1

COMPLETAMIENTO DE DEDEKIN MACNEILLE Y ESQUELETOS DE RETÍCULOS COMPLETOS

EDILBERTO ARROYO ORTIZ

MONOGRAFIA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ASESOR
ELIAS SALAZAR BUELVAS

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA de INDIAS D. T. y C.
2007

AGRADECIMIENTOS

Antes que nada agradezco a Dios, por darme la vida y brindarme todas las opurtunidades para alcazar esta primera meta. Agradezco a mis padres, hermanos y demas familiares por su apoyo incondicional y paciencia. Doy un cordial saludo a todos aquellos compañeros y profesores de esa comunidad matemática en la cual me forme, en especial al profesor ELIAS SALAZAR BUELVAS por su comentarios y sugerencias para la realización de éste trabajo.

Índice

1. CAPÍTULO 1
PRELIMINARES. 5

2. CAPÍTULO 2
COMPLETAMIENTO DE DEDEKIND
MacNeille. 8
2.1. PROPIEDADES DE $DM(P)$ 10

3. CAPÍTULO 3
ESQUELETOS DE RETÍCULOS
COMPLETOS. 18

4. CAPÍTULO 4
EL RETÍCULO DE LOS PRE–ÓRDENES, *Pre(X)* 24

5. CAPÍTULO 5
TOPOLOGÍAS, FILTROS Y EL RETÍCULO DE LAS TOPOLOGÍAS DE
ALEXANDROFF *A(X)*. 28
5.1. EL RETÍCULO DE LAS TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF, *A(X)*. . . . 31

INTRODUCCIÓN

Richard Dedekind fue uno de los matemáticos más notables del siglo XIX. Algunas de sus ideas eran revolucinarias para su época y sólo fueron comprendidas y adoptadas después de su muerte. Dedekind fué el primero de los matematicos en construir explicitamente los números reales como cortes de los racionales [4]. MacNeille generaliza éste método al sumergir un conjunto parcialmente ordenado en un retículo completo [6].

Todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ induce un retículo completo $(\mathcal{O}(P), \subseteq)$. El retículo de los ideales de P, denotado por $\mathcal{O}(P)$, con el orden de la contenencia, es un retícilo completo puesto que, las uniones y las intersecciones arbitrarias de ideales de P son nuevamente ideales de P.
La contustrucción de MacNeille muetra la existencia de un retículo completo $DM(P)$, el cual contiene una copia isomorfa de P. Además, pone en evidencia la relación entre el conjunto parcialmente ordenado P y su completamiento normal $DM(P)$. Al mostrar que los *sup* e *inf* existentes en P son preservados y que P es *sup* e *inf* –denso en $DM(P)$. Éste completamiento se conoce en la literatura como *Completamiento Dedekind–MacNeille* o *Completamiento normal* de P el cual se denota por $DM(P)$.

En el primer capítulo de éste trabajo damos algunas definiciones necesarias para el desarrollo del mismo. En el segundo capítulo estudiamos el completamiento normal de un conjunto parcialmente ordenado y mostramos sus propiedades más relevantes. En el tercer capítulo se introduce la noción de esqueleto de un retículo cómpleto, esqueleto mínimo, y esqueleto atómico. Además, damos algunos ejemplos de retículos sin esqueletos, algunos con muchos esqueletos. En el cuarto capítulo estudiamos un retículo completo con esqueleto atómico que surge del estudio de la teoría de conjuntos (el retículos de los preordenes).
Finalmente estudiamos el retículo de las topologías de Alexendroff estableciendo un anti–isomorfismo entre el retículo de los preordenes el y retículo de las topologías de Alexandroff y mostramos que las topologías Alexandroff coinciden con las topologías principales .

1. CAPÍTULO 1 PRELIMINARES.

Definición 1.1. *Un* ***conjuto parcialmente ordenado*** *es un sistema $(P, \leq)$, donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria sobre P la cual satisface las siguientes condiciones:*

i) *Para todo $x \in P$, $x \leq x$* ***(Reflexiva).***

ii) *Dados $x, y \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$* ***(Antisimétrica).***

iii) *Dados $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$* ***(Transitiva).***

Definición 1.2. *Dado $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, el* ***dual*** *de $(P, \leq)$ denotado por P^{∂} se obtiene definiendo $x \leq y$ en P^{∂} si, y sólo si, $y \leq x$ en P.*

Definición 1.3. *Sea $(Q, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $P \subseteq Q$, con la relación $\leq$ restringida a P. $(P, \leq)$ es también un conjunto parcialmente ordenado. Decimos en éste caso que $(Q, \leq)$ es una* ***extensión*** *de $(P, \leq)$.*

Definición 1.4. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, dos elementos $a, b \in P$ se dicen* ***comparables*** *si $a \leq b$ o $b \leq a$. Un conjunto parcialmente ordenado en el que todos sus elementos son comparables se llama* ***conjunto totalmente ordenado.***

Definición 1.5. *Dado $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, se dice que $(P, \leq)$ tiene* ***elemento máximo****, si existe $x \in P$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in P$. Un elemento $x \in P$ es* ***maximal*** *si ningún elemento de P es estrictamente mayor que x. $(P, \leq)$ tiene* ***elemento mínimo****, si existe $x \in P$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in P$. Un elemento $x \in P$ es* ***minimal*** *si ningún elemento de P es estrictamente menor que x.*

Definición 1.6. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, sea $A \subseteq P$ un elemento $x \in P$ se llama* ***cota superior*** *de A, si $y \leq x$ para todo $y \in A$.*
Con $A^{\uparrow}$ —léase el ***superior*** *de A— denotamos el conjunto de las cotas superiores de A.*
El elemento mínimo de $A^{\uparrow}$ si existe, es el ***supremo*** *de A, denotado por $\bigvee A$ o $\sup A$.*
Un elemento $x \in P$ se llama ***cota inferior*** *de A, si $x \leq y$ para todo $y \in A$.*
Con $A^{\downarrow}$ — léase el ***inferior*** *de A— denotamos el conjunto de las cotas inferiores de A, si existe el elemento máximo de $A^{\downarrow}$ es el* ***ínfimo*** *de A, denotado por $\bigwedge A$ o $\inf A$.*

Definición 1.7. *Sean $(P, \leq)$ $(Q, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Una función $\varphi : (P, \leq) \to (Q, \preceq)$ Se dice* ***monótona*** *o que preserva orden, si $x \leq y$ en P implica que $\varphi(x) \preceq \varphi(y)$ en Q.*
La función $\varphi : (P, \leq) \to (Q, \preceq)$ es una ***inmersión*** *si:*

$$x \leq y \text{ en } P \iff \varphi(x) \preceq \varphi(y) \text{ en } Q.$$

Definición 1.8. *Sean $(P, \leq)$, $(Q, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados, se dice que $\varphi : (P, \leq) \to (Q, \preceq)$ es un* ***isomorfismo****, si φ es una inmersión sobreyectiva, en tal caso se dice que $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ son isomorfos, denotamos esto por $P \cong Q$.*

Definición 1.9. *Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados, se dice que $(P, \leq)$ es* ***anti–isomorfo*** *a $(Q, \preceq)$, si existe un isomorfismo entre $(P, \leq)$ y $(Q^{\partial}, \preceq)$.*

Nota 1.1. *De manera equivalente un isomorfismo entre dos conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$, es una función $\varphi : (P, \leq) \to (Q, \preceq)$ tal que φ es uno a uno , sobre y las funciones φ y φ^{-1} son funciones monótonas.*

A continuacion enumeramos ciertas propiedades propias de los isomorfismos entre conjuntos parcialmente ordenados. Su prueba puede consultarse en [2].

Sean $(O, \leq)$ $(P, \preceq)$ y$(Q, \lesssim)$ conjuntos parcialmente ordenados, las siguientes afirmaciones se cumplen:

i) La función identidad $I_P : P \to P$, dada por $I_P(x) = x$ para todo $x \in P$, es un isomorfimo.

ii) Si $\varphi : (P, \preceq) \to (Q, \lesssim)$ es un isomorfismo, entonces $\varphi^{-1} : (Q, \lesssim) \to (P, \preceq)$ es también un isomorfismo.

iii) Si $\varphi : (P, \preceq) \to (Q, \lesssim)$ y $\psi : (Q, \lesssim) \to (O, \leq)$ son isomorfismos, entonces $\psi \circ \varphi : (P, \preceq) \to (O, \leq)$ es un isomorfismo.

Definición 1.10. *sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $S \subseteq P$ se llama* ***ideal*** *de $(P, \leq)$, si $y \leq x$ en P con $x \in S$, implica que $y \in S$ para cada $x, y \in P$. Podemos destacar los llamados ideales principales, para cada $x \in P$ definimos $\downarrow x := \{y \in P : y \leq x\}$, el cual se denomina* ***ideal principal*** *generado por x.*

Definición 1.11. *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, un subconjunto $S \subseteq P$ con $S \neq \emptyset$ se llama* ***filtro*** *de P, si $x \leq y$ en P con $x \in S$, implica que $y \in S$ para cada $x, y \in P$. Podemos resaltar el conjunto $\uparrow x := \{y \in P : x \leq y\}$ denominado* ***filtro principal*** *generado por x.*

Definición 1.12. *Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es un* ***retículo****, si el sup $\{x, y\}$ y el inf $\{x, y\}$ existen para cada $x, y \in P$ y están en P. Es usual notar el supremo y el infimo de $\{x, y\}$ como:*

$$x \vee y = sup\ \{x, y\} \quad x \wedge y = inf\ \{x, y\}.$$

Si existen el sup S e inf S para todo subcunjunto $S \subseteq P$, el cojunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es un ***retículo completo.***

Definición 1.13. *Sea $(P, \leq)$un retículo con mínimo $\perp$ y máximo $\top$ (no necesariamente completo).*

i) Un elemento $a \in P$, con $a \neq \perp$ es un ***infra–elemento*** *si ningún elemento de P es menor que a excepto $\perp$.*

ii) Un elemento $b \in P$ con $b \neq \top$, es un ***ultra–elemento*** *si ningún elemento de P es mayor que b excepto $\top$.*

Lema 1.1. *$(P, \leq)$ es un retículo completo si, y sólo si, P tiene elemento máximo $\top$ y existe $\bigwedge S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \emptyset$. Análogamente $(P, \leq)$ es un retículo completo si, y sólo si, P tiene elemento mínimo $\perp$ y existe $\bigvee S$ para todo $S \subseteq P$, $S \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $(P, \leq)$ es un retículo completo el resultado es inmediato.
Recíprocamente, sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, con elemento máximo $\top$ tal que $inf\ S$ existe para todo $S \subseteq P$ con $S \neq \emptyset$.
En primer lugar, consideremos $S \subseteq P$ con $S \neq \emptyset$, veamos que $sup\ S$ existe. Como P tiene elemento máximo $\top$ y $S \subseteq P$, tenemos que $s \leq \top$ para todo $s \in S$ lo que significa $\top$ es una cota superior de S.
luego, podemos decir que el conjunto de las cotas superiores de S es no vacío, esto es:

$$S^{\uparrow} := \{y \in P : y \text{ es cota superior de } S\} \neq \emptyset$$

Haciendo uso de la hipótesis, podemos afirmar que $inf\ S^{\uparrow}$ existe.
Mostramos a continuación que $inf\ S^{\uparrow} = sup\ S$. Como $s \leq a$ para todo $s \in S$ y todo $a \in S^{\uparrow}$, tenemos que $s \leq inf\ S^{\uparrow}$ para todo $s \in S$, ya que $inf\ S^{\uparrow}$ es la mayor de las cotas inferiores de $S^{\uparrow}$. Puesto que $s \leq inf\ S^{\uparrow}$ para todo $s \in S$, tenemos que $inf\ S^{\uparrow} \in S^{\uparrow}$. Además, no existe cota superior de S menor que $inf\ S^{\uparrow}$, esto es $inf\ S^{\uparrow}$ es el elemento mínimo de $S^{\uparrow}$ lo que garantiza que $sup\ S$ existe y además $sup\ S = inf\ S^{\uparrow}$.
Si consideramos $P \subseteq P$ tenemos que $sup\ P = \top$, el elemento máximo de P y $inf\ P = \perp$, el elemento mínimo de P. Si $S = \emptyset$ tenemos que todo elemento de P es cota superior e inferior de $\emptyset$ por lo que $sup\ \emptyset = inf\ P = \perp$ y $inf\ \emptyset = sup\ P = \top$.
De manera similar se muestra el resultado análogo. ■

2. CAPÍTULO 2 COMPLETAMIENTO DE DEDEKIND MacNeille.

El completamiento por cortes del conjunto totalmente ordenado de los números racionales fué introducido por primera vez por *Richard Dedekind* en su famosa construcción de los Reales publicada en 1872 [4]. Este método introdujo los números reales como cortes de los racionales.
Posteriormente *H. M. MacNeille* generaliza este método al completar por cortes un conjunto parcialmente ordenado arbitrario. Ésta generalización surge de manera natural como una extensión de la construcción hecha por *Dedekind*.
MacNeille presenta éste resultado en su trabajo doctoral "*Extensions of Partially ordered sets*" en la universidad de Harvard en 1935. En él define lo que es un corte para un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, como un subconjunto A de P tal que $A^{\uparrow\downarrow} = A$, el conjunto de todos los cortes de P se conoce como *Completamiento de Dedekind–MacNeille* o completamiento normal de P. Éste conjunto es parcialmente ordenado inclusión y denotado por $DM(P)$. Mostramos en la presente sección que $DM(P)$ es un retículo completo.

