DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

RUDECOLOMBIA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN EN EL CARIBE SIGLOS XIX Y XX

LÓGICA Y CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DEL CARIBE COLOMBIANO: 1961-2000

Tesis Doctoral

Autor:

Alfonso Segundo Gómez Mulett

Director:

Rafael Enrique Galeano Andrades

Universidad de Cartagena – Colombia

Agosto 2 de 2010

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

RUDECOLOMBIA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN EN EL CARIBE SIGLOS XIX Y XX

LÓGICA Y CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DEL CARIBE COLOMBIANO: 1961-2000

Tesis Doctoral

Alfonso Segundo Gómez Mulett

Agosto 2 de 2010

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DE LOS JURADOS

Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido: es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive: es ponerlo a nivel de su tiempo, par que flote sobre él, y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podrá salir a flote; es preparar al hombre para la vida.

José Martí

DEDICATORIA

- A la memoria de mi padre Alfonso Gómez Avilez.
- A mi madre Carmen Alicia Mulett Romero.
- A la mujer de mi alma y compañera de tanto tiempo, Rosa Amalia Ricardo Madrid.
- A mis hijos Alfonso Segundo y Andrea Catalina, los que alguna vez fueron esos locos bajitos.
- A mis hermanos Piedad, Jaime Gustavo, Álvaro Luis y Carmen Alicia.

RESUMEN

La investigación presentada se centra en determinar cuál fue el papel que desempeñaron la lógica y la teoría de conjuntos en la enseñanza de la matemática universitaria en el Caribe Colombiano entre los años 1961 y 2000, y determinar también el momento histórico de llegada de la llamada matemática moderna. Para la realización de la investigación se tuvieron en cuenta las diferentes concepciones epistemológicas que fundamentan la matemática, las diversas tendencias sobre la enseñanza de la matemática, se revisó la historia de la enseñanza de la matemática en Colombia y el Caribe, buscando antecedentes de lógica y teoría de conjuntos; se analizaron los textos usados para la enseñanza de los fundamentos de la matemática, los programas curriculares y las creencias de los profesores sobre la fundamentación de la matemática implícita en los elementos anteriores. El diseño metodológico utilizó una metodología mixta comprendiendo análisis exploratorio, histórico, bibliográfico y documental.

PALABRAS CLAVE: Lógica, Teoría de conjuntos, fundamentos de la matemática, enseñanza universitaria.

SUMMARY

The research presented focuses on determining what was the role played by logic and set theory in mathematics teaching university in the Colombian Caribbean between 1961 and 2000, and determine also the historical moment of the arrival of the so-called modern mathematics. To carry out research took into account the different epistemological conceptions about mathematics foundations, different trends on the teaching of mathematics, reviewed the history of mathematics teaching in Colombian Caribbean, seeking antecedent of logic and set theory; analyzed the texts used for foundations mathematics teaching, mathematics curriculum and teachers' beliefs about the foundations of mathematics implicit in the above items. The methodological design utilized a mixed methodology comprising exploratory, historical, bibliographic and documentary analysis.

KEY WORDS: Logic, Set theory, mathematical foundations, university teaching.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN

1. LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA 1

1.1 SOBRE FUNDAMENTOS 2

1.2 LA LOGICA 24

1.3 LA TEORÍA DE CONJUNTOS 30

2. LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SUS FUNDAMENTOS 41

2.1 TEORÍAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA 42

2.2 CREENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA 58

2.3 LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS 61

2.3.1 La enseñanza de la lógica 61

2.3.2 La enseñanza de la teoría de conjuntos 69

3. LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN COLOMBIA 74

3.1 LA MATEMÁTICA EN EL PERÍODO COLONIAL: 1571-1826 74

3.2 LA MATEMÁTICA EN LA NUEVA REPÚBLICA: 1826- 1866 90

3.3 LA MATEMÁTICA EN LA INGENIERÍA: 1867-1948 103

3.4 LOS PRIMEROS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA: 1948-1961 117

4. LA MATEMÁTICA EN EL CARIBE COLOMBIANO: 1604-1961 124

4.1 PERÍODO COLONIAL: 1604-1827 124

4.2 PERÍODO REPUBLICANO: 1827-1946 130

4.3 LA MATEMÁTICA EN LA INGENIERÍA: 1946-1961 150

5. LA MATEMÁTICA EN EL CARIBE COLOMBIANO: 1961-2000 155

5.1 LAS REFORMAS CURRICULARES EN LA MATEMÁTICA 156

5.2 LÓGICA Y CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA 174

6. LOGICA Y CONJUNTOS EN EL CURRICULO UNIVERSITARIO DEL CARIBE COLOMBIANO 189

6.1 LAS LICENCIATURAS EN MATEMÁTICA 189

6.1.1 La Universidad del Atlántico 190

6.1.2 La Universidad de Córdoba 199

6.1.3 La Universidad de Sucre 204

6.1.4 Otras instituciones 207

6.2 LOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA PURA 211

6.2.1 La universidad de Cartagena 212

6.2.2 La Universidad del Atlántico 217

6.2.3 La Universidad de Córdoba 221

6.3 OTROS PROGRAMAS UNIVERSITARIOS 223

6.3.1 Las ingenierías 223

6.3.2 Ciencias económicas 229

7. LOS TEXTOS UNIVERSITARIOS UTILIZADOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA Y LOS CONJUNTOS EN EL CARIBE COLOMBIANO 234

7.1 TEXTOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 235

7.2 TEXTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES 247

CONCLUSIONES 256

BIBLIOGRAFIA 265

ANEXO A. PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS EDUCACIÓN PRIMARIA 1979 275

ANEXO B. PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN BASICA SECUNDARIA. PROPUESTA 1981 277

ANEXO C. RESOLUCIÓN 277 DE 1975 279

1. LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

El propósito de este capítulo consiste en hacer claridad sobre el significado que se le da a la expresión *fundamentos de la matemática*, debido a que existe una amplia discusión y diferentes interpretaciones sobre el tema, las cuales varían dependiendo del punto de vista bajo el cual se toma su significado. Estas interpretaciones se pueden estudiar desde una concepción histórica, desde una concepción epistemológica, desde lo pedagógico o didáctico, desde lo cultural o desde la misma naturaleza de la matemática. La amplia gama de concepciones convierten al significado de los fundamentos de la matemática en un problema global con repercusiones en lo local, de allí que resulta interesante mirarlo en lo global antes de ubicarlo en el contexto de los primeros cursos universitarios de matemática en el Caribe Colombiano.

Las diferentes investigaciones sobre los fundamentos de la matemática contemplando lo histórico y lo epistemológico se sitúan generalmente en lo global, dejando para lo local los aspectos pedagógicos y culturales, mientras que la concepción acerca de qué es la matemática se ha tratado tanto en lo global como en lo local, obteniéndose múltiples apreciaciones, todas ellas enmarcadas en dos direcciones: la que presenta los fundamentos como teoría matemática básica, y la que considera los fundamentos partiendo de la lógica y la teoría de conjuntos.

Tomando en cuenta las consideraciones enunciadas anteriormente, la explicación de la expresión bajo discusión se desarrollará en tres partes. En la primera se darán diferentes enfoques o interpretaciones de los fundamentos y las corrientes epistemológicas sobre las cuales se soporta el concepto, la segunda se dedicará a la lógica matemática como teoría clave en la construcción de la matemática y en la tercera se presentarán aspectos generales de la teoría de conjuntos como sustento de la matemática desde lo conceptual, lo histórico, lo pedagógico y lo cultural.

1.1 SOBRE FUNDAMENTOS

La preocupación por los fundamentos no es cosa reciente. Según Chaitin,[1] llevamos más de un siglo de controversia sobre los fundamentos de la matemática; no obstante, en este trabajo se considera que esta preocupación lleva más de veinte siglos, pues Beth[2] habla sobre la prehistoria de la investigación en los fundamentos comenzando con las escuelas filosóficas griegas de Demócrito, Filolao, Heráclito, Platón y Aristóteles entre otros, considerados como predecesores del pensamiento de hombres como Cantor, Frege y Russell, todos ellos empeñados en la búsqueda de un fundamento para la ciencia en general.

Hablando en sentido más estricto, tendríamos que buscar la fundamentación de la matemática en sus orígenes, considerando las antiguas civilizaciones de Mesopotamia y Egipto, cuando la ciencia matemática se desarrolló conjuntamente con la escritura. Como no son muchas las evidencias dejadas por estas culturas, los trabajos sobre el origen de la ciencia comienzan con los griegos, pero sin lugar a dudas, el impulso definitivo dado a los fundamentos de la matemática se dio con Frege, Cantor y Peano en el último tercio del siglo XIX y Russell y Hilbert en los comienzos del siglo XX.

La investigación sobre los fundamentos de la matemática se amplía a partir de las llamadas *crisis de los fundamentos*. La primera crisis fue provocada por el descubrimiento de los números irracionales, término dado por los griegos a tales números porque se creía en la racionalidad como meta suprema del pensamiento; así, el concepto de número irracional fue algo comparado con el Teorema de Completitud o Incompletitud de Gödel en la Grecia Antigua. La segunda crisis fue causada por el empleo de los infinitesimales en el cálculo como cantidades evanescentes, luego vino la

[1] G Chaitin lo afirma en su conferencia titulada “Un siglo de controversia sobre los Fundamentos de la matemática” presentada el 2 de marzo de 2000 en la Universidad Carnegie Melon.

[2] Beth, Evert (1952). The Prehistory of Research into Foundations. *The British Journal Fort he Pholsophy of Science*, 3(9), 5-81.

crisis sobre el postulado de las paralelas dando origen a las geometrías no euclidianas, surgieron después las paradojas de la teoría de conjuntos y finalmente el Teorema de Incompletitud.

En Europa la investigación sobre los fundamentos surge en el ámbito educativo. En Francia se da la Reforma Educativa de 1974, encaminada hacia una enseñanza científica, pocos años después de la Revolución Francesa de 1789. La Reforma se implanta con la creación de la Êcole Polytechni de París, desde la cual se daba un impulso a la investigación científica motivado por el surgimiento de las ciencias puras y la formación de una comunidad científica apoyada con investigación y publicaciones sobre los avances de las ciencias.

En Alemania el interés por la enseñanza de las ciencias se inició en 1810 con la creación de la Universidad de Berlín. Para esa época los estudios de matemáticas estaban dentro de los estudios de la Facultad de Filosofía, los profesores universitarios debían tener conocimientos en filología, historia y matemáticas, conocimientos que hacían parte de los Estudios de Filosofía, Facultad que aparece después de las tradicionales de Derecho, Teología y Medicina. En la Facultad de Filosofía había predominio de filólogos e historiadores, por tal razón se encontraban matemáticos con inclinaciones a la filosofía como Bolzano, Grassmann y Riemann; a su vez, había filósofos con tendencias hacia la matemática como Hegel, Fries (1773-1843), Herbert (1776-1841) y Apelt (1812-1859).

La primera revista alemana de matemática *Journal für die reine und angewandte mathematik* fue fundada en 1826, dirigida por el ingeniero August Leopold Crelle (1780-1855). En esta revista se publican algunos artículos relacionados con los Fundamentos de la matemática y su enseñanza. En lo relacionado con la enseñanza de los fundamentos, Martin Ohm (1792-1872) propone un programa para fundamentar la matemática con base en el concepto de número natural y los sistemas numéricos desarrollados por Weierstrass, Cantor y Dedekind; enfoque abandonado prontamente ya que en Alemania la matemática estaba atada a los designios de Götingen donde Gauss era *El Príncipe de las Matemáticas*. Teniendo ya un panorama inicial sobre el resurgimiento de las ciencias en Europa, la matemática como parte de ellas y dentro de esta sus fundamentos, es pertinente aclarar qué se entiende por fundamentos.

Fundamentos es la traducción dada en español de dos vocablos en lengua inglesa: *Foundations* y *Fundamentals*. La primera de estas palabras se refiere a los principios, a la base epistemológica sobre la cual se construye la matemática, su génesis o naturaleza; la segunda, se refiere a los conceptos y teorías que son requisitos o a partir de los cuales se desarrollan los demás conceptos. En el primer sentido, los fundamentos están constituidos por la lógica y la teoría de conjuntos o simplemente la lógica si esta última teoría está contenida en la anterior[3]; en el segundo sentido, los fundamentos están constituidos por el álgebra clásica, la trigonometría, la geometría analítica y otras temáticas. En esta investigación la expresión *Fundamentos de la Matemática* es sinónimo de *Lógica y Teoría de Conjuntos*[4], pues son estas teorías las que hasta hoy han servido como base para la construcción de la matemática; así las cosas, la lógica y la teoría de conjuntos constituyen los fundamentos de la matemática; no obstante, para llegar hasta este punto se expondrán concepciones diversas sobre el tema.

El término fundamentos de matemática tiene una interpretación clara en el sentido matemático, significa lógica matemática, aunque también tiene un sentido menos claro que puede variar de un contexto a otro. En términos filosóficos, el término fundamentos es asociado con la idea de darle un sustento a la matemática.

Para Putman (1967), se tienen tres niveles de interpretación del término fundamentos. La primera, cuando la gente tiene un pensamiento primario con el cual trata de reducir una teoría a otra, es lo que Jubien (1981) llama reducibilidad formal, reduciendo la matemática a la teoría de conjuntos, convirtiéndose el sentido filosófico en un sentido estrictamente matemático. En el segundo nivel de interpretación, los fundamentos están vinculados a lo filosófico, en el sentido de dar o proveer de una semántica formal a las teorías matemáticas formalizadas, buscando una relación entre las teorías formales bajo interpretación y la matemática real. El tercer nivel de interpretación pretende dar un

[3] Para María Manzano, la lógica moderna incluye la teoría de conjuntos, la teoría de modelos y la recursión.
[4] Lógica y conjuntos son parte esencial de los foundations

significado a las proposiciones matemáticas, sentido que raramente es discutido, ya que la argumentación no se fija en lo semántico en vez de lo sintáctico y lo pragmático.

Dentro de los fundamentos surgen dos problemas de orden filosófico. El primero hace referencia a la naturaleza de los entes matemáticos, convirtiéndose en un problema de tipo ontológico; el segundo, se refiere a las limitaciones del conocimiento matemático, tratándose entonces de un problema epistemológico.

Un tratamiento para la solución del primer problema lleva a considerar los conceptos y entes matemáticos reducibles a conceptos lógicos como lo propone el Logicismo; de otra parte, los intuicionistas afirman que los entes matemáticos son producto de la intuición en el sentido de Kant; los empiristas afirman que los entes matemáticos son propiedades de las cosas; y para los realistas, los entes matemáticos tienen una existencia trascendente. En las limitaciones del conocimiento matemático está la solución del problema del infinito, para el cual existe una variedad de soluciones como aquella dada por Zermelo con la introducción del postulado de inducción transfinita[5].

Desde el punto de vista pragmático los fundamentos están dentro de la misma matemática como teoría básica o de soporte de las diferentes ramas o áreas de la matemática; para otros, los fundamentos están fuera de la matemática, en la llamada filosofía natural como sucede con todas las ciencias empíricas.

Según Henkin (1971), los fundamentos se encuentran en las diferentes teorías sobre la construcción de la matemática: Logicismo, Formalismo e Intuicionismo. El trabajo fundacional está basado en aspectos teóricos de la teoría de conjuntos, aspectos algebraicos y aspectos constructivos asociados a las tres vertientes filosóficas señaladas. Los aspectos teóricos sobre conjuntos fueron estudiados independientemente por Cantor y Frege. Cantor desarrolló la teoría de conjuntos como un fundamento para el estudio de los conjuntos infinitos generalizando las nociones de números cardinales y ordinales

[5] Es te principio, en forma sencilla, expresa que, si un predicado A es válido para objetos confiables $A(\tau(A))$, entonces A es válido para cualquier objeto a; es decir, $A(\tau(A)) \rightarrow A(a)$.

yendo hacia arriba; Frege, procedió hacia abajo, para explicar le teoría de números naturales en términos de las nociones teóricas sobre conjuntos.

En la enseñanza de la matemática a nivel universitario, los fundamentos se han entendido generalmente como una parte de la matemática o un conjunto de teorías o conceptos iniciales en el estudio de la matemática. Una mirada a los textos universitarios escritos después de más o menos la segunda mitad del siglo pasado indican que el término fundamentos se refiere al álgebra y la trigonometría como disciplinas teóricas necesarias para el desarrollo del cálculo; desde la década de los sesenta adicionalmente se incluyen otras temáticas que involucran la lógica, los conjuntos, teoría básica de matrices, etc., agrupadas en algunos casos con el nombre de matemática básica o precálculo que de alguna manera se presentan como enlaces o aproximaciones a la interpretación clara de los fundamentos. La discusión sobre esta interpretación se reservará para la parte final de este trabajo.

La necesidad de fundamentar la matemática se debió a varios acontecimientos. En 1829, Gauss se da cuenta que el Quinto Postulado de la Geometría de Euclides tiene problemas, por lo tanto decide escribir una nueva geometría prescindiendo de dicho postulado, trabajo que termina en 1831 pero no lo publica. En 1832 Janos Bolyai (1802-1860) expone su *Geometría Absoluta* con propiedades independientes del postulado de las paralelas, en donde la geometría euclidiana es un caso particular; para esa época, Lobachevsky publica sus trabajos desde 1829 que culmina con su obra *Pangeometría*; en 1854, George Boole (1815-1864) publica *Las leyes del Pensamiento*, imprimiéndole un sentido algebraico a la lógica aristotélica que prácticamente había permanecido intacta hasta ese momento y convirtiéndose además en el fundador de la lógica simbólica. Finalmente, en 1867 aparece la publicación de la Geometría de Riemann (1826-1866) en el trabajo *Sobre las Hipótesis en que se funda la Geometría*.

Las nuevas geometrías junto con la decisión de imponer rigor al análisis por parte de Dedekind y Weierstrass, llevan al establecimiento de los fundamentos de la matemática, para crear una base o principio de soporte de las antiguas matemáticas las cuales hasta ese momento no habían aún esclarecido el concepto de número.

Los fundamentos de la matemática y su enseñanza están estrechamente ligados a las ideas acerca de la construcción y evolución de la matemática. La evolución de las matemáticas lleva consigo la evolución de su enseñanza con algunas variaciones a causa de otras teorías influyentes como la filosofía, la psicología, la pedagogía, la sociología y la lingüística. La discusión sobre los fundamentos de la matemática se ha relegado a las tres escuelas tradicionales de la filosofía matemática que son el Logicismo, el Formalismo, el Intuicionismo; además de ellas se consideran también como escuelas el Platonismo y el Constructivismo.

El Platonismo "considera las matemáticas como un sistema de verdades que han existido siempre e independientemente del hombre. La tarea del matemático es descubrir esas verdades matemáticas, ya que en cierto sentido se está sometido a ellas y las tiene que obedecer" (Vasco, 1998, p.11). Para el Platonismo, la matemática está formada por verdades absolutas, algunas de ellas descubiertas difícilmente y casi de manera misteriosa, y otras imposible de demostrar. Así las cosas, las matemáticas están cubiertas con un velo que las hace invisible para muchos, tanto en la manera de adquirirlas como en la manera de descubrirlas; las verdades matemáticas son independientes de todo acto de construcción, las ideas y objetos matemáticos pre-existen.

Según Díaz (1995), en el Platonismo la matemática es dogmática, "las verdades matemáticas son absolutamente ciertas, sus evidencias son apodícticas. Son verdades independientes de la experiencia, y, por tanto, irrefutables por ésta. Este dogmatismo matemático es extensivo a todas las ciencias ideales." (p. 36). En la matemática se considera una serie de entes de un mundo ideal, los objetos matemáticos son inespaciales, en la matemática no se tienen entes reales sino juicios, la matemática por ser ciencia ideal es una ciencia autónoma, y como tal, no pretende implicar la existencia de sus objetos como su esencia específica, es ciencia absolutamente cierta con evidencia apodíctica y se construye con arreglo al método a priori (Díaz, 1995).

Platón creía en la existencia de objetos eternos, definidos e independientes de cualquier razonamiento, estos objetos eran los números o lo que él llamaba formas aritméticas, y otros objetos con las mismas características como el punto, la línea, el círculo, el plano, etc., que él llamaba *formas geométricas*. Para dichos objetos había una descripción de ellos junto con sus relaciones, como por ejemplo la multiplicidad en los naturales o la comparación entre segmentos de rectas según la longitud; así que, la matemática pura que comprendía la aritmética y la geometría euclidiana como formas matemáticas, describe estas formas matemáticas y sus relaciones, mientras que la matemática aplicada describe los objetos empíricos en la medida que estos se aproximen a las formas matemáticas (Körner, 1974). Las relaciones entre los objetos son verdaderas y estas verdades son demostrables por medio de un razonamiento lógico a partir de ideas primarias llamadas axiomas.

El Platonismo es por naturaleza de preferencia filosófica de los matemáticos descubridores de nuevas verdades ante la posibilidad de expresar esas verdades de otra forma o de llegar a ellas mediante una consecuencia lógica; para ellos, tiene más mérito descubrir una nueva teoría que profundizar sobre la misma puesto que las cosas están en el mundo de las ideas, solamente hay que descubrirlas, las leyes existen más allá del mundo material y aunque parezcan un poco misteriosas, debe dedicárseles cierto esfuerzo para encontrarlas, existiendo la posibilidad de fracasar en el intento.

El Platonismo matemático se presenta en dos versiones, una débil y otra fuerte. La versión débil afirma que existen objetos matemáticos independientes de nosotros y de nuestra actividad teorizante como los números, que no son espacio-temporales y pueden ser descritos por nuestras teorías; según la versión fuerte, todo objeto matemáticamente posible existe[6]. Ambas versiones caracterizan un tipo particular de enseñanza de la matemática y sus Fundamentos, imponiendo la existencia de esos objetos matemáticos, aunque en la enseñanza, como decía Kreise,[7] el problema no es la existencia de los objetos matemáticos, sino la objetividad de los enunciados matemáticos.

[6] Estas versiones se deben a Mark Balaguer y las enuncia simbólicamente como $\forall$ (x) ((x es objeto matemático $\wedge$ x es lógicamente posible) $\rightarrow$(x existe))

[7] Georg Kreise es un matemático austriaco nacido en 1923, trabajó la teoría de la prueba en la Lógica matemática ocupándose de obtener pruebas constructivas a partir de las no constructivas.

