, el exponente."*

Por ejemplo son funciones exponenciales:

a. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *b.* $y=2^x$ *c.* $y=3^x$ *d.* $y=0.5^x$

Son muchos los fenómenos de la naturaleza que pueden describirse usando funciones exponenciales. Veamos algunos:

Situación 1*. El número de bacterias presentes en un cultivo después de* t *horas está dada por* $q(t)=500e^{0,003(t)}$*. Se quiere hallar:*

a. *El número de bacterias con que se inició el cultivo* $q(0)$.

$q(0) = 500e^{0,003(0)} \Rightarrow q(0) = 500$ *bacterias.*

b. *Cuántas bacterias hay después de 5 horas.*

Para $t = 5$ *horas se tiene:* $q(5) = 500e^{0,003(5)}$

$q(5) = 500(1,162)$ *luego* $q(5) = 580$ *bacterias.*

Situación 2. *La presión atmosférica en función de la altura está dada por la expresión* $p(h) = p_0 e^{-0,00003(h)}$, *donde* h *se da en pie y* p *en libras por pie cuadrado.*

Si la presión atmosférica a nivel del mar es 2116 libras por pie^2*, se quiere encontrar la presión atmosférica sobre un aeroplano que está A 10000 pies de altura. Se tiene que:* $p(0) = 2116\dfrac{libras}{pie^2}$, $p(10000) = 2116e^{-0,00003(10000)}$, *luego* $p(10000) = 2116e^{-0,3}$ *entonces* $p = 1567,6\dfrac{libras}{pie^2}$.

Al representar gráficamente una función exponencial, agrega:

Las características más importantes de las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ *con* $a > 0$, $a \neq 1$, *son:*

- *El intercepto en* y *para las dos gráficas es 1 porque* $a^0 = 1$, *no tiene intercepto en el eje* x.
- *El dominio de la función es* $\mathbb{R}$ *y el rango* $\mathbb{R}^+$.
- *La función es creciente si* $a > 0$ *y decreciente si* $0 < a < 1$. *Es decir, el valor de la base determina su naturaleza creciente o decreciente.*
- *Como la función es creciente o decreciente para* $a > 0$, $a \neq 1$, *entonces,* $a^m = b^n$, *si sólo si* $m = n$.

- *En el eje* x *es una asíntota horizontal para la curva que describe la función exponencial en el plano.*

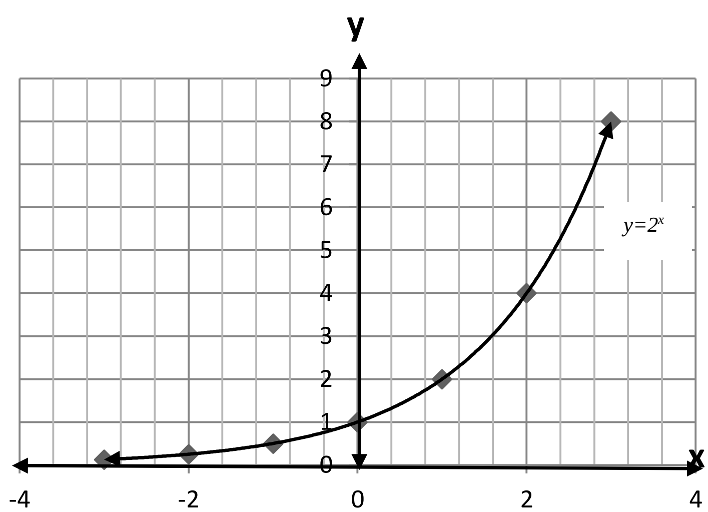
Ejemplo 1:

Dada la función $f(x)=2^x$ *realiza su representación gráfica.*

a. *En primer lugar se elabora una tabla de valores para* $f(x)=2^x$.

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	*1*	*2*	*4*	*8*

b. *Se representan las parejas ordenadas en un sistema de coordenadas rectangulares.*



Al analizar la gráfica se observa que:

1. *La base es un número real positivo mayor que 1 y el exponente es la variable* x.