A continuación damos otras definiciones equivalentes a la definición de completamiento normal $DM(P)$ de un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ y mostramos algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 2.1 (Por Cotas).
$$DM_1(P) := \{A \subseteq P : A^{\uparrow\downarrow} = A\}$$

Definición 2.2 (Por Ideales principales).
$$DM_2(P) := \{A \subseteq P : \Delta A \subseteq A\}, \quad \textit{donde} \quad \Delta A = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}.$$

Definición 2.3 (Por Cortaduras). *Una cortadura es un par (A, B) de subcunjuntos A y B de P tales que* $A^{\uparrow} = B$ *y* $B^{\downarrow} = A$.
$$DM_3(P) := \{A \subseteq P : (A, B) \quad \textit{es una cortadura de } P \quad \textit{para algún } B \subseteq P\}$$

Teorema 2.1. *Las definiciones 2.1 , 2.2 y 2.3 son equivalentes, por lo que definen el mismo objeto:*
$$DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P).$$

Demostración. Para relizar nuestra prueba mostremos que:
$$A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} = \Delta A. \tag{1}$$

En efecto:
$$\begin{aligned} z \in A^{\uparrow\downarrow} &\iff z \quad \text{es una cota inferior de} \quad A^{\uparrow} \\ &\iff z \leq y \quad \text{para todo} \quad y \in A^{\uparrow} \\ &\iff z \in \downarrow y \quad \text{para todo} \quad y \in A^{\uparrow} \\ &\iff z \in \bigcap\{\downarrow y \ : \ y \in A^{\uparrow}\}. \end{aligned}$$

A continuación mostramos que $DM_1(P) = DM_2(P)$ y luego que $DM_2(P) = DM_3(P)$.
Sea $A \in DM_1(P)$, entonces $A^{\uparrow\downarrow} = A$ y $A \subseteq P$. Haciendo uso de la igualdad (1) tenemos que $A = \Delta A$ y $A \subseteq P$ por lo que $A \in DM_2(P)$, es decir, $DM_1(P) \subseteq DM_2(P)$.
Debemos tener presente que la contenencia $A \subseteq \Delta A$ es siempre válida.
Si $A \in DM_2(P)$, entonces $\Delta A \subseteq A$ y $A \subseteq P$. Por la afirmación anterior tenemos que $\Delta A = A = A^{\uparrow\downarrow}$ y $A \subseteq P$, de donde $A \in DM_1(P)$. Lo que significa que $DM_2(P) \subseteq DM_1(P)$.
Veamos que $A \subseteq \Delta A$ es siempre válida.
En efecto:

$$\begin{aligned} y \in A &\Rightarrow y \leq x \quad \text{para todo} \quad x \in A^{\uparrow} \\ &\Rightarrow y \in \downarrow x \quad \text{para todo} \quad x \in A^{\uparrow} \\ &\Rightarrow y \in \bigcap \{\downarrow x \;:\; x \in A^{\uparrow}\} = \Delta A. \end{aligned}$$

Si $A \in DM_3(P)$, entonces existe $B \subseteq P$ tal que (A, B) es una cortadura de $(P, \leq)$, esto es, $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$. Como $A^{\uparrow\downarrow} = B^{\downarrow} = A$, entonces $A = A^{\uparrow\downarrow}$ y $A \subseteq P$ de donde $A \in DM_1(P)$. Por consiguiente $DM_3(P) \subseteq DM_1(P)$.
Si $A \in DM_1(P)$, entonces $(A, A^{\uparrow})$ es una cortadura de $(P, \leq)$ ya que $A^{\uparrow\downarrow} = A$, esto es $DM_1(P) \subseteq DM_3(P)$. ■

Nota 2.1. *Al conjuto determinado por $DM_1(P) = DM_2(P) = DM_3(P)$ se denomina completamiento de Dedekind–MacNeille o completamiento normal de P, se denota por $DM(P)$. Podemos caracterizar las cortaduras de un conjunto parcialmente ordenado sólo considerando las primeras componetes.*
Sea (A, B) una cortadura de $(P, \leq)$, entonces $A^{\uparrow} = B$ y $B^{\downarrow} = A$ para algún $B \subseteq P$, puesto que $A^{\uparrow\downarrow} = A$ tenemos que $A = B^{\downarrow} = A^{\uparrow\downarrow} = \Delta A$ y $B = A^{\uparrow}$. Por lo tanto $(A, B) = (\Delta A, A^{\uparrow})$.
Finalmente, podemos redefinir el completamiento de Dedekind–MacNeille como:

$$DM(P) := \{\Delta A : A \subseteq P\}.$$

2.1. PROPIEDADES DE $DM(P)$

Definición 2.4. *Sean $(P,\leq)$ y $(Q,\preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Sea $\varphi:(P,\leq)\to(Q,\preceq)$ una inmersión, decimos que φ es una* ***inmersión regular****, si φ preserva sups e $infs$ existentes en P.*

Teorema 2.2. *Sea $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.*

i) $\downarrow x\in DM(P)$ para todo $x\in P$.

ii) $(DM(P),\subseteq)$ es un retículo completo.

iii) La correspondencia $\varphi:(P,\leq)\to(DM(P),\subseteq)$ dada por $\varphi(x)=\downarrow x$, es una inmersión regular de $(P,\leq)$ en $(DM(P),\subseteq)$.

Demostración. i) Puesto que $(P,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tenemos que $x\leq x$ para todo $x\in P$.
Sea $w\in\downarrow x$, entonces $w\leq x$, así que $w\leq x$ para todo $w\in\downarrow x$ lo que significa que x es cota superior de $\downarrow x$ es decir $x\in(\downarrow x)^{\uparrow}$.
Mostraremos a continuación que $(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow}=\downarrow x$, en tal caso $\downarrow x\in DM(P)$ para todo $x\in P$.
En efecto:

$$\begin{aligned} z\in(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow} &\iff z \quad \text{es una cota inferior de} \quad (\downarrow x)^{\uparrow}\\ &\Rightarrow z\leq x \quad \text{ya que} \quad z\in(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow} \quad \text{y} \quad x\in(\downarrow x)^{\uparrow}\\ &\Rightarrow z\in(\downarrow x). \end{aligned}$$

Lo aterior prueba que:

$$(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow}\subseteq(\downarrow x).$$

$$\begin{aligned} w\in(\downarrow x) &\Rightarrow w\leq z \quad \text{para todo} \quad z\in(\downarrow x)^{\uparrow}\\ &\Rightarrow w \quad \text{es una cota inferior de} \quad (\downarrow x)^{\uparrow}\\ &\Rightarrow w\in(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow} \end{aligned}$$

De donde $\qquad (\downarrow x)\subseteq(\downarrow x)^{\uparrow\downarrow}$
Así las cosas, $\downarrow x\in DM(P)$ para todo $x\in X$

ii) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de $DM(P)$

$$\begin{aligned} z\in(\bigcap_{i\in I}A_i)^{\uparrow} &\iff z \quad \text{es una cota superior de} \quad \bigcap_{i\in I}A_i\\ &\iff w\leq z \quad \text{para todo} \quad w\in(\bigcap_{i\in I}A_i)\\ &\iff w\leq z \quad \text{para todo} \quad w\in A_i \quad \text{y todo} \quad i\in I\\ &\iff z\in A_i^{\uparrow} \quad \text{para todo} \quad i\in I\\ &\iff z\in\bigcap_{i\in I}A_i^{\uparrow}. \end{aligned}$$

Lo cual implica que:

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\uparrow} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\uparrow} \tag{2}$$

De manera similar se prueba que:

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\downarrow} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\downarrow} \tag{3}$$

Hemos considerado $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de subconjuntos de $DM(P)$ por lo que $A_i^{\uparrow\downarrow} = A_i$ para todo $i \in I$; usando las igualdades (2) y (3) tenemos que:

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\uparrow\downarrow} = (\bigcap_{i\in I} A_i^{\uparrow})^{\downarrow} = (\bigcap_{i\in I} A_i^{\uparrow\downarrow}) = (\bigcap_{i\in I} A_i).$$

Lo anterior significa que:

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \in DM(P).$$

Si $B \in DM(P)$ y $B \subseteq A_i$ para todo $i \in I$ tenemos que:

$$B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i\ , \quad \text{lo cual impica que} \quad \bigwedge\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

Supongamos que $(P, \leq)$ tiene elemento máximo $\top$, entonces $P^{\uparrow} = \{\top\}$.
Luego, $P^{\uparrow\downarrow} = \{\top\}^{\downarrow} = P$, esto es, $P \in DM(P)$.
Si $(P, \leq)$ no posee elemento máximo, entonces $P^{\uparrow} = \emptyset$, de donde:

$$\Delta P = \bigcap\{\downarrow y : y \in P^{\uparrow}\} = \bigcap\{\downarrow y : y \in \emptyset\} = P = P^{\uparrow\downarrow}$$

Nuevamente tenemos que $P \in DM(P)$.
Hasta el momento hemos probado que $P \in DM(P)$; el elemento máximo de $DM(P)$ y dada $\{A_i\}_{i\in I}$ una coleción no vacía de elementos en $DM(P)$ existe $\bigwedge\{A_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} A_i$. Haciendo uso del lema 1.1 se concluye que $DM(P)$ es un retículo completo.

iii) Es claro que la cerrespondencia está bien definida.
Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $\downarrow x = \downarrow y$; teniendo presente que $x \in\downarrow x$, $y \in\downarrow y$ tenemos que $x \in\downarrow y$ y $y \in\downarrow x$, lo cual implica $x \leq y$ y $y \leq x$. Por la propiedad antisimétrica tenemos que $x = y$.
Veamos que φ como antes dafinida, es realmente una inmersión de orden.
Si $x \leq y$, entonces $x \in\downarrow y$. Además, para todo $w \in\downarrow x$ tenemos que $w \in\downarrow y$. Por lo tanto, $\downarrow x \subseteq\downarrow y$ en $DM(P)$.
Si $\downarrow x \subseteq\downarrow y$ en $DM(P)$, entonces $x \leq y$, ya que $x \in\downarrow x$ y $\downarrow x \subseteq\downarrow y$.
En lo que resta de la demostración, verificamos si la correspondencia $\varphi : (P, \leq) :\rightarrow (DM(P), \subseteq)$, dada por $\varphi(x) =\downarrow x$ es una inmersión regular.
Sea $A \subseteq P$ tal que $\bigwedge A$ existe, entonces $\bigwedge A \leq a$ para todo $a \in A$, entonces $\varphi(\bigwedge A) \subseteq \varphi(a)$ para todo $a \in A$, puesto que φ es una inmersión de orden.
Lo anterior prueba que $\varphi(\bigwedge A)$ es una cota inferior de $\varphi(A)$, verifiquemos que $\varphi(\bigwedge A)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\varphi(A)$.

Sea $Y \in DM(P)$ una cota inferior arbitraria de $\varphi(A)$, entonces $Y \subseteq \varphi(a) = \downarrow a$ para todo $a \in A$. Es decir $Y \subseteq \bigcap_{a \in A} \downarrow a = A^{\downarrow}$.
Ahora, si $\alpha \in A^{\downarrow}$, tenemos que $\alpha \leq \bigwedge A$ ya que $\bigwedge A$ es la mayor de las cotas inferiores de A. Por lo tanto $\alpha \in \downarrow \bigwedge A$ para todo $\alpha \in A^{\downarrow}$. Es decir $A^{\downarrow} \subseteq \downarrow \bigwedge A = \varphi(\bigwedge A)$.
Por lo hecho hasta aquí tenemos que:

$$Y \subseteq A^{\downarrow} \quad y \quad A^{\downarrow} \subseteq \varphi(\bigwedge A), \quad \text{en consecuencia} \quad Y \subseteq \varphi(\bigwedge A).$$

Como Y es una cota inferior arbitraria tenemos que $\varphi(\bigwedge A)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\varphi(A)$ lo cual muestra que:

$$\bigwedge(\varphi(A)) = \varphi(\bigwedge A).$$

Por otro lado, supongamos $A \subseteq P$ tal que $\bigvee A$ existe, entonces $a \leq \bigvee A$ para todo $a \in A$.
Luego, $\varphi(a) \subseteq \varphi(\bigvee A)$ para todo $a \in A$. Esto prueba que $\varphi(\bigvee A)$ es una cota superior de $\varphi(A)$.
Sea $Y \in DM(P)$ una cota superior arbitraria para $\varphi(A)$, entonces $\downarrow a = \varphi(a) \subseteq Y$ para todo $a \in A$. Como $a \in \downarrow a$, tenemos $a \in Y$ para todo $a \in A$, esto es,

$$A \subseteq Y \tag{4}$$

Supongamos $y \in A^{\uparrow}$, entonces $\bigvee A \leq y$, ya que $\bigvee A$ es la menor de las cotas superiores de A. Como φ es una inmersión se tiene $\downarrow \bigvee A = \varphi(\bigvee A) \subseteq \downarrow y = \varphi(y)$ para todo $y \in A^{\uparrow}$. Por lo tanto.

$$\downarrow \bigvee A \subseteq \bigcap\{\downarrow : y \in A^{\uparrow}\} = A^{\uparrow\downarrow}$$

Si $\alpha \in \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}$, Tenemos que $\alpha \in \downarrow y$ para todo $y \in A^{\uparrow}$. De aquí, $\alpha \leq y$ para todo $y \in A^{\uparrow}$. Teniendo en cuenta que $\bigvee A$ es el infimo de $A^{\uparrow}$, entonces $\alpha \leq \bigvee A$. Por lo que $\alpha \in \downarrow \bigvee A$. Ésto es

$$A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} \subseteq \downarrow \bigvee A.$$

las dos inclusiones anteriores muestran lo siguiente

$$\downarrow \bigvee A = A^{\uparrow\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} \tag{5}$$

Finalmente, haciendo uso de (4) y (5) tenemos que :

$$\varphi(\bigvee A) = \downarrow \bigvee A = A^{\uparrow\downarrow} \subseteq Y^{\uparrow\downarrow} = Y.$$

Lo cual garantiza que $\varphi(\bigvee A)$ es la menor de las cota superior de $\varphi(A)$. Esto es,

$$\bigvee \varphi(A) = \varphi(\bigvee A).$$

■

Nota 2.2. *En la demostración del teorema anterior y más especificamente en el inciso ii) mostramos que el completamiento de Dedekind MacNeille $DM(P)$ de un conjunto parcialmente ordenado, es un retículo completo, aquí especificamos como viene dado el sup en*

$DM(P)$.
Si $A \subseteq P$, entonces $(A^{\uparrow\downarrow})^{\uparrow\downarrow} = A^{\uparrow\downarrow}$ lo cual significa que $A^{\uparrow\downarrow} \in DM(P)$.
Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $DM(P)$, Veamos que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow}$ es el sup de $\{A_i\}_{i\in I}$.
Claramente, $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow}$ para todo $i \in I$. Además, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow} \in DM(P)$, lo cual significa que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow}$ es una cota superior de $\{A_i\}_{i\in I}$.
Sea $B \in DM(P)$ una cota superior arbitraria , entonces $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$.
Luego, $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$, de donde $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow} \subseteq B^{\uparrow\downarrow} = B$, ya que $B \in DM(P)$.
Hemos mostrado que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow}$ es la menor de las cotas superiores de $\{A_i\}_{i\in I}$. Lo que significa:

$$\bigvee\{A_i\}_{i\in I} = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\uparrow\downarrow}.$$

Sea $\mathfrak{P} := \{\downarrow x : x \in P\}$, por el inciso ii) del teorema 2.2 tenemos que: $\mathfrak{P} \subseteq DM(P)$; si restringimos φ obtenemos que $\varphi : (P, \leq) \to (\mathfrak{P}, \subseteq)$, definida como antes es un isomorfismo.