La segunda corriente que fundamenta las matemáticas es el Logicismo de Russell, con orígenes en la lógica aristotélica, las ideas de Leibniz y la lógica de Frege. Para el Logicismo, la lógica matemática es la ciencia de la cual se derivan la matemática y las demás ciencias. La matemática es una cadena de razonamientos lógicos sin importar su significado, es una sintaxis pura sin semántica, la matemática solo puede sustentarse en la Lógica la cual le da un estatus de ciencia formal. "La lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás, y que contiene las ideas y principios en que se basan todas las ciencias" (Dou, 1970).

La matemática como ciencia deductiva, apoya sus demostraciones en los juicios analíticos y en la teoría de la inferencia que permite obtener conclusiones ciertas. La teoría de la inferencia usa juicios particulares y juicios generales correspondientes al cálculo de proposiciones y al cálculo de predicados.

Para el Logicismo existen dos lógicas excluyentes entre sí que son la lógica deductiva y la lógica inductiva, correspondiendo la deductiva a la teoría de la inferencia propiamente dicha, y la inductiva procura la coherencia de las ideas con el mundo real, parte de observaciones específicas (hipótesis inductiva) para obtener conclusiones generales, en la lógica inductiva se parte de un conjunto de premisas para buscar una conclusión, se trata de sacar una conclusión de las premisas, mientras que en la lógica deductiva se parte de un conjunto de premisas para inferir una conclusión ya dada. La lógica inductiva está actualmente soportada matemáticamente por la probabilidad.

Como se había anunciado anteriormente, la lógica comienza con Aristóteles quien en su obra *Organon* o *Tratados de Lógica*, hace un estudio de las categorías donde se ocupó del concepto, de la palabra aislada; en el Peri Hermeneias, de la proposición, en los Primeros Analíticos, del silogismo; en los Segundos Analíticos, de la prueba científica; en los Tópicos, de las inferencias dialécticas, y en las Refutaciones Sofísticas, de los pseudo razonamientos (Aristóteles, 1981). Leibniz siguiendo a Aristóteles y considerado como el primer logicista, sostenía que las matemáticas son derivables de la lógica, y para fundamentar las matemáticas era necesario distinguir entre verdades de la razón o verdades necesarias y verdades de hecho o verdades contingentes. Curiosamente, Leibniz no construyó las matemáticas a partir de la lógica.

Contribuyeron también al Logicismo Gottlob Frege cuyas ideas fueron influidas por Dedekind para el desarrollo de la lógica matemática en el cálculo proposicional, las reglas para el uso de cuantificadores y la prueba por inducción matemática. Para Frege, quien realmente buscaba fundamentar la aritmética en la lógica, consideraba que las leyes de la matemática son las que se conocen con el nombre de leyes analíticas, "estas leyes no dicen más que lo que está implícito en los principios de la lógica, que son verdades a priori. Los teoremas matemáticos y sus demostraciones nos muestran lo que en ellas está implícito. No todas las matemáticas pueden aplicarse al mundo físico, pero, ciertamente, las matemáticas son verdades de razón" (Kline, 2000, p. 261); el trabajo del matemático está dominado por la definición y la argumentación, actividades pertenecientes al dominio de la lógica, pues la matemática es una extensión de la lógica.

La obra lógica de Frege comienza con la publicación del trabajo *Conceptografía* en 1879, introduciendo un sistema simbólico para la lógica de primer orden desde un punto de vista axiomático; luego, en 1884, publica *Los Fundamentos de la Matemática*, trabajo en el cual establece una definición de número y formula además el programa de reducción de los otros conceptos de número a la lógica, iniciándose así prácticamente el Logicismo. En 1914 escribe el artículo *La Lógica en la Matemática*, donde muestra que la lógica es una teoría básica o fundamental, irreducible a cualquier otra teoría, considera a la lógica como un conjunto de principios incuestionables a los que es posible reducir en última instancia todos los enunciados verdaderos de las matemáticas y sobre su base se puede construir cualquier teoría, las proposiciones de la matemática poseen una legitimidad totalmente independiente de los hechos empíricos y de las representaciones subjetivas de cada individuo, considera a la lógica como un conjunto de principios incuestionables a los que es posible reducir en última instancia todos los enunciados verdaderos de las matemáticas se conoce como *Logicismo*[8].

[8] Estas afirmaciones son enunciadas por Frege en su artículo *La Lógica matemática* escrito en 1914 y publicados con el título de *Escritos Lógico-Semánticos* por la editorial Tecnos, Madrid, 1974.

La obra de Frege fue revisada y extendida por Russell, el creador del Logicismo[9]. Russell (1977) fundamenta la matemática en la lógica y en el conjunto de los números naturales para construir los números reales, los complejos, las funciones y todo el análisis, define la matemática como

> *La clase de todas las proposiciones de la forma 'p implica q', donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni p ni q contienen constante alguna, excepto las constantes lógicas* (p. 27)

Sugiere la construcción de la geometría a través de la matemática del número usando coordenadas y ecuaciones de curvas, introduce el Axioma de Reducibilidad[10] para incluir los números transfinitos, y el axioma de escogencia[11] para la teoría de tipos. La obra *Principia Mathemática* o *Los Principios de la Matemática* de Russell es la plataforma que sustenta la matemática en el Logicismo, en ella se trata de probar que la matemática es reducible a un número pequeño de conceptos y principios lógicos constituidos en un sistema de axiomas, se procura formalizar el lenguaje mediante la simbolización de proposiciones un poco similar al intento de Boole proponiendo crear un álgebra para la lógica. Para Russell una proposición puede tomar solamente dos valores de verdad: verdadera o falsa, principio conocido como el tercio excluso que es heredado de la lógica aristotélica.

Para Russell, la reducción de la matemática a la lógica la liberaba de cualquier intuición subjetiva, da el sentido correcto al significado a priori en matemática, fundamenta la coherencia y solidez de la matemática y niega la idea kantiana de considerar la matemática como conocimientos sintéticos. En palabras de Carnap, el proyecto logicista se puede reducir en dos aspectos:

[9] Aunque Russell es considerado el creador del Logicismo, las bases de esta corriente epistemológica se deben a Frege, quien aunque con errores, fue el primero en hablar sobre el Logicismo.
[10] Toda proposición de un tipo superior es reducible a otra de tipo inferior
[11] El axioma de escogencia o elección dice : Para todo conjunto se tiene una función de elección

1. Los conceptos de la matemática pueden ser derivados de conceptos lógicos a través de definiciones explícitas.
2. Los teoremas de la matemática pueden ser derivados de axiomas lógicos a través puramente de la deducción lógica[12].

Uno de los mayores méritos de la obra de Russell es haber dado forma definitiva al cálculo de relaciones, que había sido desarrollado en gran parte por el norteamericano Peirce[13] y por el alemán Schrider en su extensa obra *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (4 vol. 1890-91-95 y 1905). El cálculo de relaciones desempeña un destacado papel en el álgebra moderna y en otras ramas abstractas de la matemática actual en donde interesa principalmente el estudio de las relaciones y no la naturaleza de los entes relacionados (González, 1950). Antes del cálculo de relaciones Russell establece el cálculo de proposiciones, el cálculo de funciones proposicionales y el cálculo de clases. También Russell planteó una metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la lógica, como elemento organizador de las ideas y formalizador del lenguaje ordinario, continuando en cierta forma el trabajo de Frege iniciado en *Conceptografía*.

Los logicistas como Frege y Russell, creen tener los elementos necesarios para resolver dentro de la lógica todos los problemas de estructuración y fundamentación de la matemática, estructuración que de hecho no resultó ser perfecta debido a la aparición de otras ramas de la matemática, más generales y abstractas como la teoría de categorías. Las categorías fueron estudiadas por Aristóteles en sus tratados de lógica de una manera muy general y relacionada más bien con aspectos del lenguaje que con aspectos de la matemática, algo así como una especie de clasificación.

Con Russell se cierra un capítulo muy importante en la búsqueda de una fundamentación para la matemática desde la lógica, fundamentación que a pesar de las dificultades de tipo técnico en el sistema principia matemática y del posible fracaso de dar a la matemática un fundamento definitivo, permitió avanzar en la organización de la

[12] Carnap, R (1931). The logicist foundations of mathematics. En H. Putnam y P. Benecerra (Eds.) *Philosopy of Mathematics. Selected readings*. (p. 9). New York: Prentice Hall
[13] Anteriormente, Frege en el cálculo de predicados de su sistema axiomático para la lógica de primer orden trabaja con relaciones.

matemática, la dotó de una sistematización adecuada y suministró una sintaxis a la argumentación. De acuerdo con Ruiz[14] los problemas del Logicismo son de tipo filosófico, el Logicismo fracasa porque no cumplió a cabalidad dar un fundamento a la matemática, pero con ello no destruyó el paradigma racionalista axiomatizante de la matemática.

El Logicismo se fortaleció en los años treinta del siglo pasado con los aportes de los integrantes del *Círculo de Viena*, grupo que se ocupó de los fundamentos de la matemática con las contribuciones de Rudolf Carnap (1891-1970) quien aporta el instrumento de la lógica moderna y el análisis científico del lenguaje, y Ludwig Wittgenstein (1889-1951), quien convertiría la lógica en una vasta tautología encerrando la matemática en esta.

En la actualidad se observa que el Logicismo aún vive cuando en la demostración de algunos teoremas de la matemática acudimos a él, la lógica sigue jugando un papel fundamental en el desarrollo de la prueba; además de ello, recientemente el Neologicismo ha emergido como sucesor del proyecto original de Frege bajo tres concepciones: Como fundamento metafísico de la matemática dando una ontología a los objetos y relaciones; como fundamento epistémico, identificando las denotaciones de los términos matemáticos y las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas con base en la ontología; y como fundamento de la matemática, sirviendo de base a la teoría de conjuntos y la teoría de las categorías sobre las cuales cualquier otra teoría matemática debe ser construida. (Shapiro, 2004).

Hoy en día, muy a pesar de los continuos esfuerzos presentes por dar rigor a la matemática y su enseñanza, la historia reciente de la enseñanza muestra que la lógica no se usa adecuadamente, sino que esta aparece en los diferentes programas de los cursos básicos universitarios de matemática como un tema aislado del resto de la temática[15], y aunque esta corriente haya recibido muchas críticas desde siempre, sin ella sería imposible construir y enseñar matemáticas.

[14] Ruiz, Angel (1988). Russell y los problemas del Logicismo. *Mathesis*, 4(1).
[15] Esto es lo que se quiere demostrar como hipótesis en este trabajo

El Formalismo es la tercera corriente en la fundamentación de las matemáticas. Fue creada por David Hilbert al insistir en la consistencia de las matemáticas, propone sistematizar la matemática clásica con un sistema que funciona alternadamente con la lógica para probar la consistencia y la completitud de las matemáticas en vez de la verdad como se lo propone el Logicismo.

Hilbert en su obra *Grundzüge der Teoretischen Logik* trabaja con base en el Logicismo ampliando esta teoría como una nueva Lógica, pero no parte del hecho de que los conceptos y las relaciones matemáticas son deducibles a conceptos y relaciones lógicas, puesto que hay en los fundamentos de la matemática elementos nuevos no contenidos en la lógica, lo cual se traduce en la introducción de su trabajo, al fundamentar la matemática al lado de los postulados lógicos y de otros nuevos, principalmente el postulado que hace referencia al infinito, pues este concepto no es completamente satisfecho por el Logicismo y está presente en algunas paradojas. De acuerdo con Díaz (1999)

> *Hilbert se propuso la completa formalización de un sistema deductivo para obtener una prueba de consistencia absoluta de un sistema y de este modo no tener que recurrir a la consistencia de otro sistema distinto. Para lograr esta formalización, los conceptos se sustituyen por signos gráficos, las proposiciones por sucesiones de signos y el razonamiento o comprobación de teoremas se lleva a cabo por la deducción formal conforme a reglas mecánicas que los relacionan* (p. 23)

Las consideraciones de Hilbert lo llevaron a crear un sistema formal, edificio sobre el cual se fundamenta la matemática en forma independiente de la filosofía, como una disciplina autónoma y perfecta.[16] Esta perfección como lo demostró posteriormente Gödel no lo es en el sentido formal, pero si en el sentido humano, como la forma más elaborada del pensamiento humano para fundamentar la matemática. En los cimientos

[16] Toranzos, Fausto (1949). El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en el de D Hilbert. Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía. Mendoza: Argentina.

de la matemática está la noción de número y el principio de inducción completa, elemento que permite introducir el infinito potencial como un proceso de demostración por recurrencia.

El infinito potencial lleva a considerar una recursividad interminable, ya que dado un número natural puede encontrarse uno más grande que este, es la idea presente en cualquier persona común y corriente que no conoce la matemática al considerar el infinito como algo muy grande que no tiene fin cuando se empieza a contar. Durante la edad media el concepto de infinito estuvo dominado por la teología, la filosofía tomística, esa que fue enseñada en Colombia prácticamente hasta mediados del siglo XX en parte como lógica postsumalista, considera el infinito como potestad de Dios; así, en la *Summa Theologiae* de Tomás de Aquino, el poder de Dios era ilimitado pero él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas.

Muy a pesar de la concepción restringida del infinito como infinito potencial, Galileo en el año 1600 rechazó la idea de infinito como paradójica, al concluir que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud se correspondían biunívocamente y que el conjunto de los números perfectos era parte del conjunto de los números naturales[17] teniendo ambos igual número de elementos, es decir, una parte del todo tenía tantos elementos como ese todo, contradiciendo el axioma euclidiano de que el todo es mayor que la parte (Ortiz, 1994). Este infinito, junto con el método axiomático, sirvió de base a la construcción del cálculo infinitesimal y otras teorías de la matemática.

El método axiomático es el fundamento para la construcción de las matemáticas, se parte de términos no definidos, definiciones y axiomas, para luego deducir y demostrar a partir de los primeros ciertas proposiciones llamadas teoremas. El conjunto de axiomas debe tener las características de ser mínimo y suficiente, para deducir cualquier teorema a partir de ellos.

El método axiomático fue establecido por Euclides en los Elementos, pero el primer sistema completo de postulados fue propuesto por Moritz Pasch (1843-1931) y

[17] La función f: $N \to N$ definida por $f(n) = n^2$ es biyectiva.

publicado en 1882 como método expositivo para dar rigurosidad a la geometría proyectiva, luego siguen los trabajos de Dedekind en 1888 sobre la fundamentación de la aritmética y los trabajos de Peano sobre el mismo tema en 1891. El toque definitivo al método axiomático es dado por Hilbert (1862-1943) en sus *Fundamentos de la Geometría*.

El modelo axiomático trabaja buscando crear un sistema de verdades construido en dos niveles: el nivel de los axiomas y el nivel de los teoremas. Los axiomas constituyen las bases del sistema, verdades a las cuales se considera *primitivas*, imposible de reducir a otras. Hasta no hace mucho tiempo se consideraba a los axiomas *verdades evidentes* y por lo tanto *incuestionables*, hoy son consideradas apenas como puntos de partida de la reflexión. Por ejemplo la identidad $A = A$ es un axioma clásico construido sobre la evidencia de que todo *ser* es idéntico a sí mismo. (Flórez, 1996)

Si bien el modelo axiomático busca sistematizar una teoría matemática, este ejerce una construcción dogmática e inflexible que no da oportunidad a pensar más allá de los referentes base, es decir, los axiomas, ya que según Babini (1980), el Formalismo dado por el método axiomático,

> *…al acentuar el carácter formal de la matemática, que constituye una nota esencial de esta ciencia, fue por ello la tendencia más tradicional y conservadora, y también la más afín a los matemáticos de profesión. Puede verse su punto de partida en los 'Grundagen' de Hilbert, que ofrecieron el modelo de una disciplina matemática construida según el método axiomático, método que no solo era perfectamente adecuado al carácter formal de la matemática, sino que eliminaba de los Fundamentos de la matemática la intuición, con sus hábitos mentales y sus moldes tradicionales. (p. 60)*

Pero esta inflexibilidad aparente tenía una gran fisura observada por Kurt Gödel, quien demostró con su Teorema de Incompletitud que no existe ninguna axiomática para construir cualquier teoría matemática que contenga la aritmética, pues algún axioma queda faltando para sustentar la teoría o hay axiomas redundantes, esto es, la teoría no es completa. En términos más exactos, el teorema de Gödel establece que "cualquier lógica aritmética consistente es incompleta, es decir, existen proposiciones verdaderas sobre los enteros que no pueden demostrarse dentro de tal lógica". (Arbib, 1976, p. 136).

Es de advertir que el Teorema de Gödel muestra que no existe consistencia en las teorías formales de la matemática cuando se incluye la aritmética, pero el método axiomático es consistente cuando se tratan otras teorías de las matemáticas, por tanto se constituye como una buena herramienta ante teorías difíciles de construir y pedagógicamente permite al profesor y al estudiante refundar esas teorías sobre bases entendibles.

Los desarrollos matemáticos logrados hasta hoy para la presentación y sistematización de diferentes temáticas dentro de la matemática muestran que el Teorema de Gödel no liquidó completamente el programa de Hilbert, sino mas bien que lo relativizó, alcanzando una gran influencia en la construcción de la matemática.[18]

El Intuicionismo tuvo como precursor al filósofo Immanuel Kant, profesor de matemáticas y física en la Universidad de Könisberg entre 1755 y 1770. Según Kant, la intuición es activa y creadora, el conocimiento comienza con la percepción y no con las sensaciones, también puede comenzar con la experiencia pero realmente no se deriva de allí sino de la mente; por lo tanto, la matemática puede alcanzar un gran desarrollo independientemente de la experiencia.

El Intuicionismo comienza con la percepción de la cantidad que tiene el ser humano y que representa con los números naturales, intuición resultante de la observación de las cosas, del querer determinar sus objetos poseídos de los cuales se apropiaba desde la edad primitiva; esta percepción luego de un proceso de abstracción lleva a la idea de

[18] Para mostrar solamente un ejemplo se menciona la construcción axiomática de los números reales presente en muchos libros de texto como el Cálculo de Tom M Apostol.

número como una representación de esa cantidad; así, el concepto de número surge como una idealización de algo que fue percibido.

"Para el intuicionista, la matemática es la construcción de entidades en la pura intuición" (Körner, 1974, p.159), la matemática es el resultado de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos, la matemática es construcción de la mente humana y el estudio de esas construcciones mentales tiene como origen lo finito, por consiguiente este comienzo puede identificarse con la construcción de los números naturales.

El Intuicionismo se basa en que las matemáticas se pueden construir a partir de lo que se percibe, de lo dado inmediatamente, de lo que intuitivamente esta dado como los números naturales, así lo concibió Leopold Kronecker (1823-1891), quien dijo *Dios creó los números naturales, lo demás es obra del hombre*. Evidentemente, se concibe la idea de número como cantidad tal como lo hacían los griegos, así que los griegos en cierta forma fueron intuicionistas.

La cabeza visible del Intuicionismo es Brouwer (1881-1966), profesor holandés de matemáticas y fundador del Intuicionismo matemático. Según Brouwer, la matemática es una actividad que se origina en la mente humana y es independiente del mundo real, la mente reconoce intuiciones básicas y claras que son certezas inmediatas acerca de algunos conceptos matemáticos. La matemática se construye en la mente independientemente del mundo externo, solamente debe percibirse algo que posteriormente será intuitivamente concebido y va a servir al pensamiento matemático; es una "actividad sin lenguaje que tiene su origen en la percepción de un paso del tiempo" (Barrow, 1996, p. 213), este paso del tiempo hace referencia a un antes y a un después, la memoria retiene después lo que percibió antes como una dualidad temporal, "si la dualidad así nacida se despoja de toda cualidad, pasa a la forma vacía de un sustrato común de todas las cualidades" (Barrow, 1966, p. 213); entonces la intuición básica de la matemática está constituida por un sustrato común por esa forma vacía.

La matemática surge de la mente cuando se da sentido a la experiencia, al organizar la sucesión de todos los elementos simples producto del instante de vida que crea la dualidad antes y después, retenidos posteriormente en la memoria

El Intuicionismo matemático, como descendiente del Intuicionismo de Kant se reduce a dos ideas:

> *a) El tiempo -aunque no el espacio, según los neointuicionistas- es una forma a priori de la intuición y está involucrado esencialmente en el concepto de número, que es generado por la operación de contar;*
>
> *b) Los conceptos matemáticos son esencialmente construibles: no son meras marcas (formalismos) ni son aprehensibles porque tengan una existencia previa (realismo platónico de las ideas), sino que son obra del espíritu humano.*[19]*(López, 2008)*

Los intuicionistas en la lógica no aceptan el principio del tercio excluso[20], el infinito actual y el Axioma de Elección de Zermelo para admitir la existencia de elementos en matemáticas que demuestran algo; para ellos, la lógica pertenece al lenguaje y es simplemente un edificio estructurado de este, la lógica importante es la lógica matemática y no la lógica general, las paradojas son defecto de la lógica pero no de la matemática, construyen su propia lógica según el sistema formal de Heyting, no conciben la teoría de Cantor de la aritmética transfinita, rechazan los teoremas Bolzano-Weierstrass y de Heine- Borel por apoyarse en la Ley del Tercio Excluso y solo aceptan definiciones constructivas o pruebas constructivas.

La postura de los intuicionistas es prácticamente una negación a las corrientes logicista y formalista, su defecto fue criticar sin poder terminar el trabajo de construcción de los fundamentos de las matemáticas que aún hoy permanece incompleto, enseñar matemáticas en el contexto intuicionista es bastante difícil porque son pocas las

[19] Estas ideas son tomadas del texto de Mario Bunge *Intuición y Razón* por Ángel López
[20] Este principio afirma que todo enunciado que tenga sentido es verdadero o falso y no admite una tercera posibilidad.

coincidencias con las corrientes anteriores, construir es una tarea ardua y a veces difícil en matemática, y si algo existe no hay porqué construirlo. No obstante, las construcciones son necesarias en matemáticas y esto sería tal vez una de las pocas ventajas que se puede obtener en la enseñanza de las matemáticas derivadas del Intuicionismo.