2. *La curva siempre está por encima del eje de las x, es decir que la función tiene solo valores positivos en el eje de las y.*
3. *La curva corta al eje de las y en el punto de coordenada P(0, 1).*
4. *Para que la gráfica sea una curva continua, x debe tomar valores reales. Por consiguiente, la continuidad de la curva supone que para cada valor de $x \in \mathbb{R}$, entonces 2^x es su imagen o segunda componente, en el conjunto de parejas ordenadas que la conforman.*

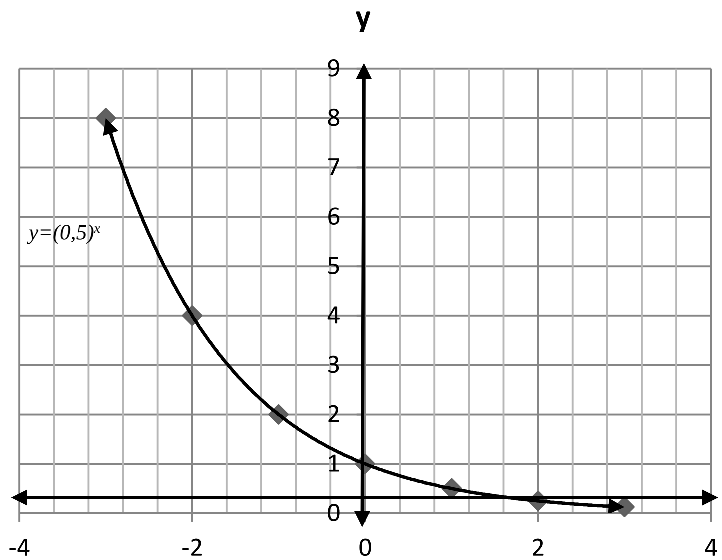
   Luego, la expresión $f(x) = 2^x$ es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y el rango es el conjunto $\mathbb{R}^+$.
5. *A medida que x toma valores cada vez mayores, la curva crece.*
6. *Además:*
   - *Si $x = 0$, entonces $f(x) = 1$.*
   - *Si $x < 0$, entonces $0 < f(x) < 1$.*
   - *Si $x > 0$, entonces $f(x) > 1$.*

Ahora veamos la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y su representación gráfica.

a. *Elabora la tabla de valores de la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

b. *Se representan las parejas en un sistema de coordenadas. El resultado es la siguiente curva.*



Al analizar la grafica se observa que:

1. *La base también es un número real positivo, pero su valor* $\left(\frac{1}{2}\right)$*, es mayor que cero y menor que 1, es decir,* $0 < a < 1$.
2. *La curva corta al eje de las* y *en el punto P(0, 1)y toma valores positivos del eje de las* y *, es decir, está por encima del eje de las* x *.*
3. *En esta curva, a medida que* x *toma valores cada vez mayores,* y *toma valores cada vez más pequeños, por lo que la curva decrece.*
4. *El dominio son los números reales* $(\mathbb{R})$ *y el rango son los reales positivos* $(\mathbb{R}^+)$.

Respecto a este texto se puede decir lo siguiente:

Su definición es formal aunque se presenta un error al escribir que *x Є R⁺* luego si se establece que el dominio de la función es todo R y su rango los reales positivos R^+. Sería bueno aclarar por qué el eje de las x es una asíntota horizontal.

La secuencia y la ubicación de los temas para desarrollar el contenido están acorde con los programas curriculares. De las situaciones problemas que se analizan más adelante encontramos una pequeña discontinuidad en la secuencia de los contenidos pues la solución requiere de funciones exponenciales de base e y aun no se ha definido.

En la situación 1 debe especificarse que t debe tomar valores mayores que cero, luego t se refiere al tiempo. Los ejemplos 1 y 2 conducen a una transferencia cercana donde el dominio conceptual es muy importante para su análisis, generalizaciones y aplicaciones que Arechiga (2000) propone en sus etapas para el aprendizaje de las matemáticas y por ende la transferencia.