Sea $(Q, \leq)$ un conjunto parcialmemte ordenado, supongamos $A \subseteq Q$ tal que *sup* A existe. Para resaltar el papel que juega Q, podemos notar así:
sup $A = \bigvee_Q A$. Si $A \subseteq P \subseteq Q$ notemos por $A^{\uparrow_P}$ y $A^{\downarrow_P}$ los conjuntos de cotas superiores e inferiores de A en P, respectivamente. En esta notación tenemos lo siguiente:

$$A^{\uparrow_P} := \{y \in P : x \leq y \text{ para todo } x \in A\}.$$
$$A^{\downarrow_P} := \{y \in P : y \leq x \text{ para todo } x \in A\}.$$

Sea $(Q, \leq)$ una extensión de $(P, \leq)$ y $x \in Q$. Definimos $(\downarrow x)_P := \{y \in P : y \leq x\}$ $(\uparrow x)_P := \{y \in P : x \leq y\}$.

Definición 2.5. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo completo, P un subconjunto de Q. Es decir, $(Q, \leq)$ una extensión de $(P, \leq)$. Se dice que P es* ***sup–denso*** *en Q, si para todo $x \in Q$ existe $A \subseteq P$ tal que $\bigvee_Q A = x$. Dualmente, P es* ***inf–denso*** *en Q si para todo $x \in Q$ existe $A \subseteq P$ tal que $\bigwedge_Q A = x$.*

Proposición 2.3. *Sea A un subconjunto de un retículo completo $(Q, \leq)$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) A es sup—denso en Q.

ii) $x = \bigvee_Q (\downarrow x)_P$ para todo $x \in Q$.

iii) Para todo $x, y \in Q$ con $x \nleq y$, existe $a \in A$, con $a < x$ tal que $a \nleq y$

Demostración. $i) \to ii)$ Supongamos A sup—denso en $(Q, \leq)$.
Sea $x \in Q$, existe $B \subseteq A$ tal que $\bigvee_Q B = x$. Puesto que $w \leq x$ para todo $w \in (\downarrow x)_A$, entonces x es cota superior de $(\downarrow x)_A$ en Q. Supongamos $y \in Q$ una cota superior arbitraria de $(\downarrow x)_A$. Teniendo en cuenta que $b \leq x$ para todo $b \in B$ y además $B \subseteq A$, tenemos que $B \subseteq (\downarrow x)_A$, esto es, $b \leq y$ para todo $b \in B$, así que, y es una cota superior de B en Q. Como $\bigvee_Q B$ es la menor de las cotas superiores de B en Q, tenemos que $\bigvee_q B = x \leq y$.
Lo anterior significa que x es la menor de las cotas superiores de $(\downarrow x)_A$ en Q, es decir, $\bigvee_Q (\downarrow x)_A = x$, para todo $x \in Q$.

$ii) \to i)$ Supongamos $x = \bigvee_Q (\downarrow x)_A$, para todo $x \in Q$.
Puesto que $(\downarrow x)_A = (\downarrow x) \cap A \subseteq A$, el resultado es inmediato.

$i \to iii)$ Supongamos que A es sup—denso en $(Q, \leq)$.
Sean $x, y \in Q$, con $x \not\leq y$. Puesto que $x \in Q$ existe $B \subseteq A$ tal que $\bigvee_Q B = x$. Además, existe α tal que $\alpha = inf\ \{x, y\}$, es decir, $\alpha < x$, $\alpha \leq y$. Por tanto, existe $b \in B$ tal que $\alpha < b \leq x$, puesto que $x = \bigvee_Q B$.
Si $b \leq y$ contradecimos la elección de α como el inf de $\{x, y\}$, en consecuencia $b \not\leq y$, es claro que $b \in A$ debido a que $B \subseteq A$.

$iii) \to i)$ Supongamos que dados $x, y \in Q$ con $x \not\leq y$, existe $a \in A$ con $a < x$ tal que $a \not\leq y$. Sea $x \in Q$, entonces $w \leq x$ para todo $w \in (\downarrow x)_A$, esto es x es una cota superior para $(\downarrow x)_A$. Supongamos $y \in Q$ tal que $y < x$, entonces $x \not\leq y$. Haciendo uso de la hipótesis, existe $a \in A$ con $a < x$ tal que $a \not\leq y$.
Lo anterior significa que; existe $a \in (\downarrow x)_A \subseteq A$ tal que $a \not\leq y$. Por lo tanto, ningún elemento de Q menor que x es cota superior de $(\downarrow x)_A$, en consecuencia existe $B = (\downarrow x)_A \subseteq A$ tal que $\bigvee_Q B = \bigvee_Q (\downarrow x)_A = x$, lo cual garantiza que A es sup–denso en Q. ■

El resultado análogo a la proposición anterior se enuncia seguidamente; su prueba es similar a la anterior.

Proposición 2.4. *Sea A un subconjunto de un retículo completo $(Q, \leq)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) A es inf—denso en $(Q, \leq)$.

ii) $x = \bigwedge_Q (\uparrow x)_A$ para todo $x \in Q$.

iii) Para todo $x, y \in Q$ con $y \not\leq x$, existe $a \in A$ con $x < a$ tal que $y \not\leq a$.

Nota 2.3. *Las proposiciones anteriores nos muestran lo siguientes:*
Si A es un subconjunto sup—denso e inf—denso en un retículo completo $(Q, \leq)$, todo elemento de Q puede ser aproximado por debajo, por medio de elementos de A, esto es $x = \bigvee_Q (\downarrow x)_A$. De la misma manera todo elemento de Q puede ser aproximado por arriba, por medio de elementos en A, esto es, $x = \bigwedge_Q (\uparrow x)_A$.

Proposición 2.5. *Dado $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, el subconjunto $\mathfrak{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$ de $DM(P)$ es sup—denso e inf—denso en $DM(P)$.*

Demostración. Sea $A \in DM(P)$, entonces $A \subseteq P$ y $A^{\uparrow\downarrow} = A$. Haciendo uso de la igualdad (1) tenemos que $A = \bigcap \{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}$, claramente $\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}$ es una subclase de $\mathfrak{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$ que es a su vez una subclase de $DM(P)$. Como $DM(P)$ es un retículo completo en el cual, los infs son las intersecciones; podemos decir lo siguiente:
Existe $\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} \subseteq \mathfrak{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$ tal que

$$A = \bigcap \{\downarrow x : y \in A^{\uparrow}\} = \bigwedge_{DM(P)} \{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} \tag{6}$$

Como A es un elemento arbitrario de $DM(P)$ podemos afirmar que $\mathfrak{P}$ es inf—denso en $DM(P)$:

Puesto que $A \in DM(P)$, en este caso $\uparrow A$ denota los elementos de $DM(P)$ que contienen a A, esto es $\uparrow A := \{B \in DM(P) : A \subseteq B\}$.
Al mostrar la siguiente igualdad, sólo deseamos destacar el uso de la proposición 2.4.

$$\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} = (\uparrow A)_{\mathfrak{P}}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} y \in A^{\uparrow} &\Rightarrow y \quad \text{es una cota superior de} \quad A \quad \text{en} \quad P \\ &\Rightarrow x \leq y \quad \text{para todo} \quad x \in A \\ &\Rightarrow x \in \downarrow y \quad \text{para todo} \quad x \in A \end{aligned}$$

De donde $\quad A \subseteq \downarrow y\;$ para todo $y \in A^{\uparrow}$.
Luego podemos decir que: Dado $\downarrow y \in \{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}$, tenemos que $A \subseteq \downarrow y$, obviamente $\downarrow y \in \mathfrak{P}$, esto es, $\downarrow y \in (\uparrow A)_{\mathfrak{P}}$. lo cual significa que:

$$\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} \subseteq (\uparrow A)_{\mathfrak{P}}. \tag{7}$$

Por otro lado, sea $B \in (\uparrow A)_{\mathfrak{P}}$, entonces $A \subseteq B$ y $B \in \mathfrak{P}$, como $B \in \mathfrak{P}$, existe $z \in P$ tal que $B = \downarrow z$. Ahora $x \in \downarrow z$ para todo $x \in A$, ya que $A \subseteq B = \downarrow z$. Se deduce de lo anterior que $x \leq z$ para todo $x \in A$. Por lo que $z \in A^{\uparrow}$.
Finalmente, podemos decir lo siguiente $B = \downarrow z \in \{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}$, en consecuencia:

$$(\uparrow A)_{\mathfrak{P}} \subseteq \{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\}. \tag{8}$$

De las inclusiones (7) y (8) se tiene que $(\uparrow A)_{\mathfrak{P}} = \{\downarrow y : y \in A \in A^{\uparrow}\}$. Si usamos éste resultado con la igualdad (6), vemos que se cumple el resultado que se da en la proposición 2.4 $\quad A = \bigcap\{\downarrow y : y \in A^{\uparrow}\} = \bigwedge_{DM(P)}(\uparrow A)_{\mathfrak{P}}$.

Retomando nuestra demostración, concluimos mostrando que $\mathfrak{P}$ es sup—denso en $DM(P)$. Para ello hacemos uso de la siguiente igualdad:

$$\bigcup_{a \in A} \downarrow a = A^{\uparrow\downarrow} = A. \tag{9}$$

Supongamos $A \in DM(P)$, entonces $A \subseteq P$ y $A^{\uparrow\downarrow} = A$.
Si $a \in A$, por reflexividad tenemos $a \leq a$, así que , $a \in \downarrow a$, lo cual implica que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} \downarrow a$.
Por otro lado, Si $x \in \bigcup_{a \in A} \downarrow a$, entonces existe $a \in A$ tal que $x \in \downarrow a$, esto es, $x \leq a$. Ahora, si $y \in A^{\uparrow}$, entonces $x \leq a \leq y$, de donde $x \leq y$ para todo $y \in A^{\uparrow}$, así que $x \in A^{\uparrow\downarrow}$. Por lo tanto, $\bigcup_{a \in A} \downarrow a \subseteq A^{\uparrow\downarrow}$.
Usando las dos contenecias anteriores probamos la igualdad (9). La cual implica lo siguiente:

$$\Big(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\Big)^{\uparrow\downarrow} = A^{\uparrow\downarrow} = A.$$

Haciendo uso del resultado la anterior. La nota 2.2 nos garantiza que $\mathfrak{P}$ es sup—denso en $DM(P)$. ■

Lema 2.1. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo completo $A \subseteq P \subseteq Q$, siendo P sub—denso e inf—denso en Q*

i) $A^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow \bigvee_Q A)_P$.

ii) Si $x \in Q$ entonces $(\downarrow x)_P^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow x)_P$. Esto quiere decir que $(\downarrow x)_P \in DM(P)$.

Demostración. i) Si $x \in A^{\uparrow_P}$, entonces $x \in A^{\uparrow} \cap P$. Como $\bigvee_Q A$ es la menor de las cotas superiores de A en Q, tenemos $\bigvee_Q A \leq x$. Además, $x \in P$ por lo que $x \in (\uparrow \bigvee_Q A)_P$, es decir, $A^{\uparrow_P} \subseteq (\uparrow \bigvee_Q A)_P$.
Si $x \in (\uparrow \bigvee_Q A)_P$, entonces $x \in \uparrow \bigvee_Q A \cap P$. Por lo tanto, $\bigvee_Q A \leq x$ y $x \in P$. Como $\bigvee_Q A$ es la menor de las cotas superiores de A en Q y $x \in P$, tenemos que $x \in A^{\uparrow_P}$. Esto es, $(\uparrow \bigvee_Q A)_P \subseteq A^{\uparrow_P}$.
Las dos inclusiones anteriores muestran que $(\uparrow \bigvee_Q A)_P = A^{\uparrow_P}$. La cual implica que:

$$A^{\uparrow_P \downarrow_P} = \left[(\uparrow \bigvee_Q A)_P\right]^{\downarrow_P}. \tag{10}$$

Sea $z = \bigvee_Q A$, el cual existe ya que Q es un retículo completo. Como P es inf—denso, por la proposicion 2.4 tenemos que $\bigwedge_Q (\uparrow z)_P = z$. De donde $z \leq w$ para todo $w \in (\uparrow z)_P$. Ahora, si $y \in \left[(\uparrow z)_P\right]^{\downarrow_P}$ tenemos que $y \leq z \leq w$ para todo $w \in (\uparrow z)_P$. Es decir, $y \leq z \leq w$ para todo $w \in (\uparrow z)_P$, en consecuencia

$$\left[(\uparrow z)_P\right]^{\downarrow_P} = (\downarrow z)_P \tag{11}$$

Usando los resultados mostrados en (10) y (11) y teniendo en cuenta que $z = \bigvee_Q A$, tenemos que:

$$A^{\uparrow_P \downarrow_P} = \left[(\uparrow \bigvee_Q A)_P\right]^{\downarrow_P} = \left[(\uparrow z)_P\right]^{\downarrow_P} = (\downarrow z)_P = (\downarrow \bigvee_Q A)_P.$$

ii) Sea $x \in Q$, como P es sup—denso en Q tenemos que $\bigvee_Q (\downarrow x)_P = x$. Si tomamos $A = (\downarrow x)_P$ y usando el inciso i) de éste lema tenemos lo siguiente:

$$\left[(\downarrow x)_P\right]^{\uparrow_P \downarrow_P} = A^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow \bigvee_Q A)_P = (\downarrow x)_P.$$