Para los intuicionistas, las cantidades, elementos u objetos que usa la matemática deben ser construidos en un número finito de pasos, cualquier definición o demostración debe ser constructiva; la existencia matemática significa construcción, la lógica es diferente de la matemática; las leyes de la lógica no son a priori ni eternas, son hipótesis que el hombre formuló para estudiar el lenguaje por medio del cual expresaba su conocimiento de conjuntos finitos de fenómenos; por lo tanto, las leyes de la lógica no deben considerarse como principios reguladores inmutables, sino como hipótesis corregibles que pueden fallar en relación con nuevos tipos de objetos, por ejemplo los conjuntos infinitos,[21] aunque una cosa es la lógica como formalización del lenguaje para evitar vaguedades y otra cosa es la lógica como fundamento de la razón.

Las matemáticas constructivas recibieron un nuevo impulso en 1967 con la publicación de la obra *Foundations of Contructive Análisis* de Errett Bishop[22], en donde prueba que es posible hacer un desarrollo constructivo del análisis a partir de las ideas de Brower; más tarde, en 1972 publica *Constructive Measure Theory* junto con Henry Cheng y en 1973 publica *Esquizofrenia en las Matemáticas Contemporáneas*, obra que sirvió como punto último de partida a la teoría del constructivismo basada en los principios

- Las matemáticas son el sentido común.
- No se puede preguntar si una afirmación es cierta hasta que se sepa lo que significa.
- Una prueba de ello es completamente cualquier argumento convincente, y

[21] Primera tesis del Intuicionismo matemático según Mario Bunge.
[22] Consideraba que las matemáticas son un lenguaje de programación de alto nivel en el que debían estar escritas las demostraciones; los algoritmos, acompañarán, naturalmente, a las demostraciones de existencia. Cualquier teorema de la matemática puede traducirse en un enunciado verificable o computable acerca de los números.

- Distinciones significativas merecen ser conservadas.

El Constructivismo, corriente forjada a partir del Intuicionismo es más una postura filosófica de ver al mundo con amplias repercusiones en la matemática y en la enseñanza e de las ciencias en general. Según el constructivismo, afirma Díaz (1995)

> *Los conceptos constructos no son meramente lógicos sino que tienen su momento de realidad sentida; los objetos construidos de la matemática no son meros conceptos o sistemas de conceptos sino que son realidad postulada; las afirmaciones constructivas matemáticas no son meros juicios lógicos sino realizaciones en la realidad postulada; el método constructivo matemático no es mero razonamiento lógico sino "dis-currir" en la realidad matemática.* (p. 85)

> *Entender qué es la matemática como construcción sentiente, nos exige precisar los dos términos que aparecen mencionados: sentir y construir; porque construcción y realidad sentida se nos han presentado como términos irreconciliables. Y esto es así, efectivamente, desde la inteligencia concipiente o inteligencia sensible, que atendiendo solamente a la línea del contenido de la intelección, considera que la construcción es "conceptiva"', esto es, que construir es conceptualizar lo dado por los sentidos. Y, claro, si el contenido de la matemática es construido y, por tanto, de índole no-sensible*. (p. 87)

De acuerdo con el Constructivismo, una vez aprehendemos la realidad se construye el objeto matemático en su formalidad, siendo esta acción una operación de carácter físico y no mental porque el conocimiento no se recibe en forma pasiva del medo circundante sino que el ser humano recibe información que proceso para luego construir más conocimiento activamente, todo conocimiento es una construcción mental y es aquí donde se le atribuye el carácter de físico; obviamente, esta operación aunque física está en la inteligencia santiente[23], ya que sería imposible realizar conceptos matemáticos si estos no están previamente en la inteligencia.

En el ámbito mundial la discusión sobre la enseñanza de la matemática y de sus fundamentos data desde finales del siglo XIX con la publicación de los trabajos de Peano, Cantor, Dedekind, Frege, y Russell entre otros. El descubrimiento de la teoría de conjuntos originó la llamada crisis de los fundamentos de la matemática, que se acentuó en el Congreso Mundial de Matemáticas de París de 1900, cuando Hilbert lanza la frase *Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado*, enunciando luego lo veintitrés problemas que cambiaron en ese entonces la forma de concebir la matemática.

Después de la Crisis de los Fundamentos sobrevino con la demostración del Teorema de Completitud de Gödel[24] un segundo movimiento reformador en la fundamentación de la matemática llamada *Crisis Godeliana*,[25] la cual deja en entre dicho la axiomatización de la matemática propuesta por la corriente formalista de Hilbert. Gödel probó que era imposible construir una teoría axiomática o un sistema formal para la matemática conteniendo la aritmética que fuera a la vez consistente y completa, cualquier sistema que desarrolle la aritmética, según el primer Teorema de Gödel, es incompleto, por lo tanto era también imposible reducir toda la matemática a la lógica, con lo cual se terminaba el absolutismo de la corriente logicista.

En síntesis, toda teoría matemática debe ser consistente; es decir, no contener contradicciones; completa, toda proposición matemática pertinente y verdadera debe caber como tal en la teoría; decidible, debe existir un método concreto y definido de antemano que, aplicado a cualquier afirmación matemática, permite decidir si es verdadera o falsa.

[23] El término inteligencia santiente fue introducido por Zubiri en su constructivismo matemático y hace referencia al hecho de construir como un modo de realización en el caso de los conceptos matemáticos.
[24] El teorema de Gödel fue presentado por primera vez en septiembre de 1930 en un congreso sobre los Fundamentos de la matemática, posteriormente lo publica en 1931 y luego hace parte de su tesis doctoral
[25] Históricamente no hubo ninguna crisis. Este apelativo es dado para resaltar que se demostró por parte de Gödel la imposibilidad de las escuelas filosóficas de resolver por sí solas la pregunta sobre la consistencia y los Fundamentos de la matemática

El tercer movimiento reformista sobre los fundamentos de la matemática fue de tipo pedagógico y epistemológico. La Escuela Bourbakista[26] propone fundamentar la enseñanza en el concepto de estructura y retoma la posición formalista de Hilbert como estrategia metodológica fundamental en la construcción de la matemática. Sobre este aspecto dice Bourbaki (1962) que

> *La matemática es como una gran ciudad, cuyos suburbios no cesan de progresar, de manera un poco caótica, sobre el terreno circundante, mientras que el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa, echando abajo los viejos barrios y sus laberintos de callejuelas para lanzar, hacia la periferia, avenidas cada vez más directas, más amplias y más cómodas* (p. 37)

El Programa Bourbakista buscó en principio la organización de la matemática en una red de relaciones lógicas, pero está red estuvo siempre amenazada por falta de una demostración de la consistencia teórica; no obstante, esta amenaza fue afrontada acudiendo a la experiencia, por eso afirma Barrow (1997) que entre ellos existe la creencia de que

> *…las matemáticas están destinadas a sobrevivir, y que las partes esenciales del majestuoso edificio nunca colapsarán como resultado de la aparición repentina de una contradicción; pero no podemos afirmar que esta opinión descanse en otra cosa que no sea la experiencia. Esto no es mucho, se podrá decir. Pero durante veinticinco siglos los matemáticos han estado corrigiendo sus errores y viendo como su ciencia se enriquecía y no empobrecía como consecuencia; y esto les da el derecho a contemplar el futuro con serenidad*. (p. 82)

[26] El grupo Bourbaki se creó en 1939 y uno de sus principales miembros fundadores fue Jean Dieoudonné, quien escribió la mayoría de los libros publicados por el grupo.

González (1950), refiriéndose a la Crisis de los Fundamentos de la Matemática, después de hacer un amplio análisis de las corrientes epistemológicas de la matemática, concluye que los principios de la lógica son esenciales en la fundamentación de la matemática; también Torres (2003) considera que es necesario fundamentar la matemática y que puede hacerse de dos maneras. En un sentido débil mediante lo que él llama *una explicación de su naturaleza* o interpretación modal, o en un sentido más fuerte o interpretación categórica.

En años recientes, ha surgido una nueva concepción de fundamentar la matemática a partir del concepto de categoría basada en los conceptos de clase y morfismo. De acuerdo con Bell (1981) esta teoría puede ser vista como fundamento en dos sentidos. En sentido fuerte, todos los conceptos matemáticos, incluyendo la lógica, son explicables según esta teoría; en sentido débil, sustituye el papel de la teoría axiomática de conjuntos en lo fundacional.

1.2 LA LÓGICA

La lógica es una de las disciplinas más antiguas con una larga historia, según Collantes y Expósito (1994), dividida en cinco períodos: el Clásico Antiguo desde los inicios hasta el siglo VI, la Alta Edad Media entre los siglos VII y XI, la Escolástica del siglo XI al XV, la Moderna Lógica Clásica del siglo XVI al XIX y la Lógica Matemática desde el siglo XIX. En los primeros cuatro períodos la lógica fue desarrollada por filósofos estando al servicio de la filosofía, la teología y la argumentación en el lenguaje ordinario como arte de pensar o de estructurar el pensamiento; en el último período, la lógica fue desarrollada por matemáticos como una teoría necesaria para darle fundamentación a todo razonamiento matemático motivado por la obsesión de suministrarle rigor a los desarrollos matemáticos que en ese entonces comenzaban a experimentar un alto grado de abstracción.

Los desarrollos del período de la Lógica Matemática[27] si bien cambiaron la manera de presentar la lógica mirándola como algo nuevo, no podría decirse que se trata de una nueva lógica sino de una forma distinta de la misma lógica, pues aunque aparezcan nuevos problemas, nuevas temáticas y nuevas leyes, permanecen el problema de la implicación, las paradojas semánticas, el análisis de los cuantificadores, la argumentación[28], la necesidad de una lógica modal y la necesidad de extender las leyes de la lógica entre otros ejemplos. Tanto en la Lógica Clásica o la Escolástica como en la Lógica Matemática se percibe cierto tipo de Formalismo.

Establecido el hecho de que la lógica es una sola, parafraseando algún trabajo sobre el tema es oportuno preguntarse ¿Qué es esa cosa llamada lógica? Buscando un punto de partida, la lógica comienza con Aristóteles; esta lógica de tipo general, ha sido estudiada desde la escuela griega hasta nuestros días, haciendo parte aún del currículo universitario en diferentes áreas como filosofía, estudios sociales y matemática. Como se mostrará posteriormente, la lógica aristotélica fue parte integrante de los estudios de filosofía en Colombia desde La Colonia hasta la llegada de Federici, pero a partir de este empezó a llamarse Lógica Matemática o Lógica Formal, aunque la presentación de esta lógica no se hizo estrictamente formal sino como un cálculo, específicamente hablando, como un cálculo proposicional y como un cálculo de predicados.

De acuerdo con lo considerado anteriormente, la lógica se clasifica en lógica clásica o no formal y lógica moderna o formal. Por lógica clásica se entenderá la lógica dentro de los estudios de filosofía y que abarca lo realizado por Aristóteles, los árabes, hindúes, estoicos, escolásticos, racionalistas e ilustrados entre otros, considerada como Lógica Presumalista[29] y Postsumalista; por Lógica Moderna se entenderá la lógica a partir de Boole, De Morgan y Frege hasta este momento.

[27] El precursor de la Lógica matemática es Leibniz quien dedica sus esfuerzos en la construcción de un cálculo lógico.
[28] Entiéndase argumentación como demostración.
[29] La Lógica Presumalista no se dio en Colombia.

Atendiendo a las denominaciones de Lógica clásica y Moderna, puede decirse que la lógica enseñada en los estudios universitarios de Colombia hasta 1948 aproximadamente fue Lógica Clásica Aristotélica Postsumalista, influida por el escolasticismo. Durante toda esta etapa se estudiaron las obras clásicas de Aristóteles, Tomás de Aquino, San Agustín, José Félix de Restrepo y otros, entendiéndose la lógica como una ciencia del pensamiento, como arte de pensar, la Lógica es una propedéutica o introducción a otros estudios como un instrumento previo a todo saber según el significado dado por Aristóteles en el Organon, como una ciencia que estudia las formas[30] y procesos del pensamiento indagando las relaciones existentes entre este y la realidad que representa.

En pocas palabras, el objeto de la Lógica Clásica es estructurar el pensamiento, dirigir toda forma de pensar, orientar la razón, establecer leyes y reglas para alcanzar la verdad a través del razonamiento o la argumentación, por lo tanto, la lógica es la ciencia de las formas del pensamiento estudiadas desde el punto de vista de su estructura, la ciencia de las leyes que deben observarse para obtener un conocimiento inferido[31].

Otras definiciones de lógica presentes en los textos universitarios son: lógica es el arte que dirige el acto de la razón y por el cual el hombre procede sin error[32]; la lógica o arte de razonar es la parte de la ciencia que enseña el método para alcanzar la verdad[33]; la lógica puede definirse como el estudio del pensamiento científico; del pensamiento objetivo, que es el que tiene validez fuera del hombre que lo haya pensado y también el que posee, como esencia, una verdad que se atribuye a la materia o al objeto en que se pensó[34]; la lógica es el arte especulativo directivo del acto mismo de la razón, por el cual el hombre procede con orden, facilidad y sin error en ese acto; la lógica es la ciencia del movimiento de las leyes de la mente, como el código de tráfico mental para poder llegar con facilidad y sin error a la verdad, como la ciencia del discurso o

[30] Desde la Lógica Clásica, las formas del pensamiento son los conceptos, los juicios y los raciocinios.
[31] Gorski, D y Tavants; P (1970). Lógica. (15ª ed.). México: Editorial Grijalbo, S.A.
[32] Definición de Tomás de Aquino.
[33] Definición de San Agustín.
[34] Definición de Rosa Hilda Lora Muñoz

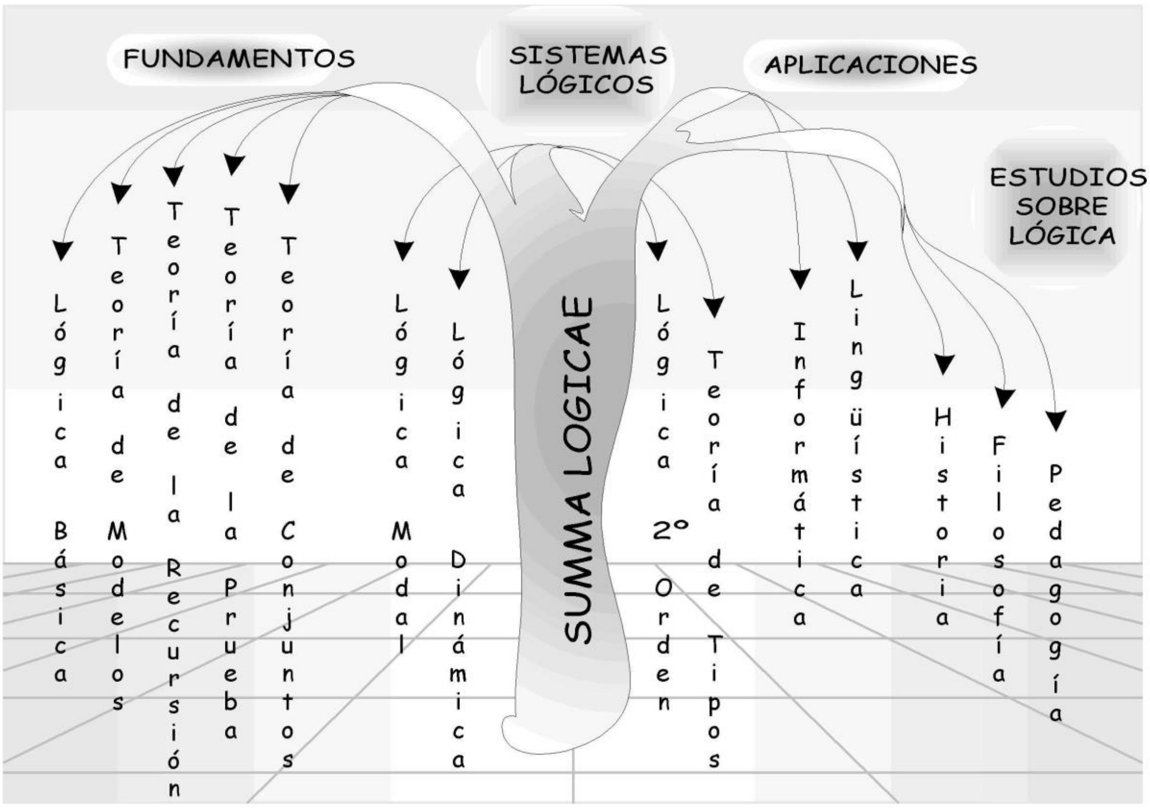
raciocinio recto; la lógica es la ciencia que nos enseña cómo debe ser y cómo se mueve la mente en su camino de lo desconocido a lo desconocido; la lógica es una disciplina formalista, que expresa conceptos y relaciones a priori, extraños a la realidad de las cosas, la lógica general es la ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, sin las cuales no podría haber uso alguno del entendimiento y de la razón[35]; la ciencia de las operaciones intelectuales que sirven para la estimación de la prueba[36].

Tal como se presenta la definición de lógica en la mayoría de los textos clásicos, podría decirse que esta es la forma más ilógica de definir la lógica. Definir la lógica como ciencia del pensamiento implica la no universalidad de las leyes de la lógica porque el pensamiento está determinado por condiciones fisiológicas, educativas y culturales; además, al considerar la lógica como el estudio de las leyes que rigen el pensamiento se imposibilita la determinación del objeto específico de cada ciencia, puesto que cada ciencia determina sus propias leyes conforme a las cuales se debe pensar si se quiere pensar correctamente sobre el objeto de cada ciencia; así las cosas, el objeto de la lógica aristotélica es conseguir la verdad formal independientemente de la verdad material, distinguir entre lo formal y lo carente de sentido.

Existe una amplia discusión sobre el significado de textos clásicos, el nombre de clásico es una aproximación a lo tradicional y no al tratamiento dado por un texto a determinada teoría. Si bien la lógica aristotélica es clásica, ella es el fundamento de la lógica moderna, pues un simple recorrido por los currículos universitarios prontamente dará cuenta de que la lógica en estudio por preferencia, es la lógica bivalente; parece osado afirmarlo, pero la realidad educativa así lo indica. Tomando posición en torno a la discusión, se considerará como lógica clásica aquella estudiada hasta mediados del siglo XX dedicada a la argumentación en el derecho y las ciencias sociales, como arte de razonar y estructurar el pensamiento.

[35] Definición de Kant
[36] Definición de Stuart Mill

Volviendo a la definición de lógica, Manzano (2004), tal vez imitando la *Summulae Logicales*, considera la lógica como un árbol con cuatro ramas, tres de las cuales se consideran ramas principales: los fundamentos, los sistemas lógicos y las aplicaciones, y una cuarta rama atada al árbol como complemento de este comprendiendo los estudios sobre lógica. La representación de este árbol se muestra en la figura[37] a continuación



La representación mostrada incluye en cierta medida la lógica clásica dentro de la lógica básica, puesto que la lógica clásica dotada de los cálculos la convierte en la lógica matemática a la cual se hace referencia.

Es pertinente aclarar, que la división propuesta para la lógica en lógica clásica y lógica matemática es bastante arbitraria. Si se quiere ser específico, puede decirse que no

37 Tomada de Manzano, M (2005). ¿Qué es esa cosa llamada Lógica? http://logicae.usal.es

existen dos lógicas sino muchas lógicas o más bien muchas presentaciones de la lógica para ser consistente con lo dicho al inicio de esta sección. Hay lógicas abductivas, condicionales, inductivas, constructivas, cuánticas, epistémicas, estoicas, híbridas, combinatorias, descriptivas, difusas, deónticas, modales, multimodales, lineales, intuicionistas, no monotónicas, infinitarias, paraconsistentes, polivalentes, multivariadas, etc.

Para fines pertinentes de este trabajo, la lógica por investigar en la enseñanza universitaria se reducirá a una parte de la primera rama de la *Summa Logicae* de Manzano: lógica básica, teoría de conjuntos y algunos aspectos sobre teoría de la prueba y es lo que se considerará como fundamentos de la matemática universitaria, pues como se mostrará posteriormente la teoría de modelos y la recursión son temas ausentes en la mayoría de los cursos universitarios aún en programas de matemática.

Simplificando un poco las cosas, la Lógica Básica se denominará Lógica Matemática y comprenderá aspectos relacionados con la definición como operación lógica, el cálculo proposicional, el cálculo de predicados y los preliminares sobre teoría de la prueba, es decir aquellas reglas y leyes necesarias para demostrar la validez de un argumento tales como leyes del cálculo proposicional y las reglas de inferencia, necesarias para dilucidar la demostración matemática. Esta convención se justifica en virtud a que la lógica matemática “es una ciencia formal que se presenta siempre en forma de cálculo. A imitación de la matemática desarrolla un método formalístico donde las reglas operacionales se refieren a la forma de los signos y no a su sentido.” (Collantes y Expósito, 1994, p. 479).

La lógica matemática parte de dos supuestos metodológicos. En primer lugar, servirse del cálculo; y en segundo lugar, conseguir demostraciones exactas. El cálculo permite construir la lógica de manera similar a la matemática tal como lo hizo Boole; con la demostración, la lógica dota a la matemática de un fundamento, de un modelo de demostración riguroso quedando la matemática como parte de la lógica de acuerdo con la propuesta logicista, existiendo entonces una lógica de la demostración que fortalece la matemática. La lógica de la demostración, afirma Beltrán (2003),

> *…establece las exigencias por parte de la materia para llegar a una conclusión necesariamente verdadera. Facilita la dilucidación y valoración de los principios comunes y propios de cada saber. Permite relacionar la necesidad de orden lógico con aquella que proviene del vínculo causa-efecto, mostrando de paso en qué circunstancias puede alcanzarse una argumentación propter quid y cuando hay que resignarse a la argumentación quia. También se ocupa de evaluar los distintos procedimientos de prueba a los que acude cada ciencia según sean más o menos próximos al ideal demostrativo y a las peculiaridades del objeto estudiado*. (p. 157)

Para cerrar la discusión en torno a la definición de lógica, y puesto que el interés se centra en la matemática, se dirá que la lógica matemática es aquella teoría que pretende cuestionar rigurosamente las leyes, conceptos y reglas utilizadas en la demostración matemática, convirtiéndose esta en una metamatemática.[38] En términos generales se adoptará la definición de Manzano (2004), la lógica es lo que tienen en común todas las teorías, siendo las teorías conjuntos de sentencias o proposiciones cerradas bajo la relación de deducibilidad, es decir, de aquello que es demostrable.