En los ejercicios propuestos modelan situaciones en las cuales están presentes la transferencia cercana, lateral y vertical. El texto no considera el caso de $y = a^{-x}$ que también es una función exponencial.

FUNCION EXPONENCIAL					
TEXTO	TIPO DE TEXTO	CONCEPTOS INTRODUCTORIOS	TIPO DE DEFINICIÓN	SECUENCIA DE CONTENIDOS	TRANSFERENCIA
Matemática en Acción 4.	Tecnológico	Función potencial. Función exponencial. Dominio. Rango. Función creciente. Función inyectiva.	Formal.	Función potencial. Función exponencial.	Intenta un tipo de transferencia cercana.
Espiral 9°	Tecnológico	Función exponencial. Dominio. Interés compuesto.	Formal	Función exponencial. Propiedades de la función exponencial. Función exponencial natural.	Cercana Vertical Lateral

Glifos 9° Procesos Matemáticos	Tecnológico.	Función exponencial. Dominio. Rango.	Formal.	Función exponencial.	Cercana Vertical Lateral

CONCLUSIONES.

En este trabajo las conclusiones se agrupan teniendo en cuenta el papel que juegan los contenidos en el aprendizaje de las matemáticas, la presentación de los mismos y el logro de la transferencia.

El contenido de los libros de textos y la organización de los temas en algunos casos no están acorde al programa según el grado, estos siguen la estructura de los lineamientos curriculares propuestos por el gobierno pero no obedecen a las necesidades del estudiante y el contexto donde este se desenvuelve, al transponer los conceptos en los textos para facilitarle el aprendizaje de los mismos, lo que se hace es restarle su verdadera esencia, para su utilización convirtiéndose en un obstáculo para su formación pues un verdadero aprendizaje debe estar basado en un buen manejo conceptual, que en ocasiones aparecen definiciones auxiliares que terminan desorientando al estudiante. Es aquí donde el docente debe analizar cada texto de trabajo y verificar su contenido de enseñanza y a través de su experiencia, enriquecer su que hacer e implementar en la planeación curricular actividades o tareas de aprendizaje que articule ejercicios y prácticas para que el estudiante logre realizar conexiones y aplicar nuevos aprendizajes o habilidades.

El aspecto instrumental de las matemáticas que incita a la ejercitación de un concepto desde la metodología conductista pero con muy pocas excepciones llevan al estudiante a hacer un análisis del concepto, sus propiedades, la relación con otros conceptos y con otras áreas del saber. En síntesis los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos pretenden ilustrar el concepto sin mirar que hay más allá.

A lo largo del trabajo se ha entendido la transferencia no como aplicación de concepto sino como el traspaso de los conocimientos en otras esferas, se observa que si hay algo de transferencia es de tipo lateral y cercana pero hay ausencia de transferencia lejana. De otra parte según la metodología propuesta en el trabajo se observo que los textos se desarrollan en un ambiente tecnológico y expositivo pero no comprensivo, hecho que deja un aprendizaje incompleto, pues el proceso de aprendizaje en este caso culmina con la transferencia lejana.

Podemos afirmar que los conocimientos adquiridos en la escuela deben ser útiles dentro y fuera de las instituciones educativas, una de las áreas más importantes y propiciadora para esto es la matemática, sin embargo por lo general no ocurre pues su enseñanza en ocasiones está limitada a la mecanización y memorización de ejercicios, es por ello que la instrucción debe estar dirigida a realizar la transferencia es decir a que el estudiante sea capaz de traspasr las habilidades y conceptos que han aprendido en clase, con otras áreas o tópicos y con acontecimientos de su diario vivir; en este proceso el docente debe favorecer una serie de actividades, ejercicios y prácticas para que los estudiantes realicen este tipo de conexiones, tener claro las metas y propósitos de transferencia y el impacto que esta tiene en la comprensión de los contenidos de enseñanza con el fin que el estudiante comprenda el propósito de hacer conexiones y comience a encontrar los diversos contextos para realizar la transferencia.