■

Lema 2.2. *Sean A, B subcunjuntos de un retículo completo Q, entonces, $\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B$ si, y sólo si, $\downarrow \bigvee_Q A \subseteq \downarrow \bigvee_Q B$*

Demostración.

$$\begin{aligned}\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B &\Rightarrow \bigvee_Q A \in \downarrow \bigvee_Q B\\ &\Rightarrow w \in \downarrow \bigvee_Q B, \quad \text{para todo} \quad w \in \downarrow \bigvee_Q A\\ &\Rightarrow \downarrow \bigvee_Q A \subseteq \downarrow \bigvee_Q B.\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\downarrow \bigvee_Q A \subseteq \downarrow \bigvee_Q B &\Rightarrow \bigvee_Q A \in \downarrow \bigvee_Q B, \quad \text{ya que} \quad \bigvee_Q A \in \downarrow \bigvee_Q A\\ &\Rightarrow \bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B\end{aligned}$$

■

Teorema 2.6. *Salvo isomorfismo, $DM(P)$ es el único retículo completo en el cual P es sup—denso e inf—denso. Más precisamente, si P es un subconjunto sup-denso e inf—denso en un retículo completo Q, entonces $DM(P) \cong Q$.*

Demostración. Hemos mostrado en la proposición 2.4 que $\mathfrak{P} = \{\downarrow x : x \in P\}$ es sup—denso e inf—denso en $DM(P)$. Además, $\mathfrak{P}$ es isomorfo a P.
Supongamos Q un retículo completo en el cual $P \subseteq Q$ y P es sup—denso e inf—denso en Q. Veamos que $DM(P) \cong Q$.
Definamos $\varphi : (DM(P)) \to Q$, dada por $\varphi(A) = \bigvee_Q A$ para todo $A \in DM(P)$.
Sean $A, B \in DM(P)$ tales que $A \subseteq B$, es claro de $B^{\uparrow} \subseteq A^{\uparrow}$.
Como $\bigvee_Q B$ es el elemento mínimo de $B^{\uparrow}$, el cual pertenece a $A^{\uparrow}$. Según lo anterior, se tiene $\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B$. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad A \subseteq B, \quad \text{entonces} \quad \varphi(A) = \bigvee_Q A \leq \varphi(B) = \bigvee_Q B \tag{12}$$

Supongamos que $\bigvee_Q A \leq \bigvee_Q B$, por el lema 2.2 se tiene $\downarrow \bigvee_Q A \subseteq \downarrow \bigvee_Q B$. Usando el lema 2.1 (i) tenemos que: $A = A^{\uparrow_P \downarrow_P} = (\downarrow \bigvee_Q A)_P \subseteq (\downarrow \bigvee_Q B)_P = B^{\uparrow_P \downarrow_P} = B$. De donde $A \subseteq B$, en consecuencia

$$\text{si} \quad \varphi(A) = \bigvee_Q A \leq \varphi(B) = \bigvee_Q B, \quad \text{entonces} \quad A \subseteq B. \tag{13}$$

Los resultados mostrados en (12) y (13) garantizan que φ es una inmersión de orden. Esto es,

$$A \subseteq B \quad \text{si, y sólo si,} \quad \varphi(A) = \bigvee_Q A \leq \varphi(B) = \bigvee_Q B.$$

Supongamos que P es sup—denso e inf—denso en Q y sea $x \in Q$. Por la proposición 2.3 se tiene $\bigvee_Q (\downarrow x)_P = x$. Además, el lema 2.1 asegura que
$(\downarrow x)_P \in DM(P)$. Por lo que, $\varphi((\downarrow x)_P) = \bigvee_Q (\downarrow x)_P = x$, es decir, dado $x \in Q$, existe $(\downarrow x)_P \in DM(P)$ tal que $\varphi((\downarrow x)_P) = x$. Lo cual significa que φ es una inmersión de orden sobreyectiva.
En resumen, tenemos que $DM(P) \cong Q$, como se quería mostrar. ■

18

3. CAPÍTULO 3 ESQUELETOS DE RETÍCULOS COMPLETOS.

En el capítulo aterior partimos de un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ y hallamos un retículo completo $DM(P)$ *el completamiento normal* de P, en el cual P es *sup* e *inf* denso. En éste capítulo tomamos el camino inverso, partimos de un retículo completo $(Q, \leq)$ y respondemos la siguiente pregunta *¿existe un subconjunto S de Q, con $S \neq Q$ tal que $DM(S) \approxeq Q$?.*
En caso de existir tal conjunto S lo denominamos *esqueleto* de Q. Introducimos además, las nociones de esqueleto mínimo y esqueleto atómico en retículos completos.

Definición 3.1. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo completo.*

i) *Un subconjunto S de Q es un* **esqueleto** *de Q si $S \neq Q$ y $DM(S) \approxeq Q$. Usando la proposición 2.6, podemos de manera equivalente decir que S es un esqueleto de Q, si $S \neq Q$ y S es sup denso e inf denso en Q.*

ii) *Un esqueleto S de Q es un* **esqueleto mínimo***, si ningún subconjunto de S es sup denso e inf denso en Q.*

Nota 3.1. *Un esqueleto determina completamente un retículo completo en el siguiente sentido: Si dos retículos Q_1 y Q_2 tienen esqueletos isomorfos S_1 y S_2 respectivamente, entonces Q_1 y Q_2 son también isomorfos.*
Como S_1 y S_2 son esqueletos de los retículos completos Q_1 y Q_2 respectivamente, tenemos que $DM(S_1) \approxeq Q_1$ y $DM(S_2) \approxeq Q_2$. Definamos $\mathfrak{P}_1 := \{\downarrow x : x \in S_1\}$ y $\mathfrak{P}_2 := \{\downarrow x : x \in S_2\}$, el teorema 2.2 nos muestra que $S_1 \approxeq \mathfrak{P}_1$ y $S_2 \approxeq \mathfrak{P}_2$. Teniendo en cuenta que $S_1 \approxeq S_2$ podemos afirmar que $\mathfrak{P}_1 \approxeq \mathfrak{P}_2$. Usando la proposición 2.5 tenemos que $\mathfrak{P}_1$ es sup e inf denso en $DM(S_1)$ y $\mathfrak{P}_2$ es sup e inf denso en $DM(S_2)$, entonces $\mathfrak{P}_1$ es sup e inf denso en $DM(S_2)$ y $\mathfrak{P}_2$ es sup e inf denso en $DM(S_1)$. Finalmente, usando el teorema 2.6 obtenemos que:

$$DM(S_1) \approxeq Q_1 \approxeq DM(S_2) \approxeq Q_2.$$

Proposición 3.1. *Sea $\varphi : (Q, \leq) \to (L, \preceq)$ un isomorfismo entre los retículos completos Q y L. Se verifican las siguientes condiciones:*

i) *Si $A \subseteq Q$ es sup denso en Q, entonces $\varphi(A)$ es sup denso en L.*

ii) *Si $A \subseteq Q$ es inf denso en Q, entonces $\varphi(A)$ es inf denso en L.*

Demostración. Sea $y \in L$ como φ es un isomorfismo, existe $x \in Q$ tal que $\varphi(x) = y$, entonces $\varphi^{-1}(y) = x$. Teniendo en cuenta que A es *sup* denso en Q y que $x \in Q$, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $x = \bigvee_Q B$. Como $\varphi(x) = y$ tenemos que

$$\varphi(x) = y = \varphi(\bigvee_Q B) \tag{14}$$

Ahora, $b \leq \bigvee_Q B$ para todo $b \in B$, entonces $\varphi(b) \preceq \varphi(\bigvee_Q B)$ para todo $b \in B$; ya que φ es un isomorfismo.

Lo anterior significa que $\varphi(\bigvee_Q B)$ es una cota superior de $\varphi(B)$.
Sea z una cota superior arbitraria de $\varphi(B)$, entonces $\varphi(b) \preceq z$ para todo $b \in B$. Haciendo uso de la nota 1.1, tenemos que $b \leq \varphi^{-1}(z)$ para todo $b \in B$. Como $\bigvee_Q B$ existe, entonces $\bigvee_Q B \leq \varphi^{-1}(z)$; esto se debe a que $\bigvee_Q B$ es la menor de las cotas superiores de B en Q.
Luego, $\varphi(\bigvee_Q B) \preceq z$, lo que nos indica que $\varphi(\bigvee_Q B)$ es la menor de las cotas superiores de $\varphi(B)$ en L, es decir:

$$\bigvee_Q \varphi(B) = \varphi(\bigvee_Q B) \tag{15}$$

por los dos resultados mostrados en (14) y (15) tenemos que.

$$y = \bigvee_Q (\varphi(B))$$

Finalmente, dado $y \in L$, existe $\varphi(B) \subseteq \varphi(A)$ tal que $y = \bigvee_Q(\varphi(B))$, lo cual significa que $\varphi(A)$ es *sup* denso en L.
De manera similar se prueba *ii)*. ■

Nota 3.2. *Si en la proposición anterior, los retículos Q y L son anti—isomorfos, es decir $Q \approxeq L^{\theta}$, este anti— isomorfismo envía conjuntos sup denso en conjuntos inf denso y conjuntos inf denso en conjuntos sup denso.*

Ejemplo 3.1. *Consideremos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, en el que se añade a $\mathbb{R}$ un primer y un último elemento. $\mathbb{R}^*$ es un retículo completo. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ son esqueletos de $\mathbb{R}^*$.*
Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\beta = \alpha$, tenemos que existe $B \subseteq \mathbb{R} - \{\alpha\}$ tal que sup $B = \beta$, en este caso podemos considerar $(-\infty, \beta) \subseteq \mathbb{R} - \{\alpha\}$ ya que sup $(-\infty, \beta) = \beta$, también existe $B \subseteq \mathbb{R} - \{\alpha\}$ tal que inf $B = \beta$, tomemos $(\beta, \infty) = B$.
Supongamos $\beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq \alpha$, entonces $\beta > \alpha$ o $\beta < \alpha$. Si $\beta > \alpha$, existe $B = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} - \{\alpha\}$, tal que sup $B = \beta$. Además, existe $B = (\beta, \infty) \subseteq \mathbb{R} - \{\alpha\}$, tal que inf $B = \beta$. Si $\beta < \alpha$ el resultado es similar.
Si $\beta = \infty$, tomamos $B = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ ya que sup $\mathbb{R} - \{\alpha\} = \infty$.
Si $\beta = -\infty$, nueavamente $B = \mathbb{R} - \{\alpha\}$, puesto que inf $B = \mathbb{R} - \{\alpha\} = -\infty$.
Por lo tanto, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ es un esqueleto de $\mathbb{R}^*$.
Este ejemplo es de gran importancia ya que muestra un retículo completo, en el cual hay infinitos esqulетos.

Proposición 3.2. *Sea S un subconjunto propio de $\mathbb{R}$, tal que S es sup denso e inf denso en $\mathbb{R}$, entonces dado $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, existe $s \in S$ tal que $x \leq s \leq y$.*

Demostración. Puesto que $x, y \in \mathbb{R}$ y además S es *sup* e *inf* denso en $\mathbb{R}$, tenemos por la proposición 2.3 y 2.4 que:

$$x = \bigwedge_{\mathbb{R}} (\uparrow x)_S \qquad y = \bigvee_{\mathbb{R}} (\downarrow y)_S$$

$$x = \bigvee_{\mathbb{R}} (\downarrow x)_S \qquad y = \bigwedge_{\mathbb{R}} (\uparrow y)_S$$

Consideremos $A = (\uparrow x)_S \cap (\downarrow y)_S$, supongamos además que $A = \emptyset$.
Sea $\alpha \in (\downarrow y)$, entonces $\alpha \leq x$, de lo contrario, si $\alpha > x$ se tiene que $\alpha \in (\uparrow x)_S$ lo cual es

imposible al considerar $A = \emptyset$.
Luego, podemos decir que $\alpha \leq x$, para todo $\alpha \in (\downarrow y)_S$ lo cual significa que x es una cota superior de $(\downarrow y)_S$. Pero $x < y$ y también $y = \bigvee_{\mathbb{R}}(\downarrow y)$ lo cual es absurdo. Decir que x es una cota superior de $(\downarrow y)_S$ menor que $sup\ (\downarrow y)_S$. En consecuencia, lo anterior nos da argumento para decir, existe $s \in A = (\uparrow x)_S \cap (\downarrow y)_S$. Esto es, existe $s \in S$ tal que $x \leq s \leq y$. Como se quería mostrar. ■

Proposición 3.3. $(\mathbb{R}^*, \leq)$ *tiene infinitos esqueletos pero no tiene esqueleto mínimo.*