1.3 LA TEORIA DE CONJUNTOS

Es indiscutible que el término conjunto abrió nuevos caminos en el avance y enseñanza de la matemática, y a la vez desató grandes controversias por las paradojas que trajo como consecuencia de su introducción y su relación con la lógica matemática. En el

[38] Carlos Ivorra Castillo en su texto *Lógica y Teoría de conjuntos* disponible en la página web www.sectormatematica.cl/libros, hacer metamatemáticas es razonar sobre afirmaciones, demostraciones y axiomas y, en general, sobre todo aquello que necesitamos razonar para establecer qué es la matemática y cuáles son sus posibilidades y límites.

apartado anterior la teoría de conjuntos se consideró como una rama de ese gran árbol llamado lógica matemática, junto con la lógica básica constituye la parte principal de los fundamentos de la matemática desde la óptica de la enseñanza, hasta el punto de considerarse dicha teoría por muchos matemáticos como uno de los pilares que sustenta el portentoso edificio matemático dentro del llamado enfoque conjuntista. La génesis de la teoría de conjuntos se describirá mediante la presentación de los desarrollos teóricos que llevaron a la construcción de los números reales por parte de Riemann, Weierstrass, Dedekind y Cantor sin restar importancia a los trabajos de Bolzano, Kummer, Ohm y Méray.

La teoría de conjuntos tuvo orígenes en la aritmetización del análisis. El precursor de dicha teoría fue Bernard Riemann (1826- 1866) al introducir el concepto de variedad en 1854 en un trabajo para acceder a la habilitación como profesor, trabajo publicado en 1868 dos años después de su muerte por su amigo Dedekind.

El trabajo de Riemann *Sobre las Hipótesis que están en los Fundamentos de la Geometría* (Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen) tiene una doble finalidad en cuanto esboza un marco general para la matemática e introduce el concepto de variedad. Una variedad es una generalización del concepto de magnitud, por lo tanto dicho concepto tiene sentido si proviene de un concepto general precedente que admita diferentes determinaciones particulares. Las determinaciones forman una variedad que puede ser discreta o continua (Ferreirós, 1998); una variedad es una generalización del concepto métrico y topológico de espacio euclídeo, las variedades están compuestas por puntos con n coordenadas y surgen del estudio de funciones multivaluadas tal como es el caso de las funciones de variable compleja, en donde el dominio de la función está compuesto de varias hojas o superficies, llamándose cada hoja una superficie de Riemann. Las superficies se despliegan en torno a los puntos de ramificación.

Para dar un significado preciso del concepto de variedad discreta y continua Riemann escribe:

> *Los conceptos de magnitud son solo posibles allí donde ya existe un concepto general que permite distintas realizaciones. Según se dé o no un tránsito continuo de una a otra de estas realizaciones, definen una variedad discreta o continua. Todas y cada una de dichas realizaciones se llaman en el primer caso puntos y en el segundo puntos de esta variedad.*[39]

Las palabras de Riemann establecen una sinonimia entre los términos variedad y conjunto, y, puntos y elementos, proponiendo una idea ingenua de conjunto la cual sugirió debía constituirse en el concepto clave sobre el cual se basa la matemática. La idea intuitiva de conjunto como una variedad dada por Riemann en realidad no es clara. Riemann llama a los espacios abstractos variedades, dentro de los espacios abstractos están los espacios métricos, de allí que una variedad pueda ser discreta. A las superficies las llama variedades continuas estableciéndose en ellas como métrica el área.

El concepto intuitivo de conjunto como variedad queda inmerso en la geometría y efectivamente luego pasa a ser elemento fundante de la geometría diferencial. Para el propósito de establecer una noción de conjunto es necesario refinar la idea, porque asimilar el término conjunto como variedad es realmente confuso, sobre todo al establecer las variedades discretas de las cuales Riemann dice muy poco, ya que se dedicó prácticamente a dar una representación de conjunto por comprensión.

Antes de examinar el momento preciso en el cual aparece el vocablo conjunto, es conveniente señalar que el trabajo de Riemann tuvo como antecedentes los trabajos de Scholz en los cuales aparece una idea intuitiva de variedad; pero mucho antes, una idea de conjunto aparece en la Lógica de Port Royal, cuyos avances logran una aproximación a la lógica matemática. Arnauld y Nicole en la obra *La Lógica o Arte de Pensar*, haciendo referencia a la determinación de los conceptos y definiciones, proponen que

[39] Traducido por C Rodrigo de la versión original del texto de Bernhard Riemann Über *die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*

estas pueden hacerse de dos formas, por comprensión y extensión, refiriendo e estos con las siguientes palabras

> *Entendemos por comprehensión de la idea el conjunto de atributos que encierra en sí y que no pueden retirarse sin destruir tal idea, como es el caso de la comprehensión de la idea del triángulo, que encierra en sí extensión, figura, tres líneas, tres ángulos, igualdad de estos ángulos sumados a dos rectos, etcétera….*
> *Entendemos por extensión de la idea el conjunto de sujetos a los cuales esta idea conviene, los cuales también se conocen como los inferiores de un término general que, respecto a estos, es llamado superior; así la idea general de un triángulo contiene en su extensión triángulos de todas las diversas especies.*[40](p. 60)

De acuerdo con Ferreirós (1992), una mirada inicial da la impresión de que no existiera relación entre la noción de conjunto como variedad y la determinación de conceptos planteada por la Escuela de Port Royal, pero en la evolución de la teoría de conjuntos hasta la aparición de las antinomias, la relación funcionó como un supuesto básico implícito, así lo confirmó Frege al argumentar que la fundamentación de la Teoría de conjuntos sólo es posible si esta discurre como extensión de conceptos.

Precisando en qué momento aparecieron los conjuntos y sin ser dogmáticos, los conjuntos surgieron como consecuencia de la construcción de los números reales. Obsérvese que se ha dicho números reales y no el sistema de los reales o el conjunto de los reales, porque estas expresiones resultan en las postrimerías de la construcción de los reales al pretenderse designar con un nombre a esos objetos construidos o al establecimiento o demostración de su existencia en concordancia con las teorías epistemológicas para la fundamentación de la matemática. Se consideran aquí de acuerdo con los objetivos de este trabajo tres teorías sobre la construcción de los números reales, Weierstrass, Dedekind y Cantor.

[40] Arnauld, A y Nicole, P (1987). *La Lógica o el arte de pensar*. Madrid: Alfaguara.

La teoría sobre la construcción de los números reales de Weierstrass (1815-1897) se constituye en la primera teoría rigurosa basada en la convergencia de series, el hilo conductor de la teoría se sigue a través de los diferentes escritos dejados por Weierstrass, publicados después de su muerte por sus discípulos en siete tomos con el nombre *Matematische Werke*. Partió de la existencia de los números naturales y de sus operaciones suma y multiplicación, como conceptos previos desde un punto de vista intuitivo, luego consideró las operaciones inversas resta y división con el propósito de introducir nuevos números, y a partir de ellas hasta llegar a su meta, los números reales, dentro de su proyecto de aritmetización del análisis.

La construcción de Weierstrass se basa en el concepto de agregado. Los agregados finitos son colecciones finitas de partes de la unidad en donde las partes exactas pueden repetirse por ejemplo, {¼, ¼, ¼, ¼, ¼, ½, ½, ½}. Dos agregados finitos son iguales, si tienen la misma suma. Las partes exactas de la unidad son números de la forma 1/n donde n es un número natural, estas partes determinan los números racionales positivos los cuales están ordenados, los números negativos fueron introducidos como magnitudes[41] numéricas con signo. Según esta construcción, los agregados vienen a ser sucesiones[42] que determinan los números reales mediante la serie convergente asociada a la sucesión; las series finitas determinan los racionales, las series infinitas o sumas infinitas de los agregados determinan los irracionales. De esta construcción se obtiene la representación de los racionales como fracciones.

La segunda construcción de los números reales por mostrar es la de Richard Dedekind (1831-1916) quien trabajo de manera independiente a Weierstrass apoyándose en la relación de orden comprobada ya en los números racionales, evitando que un número real se represente por agregados o por series infinitas. La exposición de Dedekind

[41] El término magnitud fue definido posteriormente por Russell como la clase de los términos que pueden ser mayores o menores, mientras que la clase de los términos que pueden ser gules los llamó cantidades. Esta definición da firmeza a la construcción de los reales de Weierstrass, porque la rigurosidad de la misma depende del orden.
[42] Las sucesiones son conjuntos de números, de allí que el concepto de agregado es la representación de un conjunto.

publicada en 1872 con el título *Continuidad y Números Irracionales* logra dos objetivos, ser más rigurosa y ser más sencilla, de tal manera que aún se utiliza en los cursos de análisis matemático aunque muy poco en los cursos de fundamentos como se probará posteriormente.

Dedekind primero justifica o construye el concepto de número natural basado en cinco nociones o constructos fundamentales: la representación de un sistema, la noción de cadena, la cadena de un elemento, la forma generalizada de inducción matemática y la definición de un sistema simplemente infinito.

La representación de un sistema se hace por medio del concepto de clase y una relación contenida en ella; una cadena es una clase cuya imagen[43] dada una relación definida en ella, es parte de ella o toda ella, estas imágenes se definen estableciendo una relación de la clase con otra similar a ella, con una relación pluriunívoca en su formación cuyo dominio está en la clase, pero que para el efecto de formar los cardinales o naturales la relación se define de la clase en si misma siendo la imagen un parte de ella o toda ella. Para cardinales finitos la cadena está definida por un sistema Z_n donde Z_n es la clase o sistema que denota los números naturales de 1 a n; si la cadena es tal que contiene toda parte propia de sí misma para cualquier n, entonces la cadena es todo el conjunto de los naturales; es decir, si se establece una biyección entre la clase y una parte propia de ella.

Construidos los naturales, toma la construcción de los racionales de manera similar a Weierstrass, y con base en los racionales construye los números reales introduciendo el concepto de cortadura. Una cortadura es una división de los racionales en dos clases o conjuntos disjuntos, una clase inferior y una clase superior, donde cualquier número o elemento de la clase inferior es menor que cualquier elemento de la clase superior. La situación descrita lleva a considerar tres situaciones. En la primera, puede existir un número en la clase inferior mayor que cualquier otro número en esa clase; en segundo lugar, puede haber un número en la clase superior menor que cualquier otro número de

[43] La imagen puede o no pertenecer a la clase, de allí que Dedekind no hace relación a la clase de las imágenes.

esa clase; y tercero, ninguno de los números descritos en las situaciones anteriores existe, es decir, existe un número que es mayor a todo elemento de la clase superior y menor a todo elemento de la clase superior. Esta tercera situación conduce a un número irracional probando además la discontinuidad o incompletitud del campo de los números racionales.

Las definiciones de número natural y de cortadura de Dedekind incluyen el concepto de clase como conjunto; en los naturales se habla de clase en el sentido de lo potencial, en los reales se habla de clase en el sentido del infinito actual lo que más tarde probaría Cantor, al particionar los reales en dos clases o conjuntos infinitos o tres conjuntos según se satisfagan las dos primeras condiciones o la tercera. Para Dedekind la idea de número está soportada por un conjunto infinito, cada número real está fijado por una cortadura, por lo tanto dos números reales son diferentes si y solo si corresponden a dos cortaduras diferentes.

Weierstrass y Dedekind influyen sobre George Ferdinand Ludwig Phiilipp Cantor (1845-1918), quien a partir del trabajo de los anteriores se dedica al estudio de las series trigonométricas y concluye que toda sucesión regular define un número, y la clase o agregado o conjunto de todos los números definidos por estas sucesiones constituye el conjunto de los números reales.

La construcción de los números reales la hace Cantor completando los números racionales a partir de una sucesión *fundamental* de números racionales $\{a_n\}$ satisfaciendo la condición de que para todo n dado, todos los miembros excepto un número finito difieren uno del otro de manera que $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+r}) = 0$ para un r cualquiera.[44] Dos sucesiones fundamentales representan el mismo número real si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ es elemental, y una sucesión es elemental si $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$. Si dos sucesiones fundamentales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ representan dos números reales a y b respectivamente, entonces $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \bullet b_n\}$ y $\{a_n/b_n\}$ con $b_n \neq 0$ definen las

[44] Collette, J (1993). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI editores de España S.A.

operaciones a+b, a•b y a/b. Si el número real a es representado con la sucesión fundamental $\{a_n\}$, se verifica el límite $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$, lo cual permite demostrar que si $\{a_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales y si $\lim_{n\to\infty}(a_{n+r} - a_n) = 0$ para un r cualquiera, entonces el número real a es único para la sucesión fundamental $\{a_n\}$.[45]

Cantor establece la teoría de conjuntos en 1874 con la publicación de su decimotercera memoria en la *Revista de Crelle* titulada *Ueber eine Eigenschaft des Inbrgriffes aller Reellen Algebraischen Zahlen* cuya traducción es *Sobre una propiedad del conjunto de todos los números reales algebraicos*. Dos años antes en su décima memoria había introducido conjuntos de puntos en la convergencia de series trigonométricas, dando la noción de conjunto como una colección de objetos definidos y separados, que pueden ser concebidos por la inteligencia, y para la cual puede decirse si un objeto de la colección pertenece o no a ella; siendo más precisos, Cantor definió el término conjunto de manera intuitiva como "*cualquier colección C de objetos determinados y bien distintos x de nuestra percepción o nuestro pensamiento, reunidos en un todo*".

Cantor se interesó también por el concepto de continuidad, interés que lo llevó a descubrir la teoría de conjuntos y la teoría matemática del infinito. En 1874 publica su primer trabajo sobre teoría de conjuntos en el *Journal de Crelle* ; en 1884 descubre que el conjunto de todos los números algebraico contiene todas las raíces de las ecuaciones polinómicas[46] de cualquier grado y además, dicho conjunto se podía poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, igualmente, los naturales pueden ponerse en correspondencia con los racionales y posteriormente descubre que el cardinal de los números reales o infinito actual o continuo C, es más grande que el cardinal de los números naturales N_0 o infinito potencial, y están relacionados por la ecuación $C = 2^{No}$.

[45] Esta teoría fue realizada también por Heine, de allí que se llame construcción de Heine-Cantor para los números reales.
[46] Las ecuaciones polinómicas son de la forma $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$

Finalizado el siglo XIX, Cantor había desarrollado la teoría de ordinales y cardinales de conjuntos completando casi el plan propuesto; no obstante, su teoría fue acechada por ciertas paradojas resueltas por Russel. Entrado ya el siglo XX, los problemas relacionados con el establecimiento de una teoría de conjuntos rigurosa fueron subsanados con la teoría axiomática.

La primera axiomática de la teoría de conjuntos fue dada por Zermelo en 1908, tres años después de que Félix Klein propusiera la introducción de los conjuntos en la enseñanza de la matemática a nivel medio en Alemania y ocho años después del segundo congreso mundial de matemáticas celebrado en París, cuando Hilbert pronunció su célebre frase *Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros*.

Otras axiomáticas son la de Zermelo-Frankel-Skolem, la de Von Neumann y la última axiomática es la de Neumann-Bernays-Gödel- Quine que consta de los siguientes axiomas: axioma de extensionalidad, axioma formador de clases, axioma del par no ordenado, axioma de regularidad, axioma de la gran unión, axioma del conjunto vacío, axioma de sustitución, axioma de infinitud, axioma de elección y axioma de las partes de un conjunto. Se expone a continuación la axiomática de Zermelo Frankel por su significado histórico; Bourbaki (1948, c.p. Mathias, 1992) se refería a esta axiomática con las siguientes palabras:

> *Sobre esta base, afirmo que puedo edificar la totalidad de las matemáticas actuales, y si hay algo original en mi procedimiento, radica exclusivamente en el hecho de que, en vez de contentarme con tal afirmación, procedo a demostrarla de la misma forma que Diógenes probó la existencia del movimiento, y mi demostración se completará mas y mas conforme mi tratado crezca.* (p. 8)

1. Axioma de extensionalidad: Si todo elemento de un conjunto X es elemento de un conjunto Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces X es igual a Y.

2. Axioma del conjunto vacío: Existe un conjunto que no contiene ningún elemento.
3. Axioma de separación: Si φ(x) es una fórmula de un lenguaje L y X es un conjunto, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son aquellos elementos de X que verifican φ(x).
4. Axioma de pares: Dados dos conjuntos X y Y, existe un conjunto cuyos únicos elementos son X y Y.
5. Axioma de uniones: Si X es cualquier colección de conjuntos, entonces existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de X. Este conjunto es único y se llama la unión de X y se denota por ∪X.
6. Axioma del conjunto potencia: Si X es un conjunto, entonces existe el conjunto de todos los subconjuntos de X.
7. Axioma de regularidad: Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento.
8. Axioma del conjunto infinito: Existe un conjunto que tiene infinitos elementos.
9. Axioma de reemplazo: Si φ(x, y) es una función proposicional y A es un conjunto, entonces existe el conjunto de los elementos b que verifican φ(a, b) para algún a en A.
10. Axioma de elección: Si A es un conjunto de conjuntos no vacíos, entonces existe una función F cuyo dominio es A y tal que para todo x ϵ A, F(x) ϵ x. La función F se llama una función de elección para A.

Pedagógicamente hablando, algunos autores como Halmos[47], y Oubiña[48] sugieren que no es aconsejable introducir la teoría de conjuntos axiomáticamente en un curso inicial de fundamentos y proponen hacerlo en forma intuitiva puesto que como lo afirma Ferreirós (1992), todos tenemos la idea intuitiva de conjunto.

Intuitivamente se entenderá que conjunto es una colección, clase, agregado, conglomerado de objetos de cualquier tipo. Algunos autores como Russell (1977) y

[47] Halmos, P (1974). Naive set theory. New York: Springer-Verlag.
[48] Oubiña, Lía (1965). Introducción a la Teoría de conjuntos. Buenos Aires: Eudeba.

Pinter (1971) establecen diferencia entre clase y conjunto, entendiéndose que una clase es un concepto más amplio, pues las clases son conjuntos pero no todo conjunto puede ser una clase. Para Russell, las clases son objetos denotados por conceptos, una clase es una conjunción numérica de términos; así por ejemplo, cuando se dice *Alfonso es un hombre*, se tiene una proposición en la que el término Alfonso pertenece a la clase de los hombres. Si una clase se define enumerando sus términos, entonces es llamada una colección. Dos clases pueden ser iguales sin ser idénticas, por ejemplo, *primo par* y *entero inmediatamente anterior a tres*. Pinter asume que clase es un concepto no definido y trabaja con ellas como colecciones; esto es, clases que son conjuntos, pues sise trata de precisar la noción de conjunto se observa que si se trata de dar una definición rigurosa de dicho término nos enfrentamos más temprano que tarde a problemas que nos conducen a paradojas. Para evitar este problema conviene hacerse la idea de que un conjunto es una colección de objetos o es el conjunto vacío; o en el mejor de los casos, al construir la teoría de conjuntos en forma axiomática, el término conjunto es un término no definido.

Haciendo una recapitulación sobre la génesis de la teoría de conjuntos, el significado del término conjunto y el objeto de la teoría de conjuntos, se observa que la teoría de conjuntos nace en los intentos de formalizar el análisis, la teoría de conjuntos se contextualiza primero sobre lo topológico y luego adquiere su mayor desarrollo en la búsqueda de una teoría matemática para el infinito. Respecto al término conjunto existen dos posibilidades para su tratamiento, se da su significado desde lo intuitivo o precisar su significado mediante una teoría axiomática. El objeto de la teoría de conjuntos es el estudio sistemático y lo más exhaustivo posible el concepto de colección, conjunto o clase, sin importar que tipo de colección o clase se trata, buscando propiedades y relaciones que se dan en esas colecciones. Esta teoría obtiene su forma elaborada y rigurosa apoyándose en la lógica y la axiomática, erigiéndose como una teoría independiente sirviendo de base para la construcción de la matemática.

2. LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y SUS FUNDAMENTOS

No existe un consenso en el orden mundial sobre cómo enseñar la matemática ni sobre cuáles deben ser las temáticas según el desarrollo mental de los individuos en las diferentes etapas de la vida. Las investigaciones en educación matemática están lejos de ser un campo unificado (Artigue, 2003), en cada congreso se presentan nuevas alternativas cada vez más específicas, lo cual dificulta el hallazgo de una teoría sintetizadora; en parte, esto se debe a que los procesos de enseñanza y aprendizaje dependen del entorno cultural, del conocimiento personal del profesor sobre la matemática, de los textos para el estudio y de la normatividad en materia de educación de cada país.

Por otra parte, la matemática y su enseñanza han evolucionado a través del tiempo según las diferentes teorías que permiten su construcción; así que, de acuerdo con la educación matemática, la actividad matemática es considerada como una práctica eminentemente social,[49] influida por las creencias de los actores encargados de esas prácticas, ya sean personas u organizaciones, entendiéndose la actividad matemática como la producción, uso, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático; de allí que, los investigadores han producido un gran volumen de investigaciones en lo local con poca repercusión en lo global, investigaciones que muy poco o difícilmente han cambiado la práctica pedagógica en el caso de la matemática.

Con base en las observaciones señaladas anteriormente, se discutirán aquí las teorías de mayor incidencia o aceptación en la enseñanza de la matemática, las creencias que tienen los profesores sobre la matemática y su enseñanza y el caso específico de la enseñanza de los fundamentos de la matemática.

[49] Para algunos teóricos como Vincent Font, la matemática es una práctica social e individual; no obstante se considera social ya que las teorías son aceptadas por los individuos.

2.1 TEORÍAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Para fines pertinentes de esta investigación, en términos generales, las diferentes teorías sobre la enseñanza de la matemática y sus fundamentos se agruparán bajo cuatro modelos. En primer lugar se tiene el *Modelo Tradicional*, correspondiente a la forma de enseñar la matemática clásica, predominante hasta finales del siglo XIX, principios del siglo XX y aún presente en muchas instituciones educativas del mundo. Este modelo está caracterizado por la concepción platónica de la matemática apoyada con la teoría psicológica conductista presentando la matemática de manera instrumental, resolviendo ejercicios que implican la ejecución de un algoritmo mediante el dominio de técnicas repetitivas, olvidando las características de los problemas y dando poca o ninguna importancia al aspecto lógico demostrativo. El tiempo de la clase es ocupado casi en su totalidad por el profesor, suministrando información y modelando situaciones que luego son repetidas por el estudiante que mantiene una actividad pasiva.