Finalmente debe señalarse que este trabajo es apena una aproximación al problema de la transferencia del aprendizaje en tres temas específicos. Seria provechoso extender esta investigación, analizando como se dará la transferencia a la luz de los lineamientos curriculares y los estándares sobre matemática en la enseñanza en el nivel de básica comparando lo que aquí se presenta con lo que ocurre en otros países.

BIBLIOGRAFIA

Anzola, M. Hurvas, J. De Los Santos, I. Urquiza, J. Vizcamanos. J. (2009). *Códigos matemáticas 9°*. Bogotá, Colombia: Grupo SM.

Aréchiga, J.(2000) *Problemas de la transferencia de las matemáticas.* Manuscrito no publicado, unidad de Tecomán, México.

Arévalo, S. Garzón, L. Perafán, B. Rangel, J. Chávez, S. Silva, O. Rodríguez, J. Díaz, R. Jiménez, J. López, M. (2008). *Glifos, Procesos matemáticos 9°.* Bogotá, Colombia: Libros & Libros S.A.

Arriaga, A. Barron, H. (1995) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.* Secretaria de Educación Pública, México, D.F.

Beltrán, J. Moraleda, M. García- Alcañiz. Calleja, F. Santiuste, V. (1995). *Psicología de la educación.* Madrid: Eudema.

Cajas, F. (2001). *Alfabetización científica y tecnológica: La transposición didáctica del conocimiento tecnológico.* Enseñanza de las ciencias, 19(2), 243-254.

Chavellard, I (2000). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires, Argentina: Aique.

D' Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Encinas (2001) *Obstáculos en la transferencia de algunos conceptos del cálculo aprendidos en el contexto del movimiento a otros.* http://dcb.fi-c.unam.mx/foro/memorias2/ponencias/40.pdf.

Galindo, C. (1999). *Guías de recursos, matemáticas 9°*. Bogotá, Colombia: Voluntad.

Gómez, M.(2005). *La Transposición didáctica: historia de un concepto.* Revista Latinoamérica de estudios Educativos. Volumen 1, Julio – Diciembre. Págs. 83 – 115.

Gómez, B. (1997). *Los libros de textos de matemáticas.* Vol. 2. Fundación G. S. Ruipérez.

González, M y Sierra, M (2004). *Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*. Enseñanza de las ciencias, 22(3), 389- 408.

Losada, R. De Losada, M. Mateus, H (1978). *Matemática en Acción 4*. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Latinoamericana S.A.

Melo, C. (2007). *Matemáticas 9°*. Bogotá, Colombia: Escuelas del Futuro S.A.

Meza, M. y Rodríguez, C. (2006). *Símbolos 9°*. Bogotá, Colombia: Voluntad.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). *Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas*. *PNA*, *5*(3), 105-127.

Moreno, V. (2005). *Espiral 9°*. Bogotá, Colombia: Norma S.A.

Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de textos*. Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada.

Perkins, D. y Salomon, G. (1992). *Transfer of learning*. En International enciclopedia of education. Oxford, England: Pergamon Prees.

Ramos, M. *¿Cómo se aplican los criterios de transposición didáctica en el libro de texto? Un análisis en el concepto de Evolución de sexto grado.* Memorias de un congreso
http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/ato5/PRE1178854217.pdf

Ruiz, C. (2002). *Mediación de estrategias metacognitivas en tareas divergentes y transferencia reciproca.* Investigación y Postgrado v.17 n .Caracas oct.

Sánchez, A. y López, R. (2011). *La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción.* Revista de educación, 354, 429- 445.

Santos Trigo, L.M. (1997). *La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Revista Mexicana de Investigación Educativa, 2(3), 11- 30.

Serrano, C (2006). *Conexiones matemáticas 9°.* Bogotá, Colombia: Norma S.A.

Solarte, M. (2006). *Los conceptos científicos presentados en los textos escolares: son consecuencias de la transposición didáctica.* Revista ieRed. Revista Electrónica de la Red de Investigación Educativa. Vol. 1, N°.4 (Enero – Junio de 2006).

Wenzelburger, E. (1987). La transferencia en el aprendizaje. Publicaciones de la asociación nacional e instituciones de educación superior. [Versión electrónica] Número 61.