Demostración. En el ejemplo 3.1 observamos que $(\mathbb{R}^*, \leq)$ tiene infinitos esqueletos. La idea para mostrar que $(\mathbb{R}^*, \leq)$ no posee esqueleto mínimo es la siguiente. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un esqueleto de $\mathbb{R}^*$ y $a \in S$, entonces $S - \{a\}$ también resulta ser un esqueleto de $\mathbb{R}^*$.
Sea $b \in \mathbb{R}$, por la propiedad de tricotomía se tiene $a = b$, $a > b$ o $a < b$.
Supongamos que $a < b$, como $b \in \mathbb{R}$ y S es *sup* e *inf* denso en $\mathbb{R}^*$, existe $A \subseteq S$ tal que $\bigwedge_{\mathbb{R}^*} A = b$. Claramente $b \leq \alpha$ para todo $\alpha \in A$, lo cual implica que $a \notin A$, ya que hemos supuesto $a < b$. Por lo tanto, $A \subseteq S - \{a\}$. De aquí, existe $A \subseteq S - \{a\}$ tal que $\bigwedge_{\mathbb{R}^*} A = b$. Por otro lado, también existe $C \subseteq S$ tal que $\bigvee_{\mathbb{R}^*} C = b$. Como $a < b$, existe $c \in C$ tal que $a < c < b$, ya que ningún elemento menor que b es cota superior de C. Por tanto si $a \in C$, entonces existe $C - \{a\} \subseteq S - \{a\}$ tal que $\bigvee_{\mathbb{R}^*}(C - \{a\}) = b$.
Si $b < a$, el resultado es similar .
Supongamos $a = b$. Usando la proposicón 3.2 podemos escojer una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $S - \{a\}$ de la siguiente manera $x_1 \in (a, a+1)$, $x_2 \in (a, a+\frac{1}{2})$, $\ldots$, $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión es tal que $a < x_n < a + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. lo cual garantiza que a es una cota inferior de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, veamos que a es el *inf.*
Supongamos $a < j$, entonces $j - a > 0$ y $\frac{1}{j-a} > 0$. Usando la propiedad arquimediana, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > \frac{1}{j-a} > 0$. De aquí, tenemos

$$j - a = \left(\tfrac{j-a}{n_1}\right)n_1 > \left(\tfrac{j-a}{n_1}\right)\left(\tfrac{1}{j-a}\right) = \tfrac{1}{n_1}$$

esto es $j > a + \frac{1}{n_1}$. Teniendo en cuenta la escojencia de la sucesión, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que: $a < x_{n_2} < a + \frac{1}{n_1}$ lo cual significa que ningún elemento mayor que a, es cota inferior de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S - \{a\}$ tal que:

$$inf\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a$$

Es posible encontrar una sucesión $(y_n)_n \in \mathbb{N}$, de elementos en $S - \{a\}$ tal que $y_n \in (a - \frac{1}{n}, a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en este caso, $y_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$sup\ \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a.$$

Finalmente, para todo $a \in \mathbb{R}^*$ existen A y B subconjuntos de $S - \{a\}$ tal $a = sup\ A$ y $a = inf\ B$, esto significa que $S - \{a\}$ es *sup* e *inf* denso en $\mathbb{R}$. Por lo que, $\mathbb{R}^*$ no posee esqueleto mínimo. ■

Nota 3.3. *La proposición anterior nos muestra que* $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *son todos ejemplos de esqueletos de* $\mathbb{R}^*$.

Definición 3.2. *Sea* $(Q, \leq)$ *un retículo (no necesariamente completo).*

i) Un elemento $a \in Q$ *es* ***inf–irreducible*** *si* $a \neq \top$ *(en el caso en que* Q *tenga elemento máximo* $\top$*) y no es el ínfimo de ningún subconjunto de elementos mayores que* a*. Es decir, si* $S \subseteq Q$ *es tal que* $a \notin S$ *y* $a < x$ *para todo* $x \in S$*, entonces* $a \neq \bigwedge S$.

ii) *Dualmente un elemento $a \in S$* ***sup—irreducible*** *si $a \neq \perp$ (en caso de que Q tenga elemento mínimo $\perp$) y no es el supremo de ningún subconjunto de elementos menores que a. Es decir, si $S \subseteq Q$ es tal que $a \notin S$ y $x < a$ para todo $x \in S$, entonces $a \neq \bigvee S$.*

iii) *Un elemento x de Q is* ***irreducible*** *si x es inf—irreducible o es sup—irreducible. Se dice* ***reducible*** *o aproximable en caso contrario.*

Proposición 3.4. *Un retículo completo en el que todos los elementos sean irreducibles no tiene esqueleto.*

Demostración. Para mostrar esto, veamos que todo elemento irreducible debe hacer parte de un esqueleto.
Supongamos $(Q, \leq)$ un retículo competo y sea P un subconjunto propio de Q el cual es un esqueleto. Si $x \in Q$ es un elemento irreducible de Q, entonces x es sup—irreducible o inf—irreducible. Sin perdida de generalidad, supongamos que x es sup—irreducible, entonces para todo $S \subseteq Q$ tal que $x \notin S$ con $s < x$ para todo $s \in S$, implica que $x \neq \bigvee S$. Argumentemos por contradicción.
Si $x \notin P$, tenemos que $x \notin (\downarrow x)_P = (\downarrow x) \cap P$. Claramente $(\downarrow x)_P \subseteq P \subseteq Q$. Ahora como P es un esqueleto de Q, tenemos que $x = \bigvee_Q (\downarrow x)_P$.
Como $w < x$ para todo $w \in (\downarrow x)_P$, $x \notin (\downarrow x)_P$ y teniendo presente la definición, de cuando un elemento es sup—irreducible tenemos que $x \neq \bigvee_Q (\downarrow x)_P$ lo cual es una contradicción, en consecuencia nuestro argumento es válido para indicar que todo elemento irreducible hace parte de un esqueleto.
Por otro lado, si todo los elementos de $(Q, \leq)$ el cual hemos supuesto un retículo completo, son irreducibles, por lo hecho antes todos sus elementos hacen parte de un esqueleto lo cual es imposible ya que por definición estos son subconjuntos propios del retículo completo.
Finalmente, podemos decir que todo retículo completo en el que todos sus elementos sean irreducibles no posee esqueleto. ∎

Ejemplo 3.2. *Sea $Q = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p\}$, con $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_p$, en éste caso Q es una cadena finita, es facil demostrar que es un retículo completo y además todo elemento de Q es irreducible. Por lo tanto, Q no posee esqueleto.*

Nota 3.4. *Hemos mostrado dos ejemplos, el primero $\mathbb{R}^*$ el cual posee infinitos esqueletos pero no esqueleto mínimo, y el ejemplo anterior el cual no posee esqueleto.*
Consideremos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con el orden usual ($m \leq n$ si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$) es un esqueleto completo, en este caso $\mathbb{N}$ es el unico esqueleto de $\mathbb{N}^*$ y está compuesto por los elementos irreducibles de $\mathbb{N}^*$.
En general no hay técnicas que nos permitan identificar o construir esqueletos de retículos completos.

Ejemplo 3.3. *Sea $X \neq \emptyset$ y consideremos $P(X)$ la familia de todos los subconjuntos de X ordenados por inclusión. Aquí el sup e inf coinciden con la unión e intersección de conjuntos, respectivamente. El elemento mínimo es $\emptyset$ y el elemento máximo es X.*
Luego, $(P(X), \subseteq)$ es un retículo completo.
Un esqueleto para $P(X)$ esta dado por $E = \{\{x\} : x \in X\} \cup \{X - \{x\} : x \in X\}$.
Sea $A \in P(X)$, entonces $A \subseteq X$. Consideramos $A_x = \{X - \{x\} : x \notin A\} = \{X - \{x\} : x \in A^c\}$. Claramente $A \subseteq A_x$ para todo $x \in A^c$.
Luego, $\bigcap A_x = \bigcap \{X - \{x\} : x \in A^c\} = \bigcap_{x \in A^c} (X - \{x\}) = X - (\bigcup_{x \in A^c} \{x\})$, de donde

$$\bigcap A_x = X - A^c = A$$

Esto es, dado $A \in P(X)$, existe $A_x = \{X - \{x\} : x \in A^c\}$ una subcolección de $E = \{X - \{x\} : x \in X\} \cup \{\{x\} : x \in X\}$ tal que $A = \bigcap A_x = \bigwedge_{P(X)} A_x$. Esto significa que $\{X - \{x\} : x \in x\}$ es inf— denso en $((P(X), \subseteq)$.
Por otro lado, se puede verificar que $A = \bigcup\{\{x\} : x \in A\}$, esto es, $A = \bigvee_{P(X)}\{\{x\} : x \in X\}$, con $\{\{x\} : x \in A\}$ una subcolección de $\{\{x\} : x \in X\}$. Lo anterior garantiza que $\{\{x\} : x \in X\}$ es sup—denso en $(P(X), \subseteq)$.
A continuación mostramos que E es un esqueleto mínimo de $(P(X), \subseteq)$.
Argumentemos esto por contradicción.
Supongamos $S \subsetneqq E$ tal que S es un esqueleto de $(P(X), \subseteq)$, entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\} \notin S$ o $X - \{x\} \notin S$. Supongamos primero que $\{x\} \notin S$, teniendo en cuenta que S es sup–denso en $P(X)$, existe $B \subseteq S \subseteq P(X)$ tal que $\bigvee B = \{x\}$, por lo que $\beta \subseteq \{x\}$ para todo $\beta \in B$, pero ningún elemento de $P(X)$ excepto $\emptyset$ está contenido en $\{x\}$, lo cual implica que $\beta = \emptyset$ para todo $\beta \in B$, es decir, B es una colección vacía.
Como en $P(X)$ el sup viene dada por la unión y además, la unión de una colección vacía es vacía, tenemos que: $\emptyset = \bigvee B = \{x\}$ lo cual es imposible.
Supongamos ahora que $X - \{x\} \notin S$, entonces existe $B \subseteq S \subseteq P(X)$ tal que $\bigwedge B = X - \{x\}$, ya que S es un esqueleto de $(P(X), \subseteq)$.
Ahora se tiene que $X - \{x\} \subseteq \beta$ para todo $\beta \in B$, pero el único subconjunto de X que contiene a $X - \{x\}$ es X por lo que $\beta = X$ para todo $\beta \in B$. Esto es, $\bigwedge B = X = X - \{x\}$ lo cual es imposible.
Finalmente nuestro argumento es válido para indicar que
$E = \{\{x\} : x \in X\} \cup \{X - \{x\} : x \in X\}$ es un esqueleto mínimo de $(P(X), \subseteq)$.

Definición 3.3. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo con elemento mínimo $\perp$ y máximo $\top$ (no necesariamente completo). Un elemento $a \in Q$, $a \neq \perp$ es un* **infra—elemento** *si ningún elemento de Q es menor que a excepto $\perp$.*
Dualmente, un elemento $a \in Q$ es un **ultra—elemento** *si $a \neq \top$ y ningún elemento de Q es mayor que excepto $\top$.*
El conjunto de todos los infra—elementos se denota por $\mathfrak{I}(Q)$ y el de los ultra—elementos por $\mathfrak{U}(Q)$.

Definición 3.4. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo completo, si el conjunto formado por los infra—elementos y los ultra—elementos de Q, es decir, $\mathfrak{I}(Q) \cup \mathfrak{U}(Q)$ es un esqueleto mínimo, éste se denomina esqueleto* **atómico** *de Q.*

Proposición 3.5. *Sea $(Q, \leq)$ un retículo completo (no necesariamente completo) con elemento mínimo $\perp$ y elemento máximo $\top$. Entonces:*

i) *Todo infra—elemento de Q es sup—irreducible.*

ii) *Todo ultra—elemento de Q es inf—irreducible.*

iii) *Los elementos de un esqueleo atómico (si existe) son irreducibles.*

Demostración. i) Supongamos $x \in Q$ tal que x es un *infra*—elemento de Q.
Argumentemos por contradicción. Supongamos que x no es *sup*—irreducible, entonces existe $S \subseteq Q$, tal que $x \notin S$, $y < x$ para todo $y \in S$ y $x = \bigvee S$. Teniendo en cuenta que x es un *infra*—elemento de Q y que $y < x$ para todo $y \in S$, entonces $y = \perp$ para todo $y \in S$. De aquí, $\bigvee S = \perp = x$ lo cual es imposible ya que $x \neq \perp$ por ser *infra*—elemento de Q, en consecuencia nuestro argumento es válido para decir que x es *sup*—irreducible.

ii) Argumentemos por contrdicción.
Supongamos $x \in Q$ un *ultra*—elemento, tal que x no es *inf*—irreducible, entonces $x \neq \top$, y existe $S \subseteq Q$ tal que $x \notin S$, $x < y$ para todo $y \in S$ y $x = \bigwedge S$. Teniendo en cuenta que x es *ultra*—elemento y que $x < y$ para todo $y \in S$, podemos decir que $y = \top$ para todo $y \in S$. Esto es, $x = \bigwedge S = \top$ lo cual es imposible, ya que por hipótesis $x \neq \top$, en consecuencia nuestro argumento es valido para indicar que x es *inf*—irreducible.

iii) Si existe P un esqueleto atómico de Q, entonces P es la unión de los *infra*—elementos y los *ultra*— elementos de Q, entonces si $x \in P$, entonces x es un *infra*—elemento o un *ultra*—elemento, en ambos casos haciendo uso de los incisos *i)* y *ii)* de esta proposición, se cuncluye que x es irreducible.

■

4. CAPÍTULO 4
EL RETÍCULO DE LOS PRE–ÓRDENES, *Pre(X)*

Definición 4.1. *Una relación de preorden en un conjunto X no vacío, es un subconjunto R de $X \times X$ que verifica las siguientes propiedades:*

i) $(x, x) \in R$ *para todo* $x \in X$ *(reflexiva).*

ii) Si $(x, y) \in R$ *y* $(y, z) \in R$, *entonces* $(y, z) \in R$ *(transitiva).*

Nota 4.1. *Se puede verificar facilmente que las intersecciones de relaciones de preorden son nuevamente relacion de preorden. Denotemos por Pre(X) la colección de todos los preordenes sobre X, el cual es un conjunto parcialmente ordenado por inclusión, con elemento máximo $X \times X$. Por el lema 1.1 $(Pre(X), \subseteq)$ es un retículo completo. El elemento mínimo es $\Delta(X) := \{(x, x) : x \in X\}$ el cual se denomina la diagonal de una relación de preorden.*
Se denota por xRy, para indicar que $(x, y) \in R$.