La Psicología Conductista tiene como objetivo el estudio de la conducta observable para controlarla y predecirla. De esta teoría emerge el método conductista de enseñanza cuya finalidad es condicionar al alumno para obtener de él una respuesta deseada. De acuerdo con este método, la información se organiza de cierta manera, presentándose como estímulo básico, siendo recibida pasivamente, para luego responder dentro de un margen limitado de respuestas, procediendo de acuerdo con un conjunto de reglas establecidas para tal fin. La enseñanza conductista en matemática es frecuente en el modelo tradicional y está caracterizada por la solución de ejercicios, por lo general repetitivos, basados en algoritmos que el alumno mecaniza simulando la conducta de un autómata.

En el Modelo Tradicional se parte de la concepción según la cual inicialmente debe haber un dominio de los conocimientos en forma perceptiva y concreta para luego aplicarlos a determinadas situaciones,[50] está centrado en los contenidos y la comprensión de estos imitando al profesor, la ruta de aprendizaje está previamente demarcada, predomina el aprendizaje memorístico de algoritmos y procesos, la evaluación es rígida, los conocimientos son fragmentados ya que se trata de ver cada tema en forma independiente sin mostrar la conexión con los demás, la solución de problemas se convierte en un ejercicio rutinario enmarcado dentro de un conjunto de pasos determinados con anterioridad, el trabajo matemático es de tipo instrumentalista ya que se resuelven solo aquellos ejercicios estrechamente relacionados con la teoría estudiada o que permiten la aplicación de técnicas previstas.

Gascón (1994), refiriéndose al modelo tradicional señala que dicho modelo está constituido por aspectos formales e instrumentalistas, pues solamente se plantean aquellos ejercicios que permiten el dominio de ciertos procesos algorítmicos, consecuencia de una propensión al dominio de esas técnicas que son más visibles y se convierten en objetivo último del proceso de aprendizaje. Los aspectos formales, afirma también Gascón (óp. cit),

> *…comparten además una concepción psicológica ingenua del proceso didáctico, que tiene en el conductismo su referencia más clara, y que considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual... o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición.* (p. 40)

Para mostrar algunas evidencias respecto al aprendizaje instrumental, es bien conocido por todos la forma memorística como aprendimos en el siglo pasado el algoritmo de la raíz cuadrada, los diez casos de factorización del Álgebra de Aurelio Baldor y la fórmula general de la ecuación cuadrática en una variable. Estos algoritmos junto con muchos otros se presentaron como procedimientos rígidos sin un análisis al menos aceptable de los mismos.

[50] Castro, A (2001). *Matemática en el nivel inicial*. Gobierno de la ciudad autónoma de Buenos Aires.

Evidencias como las anteriores son una muestra de la situación de la enseñanza de la matemática en el pasado, que posiblemente puede ser la situación actual, debido a que un gran número de profesores de la enseñanza básica y media fueron formados con el modelo tradicional; así que, si los objetivos de la educación y las escuelas pretenden ser un reflejo de lo demandado por la sociedad, el logro de estos se convierte en una frustración ya que la situación presentada en la escuela no está acorde con los requisitos exigidos por esa demanda.

También las evidencias son palpables en la enseñanza universitaria de la matemática donde el estudiante es un ser pasivo cuya misión es adquirir conocimientos acabados, el conocimiento se concentra en el profesor como fuente primaria del saber, el cual enseña conocimientos fragmentados lejanos de la realidad sobre todo en los cursos de matemática de los primeros semestres, donde se propone una colección de temáticas con determinado orden de complejidad creciente supuestamente en un orden lógico. En este orden de cosas, primero se aprenden los conceptos, luego se definen sus propiedades, se muestran ejercitaciones del concepto con inclusión de sus propiedades y luego el estudiante ejercita el procedimiento aplicándolo en la solución de ejercicios o problemas.

Dentro del Modelo Tradicional está incluido el Platonismo. La enseñanza platónica es muy común en nuestros días, profesores que hacen ver que la matemática es algo acabado e inmodificable, dueños de la verdad absoluta, dogmáticos y practicantes de la educación bancaria[51] abundan en todos los niveles educativos. Las clases magistrales predominan todavía sobre los métodos de enseñanza en las universidades, quedando identificada la actividad principal del profesor con la llamada metáfora del explicador, mientras que el estudiante se convierte en un receptor generalmente pasivo, confirmando con su actividad la metáfora del estudiante dependiente del profesor. Ambas metáforas sin duda corresponden a la concepción platónica en la enseñanza de la matemática.

[51] El concepto de educación bancaria al cual se hace referencia es el de Aníbal Ponce en su obra "Educación y lucha de clases". El nombre de bancaria se debe a Paulo Freire, cuya pedagogía se fundamenta en Ponce.

En síntesis, en el modelo tradicional la enseñanza pretende que el conocimiento sea una copia de la realidad y es mejor mientras más fiel sea la copia[52], el aprendizaje es una acumulación de fragmentos de conocimientos que van de lo simple a lo complejo y el docente es el poseedor del conocimiento matemático, transmitido a los estudiantes para que estos lo aprendan en pequeñas parcelas. "El Modelo Tradicional es, cualquiera que sea su época, una configuración identificadora, una dimensión posible de toda acción pedagógica. Ha sido y es siempre, el centro de una reflexión crítica sobre los principios y los modos de actuar que se ubican en relación con lo tradicional"[53].

El segundo modelo a presentar sobre la enseñanza de la matemática, es conocido como Matemática Moderna, aparece al finalizar la década de los cincuenta, aunque algunos afirman que surgió después de 1957, año de lanzamiento del Sputnik por parte de los soviéticos.

En verdad, la propuesta para la enseñanza de la matemática partiendo de la noción de conjunto y luego las estructuras comenzó a finales del siglo XIX, pues el inicio de la carrera espacial solo fue un catalizador porque el movimiento de reforma se había iniciado tiempo atrás con las publicaciones *Elementos de Matemática* del Grupo Bourbaki en Francia a finales de la década de los treinta, liderado por Cartan, Dieudonné, Chevalley y Weil, reforzada en 1945 con la teoría de categorías creada por los matemáticos Eilenberg y McLane.

La teoría de categorías es una generalización de la teoría de conjuntos y de clases, donde las leyes de composición interna se estudian a modo de morfismos; así que, las categorías se constituyen hasta el momento como la teoría más general para fundamentar la matemática. El Coloquio de Royaumont de 1959 da el gran espaldarazo a la matemática moderna como estandarte de la Corriente Bourbakista al afirmar que la finalidad de la enseñanza de la matemática es la presentación de la matemática, la matemática es la síntesis bourbakista y la enseñanza de la matemática debe estar

[52] Delval, J (2000). *Aprender en la vida y en la escuela*. Madrid: Morata.
[53] Gómez, M (2001). El modelo tradicional de la pedagogía escolar: Orígenes y precursores. *Revista de Ciencias Humanas*. (28). Recuperado el 10 de agosto de 2009, de http://www.utp.edu.co/~chumanas/ revistas/ revistas/rev28/gomez.htm

unificada desde la escuela maternal hasta la universidad.[54] La Escuela Bourbaki de origen francés se posicionó en la mayoría de los países europeos entre 1957 y 1972[55], propone la enseñanza de la llamada *matemática moderna* en contraposición con la enseñanza clásica que se había dado hasta entonces.

La Escuela Bourbaki sustenta la matemática en tres pilares: las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas. Las estructuras algebraicas se forman instaurando en un conjunto no vacío una o varias leyes de composición interna satisfaciendo ciertas propiedades para formar grupos, anillos, campos, espacios vectoriales, etc.; las estructuras de orden son relaciones definidas en un conjunto cumpliendo las propiedades reflexiva, antisimétrica, transitiva, etc.; las estructuras topológicas son aquellas relacionadas con las nociones de límite, continuidad, convergencia, etc., y por lo general se definen estableciendo una norma en un conjunto.

Con la matemática moderna los bourbakistas procuran una enseñanza rigurosa de la matemática con base en las ideas de conjunto y estructura algebraica, conciben la matemática como una ciencia lógico deductiva y su enseñanza debe hacerse como un sistema bien estructurado. Según esta corriente, la tendencia hacia la algebrización y el desarrollo lógico facilitan la introducción de una terminología precisa para denotar los objetos matemáticos, nombrar sus propiedades primordiales y dotarlos de una notación correspondiente que constituye un lenguaje técnico, claro y preciso (Gómez, 2006).

Por otra parte, el concepto de estructura emerge como un concepto unificador dentro de la matemática evitando que esta se convierta en una Torre de Babel conformada por teorías inconexas; en la enseñanza de la matemática, identificada la estructura a la cual pertenece el objeto matemático bajo estudio, el método axiomático muestra el camino a seguir orientando al matemático con una intuición especial que lo lleva e descubrir las propiedades del objeto. En términos precisos Bourbaki (1950) expresa

[54] Hernández, J (1996). Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki. *Actas del IV Seminario Orotava de Historia de la Ciencia*, 4(1), 55-78.
[55] En Colombia su posicionamiento fue posterior a 1972.

> *El matemático no trabaja como una máquina, no como el obrero de la cadena; no podemos hacer énfasis en el papel fundamental que representa, en sus investigaciones una intuición especial, que no es la intuición en sentido común, sino más bien una adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal, que parece tener derecho a esperar por parte de entes matemáticos, con los cuales ha tenido una frecuentación prolongada tan familiar como con los entes del mundo real. Ahora, cada estructura lleva consigo su propio lenguaje, cargado de resonancias intuitivas especiales derivadas de las teorías de donde las ha extraído el análisis axiomático descrito anteriormente. Y, para el investigador que descubre de repente esta estructura en los fenómenos que estudia, es como una modulación súbita que orienta de golpe en una dirección inesperada el curso intuitivo de su pensamiento y aclara con una luz nueva el paisaje matemático en el cual se mueve.* (p. 227)

Respecto al Modelo Clásico de enseñanza de la matemática, Bourbaki en forma de crítica enfatiza que la matemática no se reduce a un simple juego mecánico de fórmulas, ya que dispone de una poderosa herramienta dada por los diferentes tipos de estructuras, unificando diferentes campos teóricos con ayuda de la axiomática y poniendo orden al caos existente a la diversidad de teorías matemáticas aisladas.

Se evidencia entonces que el método axiomático es el soporte de la Matemática Moderna para su fundamento y su enseñanza, se reconoce también que las estructuras no son inmutables ni en número ni contenido, pues en el futuro es posible que estas cambien, ya sea por la introducción de nuevos axiomas o por combinaciones de estos; también se reconoce la importancia de las estructura con la realidad, sobre todo cuando dan soporte a la física. Respecto a todo esto Bourbaki (1950) en su *Arquitectura de las Matemáticas* afirma

> *Desde el punto de vista axiomático, la matemática aparece como un depósito de formas abstractas, las estructuras matemáticas; y resulta,*

> *sin saber porqué, ciertos aspectos de la realidad física vienen a moldearse en estas formas, como si fuera una especie de pre adaptación. Por supuesto, no puede negarse que la mayoría de estas formas tenían en su origen un contenido intuitivo bien determinado; pero, es precisamente vaciándolas voluntariamente de este contenido, que ha sido posible dar a estas formas todo el poder que ellas son capaces de mostrar y prepararlas para nuevas interpretaciones y para el desarrollo de su potencia plena.* (p. 231)

La propuesta Bourbaki tuvo acogida en todos los niveles educativos, era una nueva forma integradora para presentar y enseñar la matemática con un lenguaje y una lógica particular, procuraba el máximo objetivo en el aprendizaje de la matemática, la abstracción; no obstante, entró en disputa con la concepción sobre la matemática que tenían los matemáticos y profesores tradicionalistas, formados con otro modelo sin estar preparados para similar el cambio. Esta confrontación creó dos grupos con ideas opuestas: los bourbakistas y los no bourbakistas.

Fueron muchas las críticas de los no bourbakistas en contra de la posición bourbakista y de la matemática moderna. Kline (1976, 2005) hace una de las críticas más fuertes en contra de la enseñanza de la matemática moderna en su libro *Why can Johnny not do arithmetic*? traducido al español como *El fracaso de la matemática moderna*, poco después de haber publicación un artículo (1970) donde reconoce algún merito al papel de la lógica dentro de la matemática.

Según los no bourbakistas, el fracaso del Modelo Bourbaki se debió a varias cosas: en primer lugar, suponer un currículo[56] universal para la matemática en ese tiempo cuando los niveles de desarrollo de la matemática eran diferente por regiones y países fue un

[56] El término currículo se entiende en el sentido de Villarini, A (1997). *El currículo orientado al desarrollo humano integral*. San Juan, Puerto Rico: Biblioteca del Pensamiento, que ve el currículo como un plan de estudios que sobre la base de unos fundamentos o racional, organiza el contenido o material en forma secuencial y coordinada para facilitar la elaboración de actividades de enseñanza aprendizaje y lograr unas metas u objetivos. El currículo debe responder a las siguientes preguntas: ¿Qué se espera lograr?, ¿Qué contenido o materias se van a enseñar?, ¿Qué actividades o experiencias deben llevarse a cabo?, ¿Qué recursos son necesarios para facilitar el aprendizaje? y ¿Qué medios, instrumentos o procedimientos se deben tener para determinar la efectividad del plan?

error; en segundo lugar, no hubo preparación de los profesores para el cambio, la introducción de la matemática moderna debió ser gradual y no de un solo golpe en todos los niveles educativos; en tercer lugar, los sistemas educativos no eran aptos para introducir la reforma y se cometieron muchos excesos al pretender que todo mundo debía aprender matemática moderna.

Muy a pesar de todo, hasta el día de hoy no hay un acuerdo universal en cuanto a la forma de como se deben enseñarse las matemáticas en las diferentes etapas de la educación; no obstante, cualquiera que sea la idea acerca de la conveniencia o no de las matemáticas modernas, lo cierto es que si se quiere enseñar matemáticas debe tenerse al menos un mínimo de rigurosidad en lo que se hace, por tal razón Flórez (1996) se refiere al rigor en los siguientes términos

> *El rigor es entonces el proceso de poner en términos "opacos" a la intuición, problemas acerca de los cuales tenemos una percepción intuitiva muy fuerte. Gran parte de la matemática y la lógica modernas se han desarrollado justamente sobre el "obscurecimiento de lo intuitivo" Fácil es comprender los riesgos que ésta metodología encierra, en tanto ninguna garantía se nos puede dar acerca de la existencia de nuevas relaciones intuitivas entre estas ideas opacas, relaciones que ahora aparecerán todavía más ocultas. De cualquier manera esta metodología ha permitido el desarrollo explosivo de métodos formales altamente complejos, los cuales han tenido un impacto enorme en el desarrollo de la teoría de los ordenadores, la genética, la teoría de la comunicación, etc.* (p .66)

Pero no todo fue fracaso como lo han creído los no bourbakistas. El Modelo Bourbaki trajo cambios significativos en la enseñanza de la matemática demostrando que el método clásico en sentido estricto no es una forma adecuada de presentar la matemática, es necesario un concepto unificador o un conjunto de conceptos básicos sobre los cuales se fundamente la matemática. La Escuela Bourbaki permitió también mostrar la inadecuada o incompleta preparación de los docentes de matemática en todos los niveles, concientizó a los profesores de matemática sobre la necesidad de crear organizaciones para discutir aspectos relacionados con la enseñanza de la matemática[57] y modificó el currículo de matemática.

Para aliviar la controversia entre la Matemática Moderna y el Modelo Tradicional aparece en la década de los setenta y a principios de los ochenta un movimiento conocido como el Retorno a lo Básico[58] proponiendo el *Modelo de Transición*. Este modelo rescata la solución de problemas o heurística como mecanismo para explorar situaciones que pueden ser utilizadas en situaciones similares, cambiando la conducta repetitiva del Modelo Tradicional por un activismo por parte del alumno donde éste aprende a través de la solución de problemas que incitan al redescubrimiento de nuevos conceptos. El modelo propone también el manejo de algoritmos y la realización de procedimientos y cálculos.

La enseñanza por resolución de problemas o Heurística Moderna fue propuesta y desarrollada por George Polya en 1945 y rescatada a partir de los ochenta por el llamado *paradigma modernista*. La Heurística ha existido desde siempre y es común a todas las ciencias, los griegos utilizaron reglas, principios y estrategias en la solución de problemas como procedimientos heurísticos; así, Aristóteles, hablaba de sagacidad en la solución de problemas como caminos para el descubrimiento. La palabra heurística tiene diferentes significados según la categoría gramatical en donde se ubique. Como adjetivo, significa servicio al investigador, reglas heurísticas, estrategias, silogismos o conclusiones heurísticas; como sustantivo, es el arte o ciencia del descubrimiento. Según Polya (1998), "la Heurística Moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicas en esta proceso." (p. 102)

En los diferentes sistemas educativos el Modelo de Transición está atado a los libros de texto como en los modelos anteriores, así que la solución de problemas se refiere a los problemas propuestos en esos libros, lo cual ha constituido históricamente una

[57] Prueba de ello, en Bogotá se organizó la Primera Conferencia Interamericana de Educación matemática y en Estados Unidos de Norte América se organizó el NTCM

[58] Traducción de "Back to basic"

desviación del modelo, pues la mayoría de los libros de texto contienen ejercicios y no verdaderos problemas; además de ello, los libros de texto se quedan entre el Modelo Tradicional y el Modelo de Transición porque muchos de ellos están escritos en forma conductista. Como se verá más adelante, en el siglo XIX, algunos libros de matemática como el de Dionisio Araujo se escribieron en forma de catecismo; los otros, después de exponer los aspectos teóricos sobre una determinada temática, al final de cada capítulo o sección incluyen una lista de ejercicios cuyo propósito es afianzar los procesos algorítmicos y los cálculos que incluyen dichos procesos.

Después de exponer las ideas del Modelo de Transición es importante preguntarse ¿Qué es lo básico en matemáticas?, o mejor, ¿Qué es la matemática básica? El Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática ICME realizado en Berkeley en 1980 se reunió para dar respuesta a la primera de las preguntas, pero el National Concilium of Teacheras of Mathematics NTCM, adelantándose a la respuesta edita el documento *In Action*, el cual se aplicó en muchos países durante la década de los ochenta. La agenda escrita en 29 páginas propuso y promovió ocho recomendaciones para la enseñanza de la matemática en los niveles de educación primaria y secundaria, y reivindica la solución o resolución de problemas como el método esencial para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Las ocho recomendaciones fueron:

(1) La resolución de problemas debe ser el centro de la matemática escolar en la década de 1980; (2) las competencias básicas definidas en matemáticas deben ir acompañadas de facilidades computacionales; (3) los programas de matemática deben aprovechar plenamente el poder de las calculadoras y computadoras en todos los niveles de educación; (4) deben aplicarse estándares más estrictos de eficacia y eficiencia en la enseñanza de las matemáticas; (5), para medir el éxito del aprendizaje de los programas de matemáticas, la evaluación de los estudiantes debe basarse en un abanico más amplio de alternativas, en vez de solamente las pruebas convencionales; (6) el currículo de matemáticas debe ser flexible, con varias opciones, y adaptarse a las diversas necesidades de la población estudiantil; (7) los profesores de matemática deben exigirse y exigir a sus colegas un alto nivel de profesionalismo; y (8) Dar apoyo público a la enseñanza de las matemáticas para elevar el nivel de acuerdo con la importancia de la

comprensión matemática de los individuos y la sociedad.[59] Para cada una de las recomendaciones se emite un conjunto de acciones.

Una de las acciones para la segunda recomendación fue que los procesos mentales de orden superior como el razonamiento lógico, el procesamiento de información y la toma de decisiones deben ser considerados básicos en la aplicación de la matemática. Esto no se dio porque los aspectos demostrativos de la matemática fueron opacados por los procedimientos y los cálculos, los avances en lógica y conjuntos se perdieron ya que en los nuevos programas estos temas fueron tratados tangencialmente; por ese y otros aspectos, el modelo falló. En 1989, ante la proliferación de críticas de destacados educadores matemáticos como Bishop, para corregir las deficiencias de la agenda, el NTCM en 1989 publica los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*[60], en 1991 aparecen los *Estándares Profesionales para la Enseñanza de la Matemática*[61] y en 1995 aparece *Estándares de Evaluación para la Educación Matemática.*[62]

Para la década de los noventa El NTCM propone que los estándares de los contenidos de matemática para la enseñanza primaria y secundaria deben basarse en cinco áreas: números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad. Adicionalmente considera otros cinco estándares de procesos mediante los cuales se adquiere y usa el conocimiento: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

Estos estándares fueron tomados por muchos países, entre ellos Colombia, pero con la implantación de los estándares no se resolvió totalmente el problema de encontrar un modelo que garantizara una enseñanza de calidad, debido a las diferencias culturales y la falta de recursos físicos y humanos de acompañamiento que exigían las recomendaciones del NTCM. Los estándares no dieron una respuesta precisa a qué es lo

[59] Traducción adaptada de NTCM (1980). An Agenda for Action. Recommendations for school mathematics of the 1980s. Reston, VA: Author.
[60] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics
[61] Professional Standards for Teaching Mathematics.
[62] Assessment Standards for School Mathematics.

básico, su propuesta cubrió todas las áreas de la matemática en la enseñanza primaria y media sin hacer especificaciones y sin ocuparse de la enseñanza universitaria, por lo tanto el puente entre la matemática del nivel medio y el nivel universitario quedaba roto al no haber un enlace entre las temáticas, de allí que en los primeros niveles universitarios se hable de matemática básica, como si la enseñanza del bachillerato no hubiese sido básica; además de esto, el Modelo de Transición pretendió acabar con el conductismo tomando como estrategia la resolución de problemas a través del Activismo[63] el cual no mejoró la situación.

El modelo más reciente para la enseñanza de la matemática es el *Modelo Constructivista*, surgido en los ochenta ante el fracaso del Modelo de Transición. El término constructivismo viene de la palabra latina *construere* que significa analizar o interpretar y se basa en que dos individuos diferentes tienen una apreciación diferente de la realidad estando sometidos a las mismas condiciones de aprendizaje[64], ya que las condiciones cognitivas de cada uno son diferentes.