Definición 4.2. *Sea R una relación en X, se define la clausura transitiva R^+, como la menor relación transitiva que contiene a R. Podemos expresar ésto como sigue*

$$R^+ = \{(x, y) : \quad \text{Existe una sucesión finita} \quad x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y \quad \text{tal que} \\ (x_{i-1}, x_i) \in R, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Nota 4.2. *Damos una descripción de como viene dado el sup en $Pre(X)$.*
Supongamos $\{R_j\}_{j\in J}$ una familia de pre–órdenes sobre X, definamos
$\bigvee\{R_j\}_{j\in J} = \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$, *esto es el sup de $\{R_j\}_{j\in J}$ es la clausura transitiva de la unión de los R_j. De manera equivalente podemos decir que:*

$$\bigvee\{R_j\}_{j\in J} = \{(x, y) : \quad \text{Existe una sucesión} \quad x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y \quad \text{tal que} \\ (x_{i-1}, x_i) \in \bigcup_{j\in J} R_j, i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Verifiquemos primero que $\left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ es un preorden y posteriormente que es efectivamente el sup de $\{R_j\}_{j\in J}$.
Teniendo en cuenta que $\{R_j\}_{j\in J}$ es una colección de pre–órdenes se cumple que $(x, x) \in R_j$ para todo $x \in X$ y todo $j \in J$. Podemos considerar una sucesión finita y constante $x_i = x$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ tal que $(x, x) \in \bigcup_{j\in J} R_j$ para todo $x \in X$, lo anterior implica que $(x, x) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ para todo $x \in X$ $(reflexiva)$.
Sean $x, y, z \in X$ tal que $(x, y) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ y $(y, z) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$, entonces existen sucesiones finitas $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ y $y = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m = z$ tal que

$$(x_{i-1}, x_i) \in \bigcup_{j\in J} R_j, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (z_{k-1}, z_k) \in \bigcup_{j\in J} R_j, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

Luego, existe una sucesión finita: $s_i = x_i$ $i = 1, 2, 3 \ldots n$ $s_{n+k} = z_k$ $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ tal que $(s_{i-1}, s_i) = (x_{i-1}, x_i) \in \bigcup_{j\in J} R_j$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $(s_{n+k-1}, s_{n+k}) = (z_{k-1}, z_k) \in \bigcup_{j\in J} R_j$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, lo cual significa que $(x, z) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$

(Transitiva)
Lo anterior nos muestra que la clausura transitiva de la unión de una colección de preordenes es de nuevo un preorden. A continuación verificamos que es el sup en $Pre(X)$.
Si $(x,y) \in R_j$ para algún $j \in J$, podemos considerar en éste caso una sucesión finita $x = x_0$ y $x_1 = y$ tal que $(x,y) \in R_j \subseteq \bigcup_{j\in J} R_j$, de donde $(x,y) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$, es decir, $R_j \subseteq \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ para todo $j \in J$. Por lo tanto, $\left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ es una cota superior de $\{R_j\}_{j\in J}$ en $(Pre(X), \subseteq)$.
Supongamos que R es una cota superior arbitraria de $\{R_j\}_{j\in J}$. Entonces $R_j \subseteq R$ para todo $j \in J$. Si $(x,y) \in \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$, entonces existe una sucesión finita $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ tal que $(x_{i-1}, x_i) \in \bigcup_{j\in J} R_j$ para $i = 1,2,3,\ldots,n$.
Luego, haciendo uso de la definición de unión tenemos que: existen $j_i \in J$ tal que $(x_{i-1}, x_i) \in R_{j_i}$ para todo $i = 1,2,3,\ldots,n$. Como $R_j \subseteq R$ para todo $j \in J$ se tiene que $(x_{i-1}, x_i) \in R$ para todo $i = 1,2,3,\ldots,n$. Ahora, como R es un preorden, es una relación transitiva, de donde $(x,y) \in R$. Podemos decir que $\left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+ \subseteq R$, esto es, $\left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ es la menor de las cotas superiores de $\{R_j\}_{j\in J}$.
Finalmete, se tiene que $\bigvee\{R_j\}_{j\in J} = \left(\bigcup_{j\in J} R_j\right)^+$ en $(Pre(X), \subseteq)$ como se quería mostrar.

Definición 4.3. *Sean $a, b \in X$ con $a \neq b$, los infra–elementos de $(Pre(X), \subseteq)$ denotados por por $\Delta_{(a,b)}$ se definen como* $\Delta_{(a,b)} := \Delta(X) \cup \{(a,b)\}$.

A continuación verificamos que $\Delta_{(a,b)}$ con $a \neq b$, es un preorden sobre X.
En efecto,
Si $x \in X$, entonces $(x,x) \in \Delta(X) \subseteq \Delta_{(a,b)}$ para todo $x \in X$, esto es, $(x,x) \in \Delta_{(a,b)}$ para todo $x \in X$ (reflexiva).
Sean $x, y, z \in X$ tales que $(x,y) \in \Delta_{(a,b)}$ y $(y,z) \in \Delta_{(a,b)}$.
Si $x = y = z$, entonces $(x,y) = (y,z) = (x,z) \in \Delta_{(a,b)}$.
Si $x \neq y$, $y = z$, entonces $(x,y) = (a,b) = (x,z) \in \Delta_{(a,b)}$.
Si $x = y$, $y \neq z$, entonces $(y,z) = (a,b) = (x,z) \in \Delta_{(a,b)}$.
Si $x \neq y \neq z$, obtenemos que (a,b) el cual pertenece a $\Delta_{(a,b)}$.
Luego, si $(x,y) \in \Delta_{(a,b)}$ y $(y,z) \in \Delta_{(a,b)}$, entonces $(x,z) \in \Delta_{(a,b)}$ (transitiva). Como $a \neq b$ es claro que $\Delta_{(a,b)} \neq \Delta(X)$. Mostremos que $\Delta_{(a,b)}$ con $a \neq b$ es un infra elemento de $(Pre(X), \subseteq)$.
Supongamos R una relación de preorden, tal que $R \subsetneq \Delta_{(a,b)}$ para $a, b \in X$ y $a \neq b$, entonces existe $(x,y) \in \Delta_{(a,b)}$ tal que $(x,y) \notin R$. Como $\Delta(X)$ es el elemento mínimo de $(Pre(X), \subseteq)$, entonces $\Delta(X) \subseteq R$. De donde existe $(x,y) = (a,b) \in \Delta_{(a,b)}$ tal que $(a,b) \notin R$. De aquí, $R \subseteq \Delta_{(a,b)} - \{(a,b)\} = \Delta(X)$, esto es, $R = \Delta(X)$. Lo cual garantiza que los $\Delta_{(a,b)}$ son los *infra*–elementos de $(Pre(X), \subseteq)$.

Proposición 4.1. *La colección de todos los infra–elementos $\Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a,b)\}$, con $a, b \in X$ y $a \neq b$ es un conjunto sup–denso en $(Pre(X), \subseteq)$.*

Demostración. Probemos primero que culquier preorden sobre X puede expresar de la siguiente manera:

$$R = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a, b \in R),\ a \neq b\} \tag{16}$$

Si $(x,y) \in R$, entonces existe $\Delta_{(x,y)}$ tal que $(x,y) \in \Delta_{(x,y)}$, esto es, $(x,y) \in \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R, a \neq b\})$. De donde,

$$R \subseteq \{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}$$

Es claro que $\Delta_{(a,b)} = \Delta(X) \cup \{(a,b)\} \subseteq R$ para todo $(a,b) \in R$ y $a \neq b$. Luego, se tiene

$$\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\} \subseteq R$$

Las dos inclusines prueban la igualdad (16).

Nota 4.3. *La clausura transitiva de la unión de los $\Delta_{(a,b)}$ con $(a,b) \in R$ es la menor relación de preorden que contiene $\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}$, veamos que en éste caso*
$\left(\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}\right)^{+} = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}$
De acuerdo con la definición de clausura transitiva tenemos que:

$$\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\} \subseteq \left(\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}\right)^{+}$$

Ahora, supongamos que $(x,y) \in \left(\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}\right)^{+}$, entonces existe una sucesión finita $x = x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ tal que :

$$(x_{i-1}, x_i) \in \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\} \quad \text{para} \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Por la igualdad (16) tenemos que $(x_{i-1}, x_i) \in R$ para todo $i = 1,2,3,\ldots,n$. Haciendo uso de la transitividad de R tenemos que:
$(x,y) \in R = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}$. Por lo tanto,

$$\left(\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}\right)^{+} \subseteq \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\}$$

De lo anteior y la igualdad (16), podemos concluir lo siguiente:

$$\begin{aligned} R = \bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\} &= \left(\bigcup\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R\}\right)^{+} \\ &= \bigvee\{\Delta_{(a,b)} : (a,b) \in R,\ a \neq b\} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que, la colección de todos los *infra*– elementos $\Delta_{(a,b)}$ con $a \neq b$ es un conjunto *sup*– denso en $(Pre(X), \subseteq)$. ∎

Proposición 4.2. *Para cada $A \subseteq X,\ A \neq \emptyset$, los pre–órdenes de la forma*

$$(A^c \times X) \cup (X \times A)$$

Son los ultra elementos de $(Pre(X), \subseteq)$ y la colección de todos ellos es un conjunto inf–denso.

Demostración. Observemos primero que $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ es un preorden.
Sea $x \in X$, entonces $x \in A$ o $x \in A^c$.
Si $x \in A$, entonces $(x,x) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$.
Si $x \in A^c$, entonces $(x,x) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$.
Por lo anterior tenemos: $(x,x) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$ para todo $x \in X$ (reflexiva).
Sean $x, y, z \in X$, tal que $(x,y) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$ y $(y,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$.

Luego, $(x,y) \in (A^c \times X)$ o $(x,y) \in (X \times A)$ y $(y,z) \in (A^c \times X)$ o $(y,z) \in (X \times A)$. De aquí, sólo resultan los siguientes casos:
Si $(x,y) \in (A^c \times X)$ y $(y,z) \in (A^c \times X)$, entonces $(x,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$.
Si $(x,y) \in (X \times A)$ y $(y,z) \in (X \times A)$, entonces $(x,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$.
Si $(x,y) \in (A^c \times X)$ y $(y,z) \in (X \times A)$, entonces $(x,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$. Ya que $A^c \subseteq X$. Ahora, dado $(x,y) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$ y $(y,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$, entonces $(x,z) \in (A^c \times X) \cup (X \times A)$ (transitiva).
Mostremos que si R es un preorden sobre X tal que $(A^c \times X) \cup (X \times A) \subsetneq R$, entonces $R = X \times X$. Existe $(x,y) \in R$ tal que $(x,y) \notin \{(A^c \times X) \cup (X \times A)\}$,es decir, $(x,y) \notin (A^c \times X)$ y $(x,y) \notin (X \times A)$, esto es, $x \notin A^c$ o $y \notin X$ y $x \notin X$ o $y \notin A$, por lo que $x \notin A^c$ Y $y \notin A$ o lo que es lo mismo $x \in A$ Y $y \notin A$.
Luego, podemos decir que (a,x) y (y,b) pertenecen a $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ para todo a,b en X. Como $(A^c \times X) \cup (X \cup A) \subseteq R$, entonces (a,x) y (y,b) pertenecen también a R. Usando la transitividad de R tenemos lo siguiente:

$$(a,x) \in R, \quad (x,y) \in R \Rightarrow (a,y) \in R$$
$$(a,y) \in R, \quad (y,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R.$$

Luego, podemos decir que $(a,b) \in R$ para todo $a,b \in X$; es decir, $R = X \times X$ por lo que $(A^c \times X) \cup (X \times A)$ con $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$ son los *ultra*–elementos de $(Pre(X), \subseteq)$.
Notemos por $R(x) = \{y \in X \;:\; xRy\}$, para mostrar, que la colección de los *ultra*—elementos es un conjunto *inf*–denso, veamos que todo preorden dado R es de la forma:

$$R = \{(A^c \times X) \cup (X \times A) \;:\; A = R(x) \quad \text{para algún} \quad (x,y) \in R\}$$

Para establecer la primera contenencia $\subseteq$, tomamos $(a,b) \in R$ y $(x,y) \in R$ se quiere demostrar que

$$(a,b) \in \big[(R(x)) \times X\big] \cup \big[X \times R(x)\big]$$

Luego, $(a,b) \in \big[(R(x))^c \times X\big]$ ó $(a,b) \in \big[X \times R(x)\big]$. De aquí, $a \notin R(x)$ ó $b \in R(x)$
Si $\neg(xRa)$, no hay nada que probar; si xRa. Haciendo uso de la transitividad entre xRa y aRb, se concluye que xRb.
Para probar la otra contenencia probemos el contrareciproco, es decir, si $(a,b) \notin R$, entonces $(a,b) \notin (A^c \times X) \cup (X \times A)$ para algún $A = R(x)$, con $(x,y) \in R$.
Sea $(a,b) \notin R$. Como $(a,a) \in R$, por la reflexividad de R podemos tomar $A = R(a)$, entonces $a \in R(a)$ y $b \notin R(a)$, es decir, $a \in A = R(a)$ y $b \in A^c = (R(a))^c$. Se sigue que $(a,b) \notin (A^c \times X) \cup (X \times A)$ como se quería probar. ■

Corolario 4.3. *El retículo $(Pre(X), \subseteq)$ tiene esqueleto atómico.*

Demostración. Al igual que en el ejemplo 3.3, supongamos que existe $S \subsetneq \mathfrak{I}(Pre(x)) \cup \mathfrak{U}(Pre(X))$, es decir, S subcunjunto propio de los *infra*–elementos y los *ultra*–elementos el cual es un esqueleto de $Pre(X)$, entonces existe un elemento de $\mathfrak{I}(Pre(X)) \cup \mathfrak{U}(Pre(X))$ que no pertenece a S, en ambos casos llegamos a un absurdo. Si es un *infra*–elemento lo podemos aproximar por debajo, por medio de elementos de S y éste caso es imposible. Si es un *ultra*–elemento lo podemos aproximar por arriba, por medio de elementos de S que también es imposible.
Luego, podemos afirmar que: no existe subconjunto de $\mathfrak{I}(Pre(X)) \cup \mathfrak{U}(Pre(X))$ que sea un esqueleto de $(Pre(X), \subseteq)$. ■

5. CAPÍTULO 5 TOPOLOGÍAS, FILTROS Y EL RETÍCULO DE LAS TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF $A(X)$.

Definición 5.1. *Una **topología** sobre un conjunto X, es una colección $\mathfrak{T}$ de subconjuntos de X, con las siguientes propiedades:*

i) $\emptyset$ *y* X *estan en* $\mathfrak{T}$.

ii) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathfrak{T}$ *está en* $\mathfrak{T}$.

iii) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathfrak{T}$ *está en* $\mathfrak{T}$

Un conjunto X en el que se a definido una topología $\mathfrak{T}$, se llama ***espacio topológico***, esto se denota por $(X, \mathfrak{T})$. Los elementos de $\mathfrak{T}$ se llaman conjuntos *abiertos*.

Nota 5.1. *Notamos por $TOP(X)$ la colección de todas las topologías sobre un conjunto X, éste es un conjunto parcialmente ordenado por la relación inclusión. El elemento máximo es la topología **discreta** $P(X)$ y el elemento mínimo es la topología indiscreta o **grosera** $\{X, \emptyset\}$.*
Se puede comprobar facilmente, que la intersección de culaquier colección de topologías sobre X, es nuevamente una topología sobre X. Lo cual implica que el infimo de una colección de topologías sobre X coincide con la intersección de las topologías. Usando el lema 1.1 se concluye que $(TOP(X), \subseteq)$ es un retículo completo.
Las infra—Toplogías en $(TOP(X), \subseteq)$, es decir, los infra—elementos de $TOP(X)$ vienen dados por $\mathfrak{J} = \{X, A, \emptyset\}$, donde $A \subsetneqq X$ y $A \neq \emptyset$.
Es posible que al considerar $B \subsetneqq A \subsetneqq X$ y $B \neq \emptyset$, se nos ocurra pensar que la toplogía, $\mathfrak{J}_1 = \{X, B, \emptyset\}$ es una toplogía menos fina que $\mathfrak{J}$.
A pesar que $B \subsetneqq A$, tenemos que B no es abierto en $\mathfrak{J}$, es decir, $\mathfrak{J}_1 = \{X, B, \emptyset\} \nsubseteq \mathfrak{J} = \{X, A, \emptyset\}$, por lo que no existe topología menos fina que $\mathfrak{J}$ que la toplología grosera.

Definición 5.2. *Si $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico, una **base** para $\mathfrak{T}$ es una subfamilia $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ con la propiedad que:*
Dados un abierto U y un punto $x \in U$, exite $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, esto se puede expresar diciendo que cada abierto de $\mathfrak{T}$ es unión de los elementos de $\mathfrak{B}$.

Teorema 5.1. *Sea X un conjunto. $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$ es una base de una topología para X si, y sólo si, se cumple que:*

i) $X = \bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}\}$

ii) Dados cualquiera $U, V \in \mathfrak{B}$ y $x \in U \cap V$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subseteq U \cap V$. Esto es, $U \cap V$ es unión de elementos de $\mathfrak{B}$ para todo par $U, V \in \mathfrak{B}$.

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [9]

Definición 5.3. *La tología del teorema anterior se conoce como la topología generada por la base $\mathfrak{B}$ y la notamos por $\mathfrak{T} = \langle \mathfrak{B} \rangle$.*

Nota 5.2. *Si $\mathfrak{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada $\mathfrak{T} = \langle \mathfrak{B} \rangle$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathfrak{B}$.*

Definición 5.4. *Dado un conjunto no vacío X, un* **filtro** *$\mathfrak{F}$ para X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X tal que*

i) Si $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$.

ii) Si $F \in \mathfrak{F}$ y $F \subseteq G$, entonces $G \in \mathfrak{F}$.

Nota 5.3. *La colección de todos los filtros sobre un conjunto X se denota por $FIL(X)$, éste es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión. Siempre que consideremos $\emptyset$ como elemento de un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, este coincide con $P(X)$, esto se debe a la segunda condición de la definición. Un filtro $\mathfrak{F}$ con la condicción que $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ se denomina filtro propio. El elemento máximo de $FIL(X)$ es $P(X)$y el elemento mínimo es $\{X\}$.*
Es facil demostrar que la intersección de filtros es nuevamente un filtro, en consecuencia, si $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $(FIL(X), \subseteq)$, su infimo viene dado por $\bigwedge_{i\in I}\{\mathfrak{F}_i\} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Usando el lema 1.1 se tiene que $(FIL(X), \subseteq)$ es un retículo completo.

Definición 5.5. *Dado un conjunto X no vacío, un* **ultra–filtro** *para X es un ultra— elemento en $FIL(X)$; esto es, no existe filtro propio en X más fino que él.*

Definición 5.6. *Dado $A \subseteq X$, el conjunto $\uparrow A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$, de todos los superconjuntos de A en X, es un filtro sobre X, el cual se llama* **filftro principal** *generado por A.*
Entre los filtros principales se destacan los de la forma $\uparrow \{x\}$, para cada $x \in X$. Estos filtros resultan ser ultrafiltros, es decir, ultra—elementos de $(FIL(X), \subseteq)$ y se denominan **ultarafiltros principales**.

Proposición 5.2. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathfrak{U}$ un filtro sobre X. Entonces, $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro en X si, y solamente si, para todo $A, B \subseteq X$ con $A \cup B \in \mathfrak{U}$, se tiene que $A \in \mathfrak{U}$ o $B \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{U}$ un ulatrafiltro sobre X, y $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \mathfrak{U}$, mostremos que $A \in \mathfrak{U}$ o $B \in \mathfrak{U}$.
Si $B \in \mathfrak{U}$ no hay nada que probar. Supongamos que $B \notin \mathfrak{U}$ y veamos que necesariamente $A \in \mathfrak{U}$.
Argumentemos por contradicción, Si $A \notin \mathfrak{U}$, entonces $\mathfrak{F} = \{M \subseteq X : A \cup M \in \mathfrak{U}\}$ es un filtro. Se verifica facilmente que $\mathfrak{F}$ es un subclase no vacía de $P(X)$, ya que $B \in \mathfrak{F}$. Además, ninguno de sus elementos es vacío puesto que $A \cup \emptyset = A \notin \mathfrak{U}$.
Sean M_1 y $M_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $A \cup (M_1 \cap M_2) = (A \cup M_1) \cap (A \cup M_2)$, teniendo en cuenta que M_1 y M_2 son elementos de $\mathfrak{F}$, entonces $A \cup M_1 \in \mathfrak{U}$ y $A \cup M_2 \in \mathfrak{U}$. Por lo que, $A \cup (M_2 \cap M_1) \in \mathfrak{U}$, ya que $\mathfrak{U}$ es un filtro, de donde $M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{F}$.
Si $M_1 \in \mathfrak{F}$ y $M_1 \subseteq M$, entonces $A \cup M_1 \subseteq A \cup M$, como $A \cup M_1 \in \mathfrak{U}$, entonces $A \cup M \in \mathfrak{U}$, esto es, $M \in \mathfrak{F}$.
Es claro que que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ y además $B \in \mathfrak{F}$, en éste caso hemos encontrado un filtro propio $\mathfrak{F}$ más fino que $\mathfrak{U}$. Lo cual es imposible ya que $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro, en consecuencia nuestro argumento es válido par indicar que $A \in \mathfrak{U}$, como se quería probar.
Reciprocamente, sea $\mathfrak{U}$ un filtro sobre X tal que para todo $A, B \subseteq X$. Si $A \cup B \in \mathfrak{U}$, entonces $A \in \mathfrak{U}$ o $B \in \mathfrak{U}$. Veamos que $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro.

Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X más fino que $\mathfrak{U}$, esto es, $\mathfrak{U} \subsetneq \mathfrak{F}$, veamos que $\mathfrak{F} = P(X)$. Como $\mathfrak{U} \subsetneq \mathfrak{F}$, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \notin \mathfrak{U}$. Haciendo uso de la hiótesis $X = F \cup F^c \in \mathfrak{U}$, de donde $F^c \in \mathfrak{U}$, ya que $F \notin \mathfrak{U}$.
Luego, tenemos que $F^c \in \mathfrak{F}$, de donde $F \cap F^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$, lo cual implica que $\mathfrak{F} = P(X)$, es decir, $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro sobre X. ■

Nota 5.4. *La proposición anterior caracteriza los ultafiltros sobre un conjunto no vacío X . Podemos decir que $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro sobre X si, y solamente si, para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathfrak{F}$ o $A^c \in \mathfrak{F}$.*

Proposición 5.3. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X, consideremos $F =: \{\mathfrak{H} : \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ y $\mathfrak{H}$ es un filtro sobre $X\}$, obviamente F es un conjunto parcialmente ordenado con el orden de $FIL(X)$ restringido a F.
supongamos $\{\mathfrak{H}_j\}_{j\in J}$ una cadena de F, esto es, $(\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_3 \subseteq \ldots)$ y sea $\mathfrak{H} = \bigcup_{j\in J} \mathfrak{H}_j$. Como los $\mathfrak{H}_j$ son filtros que contienen a $\mathfrak{F}$, tenemos que $\mathfrak{H}$ es una subclase no vacia de conjuntos no vacios de $P(X)$.
Sea $H \in \mathfrak{H}$ y $H \subseteq I$, existe $j \in J$ tal que $H \in \mathfrak{H}_j$, como $\mathfrak{H}_j$ es un filtro y $H \subseteq I$, tenemos que $I \in \mathfrak{H}_j$ para algún $j \in J$, de donde $I \in \mathfrak{H}$.
Si $H, I \in \mathfrak{H}$, existen $j, k \in J$ tal que $H \in \mathfrak{H}_j$ e $I \in \mathfrak{H}_k$, teniendo en cuenta que $\{\mathfrak{H}_j\}_{j\in J}$ es una cadena, tenemos que $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}_k$ o $\mathfrak{H}_k \subseteq \mathfrak{H}_j$. Sin perdida de generalidad, suponemos que $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}_k$, entonces $H, I \in \mathfrak{H}_k$ por lo que $H \cap I \in \mathfrak{H}_k$, esto es, existe $k \in J$ tal que $H \cap I \in \mathfrak{H}_k$, lo cual significa que $H \cap I \in \mathfrak{H}$.
Hasta el momento hemos mostrado que $\mathfrak{H}$ es un filtro sobre X. Es facil verificar que $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}$ para todo $j \in J$, es decir, $\mathfrak{H}$ es una cota superioir para la cadena $\{\mathfrak{H}_j\}_{j\in J}$. Usando el lema de ***Zorn*** afirmamos que:
$F =: \{\mathfrak{H} : \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ *y* $\mathfrak{H}$ *es un filtro sobre* $X\}$, tiene un elemento maximal, es decir, existe $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro sobre X, tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, como se quería probar. ■

Definición 5.7. *Para un filtro $\mathfrak{F}$ sobre un conjunto no vacío X y cada punto $p \in X$.* ***Fröhlich*** *definio en (1964) la siguiente topología sobre X.*

$$\mathcal{G}(p, \mathfrak{F}) =: P(X - \{p\}) \cup \mathfrak{F}$$

Aquí $P(X - \{p\})$ es la colección de todos los subconjuntos de X que no contienen a p como elemento. Los conjuntos unitarios $\{x\}$ son abiertos siempre y cuando $x \neq p$. También son abiertos todos los subconjuntos de X que no contienen a p como elemento.
Finalmente, los conjuntos abiertos que contienen a p como elemento (las vecindades de p), son necesariamente los elementos de $\mathfrak{F}$ que contienen a p.

Proposición 5.4. *Una topología de la forma $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$, donde $a \in X$ y $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro sobre X, tal que $\mathfrak{U} \neq \uparrow \{a\}$, es una ultra–topología .*

Demostración. Si consideramos $\mathfrak{U} = \uparrow \{a\}$, tendriamos que $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U}) = P(X)$, por lo que $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$ no seria una ultra—topología.
Sea $\mathfrak{J}$ una topología sobre X, tal que $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U}) \subsetneq \mathfrak{J}$, entonces existe $A \in \mathfrak{J}$, tal que $A \notin \mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$, es decir, $A \notin P(X - \{a\})$ y $A \notin \mathfrak{U}$, de donde $a \in A$ y $A \notin \mathfrak{U}$. Teniendo en cuenta la proposicion 5.2, podomos afirmar que $A^c \in \mathfrak{U}$, por lo que $A^c \cup \{a\} \in \mathfrak{U}$, como $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U}) \subsetneq \mathfrak{J}$, tenemos que $A^c \cup \{a\} \in \mathfrak{J}$. Ahora, como la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto,

tenemos que $\{a\} = A \cap (A^c \cup \{a\}) \in \mathfrak{J}$, es decir, $\{a\} \in \mathfrak{J}$, es decir, $\{a\}$ es abierto en $\mathfrak{J}$.
Sea $B \subseteq X$, entonces $a \in B$ o $a \in B^c$. Si $a \in B^c$, entonces $B \in P(X - \{a\})$, puesto que $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U}) \subsetneq \mathfrak{J}$, tenemos que $B \in \mathfrak{J}$.
Si $a \in B$ podemos expresar B de la siguiente manera, $B = \bigcup_{b \in B}\{b\}$, el cual es abierto en $\mathfrak{J}$, esto es, $B \in \mathfrak{J}$.
Luego, para todo $B \subseteq X$ tenemos que $B \in \mathfrak{J}$, por lo que $\mathfrak{J} = P(X)$. Esto es, no existe topología más fina que $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$ (con $a \in X$ y $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro sobre X $\mathfrak{U} \neq \uparrow \{a\}$) que la topología discreta, es decir $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$ es una ultra topología sobre $(TOP(X), \subseteq)$. ■

Fröhlich mostro que toda ultra—topología sobre X es exactamente de la forma anterior, en la siguiente proposición cuya prueba la podemos ver en [10]. Muestra este resultado.

Proposición 5.5. *Si $\mathfrak{J}$ es una ultra—topología sobre X, entonces $\mathfrak{J}$ es de la forma $\mathcal{G}(a, \mathfrak{U})$ para algún $\mathfrak{U}$ ultrafiltro sobre X tal que $\mathfrak{U} \neq \uparrow \{a\}$.*

Definición 5.8. *Una ultra topología generada por un ultrafiltro principal se llama* ***ultra—topología principal****. Es decir, una ultra—topología principal es de la forma $\mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$, con $x, y \in X$, $x \neq y$.*

5.1. EL RETÍCULO DE LAS TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF, *A(X)*.

Definición 5.9. *Una topología sobre X se llama* ***principal*** *si es intersección de ultra-tiopologías principales, es decir, intersección de topologías de la forma $\mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$, con $x, y \in X$, $x \neq y$. Denotamos por $\Pi(X)$ al conjunto de todas las topologías Principales sobre X.*

En caso particular, cada ultra topología principal $\mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$, con $p \neq q$, es una topología principal, en la cual cualquier conjunto abierto que contiene a p también contiene a q, pues las unicas vecindades de p están en $\uparrow \{q\}$.