El Constructivismo según Antúnez (2003) no es un método de enseñanza ni una teoría sobre la enseñanza de la matemática, sino “una teoría del conocimiento para explicar cómo sabemos lo que sabemos” (p. 29). Según el constructivismo, el conocimiento es construido por el aprendiz de manera activa a través del entorno, disponiendo como herramientas los órganos de los sentidos, mediante un proceso adaptativo de abstracción reflexiva y la interacción con los objetos matemáticos y los otros sujetos. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el propio mundo experiencial, no se descubre un mundo independiente, preexistente, exterior a la mente del sujeto (Kilpatrick, 1987).

Respecto a la enseñanza de la matemática, el constructivismo plantea tres líneas fundamentales (Antúnez, óp. cit). La primera es la epistemológica y afirma que los conocimientos matemáticos que deben aprender los estudiantes son los que requieren en

[63] El activismo es un psicologismo ingenuo fundamentado en una interpretación superficial de la psicología genética. Una ampliación de esta teoría se encuentra en Gascón, J (1994). La resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. *Educación matemática,* 6(3), 37-51.
[64] Esta afirmación constituye el principio de apreciación.

su vida cotidiana o también aquellos necesarios para los estudios universitarios; y en el caso de la universidad, los necesarios para su vida profesional. La segunda línea es la psicológica y afirma que el conocimiento matemático no puede ser transferido del profesor a los estudiantes en forma directa como un producto elaborado, el conocimiento debe ser elaborado desde la experiencia del aprendiz en forma activa. La última línea es la metodológica cuyo propósito es explicar la forma de enseñar la matemática; esencialmente, la forma de enseñar debe procurar que el estudiante conecte todo conocimiento nuevo con su experiencia personal y sus conocimientos previos; para ello, el profesor en vez de preocuparse por transmitir conocimiento dando clases, debiera preocuparse más bien por lograr que los alumnos aprendan.

Para Zúñiga (1994), el Constructivismo es una posición epistemológica según la cual el conocimiento se construye como resultado de la interacción entre las disposiciones internas del sujeto y su medio ambiente. Pedagógicamente, el Constructivismo implica que el verdadero aprendizaje es aquel construido por la misma persona modificando sus estructuras mentales hasta alcanzar un nivel alto de complejidad e integración; por lo tanto, el verdadero desarrollo no se puede confundir con la acumulación de conocimientos a manera de un banco de datos aislados, es necesario establecer ciertas relaciones entre ellos procesando la información para obtener nueva información. En la enseñanza constructivista se parte de la estructura mental del estudiante sus conceptos previos y su nivel de pensamiento lógico para promover experiencias y habilidades de pensamiento en el campo objeto de enseñanza, en este caso la matemática.

El Constructivismo tiene raíces muy antiguas como teoría filosófica, pero matemáticamente hablando, surge de la discusión sobre los fundamentos de la matemática cuando Brower y Heyting analizan las antinomias de la teoría de conjuntos en contraposición al Logicismo y al Formalismo, al considerar la tesis central de la constitución constructiva del observador matemático según la cual los objetos matemáticos son construibles; así que, las proposiciones matemáticas son construcciones mentales y los objetos matemáticos y estructuras que ve el profesor son aparentes para los alumnos.

Siguiendo a Kilpatrick (óp. cit), el Constructivismo es más una teoría de adquisición del conocimiento que una teoría de la enseñanza. Para la matemática el Constructivismo tiene que ver más con la práctica matemática que con sus fundamentos y como teoría de la enseñanza se aproxima a la Escuela Activa guardando ciertas similitudes con el modelo de transición tomando en parte la solución de problemas priorizando la construcción individual sobre lo cultural.

El Constructivismo en la enseñanza se gesta en la década de los setenta y se populariza en la década de los ochenta con varias corrientes que se reducen a tres: el Constructivismo Cognoscitivo, el Constructivismo Radical y el Constructivismo Social. En Colombia, las primeras incursiones en el Constructivismo se dieron en la Universidad del Valle en 1979 en un trabajo presentado por Royman Pérez y Rómulo Gallego-Badillo; posteriormente, en 1986 estos autores publican el libro *El Trabajo Pedagógico,* texto que permea los niveles educativos en Colombia y todas las áreas del conocimiento. En matemática el Constructivismo influye considerablemente en primaria y secundaria con bastante intensidad, pero muy poco en el nivel universitario.

La matemática universitaria fue débilmente influida por el Constructivismo, porque dicha enseñanza obedece al Modelo Tradicional con algunas variaciones incluyendo los aspectos formales heredados de los textos usados tradicionalmente para la enseñanza. En la matemática las demostraciones constructivas han estado presentes desde siempre porque muchos objetos matemáticos son construidos, la demostración matemática puede o no tener aspectos constructivos, por lo tanto no puede hablarse de un método totalmente constructivista ya que matemáticos constructivistas como Bishop han aceptado la teoría de conjuntos con algunas modificaciones. La empresa constructivista comenzó a decaer a mediados de los noventa, debido a la imposibilidad de lograr una matemática totalmente basada en métodos constructivos, así lo muestra el artículo de Zevenbergen publicado en 1996 en la revista *Studies in Mathematics* titulado *El Constructivismo como Discurso Burgués Liberal.*

Los estándares del NTCM y los lineamientos curriculares para la enseñanza de la matemática en los niveles primario y secundario tienen marcadas influencias del constructivismo. En Colombia el Constructivismo fue acogido principalmente por el profesorado de primaria y bachillerato, quienes no estaban preparados para entenderlo porque su formación pedagógica se hizo por lo general alrededor de las teorías clásicas del aprendizaje en las cuales no estaba el Constructivismo; además, no se tenía mucho dominio de teorías recientes como la *Teoría Cognitiva*, la teoría de Vigotski y la *Teoría del Aprendizaje Significativo* de Ausubel, porque estas teorías aparecieron en nuestro medio en la década de los noventa.

Aunque la pretendida imposición de los partidarios del Constructivismo haya incursionado en la enseñanza, la práctica pedagógica sigue siendo dominada por el Modelo Tradicional, con programas curriculares[65] que mantienen una estructura cimentada en los años sesenta como se mostrará más adelante.

Los modelos anteriores contemplan la enseñanza de la matemática desde un punto de vista pedagógico-epistemológico; no obstante, desde el punto de vista de la interacción comunicativa profesor-alumno, González (1994) afirma que existen tres paradigmas en la enseñanza de la matemática: Transmisión verbal, que es la clásica transmisión de conocimientos; descubrimiento autónomo e inductivo, que consiste en el trabajo independiente del alumno siendo el papel del profesor el de consultor, y descubrimiento guiado, donde el profesor es un orientador o guía.

También es importante señalar que la matemática tiene como característica fundamental la matematización. Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos o conceptos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, semejanzas con otros problemas, relaciones y estructuras. La matematización es horizontal cuando permite el tratamiento de un conjunto de problemas llevándolos del mundo real al mundo de su representación siguiendo los procesos de identificar, esquematizar, formular, visualizar, descubrir, reconocer y

[65] Hace referencia a los contenidos de los programas de las asignaturas.

transferir; y es vertical, cuando se trata de resolver situaciones específicas con la intermediación de los procesos representar, utilizar, ajustar, combinar, integrar, probar, formular y generalizar.

Según De Guzmán (1988) la matematización es el sentido del quehacer matemático, es un proceso que se da en tres etapas. En primer lugar la mente se coloca frente a una realidad compleja, es decir, la mente se acerca a la realidad con intención matematizante y provista de ciertos instrumentos analiza la situación y trata de entenderla ya sea abstrayendo, simplificando o modelizando parcialmente; en la segunda etapa se desarrolla el modelo mental iniciado en la etapa anterior con extensión y profundidad; finalmente, en la tercera etapa, con el modelo ya construido se vuelve a la realidad de donde se partió para su aplicación. Esta matematización se convierte en una metodología para la construcción de los conceptos matemáticos, como en los casos de la cuerda vibrante, la braquistócrona y las secciones cónicas, por mencionar algunos ejemplos.

Las dos formas de matematización anteriores determinan cuatro estilos o enfoques para la enseñanza de la matemática. El estilo estructuralista, que consiste en la enseñanza de la matemática como un sistema bien estructurado identificándose con el modelo de la matemática moderna; el estilo mecanicista, considera la matemática como un conjunto de reglas tipo algoritmos tomando el aspecto instrumental de la matemática; el empirista parte de lo concreto, mira la matemática desde el punto de vista de su utilidad, de lo práctico, tal cual ocurrió en la educación utilitaria inglesa; y el estilo realista, utiliza la matematización horizontal, prioriza el desarrollo de modelos, la reconstrucción de la matemática por parte del alumno y orienta la enseñanza por procesos partiendo de las ideas de Hans Freudenthal.[66]

Para O'Toole (1939), la enseñanza de la matemática se basa en los métodos inductivo y deductivo, si bien la matemática es eminentemente deductiva, en campos relacionados

[66] Hans Freudenthal fue un matemático alemán impulsador de la enseñanza orientada a los procesos. Afirma que no existe criterio de verdad en la didáctica de la matemática, como tampoco lo hay en las ciencias humanas, pero si lo hay en la matemática.

como la física y la estadística es necesario el empleo de procesos inductivos o inferencia inductiva para lograr resultados lógicos mediante esos procesos inductivos, de esto puede darse evidencia en algunas temáticas como las medidas de creencia racional, la inferencia incierta y la probabilidad.

2.2 CREENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Existe una amplia discusión alrededor de los términos creencia y concepción, hasta el punto de que algunos autores hacen diferencia entre las dos locuciones; no obstante, en este trabajo creencia y concepción son sinónimas. Siguiendo a Ramos (2005) el estudio del sistema de creencias del profesorado involucra creencias sobre qué es la matemática y creencias sobre cómo debe enseñarse la matemática. Este estudio es importante porque de las creencias del profesor depende lo que él entiende por fundamentos de la matemática y su enseñanza, hecho que se refleja en el diseño de los programas curriculares sobre fundamentos o sobre lógica y teoría de conjuntos.

En palabras sencillas, una creencia es un saber que no ha sido sometido a un examen riguroso; es una opinión, una idea o un juicio subjetivo que se tiene de algo; es aquello que se piensa acerca de algo. Según Moreno (2002, c.p. Ramos, 2005),

> *Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que la hace ser más consistente y duraderas para cada individuo.* (p. 67)

Siguiendo a De Faria (2008), Las creencias son de tipo subjetivo, están basadas en los sentimientos, están articuladas y se relacionan entre sí formando un sistema, usan una lógica empírica debido a que no gozan de un grado de rigurosidad comprobable, se refieren a situaciones concretas y se orientan por la intuición a través de la observación de ciertos hechos que el creyente tiende a generalizar, se van construyendo a partir de una realidad observada y de la visión que se tiene del entorno o el mundo hasta constituir un esquema conceptual. “La creencia es certidumbre en que nos encontramos, sin saber cómo ni por dónde hemos entrado en ella… No llegamos a ella tras una faena de entendimiento, sino que operan ya en nuestro fondo cuando nos ponemos a pensar sobre algo” (Gómez –Chacón, 2003, p. 235).

Al examinar un sistema de creencias no se puede perder de vista que las creencias forman un grupo estructurado de visiones, “la estructura de los sistemas de creencias da lugar a diversos grados de consistencia y de estabilidad, lo que permite explicar comportamientos y prácticas contradictorias, así como las resistencias al cambio” (De Faria, 2008, p. 21); esta estructura se va formando como una suma de visiones, tales que, a medida que el individuo instaura una nueva visión la relaciona con las anteriores recomponiendo el sistema.

Las creencias juegan un papel importante en la concepción de la naturaleza de la matemática y su enseñanza. Respecto a la naturaleza de la matemática recordemos que por más de veinte siglos la matemática estuvo dominada por el paradigma absolutista, basado en dos hipótesis: “los axiomas y definiciones de la matemática son verdaderos, las reglas lógico formales de inferencia y su sintaxis preservan la verdad” (De Faria, 2008, p. 22). El paradigma absolutista fue resquebrajado con la aparición de las corrientes epistemológicas que fundamentan la matemática, el Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo, las cuales ya se analizaron ampliamente. El Teorema de Gödel puso fin al absolutismo demostrando que las pruebas deductivas no permiten obtener todas las verdades de la matemática y que las proposiciones matemáticas se podían expresar como proposiciones generales cuya verdad depende de su forma y no de su interpretación en un contexto específico."[67]

Desde otro punto de vista, De Faria (óp. cit) propone otras apreciaciones sobre la naturaleza de la matemática desde la práctica de la matemática: el convencionalismo, el empirismo y el cuasi-empirismo.

> *El convencionalismo afirma que el conocimiento matemático y la verdad matemática se basan en convenciones lingüísticas. Estas convenciones lingüísticas proporcionan la base, es decir ciertas verdades matemáticas y lógicas. La lógica deductiva se encarga de transmitir dichas verdades al resto del cuerpo de conocimientos matemáticos. Por lo tanto esta visión también es absolutista y como tal es objeto de refutación.*
> *Los empiristas sostienen que los conceptos matemáticos tienen origen empírico y que las verdades matemáticas se derivan de observaciones del mundo físico. Esta última tesis no es convincente, pues sabemos que muchos conceptos matemáticos no se originan de observaciones del mundo físico, sino que se basan en conceptos abstractos.*
> *Por otro lado para los cuasi-empiristas la matemática es lo que los matemáticos hacen, con todas las imperfecciones inherentes en cualquier actividad humana.* (p. 24)

Por otra parte, Lakatos[68] sostiene que la matemática es una actividad de la mente humana y como tal es falible, las verdades están sujetas a revisión, las pruebas matemáticas se aceptan por consenso en una actividad común a todos los matemáticos, la historia muestra que el conocimiento en toda disciplina está en proceso de cambio, así lo afirmo Bourbaki con la propuesta de las estructuras, el conocimiento se construye y se acepta socialmente; más aún, el constructivismo social sostiene que el origen de la

[67] Ibíd.
[68] Lakatos, I (1976). *Proofs and Refutations*. New York: Cambridge University Press.

matemática es social o cultural y que dicho conocimiento descansa sobre en una base cuasi-empírica.

Presentadas algunas consideraciones sobre la naturaleza de la matemática, se revisa ahora la relación entre las creencias y la enseñanza de la matemática. En primer lugar, las creencias influyen sobre la práctica de la matemática como un sistema regulador de la estructura del conocimiento; en segundo lugar, son un indicador de la actuación del profesor permitiendo hacer inferencias sobre su trabajo; y en tercer lugar, las creencias son un obstáculo ante el cambio, se oponen a otras creencias y rechazan el establecimiento de nuevas formas de enseñanza o enfoques de la matemática; por último, las creencias son determinantes en el modelo de la enseñanza.

Según Kuns y Ball (1986, c.p. De Faria, 2008), en relación con las creencias, proponen cuatro modelos para la enseñanza de la matemática. El Platonismo, el Formalismo, el Constructivismo y el Instrumentalismo. En el Instrumentalismo la matemática se considera como un conjunto de reglas y fórmulas que deben ser manejadas con cierta habilidad para la solución de un problema; la matemática constituye una caja de herramientas donde cada una de ellas tiene una labor específica, debiéndose aprender los procedimientos para sus usos.

Las creencias que tienen los profesores sobre la matemática y su enseñanza causan un fuerte impacto sobre el aprendizaje de los estudiantes repercutiendo en la idea de estos acerca de la matemática y su uso, estas creencias en algunos casos están basadas en la experiencia del profesor, la enseñanza recibida, los textos en los cuales el profesor aprende matemática y la influencia del entorno.

2.3 LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2.3.1 La enseñanza de la lógica

Si se mira la historia de la educación, se visualizan períodos marcados con abundante desarrollo de las ciencias. Se dejó entrever en el primer capítulo que la enseñanza de la lógica durante el Período Colonial estuvo bajo el dominio de la Iglesia Católica y lo mismo ocurrió en otros países donde imperaba dicha religión u otra ligada a esta por creencias similares. América Latina, como territorio conquistado por españoles y portugueses tuvo una educación muy parecida a la recibida por sus conquistadores. La lógica enseñada durante la Etapa Colonial fue lógica aristotélica escolástica y así perduró al menos en Colombia hasta mediados del siglo XX.

En Europa la enseñanza de la lógica, tradicionalmente representada por la Escuela de Port Royal desde el renacimiento, cambia radicalmente en el siglo XIX con dos publicaciones aparecidas en Gran Bretaña: *Elements of Logic* de Richard Whately (1787-1863) quien en el prefacio de su obra presenta un reporte sobre la enseñanza de la lógica, *The Mathematical Analysis of Logic* de George Boole publicada en 1847. Estos trabajos fueron escritos independientemente de los trabajos de Leibniz (1646-1716), Hamilton (1788-1856) y De Morgan (1806-1871), provocando posteriormente junto con los trabajos de Jevons (1835-1832), John Stuart Mill (1806-1873) y Adolf Trendelenburg (1802-1872) la primera reforma en la enseñanza de la lógica, dando independencia a esta al despojarla de cualquier psicologismo resolviendo el problema metodológico de la lógica clásica, abriendo el camino hacia la fundamentación de la matemática (Peckhauss, 1999).

Por esos mismos años en Alemania Ernest Scröder (1841-1902) presentó una crítica del trabajo de Boole en su *Der Operationskreis des Logikkalkuls* y luego emprende un ambicioso proyecto titulado *Vorlesungen iiber die Algebra der Logik* publicado después de su muerte, en donde libera la lógica de la filosofía constituyéndola en un nuevo lenguaje, como un álgebra absoluta, ya que él nunca se consideró un lógico.

Antes de Scröder Immanuel Kant (1723-1804) afirmó que la lógica desde los primeros tiempos ha seguido un camino a salvo de la ciencia, queriendo resaltar su independencia de esta, pero la lógica no ha dado un paso hacia delante desde Aristóteles, afirmación que hace irrelevante el aporte de Kant a la lógica dentro de su filosofía. Hegel (1770-

1831) introdujo una variante de la lógica como ciencia fundacional de su sistema filosófico, definiéndola como "la ciencia de la idea pura, la idea en el elemento abstracto del razonamiento" (Peckhauss, 1999, p. 438). La lógica de Hegel propone el método dialéctico como método de razonamiento, pero no exactamente así como se expresa de manera textual. Este método presenta una nueva aproximación a la lógica formal dentro de una teoría del conocimiento humano, coincidiendo con la metafísica y constituyendo prácticamente un regreso a la Escolástica.

Puede decirse entonces que las dos primeras reformas a la enseñanza de la lógica se dan en Gran Bretaña y Alemania en el siglo XIX; más tarde, en los últimos treinta años de ese siglo apareció prácticamente lo que podría llamarse la lógica formal con los aportes de Frege y Peano; y posteriormente, desde los inicios del siglo XX, el desarrollo de la lógica matemática recibió un gran impulso con Russell, Peirce y otros más. Después de esta corta introducción sobre los inicios de la enseñanza de la lógica, se mostrarán diferentes concepciones sobre su enseñanza en el siglo XX, especialmente en el período objeto de este trabajo.

Según Milne (2004), antes de hacer cualquier afirmación sobre la enseñanza de la lógica debe preguntarse primero por el objetivo o el propósito de su enseñanza; resuelta esta inquietud, entonces se procede a determinar si la enseñanza responde a los objetivos, y sean cuales fueran estos, existen tres puntos de vista para su cometido. El primero lo llama *terapia*[69] porque a su pensar, la lógica se enseña para estructurar el pensamiento y construir buenos argumentos en cualquier disciplina; el segundo lo llama *juego de herramientas*[70], pues corresponde a la enseñanza de la lógica formal o lógica de primer orden refiriéndose a la lógica aristotélica, y más específicamente al contenido del Organon, con el propósito de hacer precisiones en el lenguaje y evitar ambigüedades; el tercer propósito consiste en enseñar la lógica como un *cuerpo de conocimientos*,[71] como un conjunto de conceptos, teorías, formas de argumento y reglas de deducción. Este cuerpo de conocimientos se presenta en algunos textos como *corte y pegue*, olvidándose

[69] Traducción de therapy
[70] Traducción de toolkit, palabra según el autor es sinónimo de Organon
[71] Traducción de body of knowledge

de que para llegar a este cuerpo de conocimientos se han dado muchos debates en lógica y filosofía de la matemática a lo largo del siglo XX, invisibles para un estudiante de primer año.

Otro punto de vista (Fisher, 1988 c.p. Milne, 2004) señala que la enseñanza de la lógica formal tiene como objeto el estudio de la argumentación como modelo matemático de la prueba. El modelo involucra un conjunto de premisas a partir de las cuales debe extraerse una conclusión, dicho modelo no está dirigido a ninguna colectividad en particular, la argumentación no pretende convencer a nadie, pues esta opera, según Frege, con las leyes de la verdad en vez de las leyes del pensamiento porque la lógica formal no tiene conexión con el razonamiento ordinario, los argumentos son propuestos en la tentativa de alcanzar un equilibrio reflexivo entre la intuiciones de buenas prácticas de inferencia y el propósito de la inferencia deductiva. En algunas disciplinas diferentes de la matemática y en los primeros cursos de lógica de la argumentación en el primer año de estudios universitarios, estos razonamientos se presentan como argumentaciones dentro de lo real, con el fin de hacerlos más atractivos para los estudiantes.

La lógica de la argumentación o teoría de la argumentación o Pensamiento Crítico fue un movimiento originado en Norte América e Inglaterra en la década de los setenta, dentro de la corriente llamada lógica informal, generada por la insatisfacción con la enseñanza tradicional de los cursos de lógica formal. El nombre de *Pensamiento Crítico*, se derivó de un texto de lógica publicado con el mismo nombre en 1946 por Max Black, mientras que la corriente de lógica informal es dado por Gilbert Ryle[72], quien junto con Wittgenstein y Austin contribuyó a propiciar las condiciones para ello en los análisis del lenguaje natural, estableciendo un puente entre el análisis lingüístico y el pensamiento crítico a través de la lógica informal. Otros aportes en esta dirección se deben a Stephen Toulmin, Michael Scriven, Robert Forgelin, C Hamblin y Rupert Crawsahy Williams.