Teorema 5.6. *Si $\mathfrak{T}$ es una topología principal sobre X, el conjunto*

$$\mathcal{V}_x =: \{y \in X : \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})\}$$

es un conjunto abierto en $\mathfrak{T}$, para cada $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$.
Si $\{x\} \in \mathfrak{T}$, entonces $\mathcal{V}_x = \{x\}$, que es un conjunto abierto en $\mathfrak{T}$; si existe $y \in X$ con $y \neq x$, tal que $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$, se tiene que $\{x\} \notin \mathfrak{T}$, debido a que $\{x\} \notin \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$.
Supongamos $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$. Si $p \notin \mathcal{V}_x$, entonces $\mathcal{V}_x$ es un cunjunto abierto en $\mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$, puesto que $\mathcal{V}_x \in P(X - \{p\}) \subseteq \mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$. Si $p \in \mathcal{V}_x$, entonces $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{p\}) \bigcap \mathcal{G}(p, \uparrow \{q\}) \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{q\})$, por consiguiente $q \in \mathcal{V}_x$ o lo que es lo mismo $\{q\} \subseteq \mathcal{V}_x$. Lo cual significa que $\mathcal{V}_x$ es un conjunto abierto en $\mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$.
Ahora podemos afirmar que $\mathcal{V}_x$ es un conjunto abierto en cualquiera topología $\mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$ más fina que $\mathfrak{T}$, de donde $\mathcal{V}_x \in \mathfrak{T}$, por ser $\mathfrak{T}$ una topología principal. ■

Nota 5.5. *En la prueba anterior hemos usado el siguiente hecho debido a Fröhlich*

$$\mathcal{G}(x, \uparrow \{p\}) \cap \mathcal{G}(p, \uparrow \{q\}) \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{q\})$$

Sea $A \in \mathcal{G}(x, \uparrow \{p\}) \bigcap \mathcal{G}(p, \uparrow \{q\})$, si $x \notin A$ no hay nada que probar.
Si $x \in A$, entonces $A \in \uparrow \{p\}$. Como A es un conjunto abierto que contiene a p y además

$A \in \mathcal{G}(p\ , \uparrow \{q\})$, *tenemos que* A *contiene a* q. *Por lo tanto,* $A \in \mathcal{G}(x\ , \uparrow \{q\})$ *como se quería probar.*

Teorema 5.7. *Si* $\mathfrak{T}$ *es una topología principal sobre* X, *entonces para cada* $x \in X$ *culquier conjunto en* $\mathfrak{T}$ *que contiene a* x, *debe contener al conjunto*

$$\mathcal{V}_x =: \{y \in X : \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})\}$$

Demostración. Argumentemos por contradicción. Sea $A \in \mathfrak{T}$, tal que $x \in A$ y $\mathcal{V}_x \nsubseteq A$, entonce existe $y \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin A$, de donde $A \notin \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$. Como $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\})$ y $A \notin \mathcal{G}(x, \uparrow \{y\}$ tenemos que $A \notin \mathfrak{T}$ lo cual es imposible.
Luego, podemos decir, para cada $x \in X$, los conjuntos de $\mathfrak{T}$ que contienen a x, deben contener a $\mathcal{V}_x$. ∎

Definición 5.10. *Una subcolección* $\mathcal{B}$ *de* $\mathfrak{T}$ *es una base* **mínima** *de conjuntos abiertos en cada punto, si para cualquier* $x \in X$, *existe* $V \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in V$ *y cualquier conjunto en* $\mathfrak{T}$ *que contiene a* x *debe contener a* V.

Teorema 5.8. *Una topología* $\mathfrak{T}$ *sobre* X, *es una topología principal si, y sólo si,* $\mathfrak{T}$ *tiene una base mínima de conjuntos abiertos en cada punto de* X.

Demostración. Supongamos $\mathfrak{T}$ una topología principal sobre X, por los teoremas 5.6 , 5.7 y usando la definición 5.10, tenemos que la colección

$\mathcal{V}_x = \{y \in X : \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x\ , \uparrow \{y\})\}$ es una base mínima de conjuntos abiertos para cada $x \in X$.
Supongamos $\mathfrak{T}$ una topología sobre X no principal, entonces existe una ultra–topología no principal $\mathcal{G}(x, \mathfrak{U})$, con $\mathfrak{U}$ un ultarfiltro $\mathfrak{U} \neq \uparrow \{y\}$, tal que $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x\mathfrak{U})$. Si existe un conjunto abierto mínimo V que contiene a x, entonces $V \in \mathfrak{U}$ y cualquier otro conjunto abierto que contiene a x debe contener a V. De aquí $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{G}(x\ , \uparrow \{y\})$ para todo $y \in V$ y $\mathfrak{T} \subseteq \bigcap\{\mathcal{G}(x\ , \uparrow \{y\}) : y \in V\}$. Por lo tanto, si $\mathfrak{T}$ tiene una base mínima de conjuntos abiertos para cada punto, entonces para toda ultra–topología no principal $\mathcal{G}(x\ \mathfrak{U})$ más fina que $\mathfrak{T}$, existe una topología principal más fina que $\mathfrak{T}$ y más gruesa que $\mathcal{G}(x\ , \mathfrak{U})$ lo cual implica que $\mathfrak{T}$ es una topología principal.
Por consiguiente una topología no principal no puede tener base mínima de abiertos en cada punto. ∎

Definición 5.11. *Se dice que una topología sobre* X *es una* **topología de Alexandroff** *si la intersección arbitrria de conjuntos abiertos es de nuevo un conjunto abierto.*

La siguiente proposicion caracteriza las topologías de alexandroff, muestra que estas son exactamente las topologias principales.

Teorema 5.9. *Una topología* $\mathfrak{T}$ *es una topología principal si, y sólo si, la intersección arbitrarias de conjuntos abiertos es de nuevo un conjunto abierto.*

Demostración. Si la intersección de conjuntos abirtos es abierto, entonces para cada $x \in X$ la interseccion de todos los abiertos que contienen a x es un conjunto abierto mínimo en x y la familia $\mathfrak{B}$, de todos los conjuntos abiertos mínimos para cada $x \in X$, es una base para $\mathfrak{T}$. Por la proposición 5.8 tenemos que $\mathfrak{T}$ es una topología principal.
Reciprocamente, sea $\mathfrak{T}$ una topologia principal sobre X y $\{\mathfrak{I}_i\}_{i \in I}$ una subcolección de $\mathfrak{T}$,

veamos que $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i$ es un conjunto abierto. Si $x \in \bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i$, tenemos que $x \in \mathfrak{I}_i$ para todo $i \in I$. Usando las proposiciones 5.6 y 5.7 tenemos que $\mathcal{V}_x$ es un conjunto abierto y $\mathcal{V}_x \subseteq \mathfrak{I}_i$, para todo $i \in I$, de donde $x \in \mathcal{V}_x \subseteq \bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i$, es decir, $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{I}_i$ es un conjunto abierto en $\mathfrak{T}$. ■

A continuacion mostramos que el retículo $(\Pi(X), \subseteq)$ de las topologías principales (*i.e.* de Alexandroff) es completo, estableciendo un anti—isomorfismo entre el retículo $(PRE(X), \subseteq)$ de los preordenes y $(\Pi(X), \subseteq)$.

Proposición 5.10. *Dada una topología principal $\mathfrak{I}$, la relación $R_{\mathfrak{I}} \subseteq X \times X$ definida por*

$$xR_{\mathfrak{I}}y \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x \uparrow \{y\}),$$

es una relación de preorden sobre X.

Demostración. Claramente $xR_{\mathfrak{I}}x$ pues $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x\,, \uparrow \{x\}) = P(X)$. Por tanto, la relación es reflexiva.
Si $xR_{\mathfrak{I}}y$ y $yR_{\mathfrak{I}}z$, entonces $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x \uparrow \{y\})$ y $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(y \uparrow \{z\})$ de donde $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) \bigcap \mathcal{G}(y \uparrow \{z\})$, por la nota 5.5 tenemos que $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x \uparrow \{z\})$, es decir, $xR_{\mathfrak{I}}z$, lo cual significa que la relación es transitiva. ■

Proposición 5.11. *Cada relación de preorden $R \subseteq X \times X$ induce una topología principal $\mathfrak{I}_R$.*

Demostración. Sea $R \subseteq X \times X$ una relación de preorden, definimos $\mathfrak{I}_R$ como

$$\mathfrak{I}_R = \bigcap\{\mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) : xRy\}$$

que es, por definición una topología principal. ■

Proposición 5.12. *El conjunto ordenado $(\Pi(X), \subseteq)$ de las topologías principales sobre X es anti–isomorfo al retículo $(PRE(X), \subseteq)$ de los preordenes en X.*

Demostración. Las funciones $\eta : \Pi(X) \to PRE(X)$ y $\varphi : PRE(X) \to \Pi(X)$, definidas por $\eta(\mathfrak{I}) = R_{\mathfrak{I}}$ y $\varphi(R) = \mathfrak{I}_R$ respectivamente, son mutuamente inversas, esto es, $\eta(\varphi(R)) = R$ para todo $R \in PRE(X)$, y $\varphi(\eta(\mathfrak{I})) = \mathfrak{I}$ para todo $\mathfrak{I} \in \Pi(X)$. Probemos que $\varphi(\eta(\mathfrak{I})) = \mathfrak{I}$, para todo $\mathfrak{I} \in \Pi(X)$.
Por definición $\eta(\mathfrak{I}) = R_{\mathfrak{I}}$, donde $(xR_{\mathfrak{I}}y \iff \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{G}(x\,, \uparrow \{y\}))$. Además $\varphi(\eta(\mathfrak{I})) = \varphi(R_{\mathfrak{I}}) = \bigcap\{\mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) : xR_{\mathfrak{I}}y\}$. Así que $\mathfrak{I} \subseteq \varphi(\eta(\mathfrak{I}))$.
Para mostrar la otra inclusión, supongamos $A \in \varphi(\eta(\mathfrak{I})) = \bigcap\{\mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) : xR_{\mathfrak{I}}y\}$, entonces $A \in \mathcal{G}(x \uparrow \{y\})$, *para todo* $(x, y) \in R_{\mathfrak{I}}$.
Luego, se cumple que $A \in \mathcal{G}(x\,, \uparrow \{y\})$ para toda topología $\mathcal{G}(x \uparrow \{y\})$ más fina que $\mathfrak{I}$. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{I}$.
Sean $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \in \Pi(X)$, tales que $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}_2$, entonces si $(x, y) \in R_{\mathfrak{I}_2}$ implica que $\mathfrak{I}_2 \subseteq \mathcal{G}(x\,, \uparrow \{y\})$ y así $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}_2 \subseteq \mathcal{G}(x\,, \uparrow \{y\})$, con lo cual $(x, y) \in R_{\mathfrak{I}_1}$, es decir, si $\mathfrak{I}_1 \subseteq \mathfrak{I}_2$, entonces $\eta(\mathfrak{I}_2) = R_{\mathfrak{I}_2} \subseteq R_{\mathfrak{I}_1} = \eta(\mathfrak{I}_1)$
Por otra parte, si $R_1 \subseteq R_2$, implica que $\varphi(R_2) = \mathcal{J}_{R_2} \subseteq \varphi(R_1) = \mathcal{J}_{R_1}$ ya que

$$\bigcap\{\mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) : xR_2y\} \subseteq \bigcap\{\mathcal{G}(x \uparrow \{y\}) : xR_1y\}$$

Lo cual prueba que $(\Pi(X), \subseteq)$ es anti–isomorfo a $(PRE(X), \subseteq)$, como se quería probar. ■

Proposición 5.13. *Las infra—topologías y las ultra—topologias Principales forman el esqueleto atómico del retículo completo* $(\Pi(X), \subseteq)$ *de las topologás principales (i.e. el retículo* $(\boldsymbol{A(X)}, \subseteq)$ *de las topologías de Alexandroff)*

La prueba de esta proposición puede consultarse en [10].

CONCLUSIONES

Despues del desarrollo de este trabajo se concluye que:

- Para todo conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, existe $DM(P)$ el competamiento normal de P, el cual contiene copia isomorfa a P. Además P es *sup* e *inf* denso en $DM(P)$.
- Si S es un subconjunto de los numeros Reales $\mathbb{R}$. Tal que S es *sup* e inf denso en $\mathbb{R}$, entonces S es denso en el sentido usual.
- El esqueleto de un retículo completo, si existe determina completamente los elementos del retículo.
- El colección de las topologías de *Alexandroff* forma un retículo completo con el orden de la inclusión.

36

Referencias

[1] DE CASTRO R & G RUBIANO, Una revision del completamiente de Dedekind–MacNeille, Misceláneas matemáticas, SMM . (2003) 65–76

[2] CHARLES C. PINTER, Set Theory, Addison–Wesley publishing company 1971

[3] DAVEY B. A.& H. A. PRIESTLEY, Introduction to lattice and order, Cambridge University. Press. 1990.

[4] R. DEDEKIND. Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Vieweg, Braunschweig 1960.6 . Unverranderte Auflage.

[5] GRÄTZER. G, Lattice Theory W. M. Freeman and Company 1971.

[6] GRÄTZER. G, General Lattice Theory, Basel Birkhäuser, Verlang. 1978.

[7] H. M. MacNeille. Partially Ordered Sets. Transactions of the American Mathematocal Society, 42: 416– 460, 1937.

[8] MUNKRES J. R Topología 2^a edición Prentice Hall 2002.

[9] RUBIANO G. N, Topologá General, 2^a edición, Universidad Nacinal de Colombia 2002.

[10] RUBIANO G. & DE CASTRO R, Esqueleto de Retículos Completos, Boletín de matemáticas, (2004) 109–131

[11] A. K. STEINER, The Lattice of Topologies: Structure and Complementation, Trans. Amer. Math. Soc,(1966) 379–398