[72] Ryle, G (1966). Formal and informal logic. *Dilemmas*, 8(1), 11-129.

Se entiende por pensamiento crítico, el pensamiento capaz y responsable que conduce al juicio apoyándose en criterios siendo auto corrector y sensible al contexto (Lipman, 1988); según Chance (1986) es la habilidad de analizar hechos, generar y organizar ideas, defender sus opiniones, hacer comparaciones, hacer inferencias, evaluar argumentos y resolver problemas" (p. 6); para Mertes (1991) es "un proceso consciente y deliberado que se utiliza para interpretar o evaluar información y experiencias con un conjunto de actitudes y habilidades que guíen las creencias fundamentadas y las acciones" (p. 24). El pensamiento crítico es un proceso intelectual, disciplinado y activo que desarrolla habilidades como: conceptuar, aplicar, analizar, sintetizar, o evaluar información, experiencia, reflexión, razonamiento o comunicación, como una guía hacia la creencia y la acción (Scriven y Paul, 1992); "el pensamiento crítico es la habilidad para pensar correctamente, para pensar creativa y autónomamente dentro de, y acerca de las mirada de disciplinas, entonces ciertamente es un objetivo educacional de extrema importancia" (Sharp, 1989, p. 6).

Las definiciones anteriores sobre pensamiento crítico son bastante generales y se orientan a los procesos de pensamiento, a lo cognitivo, a las estrategias y representaciones mentales y al pensamiento razonable y reflexivo incluyendo todas sus dimensiones[73]. Para los intereses de este trabajo la dimensión lógica es la más importante, en esta dirección, el conocimiento crítico es una actividad mental para argumentar, tomar decisiones y razonar correctamente con base en la lógica; así que, el pensamiento crítico como método para la enseñanza de la lógica, pretende mediante la lógica de la argumentación inferir una conclusión con base en ciertas premisas o probar cuando un razonamiento es válido o no. El método para lograr su resultado utiliza argumentos reales o cuestiones de la vida diaria, hace un estudio pormenorizado de las falacias y se apoya en la lógica de primer orden.

El Pensamiento Crítico tuvo precursores en la Grecia antigua, sus primeros orígenes están en la filosofía clásica con Sócrates, Aristóteles y los Sofistas en la retórica; posteriormente en la edad media, Raimundo Lull (1232-1315) desarrolló una teoría de

[73] Las dimensiones utilizadas por la filosofía para examinar el pensamiento crítico son: lógica, sustantiva, dialógica, contextual y pragmática.

la argumentación considerada como una lógica formal expuesta en las obras *Ars compendiosa inveniendi veritatem* y *Ars generalis ultima* con el objeto de probar todas las verdades de la fe mediante la razón, obras basadas en la silogística de Aristóteles. Desde su reciente aparición ha mantenido una estrecha conexión con la retórica, así lo confirman los aportes dados por Chaim Perelman, Paul Ricoeur, Hans George Gadamer y Jacques Derrida entre otros.

Según Lipman (1998), los lógicos informales y los retóricos dan una solución al problema de la enseñanza de la lógica por dos vías diferentes;

> *…ambos examinan las posibilidades de la razonabilidad (y por ello están comprometidos con la racionalidad). Mientras que los lógicos informales se dirigen hacia una nueva concepción de razonabilidad mediante la extensión y la redefinición del concepto de lógica, los retóricos tratan de estudiar los textos que no presentan una formalidad lógica intentando descubrir los rasgos de razonabilidad en la prosa. Ambos también están centrados en la argumentación, pero unos enfatizan la fuerza de la argumentación y otros la de la lógica.* (p. 168)

De acuerdo con lo expuesto por Lipman en considerar la vía de la lógica informal como una alternativa para la enseñanza de la lógica, es necesario hacer algunas precisiones. Algunos autores (Milne, 2004) consideran que las expresiones pensamiento crítico, lógica informal y teoría de la argumentación son sinónimos mientras que otros no, pues hay diferencias marcadas entre estos conceptos. Si bien el Pensamiento Crítico comenzó como una nueva alternativa para la enseñanza de la lógica, a finales del siglo XX se convirtió en un método general de enseñanza; por otra parte, la teoría de la argumentación se orientó hacia la argumentación jurídica retomando sus orígenes griegos, y la lógica informal dejó de ser una lógica de la argumentación al incluir otros aspectos de la lógica. La última situación lleva a preguntarse ¿Qué es realmente la lógica informal?

Por lógica informal se entiende la parte de la lógica concerniente al desarrollo de estándares, criterios y procedimientos informales para el análisis, interpretación, crítica y construcción de argumentación en el discurso de cada día[74]; según Milne (2004), la lógica informal se ha descrito como una mezcla compleja de prácticas y temáticas relacionadas con la evaluación de argumentos, la lógica informal se dedica al análisis de los conceptos y procedimientos involucrados y usados para elaborar conclusiones a partir de información dada, su finalidad es la búsqueda de la verdad determinando cuándo un argumento es correcto, tradicionalmente parte del hecho que generalmente el pensamiento humano es falso. Esta lógica antiguamente hacía parte del Trívium (gramática, retórica y lógica) y hoy en día comprende una parte o todo un curso en el currículo universitario de diferentes disciplinas.

La lógica formal, a diferencia de la anterior, estudia la forma o estructura de los razonamientos, busca el método correcto para derivar una verdad a partir de otras importando que el paso hacia esta verdad esté bien fundamentado. Esta lógica se refiere al estudio de argumentos racionales en forma estrictamente esquematizada y organizada, parte de la base que uno razona bien e intenta mejorar a niveles superiores el razonamiento. La lógica formal no debe ser confundida con la lógica matemática o simbólica, la cual es sólo un tipo de lógica que se encuentra dentro del campo de la lógica formal, la lógica matemática es lógica aristotélica traducida a símbolos, iniciada por Boole y De Morgan, continuada por Frege y Peano y extendida por Russell, Gödel y otros; la lógica matemática es metamatemática. La lógica matemática estudia los sistemas formales, se ocupa de la teoría de modelos, la teoría de la prueba, la teoría de conjuntos y la teoría de la recursión.

Expuestos las diferentes alternativas para presentar la lógica, Kattsoff (1934) observa que en todas ellas la lógica aristotélica juega un papel importante al probar la validez de dicha lógica, afirmando que Aristóteles estaba en lo cierto. La interpretación de esa lógica era correcta y válida en la teoría de la prueba, en el contexto de las definiciones de sentencias contrarias, contradictorias, etc., y en los principios de observación,

[74] Johnson, R y Blair, J (1987). The current state of informal logic and critical thinking. *Informal logic*, 9(2-3), 147-151.

contraposición, etc. Beltrán (2003) resalta también la importancia de enseñar la lógica clásica o aristotélica, porque como disciplina fundamental es un ejercicio perfecto para desarrollar la facultad racional; además, antes de llegar al simbolismo de la lógica matemática es necesario pasar por "la relación de razón entre sujeto y predicado, la división de las enunciaciones y la posibilidad de su reducción a las cuatro formas[75] de Aristóteles" (p. 154); también, "facilita la diludación y valoración de los principios comunes y propios de cada saber" (p. 157). La importancia de enseñar lógica clásica no riñe con la enseñanza de la lógica matemática ni pretende negar su importancia, porque la lógica matemática, dice Beltrán (2003), es razonable en alguno de los siguientes tres casos:

- *Como presentación esquemática de las formas elementales de la argumentación (figuras del silogismo categórico, fórmulas de razonamiento hipotético, cuadrilátero de oposición, etc.).*
- *Como estudio especializado de las posibilidades combinatorias de los lenguajes formalizados, destinado solamente a ciertas carreras (sobre todo matemática y lingüística) o vías de investigación (física cuántica, ciertos capítulos del derecho).*
- *Como soporte fundamental para el desarrollo de los lenguajes informáticos. (p. 161)*

---

[75] Las cuatro formas o cuatro tipos de enunciados o proposiciones categóricas satisfacen las relaciones de contrariedad, contradictoriedad o contradicción y subalternación. Estas relaciones se representan con un cuadrilátero como se muestra a continuación

A -Todo S es P, E -Ningún S es P, I -Algún S es P, OEscriba aquí la ecuación. -Algún S no es P

Quienes esgrimen sus argumentos contra la lógica clásica deben tener en cuenta que Aristóteles no pretendió desarrollar una teoría del silogismo sino una teoría de la prueba, su proyecto fue mal interpretado durante muchos siglos abusándose demasiado del silogismo como lo hicieron los Estoicos en la lógica medieval; otras veces, la lógica clásica se mantuvo en los terrenos de la retórica como en el Renacimiento, y en alguna parte del siglo XX se volcó hacia la lingüística.

Conviene entonces hacer una síntesis de la enseñanza de la lógica a través de todos los tiempos. Inicialmente se enseñó el Organon desde la inclusión de la lógica en el currículo de filosofía hasta el siglo XIX, según Campos (2006), con dos enfoques: la lógica *utens* y la lógica *docens*, es decir, la lógica como ciencia y la lógica como arte, la lógica pura o teórica y la lógica aplicada o práctica. Con el advenimiento de la lógica matemática y la formal se pasó a enseñar esta última, pero a consecuencia de no lograrse la asimilación de esta por parte de los estudiantes, se recurrió a la lógica informal. Más adelante se intentará saber cuál fue el estado de la lógica en las últimas cuatro décadas del siglo XX y cuál fue su papel en la enseñanza universitaria del Caribe Colombiano.

2.3.2 La enseñanza de la teoría de conjuntos

En el primer capítulo se expuso la historia de la teoría de conjuntos desde su génesis hasta la última axiomatización; ahora, se pretende mostrar la aparición y evolución de esta teoría en la enseñanza de la matemática en diferentes escenarios, donde esta teoría de una u otra manera ha estado presente, particularmente en el ámbito universitario de Colombia y del Caribe Colombiano. Posteriormente se hará un estudio de algunos aspectos relacionados con la enseñanza de los conjuntos.

La primera propuesta para la enseñanza de los conjuntos se debe a Weber en 1895 quien mediante un manual pretendió difundir el enfoque conjuntista del álgebra; luego, Hadamard y Hurwitz, en el Primer Congreso de Matemáticas en 1897 hacen notar la importancia de la teoría de conjuntos y su conexión con la enseñanza del análisis; mas adelante, Hilbert, en el Segundo Congreso Internacional de Matemática de París muestra la relación de la teoría de conjuntos con sus dos primeros problemas planteados allí. Klein en 1905 propone enseñar conjuntos en el currículo de matemática de enseñanza media en Alemania, comenzando a partir de allí su estudio en ese país, y posteriormente en Francia con la propuesta del Grupo Bourbaki de enseñar la matemática con base en las estructuras, los conjuntos se popularizan en gran parte de Europa.

La Escuela Bourbaki tuvo mucha influencia en Bélgica. George Papy, su esposa Fréderique y W Servais, este último presidente de la Comisión Nacional Belga sobre Matemáticas, fundan en 1958 el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, desde el cual se organiza un programa por temas en un orden apropiado para la enseñanza de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, con el propósito de acabar con las diferentes vertientes sobre la enseñanza de la matemática y encauzarlas en un solo camino.

La propuesta de la Escuela Bourbaki contiene en los primeros tres o cuatro años del bachillerato los siguientes temas: conjuntos, relaciones, funciones, conjunto de los números naturales, la recta y el plano, grupos, anillo ordenado de enteros, la recta y el cuerpo de los números reales, el plano vectorial y geometría afín, cálculo numérico, polinomios con coeficientes reales, geometría métrica euclidiana del plano y estadística descriptiva. Para los dos últimos años se enseñaría el plano y el cuerpo de los números complejos, álgebra abstracta, espacios vectoriales, geometría del espacio afín, geometría euclidiana del espacio, espacio de probabilidad finita, espacio métrico y topología, funciones continuas, cálculo diferencial, cálculo integral y probabilidad en una recta real.

La reforma pretendida por Papy y sus colaboradores realmente era de aplicación difícil para estudiantes de enseñanza secundaria, donde la matemática seguía apegada al modelo tradicional. Este plan solamente podía ser seguido por estudiantes con condiciones intelectuales sobresalientes y altamente capacitados, inicialmente su aplicación se llevó a cabo en Bélgica, Alemania, Suecia, Dinamarca y los Estados

Unidos. En el resto de países de Europa la reforma empezó por la enseñanza media y debiendo esperar hasta la década de los sesenta, pocos años después del Coloquio de Royaumont de 1959, puesto que no existían condiciones para implantarla.

La llamada *matemática moderna* se instaura en España a partir de 1951, después de la reunión de profesores de matemática de enseñanza media *Nuevas orientaciones en la enseñanza de las matemáticas,* donde se determina enseñar desde los primeros cursos del bachillerato conjuntos y sus operaciones, relaciones binarias, equivalencia, concepto de función, simetrización de un semigrupo, grupos, operaciones inversas y espacios vectoriales (González, 2006); temas que se agruparon por materias, teniendo como eje las estructuras algebraicas. Con la Ley General de la Educación de 1970 se decide la introducción de los conjuntos desde la enseñanza primaria, y después de la crisis de la matemática moderna, la reforma de la LOGSE en 1990 siguió la tendencia de volver a lo básico.

En Argentina la teoría de conjuntos se inicia en 1917 con la llegada del científico español Julio Rey Pastor a la Universidad de Buenos Aires[76]. El día 2 de julio dicta la conferencia *Evolución de la Matemática en la Edad Contemporánea* y luego da los cursos *Sistematización de la Geometría* y *Fundamentos de la Matemática*. En el curso de fundamentos Pastor trató los siguientes temas: lógica, teoría de conjuntos, concepto de número, números transfinitos, geometría axiomática y teoría de funciones. Terminados los cursos se va a España y regresa nuevamente a Argentina en 1921 para la creación del Doctorado en Matemática, quedando contratado como profesor por seis años a partir de 1922. Posteriormente llegan Luis Santaló en 1939 y Francisco Vera en 1943. La obra de Rey Pastor relacionada con el cálculo fue parte de los estudios universitarios de matemática en los programas de ingeniería en el Caribe Colombiano.

Marcada influencia en la enseñanza de la matemática en el Caribe ejerció la obra de Pablo Miquel Merino (1887-1944). Este matemático cubano introduce el término conjunto para hacer referencia a los números en su texto *Elementos de Álgebra Superior,* cuya primera edición aparece en 1914, tres años antes de que los conjuntos

[76] De León, M y González, F (2003). Mirando hacia atrás. *La Gaceta de la RMSE*, 6(1), 243-246.

aparecieran en Argentina. Miquel estudia en la Universidad de Deusto en España durante los años 1904-1905, y se regresa a La Habana para concluir sus estudios de Matemática, Ingeniería Civil y Arquitectura. En Colombia es conocido por sus textos de *Cálculo Diferencial e Integral*, pero sin lugar a dudas, es meritorio su aporte a la enseñanza de los conjuntos haciendo mención a dicho término con la siguiente definición: "Se denomina *conjunto de números*, a la reunión de todos los números que satisfacen exclusivamente a condiciones dadas."[77]; luego dice que, "Cada número de los que forman un conjunto se llama *elemento*, y también *punto*; pero se pueden tener conjuntos en que los elementos sean sistemas de números". La obra de Miquel es pionera para América en el tema de conjuntos y lo más probable es que este concepto lo trajo de España tal como aconteció con Rey Pastor.

En los países de América Latina la introducción de los conjuntos en los niveles de educación primaria y media se dio en la década de los setenta, y lo mismo sucedió para las disciplinas universitarias donde la matemática se emplea como herramienta. Pero lo mismo no ocurrió en los programas de matemática pura, donde los conjuntos hicieron presencia tempranamente; así por ejemplo, en Chile, el primer curso de fundamentos de matemática lo dicta Carlos Grandjot[78] en 1936 en el Instituto Pedagógico; y en general podría decirse que, en América Latina la teoría de conjuntos en los programas de Matemática Pura apareció entre 1930 y 1950.

En Colombia, la enseñanza de la teoría de conjuntos se popularizó a partir de los años setenta tanto en el nivel universitario como en los niveles de primaria y secundaria. En el nivel universitario, la difusión de la matemática moderna y la teoría de conjuntos comenzaron con Juan Horvath, matemático húngaro que trabajo en la Universidad de Los Andes y en la Universidad Nacional de Bogotá entre 1951 y 1957. Horvath utilizó en la enseñanza de la teoría de conjuntos el texto de Bourbaki, posteriormente se introdujeron la teoría axiomática de conjuntos con el texto de Suppes y la enseñanza de la teoría intuitiva de conjuntos con los textos de Lía Oubiña, Halmos y Lipschutz.

[77] Miquel, P (1914). *Elementos de Álgebra Superior*. La Habana: Imprenta Moderna.
[78] Gutiérrez, F y Gutiérrez, C (2004). Carlos Grandjot, tres décadas de matemática en Chile: 1930-1960. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 11(1), 55-84.

Con base en la exposición anterior puede decirse que en el período estudiado existieron cuatro formas de enseñar la teoría de conjuntos en el nivel universitario: axiomáticamente, intuitivamente, en forma mixta presentando las dos opciones anteriores o como parte de un curso de fundamentos de matemáticas o matemáticas iniciales.

3. LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN COLOMBIA

El abordaje de la enseñanza de la matemática en Colombia se hará tomando tres períodos bien diferenciados. El primero comprende los inicios de la matemática en La Colonia y va de 1571 año en el cual se organizan los estudios de arte y teología en el Convento de Nuestra Señora del Rosario a 1826, año en el cual se promulga la Ley de Educación de Santander; el segundo período está comprendido entre 1826 y 1946, fecha en la cual se creó la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional; el tercer período entre 1946 y 1961, año a partir del cual se toma la investigación.

3.1 PERÍODO COLONIAL: 1571 – 1826

Los antecedentes de la historia de la enseñanza de la matemática en Colombia comienzan en España desde antes de la Era Colonial. Durante la Edad Media, ubicada para este trabajo entre los siglos X y XV, España es el centro mundial de la matemática en razón de que estaba bajo la influencia árabe y la labor desarrollada por la Escuela de los Traductores de Toledo; posteriormente, Carlos I (1516-1556) expulsa a árabes y judíos, cierra la Escuela de Toledo y los matemáticos importantes emigran dejando un gran vacío en el avance de la ciencia.

A causa de la decisión de Carlos I, las grandes universidades españolas sufrieron un considerable atraso si se comparan con otras universidades europeas de esa época, situación que empeoró Felipe II en 1518 al prohibirle a los españoles estudiar o enseñar en universidades extranjeras; más tarde, en marzo 3 de 1616, la declaración de la Sagrada Congregación del Índice obligó en España y todos los territorios de su reino la enseñanza de la Teoría Heliocéntrica de Copérnico (Martínez-Chavanz, Cubillos, Poveda y Villaveces, 1993). A pesar de todas esas restricciones, la colonización española de América que empieza en el siglo XVI, debió satisfacer la necesidad de educar a los habitantes de las nuevas colonias para poder implantar el dominio sobre los nuevos territorios conquistados.

Al llegar a América y en particular a Colombia, los españoles utilizaron la Iglesia Católica para establecer su empresa colonial, ella fue la encargada del adoctrinamiento y la imposición de una nueva cultura y por lo tanto de una nueva lengua, lo que se oficializó con la instauración de la Real Audiencia de Santafé de Bogotá en 1550.

Los primeros en llegar al territorio del Nuevo Reino de Granada fueron los Dominicos quienes fundan a mediados del siglo XVI conventos, entre ellos el Convento de Nuestra Señora del Rosario organizado en enero de 1571, centro en donde se impartió educación para los hijos de los conquistadores y los indios considerados como principales, enseñándoseles gramática por parte del padre Fray Martín de Santo Tomás (Abu Abara, Bermúdez y Ferreira, 1981). También aquí se dieron estudios superiores en arte y teología como parte de la preparación para la carrera eclesiástica; más tarde, con la Bula del Papa Gregorio XIII del 13 de junio de 1580, el Convento se convierte en Colegio - Universidad de Santo Tomás de Aquino de Santafé de Bogotá. Los estudios de los Dominicos dedicaban tres años a las artes y cuatro años a la teología, consistían en la enseñanza del tomismo rígido[79] apoyado en los textos de Santo Tomás, Antonio Goudin[80] y Aristóteles.

El modelo de universidad para América Latina fue el de la Universidad de Alcalá de Henares, modelo presentado de manera híbrida bajo las modalidades Convento-Universidad, Colegio-Universidad o Seminario-Universidad; la estructura, la organización y la legislación de la Universidad se orientaba de acuerdo con la

[79] Soto, D (1996). Aproximación histórica a la Universidad Colombiana. Los estudios superiores en el período colonial. Colciencias.

[80] Antonio Goudin (1639 – 1695) escribió su obra en cuatro volúmenes con el título "Philosophia tomística juxta inconcussa tutissimaque Divi Thomae dogmata. El primer volumen trataba la lógica parva y magna, según las Súmulas de los comentarios de Porfirio y del Organon de Aristóteles; el segundo la física general, el movimiento, los cuerpos celestes, la geografía, las reacciones de los cuerpos, etc.; los otros dos trataban la metafísica y la filosofía moral. La obra fue utilizada a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII y una de las razones para su estudio fue que Goudin era Dominico y esta congregación era la más influyente en el territorio de la Nueva Granada en esa época.

constitución de la Universidad de Salamanca. Debido a esta situación, los estudios se realizaban en los conventos y colegios, siendo la Universidad un ente de tipo administrativo encargada de la legalización[81] de las titulaciones; así que, la Universidad Tomística otorgaba los grados a estudios realizados en los colegios y conventos como el de Nuestra Señora del Rosario.

En 1590 llegan los Jesuitas y organizan en 1592 el *Colegio Real Mayor* que a partir de 1605 se llamó *Seminario de San Bartolomé*. En el Colegio de la Compañía de Jesús se podía obtener los grados de Maestro, Bachiller, Licenciado en Artes y Doctor en Teología; el plan de estudios comprendía las asignaturas de gramática (latinidad), lecciones de teología, escolástica, moral, humanidades y retórica. Estas dos últimas se dictaban en secciones por aparte. La filosofía se estudiaba en la Facultad de Artes y comprendía lógica, metafísica y filosofía y moral; la lógica se estudiaba según los textos de Toledo, Fonseca y Aristóteles; la metodología utilizada para las clases consistía en media hora de pre lectura convertida a veces en media hora de dictado, luego venía una explicación por parte del director del curso y al final los ejercicios de discusión acerca de los contenidos estudiados, coordinados por un alumno.

A finales del siglo XVI la educación en España comprendía los siguientes niveles educativos: escuela de primeras letras, gramática, primer ciclo de artes (filosofía), segundo ciclo de artes (filosofía), teología y medicina. En el nivel de primeras letras se enseñaba a leer, escribir y nociones de aritmética para la vida diaria relacionada con el contar; en el nivel de gramática se enseñaba únicamente latín; en el nivel de artes se enseñaba el cuadrivium medieval: aritmética, geometría, astronomía y teoría musical; en teología se preparaban los sacerdotes en medicina los futuros médicos.

En los comienzos de La Colonia el currículo de educación superior era el currículo medieval que comprendía el Trívium o Scientae Sermocinales (lógica, gramática y retórica) y el Cuadrivium (aritmética, geometría, astronomía y música). Estas

[81] El término legalizar se refiere a la potestad de conceder títulos universitarios; es decir, la obtención de la licencia o permiso (Bula papal) para ello.

asignaturas se conocían como las siete artes liberales. La gramática comprendía el estudio del latín, requisito esencial para poder estudiar los textos de la época escritos en esa lengua.

Durante la época colonial, los estudios de lógica se realizaron en torno a los escritos de San Agustín basados en el Organon de Aristóteles, pero también es de mencionar la importancia que dieron a la lógica los Jesuitas al introducir las Súmulas[82] de Pedro Hispano[83], la Lógica Magna y la Isagoge[84] de Porfirio. El estudio de las Súmulas precedía al del Organon.

Los Jesuitas fueron los primeros en enseñar un currículo de filosofía con características de ilustrado poco después de la segunda mitad del siglo XVIII. En esos tiempos la filosofía hacía parte de las llamadas Facultades Menores o de Artes; las Facultades Mayores comprendían teología, derecho y medicina; la enseñanza de la matemática y la lógica se daba en el primer año de los estudios de filosofía, algunas veces en forma conjunta como una misma materia, otras veces en forma separada y otras como un curso propedéutico. Los contenidos de lógica se dividían en dos partes: la lógica mayor o disputativa y la lógica menor o formal incluyendo algunos aspectos metodológicos; sin embargo, Lértora (2000)[85] afirma que después de revisar algunos documentos de la época, la lógica fue escolástica, por lo tanto no podría hablarse de Pre Ilustración sino más bien de intentos de ella por parte de los Jesuitas Mateo Mimbela y Mateo Folck. También enseñó lógica en la Javeriana entre 1728 y 1735 el Jesuita Ignacio Ferrer (1649-1759) quien además escribió el libo *In Logician.*

[82] Las súmulas, en términos generales, son compendios sobre un determinado saber.
[83] Estas súmulas fueron publicadas bajo el título Summulae logicales, obra que es un compendio sistemático de la lógica, cuyo objetivo era preparar al estudiante para las disertaciones públicas contempladas en los cursos de retórica.
[84] La palabra Isagoge significa introducción, luego la obra de Porfirio es una introducción al Organon, pero a diferencia de Aristóteles, procede en forma inversa para describir el camino gnoseológico del individuo, comenzando con las especies, luego el género y finalmente el individuo.
[85] Lértora, Celina (2000). Notas sobre la filosofía académica pre ilustrada en la Nueva Granada. En Olmedo Vargas (Ed.), Archivos y documentos para la historia de la educación colombiana. (pp. 13-27). Tunja: UPTC.

Según Izquierdo (1982), durante La Colonia, la lógica se consideró como escolástica postumalista, para distinguirla de la lógica escolástica presumalista a la cual pertenece el desarrollo lógico hasta los escritos de Pedro Hispano en 1236 y la lógica sumalista caracterizada por los avances del período renacentista hasta aproximadamente 1550. La enseñanza de la lógica en los colegios, conventos y universidades siguió tres caminos, partiendo siempre de Aristóteles. Los dos primeros correspondieron a la lógica según Tomás de Aquino y Duns de Escoto, de esencia netamente escolástica, las que consideraban los universales como reales; el tercer camino correspondió a los nominalistas, quienes consideraban que los universales no eran reales sino simples objetos individuales. En la enseñanza de la lógica prevalecieron los dos primeras corrientes hasta finales del siglo XVIII.

Para la enseñanza de la matemática como parte de la filosofía los Jesuitas utilizaron los escritos de José de Urbina[86] y Mateo Mimbela, quienes trabajan sobre los indivisibles y el continuo en el campo infinitesimal. Urbina estudia el continuo descrito como "aquello cuyas partes se unen por un término común" y afirma que "indivisible añadido a indivisible no da extensión mayor" (Martínez Chavanz, 1993, p. 69). Estudia también el infinito y el sistema de categorías de Aristóteles continuado por Tomás de Aquino.

El continuo también es tratado por Juan Duns Escoto (1266-1308) en su libro *Manuscrito Número Seis*. En el Jesuita Urbina se encuentran tal vez los primeros inicios sobre los fundamentos de la matemática en Colombia. Según este filósofo[87], el continuo consta tanto de partes como de indivisibles, en el continuo geométrico existen más elementos que ángeles, de tal manera que se deja ver la idea del infinito potencial aunque no se afirma si el conjunto de los Ángeles es infinito. Estas ideas están consignadas en el manuscrito sobre la Física Aristotélica *Disputationes in octo libros physicorum artis Stagiritae* que data de 1647.

[86] José de Urbina nació en Cáceres (Antioquia) en 1610 y muere en Santa Fe en 1665. Fue catedrático de filosofía y teología moral de la Javeriana y rector del San Bartolomé. Según sus escritos es un precursor del análisis infinitesimal y la teoría de conjuntos.
[87] García, J (1955). Antología del pensamiento filosófico en Colombia 1647-1741. Imprenta nacional de Bogotá.

Hacia el año 1700 las grandes universidades españolas se dedicaban a la literatura y la teología debido a tres hechos importantes: La Contrarreforma, la prohibición de Felipe II de que los españoles estudiaran o enseñaran en universidades extranjeras y la negación de la Teoría Heliocéntrica de Copérnico por parte de la Sagrada Congregación del Índice de marzo 3 de 1616. Más tarde, la instauración de La Inquisición retrasó el estudio de las ciencias.

La enseñanza de la matemática en la Nueva Granada incluida en la filosofía se impartía según el currículo de Alcalá de henares y la organización administrativa era similar a la de la Universidad de Salamanca. Después de la primera mitad del siglo XVIII, el movimiento de la Ilustración en España hace posible una apertura en la educación de los hombres enviando Ilustrados a los territorios de América.

Mutis (1732-1808) llega a la Nueva Granada el 29 de octubre de 1760 enviado por Carlos III[88] como médico del Virrey Pedro Mexia de la Cerda, estudió teología, filosofía y medicina en Cádiz. Mutis trajo consigo los conocimientos matemáticos de su época en España los cuales fueron adquiridos en los cursos de filosofía y en los textos que poseía a los cuales tenía relativamente fácil acceso por su dependencia de la Iglesia Católica y por parte de su padre, comerciante de libros. Estos aspectos fueron claves porque para ese tiempo Cádiz había desarrollado un importante comercio con América y Mutis tenía conocimiento de las últimas obras difundidas en España.

El arribo a Santa Fe de Bogotá fue el 24 de febrero de 1761 y su labor se centró en dos frentes, el primero como director de la Expedición Botánica, ya que su objetivo principal era la botánica en donde se proponía realizar un trabajo similar al del botánico Hernández quien en el siglo XVII había explorado la flora en la Nueva España; el segundo, como catedrático de matemáticas del Colegio mayor de Nuestra Señora del Rosario, donde el 13 de marzo de 1762 dicta su primera lección de matemática para

[88] El reinado de Carlos III de Borbón fue entre 1759 y 1788, impulsor de la ilustración en España y América, hasta llegar a ser uno de los representantes del despotismo ilustrado, rescata el pensamiento de Leibniz ya que en 1765 se publica la obra "Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano"

inaugurar los estudios de esta ciencia, continuando su enseñanza hasta 1777 con algunas interrupciones, de tal manera que su tiempo real de enseñanza fue de aproximadamente siete años.

Mutis realmente no quería dedicarse a la matemática, su paso por ella se debió al desconocimiento que se tenía en la Nueva Granada sobre esta ciencia y la ciencia física, su objetivo principal era la botánica; por ello, ante las prolongadas y continuas interrupciones de su cátedra, asumió clases privadas para Francisco Antonio Zea, Eloy Valenzuela y Fernando Vergara con el propósito de completar la formación de estos, preparándolos para la enseñanza universitaria. Al final fue Vergara quien reemplazo a Mutis en la cátedra de matemáticas.

La enseñanza de Mutis estuvo basada principalmente en la obra de Benito Bails (1730-1747). Consideraba la matemática como el conocimiento de la cantidad discreta y continua, entendiéndose por cantidad todo aquello que puede aumentar o disminuir (Hernández de Alba, 1983), saber matemáticas era comprender el universo el cual está enteramente escrito en símbolos matemáticos para poder contemplar y alabar la obra de Dios como creador del mismo. “La matemática contiene los preceptos de la lógica, las leyes matemáticas son las que gobiernan el mundo considerado este como un sistema de máquina”, “la matemática es el *leit motiv* y telón de fondo que sirve de trama a los fenómenos de la naturaleza, siendo la experimentación y la observación las que sancionan y validan las explicaciones” (Martinez-Chavanz, op cit, p. 78). Esta visión de Mutis sobre la matemática cae dentro del empirismo, ya que pone de manifiesto la observación y la experimentación como elementos para fundamentar su afirmación.

En su Lección Inaugural titulada *Método Matemático*, Mutis expone un método para la construcción y enseñanza de la matemática, método que es precisamente el axiomático de Euclides o método geométrico, basado en tres reglas generales.

> *La primera es, que de las ideas más sencillas y generales se ha de subir a las más compuestas y menos generales.*

> *La segunda es, que en la definición de los términos nada quede obscuro, nada quede ambiguo.*
> *La tercera es, que todas las proposiciones, cuyas verdades no constan a primera vista por la significación y percepción de los mismos términos con que se enuncian, se hayan de probar mostrando muchas verdades, y por medio de las definiciones supuestas, los axiomas concedidos y las proposiciones ya demostradas.* (Hernández de Alba, 1983, p. 73)

De acuerdo con esta exposición, Mutis propone en esencia para la presentación de la matemática el método axiomático, y para su enseñanza el método deductivo[89].

Desde el discurso inicial que inaugura la Cátedra de matemáticas en la Nueva Granada, Mutis da mucha importancia a la necesidad de utilizar la lógica en el desarrollo de las argumentaciones y las demostraciones de los teoremas, al afirmar que

> *…para que la demostración sea perfecta, las premisas de los silogismos se han de ir probando siempre hasta llegar a un silogismo en el cual las premisas hayan de ser o definiciones que ya se concedieron, u otras proposiciones idénticas que no se pueden negar. (Arboleda, 1993, p. 66)*

La rigurosidad de la prueba matemática depende de la fuerza que le da el silogismo a través de un orden estricto proporcionado en el procedimiento deductivo por el método axiomático, contrario a lo expresado por otros en esa época, donde la fuerza o validez de la prueba dependía del poder de persuasión de la misma.

[89] El método axiomático es en esencia un método deductivo, no completamente riguroso porque se sabe de las vicisitudes del quinto postulado de Euclides; sin embargo, para la época fue algo esencial porque los *Elementos* en cierta forma fundamentaban la matemática en términos de fundamentals. Mutis cuando habla de método deductivo se refiere al procedimiento como tal, al proceso lógico para demostrar o deducir, a la utilización de la lógica como una caja de herramientas.

La enseñanza de la matemática basada en el método deductivo comprende la enunciación de definiciones claras y el proceso de demostración. El proceso demostrativo se lleva a cabo mediante una concatenación de silogismos insertando adecuadamente los axiomas o postulados, lemas, teoremas y definiciones, que permitan la demostración de proposiciones, el desarrollo de las teorías y la resolución de problemas, deduciéndose de este proceso los corolarios y los escolios[90]. Este método descrito por Mutis es el método geométrico heredado de la geometría Euclidiana.

Para la enseñanza de la matemática, Mutis propone el 11 de enero de 1787 en la sede de la Expedición Botánica en Mariquita un plan provisional, con el objeto de difundir la matemática en el Nuevo Reino de Granada, motivando a la juventud para ese propósito. Propone como textos de enseñanza los *Principios de la Matemática* de Benito Bails[91] publicados en 1776, en vez de la obra de Wolff a la que consideraba defectuosa por no ser completa. Estos textos contienen aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales y otras temáticas pero no tratan la lógica en ninguno de los volúmenes, lo cual permite colegir que Mutis utilizó otros libros en la preparación de su cátedra, debido a su insistencia en el rigor lógico dentro de las demostraciones matemáticas.

Respecto a la obra de Wolff señala Arboleda citado por Uribe (2005) indica que

> *…para los propósitos de divulgar el pensamiento ilustrado en la Nueva Granada era menester pasar por la fase de transición y Mutis anacrónicamente asume la labor Wolffiana de desarrollar en Colombia, en la Nueva Granada, una fase de transición que permitiera aclimatar una cultura, los elementos de una cultura física y matemática, y con posterioridad a ello dar un salto a la fase*

[90] Los corolarios son pequeños teoremas para casos especiales o consecuencias de un teorema, cuya demostración es casi inmediata y se deducen de un teorema. Los escolios son observaciones hechas sobre un teorema previamente demostrado o deducciones bastante obvias de este o de un corolario.
[91] Se conoce la versión de esta obra publicada en once volúmenes entre 1772 y 1784, en ese momento Mutis solamente conocía nueve.

> *superior en la cual se pasara a un pensamiento ya mucho más desarrollado*. (p. 307)

De acuerdo con el plan propuesto por Mutis, los estudiantes se agrupaban en dos categorías. Los alumnos de asistencia necesaria considerados como futuros matemáticos de profesión, y los de asistencia voluntaria o aficionados a la matemática. Con la primera denominación Mutis establece en Colombia la profesión de Matemático, y deja por sentado la necesidad o tal vez el requisito de saber matemática para poder llegar a la dirección del gobierno.

La cátedra de matemáticas de Mutis se desarrolló en varios momentos. Después de la Lección Inaugural en marzo 13 de 1762 esta no comienza enseguida sino a partir de 1763 y hasta 1776, luego viene un segundo momento desde 1770 hasta 1778 aproximadamente, al suprimirse[92] oficialmente la enseñanza de la matemática durante la vigencia del Plan Moreno y Escandón por oposición del clero; se reabre nuevamente en octubre de 1786 por orden del Virrey Caballero y Góngora, siendo atendida por Fernando Vergara como adjunto de Mutis, prontamente se clausura por falta de estudiantes; finalmente, en 1802 se restablece en el Colegio Mayor del Rosario, teniendo como profesor a Jorge Tadeo Lozano, nombrado por el Virrey Mendinueta.

El plan provisional de Mutis para la enseñanza de las matemáticas en el Colegio de Nuestra Señora del Rosario fue un aporte pedagógico, ya que sus escritos estuvieron dirigidos hacia la difusión y la enseñanza de la matemática, así que si Euclides fue un sistematizador de la matemática, Mutis fue un difusor de ella en su gestión de transferir y difundir La Ilustración, en una tierra donde el conocimiento de las ciencias era muy precario y en ciertos casos ausente a causa del Escolasticismo y la Inquisición, elementos controladores de la educación y de las ideas científicas.

[92] La enseñanza de la matemática fue suprimida por la Junta Superior de estudios según la Real Cédula de 18 de julio de 1778.

Aunque mutis no realizó aportes a la ciencia matemática, escribió varios trabajos en los cuales deja constancia de su legado pedagógico entre los que están *El método matemático*[93], *Comentarios sobre la geometría de M Descartes*, *Elementos de aritmética*, *Para el estudio de la física*, el *Plan provisional para la enseñanza de las matemáticas*, el *Discurso preliminar* y *Elementos de filosofía natural*, en donde justifica el porqué se debe estudiar la obra de Newton y además describe los fenómenos de la naturaleza y sus causas, explicando también la relación entre ellos y el orden armónico[94] de la naturaleza. En su obra es importante destacar lo siguiente:

- Introduce en la Nueva Granada la enseñanza formal de la matemática.
- Propone un método y un plan para la enseñanza de la matemática.
- Reconoce la profesión de Matemático.
- Vislumbra la necesidad de fundamentar la matemática.
- Reconoce que el desarrollo de la matemática es un determinante para el desarrollo de una nación.

El segundo momento de la cátedra de Mutis transcurre en gran parte durante la instauración de un plan educativo para la enseñanza superior propuesto por el Fiscal Francisco Antonio moreno y Escandón en 1774, quien proponía una universidad pública de estudios generales independiente del Clero pero dependiente de la Corona, tal como sucedía en México y Lima. Según el Plan Moreno y Escandón, en la educación superior los tres primeros años estaban dedicados a un curso introductorio de filosofía, enseñando en el primer año matemáticas, en el segundo año física y el tercero filosofía natural. Se proponía también la enseñanza de las ciencias útiles para recuperar el tiempo perdido a causa del Escolasticismo dedicado a las ciencias especulativas. En general los estudios preuniversitarios eran cuatro años de latín y tres de filosofía enseñándose

[93] Mutis no recomendó el texto de Christian Wolff "Elementa Matheseos universae"; no obstante, este trabajo es una explicación ampliada de la sección correspondiente al primer capítulo del libro primero de Wolff en su sección introductoria titulada "De método mathematica. Commentatio brevis" que consta de 29 párrafos en los cuales se expone el método geométrico de Euclides como método matemático.

[94] El orden armónico de la naturaleza fue comprobado o redescubierto por los discípulos de Mutis al mostrar la divina proporción, media y extrema razón o sección áurea. La sección áurea se obtiene cuando un segmento de línea recta se divide en otros dos segmentos de longitudes a y b de tal manera que $((a+b)/a) = (a/b)$. Los segmentos forman la sucesión de Fibbonacci.

lógica en el primer año, metafísica en el segundo y física en el tercero, pero con el plan se propuso modificar los tres años de filosofía.

Este plan, influido por el movimiento de La Ilustración[95] preparó una élite de criollos ilustrados que logró intervenir en la enseñanza del Colegio Mayor del Rosario, el Colegio de San Bartolomé y el Real Colegio Seminario San Francisco de Asís de Popayán, siendo en este último catedrático de filosofía José Félix de Restrepo[96], graduado en jurisprudencia en 1778 con estudios en el San Bartolomé, catedrático del Colegio mayor de San Bartolomé 1778-1880 y 1822-1826, del Seminario de Popayán 1782-1812 y la Universidad de Antioquia[97] 1812-1819.

En los inicios del siglo XIX suceden dos hechos importantes. La llegada a la Nueva Granada del ingeniero Bernardo de Anillo permite la fundación de la Primera Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas del Nuevo Reino, Escuela que él mismo dirigió y en la cual dio clases de matemáticas, por tal razón se le considera el primer profesor de matemáticas[98] de la Nueva Granada, ya que Mutis, Vergara, Lozano y Caldas fueron profesores de filosofía, cátedra que incluía la matemática. El segundo hecho importante fue la creación de la *Academia de ingenieros militares de Medellín* en 1814, donde Caldas fue profesor de matemática, academia que tuvo una vida efímera debido a la persecución de los criollos ilustrados por parte de Morillo quien fusila a Caldas en 1816.

[95] La ilustración fue un movimiento que tuvo su origen en Kant con el propósito de sacar al hombre de su minoría de edad, es decir, sacarlo del atraso y la dependencia para que pueda valerse intelectualmente por sí mismo. Este movimiento adquiere diversas formas dependiendo de la cultura del país donde se da, así que para el caso de España, las reformas borbónicas buscaron la modernización del estado, el bienestar social e individual, la proclamación de la felicidad y la sabiduría. El logro de tales propósitos implicaba replantear la educación, cambiando la enseñanza escolástica presente en las llamadas ciencias especulativas por la enseñanza de las ciencias útiles: matemática, física, geografía, historia natural, medicina, metalurgia, meteorología, agricultura, mineralogía, astronomía y química.

[96] José Félix de Restrepo (1760-1832). Criollo ilustrado antioqueño, realizó importantes aportes en la difusión de la ciencia y en beneficio de la educación de Colombia, contribuyó a la formación de los jóvenes de la élite ilustrada de la Nueva Granada entre los que se cuentan Camilo Torres, Francisco José de Caldas, Francisco Antonio Zea, Francisco Antonio Ulloa y Miguel Pombo.

[97] Se refiere al Colegio de Antioquia o real Colegio Franciscano creado en 1803 bajo la modalidad colegio-convento, que evolucionó hasta convertirse en la Universidad de Antioquia.

[98] Bateman, Alfredo (1940). Apuntamientos para la historia de la ingeniería en Colombia. Ingeniería y arquitectura 1.

Restrepo fue uno de los criollos ilustrados más importantes en las postrimerías del siglo XVIII y principios el siglo XIX, alumno de Mutis y sucesor de la cátedra de matemáticas durante su estadía en Santafé de Bogotá. En el curso de filosofía enseñó aritmética, geometría, trigonometría, álgebra y física experimental; estaba convencido de la importancia de la lógica, pero no de la lógica escolástica convertida en una *jerigonza* amparada en el silogismo, sino en una lógica aristotélica que lleve al razonamiento, sostenía que el verdadero paradigma de un razonamiento lógico, coherente y riguroso eran las matemáticas; la lógica, enseña al hombre a pensar y a examinar sus pensamientos si está lógica va acompañada de las reglas de la crítica para distinguir lo verdadero de lo falso, para evitar los errores en la historia y para regular el uso y los límites de la autoridad (Herrera, s.f.).

La crítica hecha al silogismo por parte de Restrepo se observa en la Oración Inaugural de la clase de filosofía en el Seminario de Popayán en 1791, refiriéndose al texto de Wolff en los siguientes términos:

> *Se atribuye a los filósofos modernos la falta de silogismo; pero es evidente que esta objeción es un idiotismo, y los que la hacen no han leído las obras de los modernos a quienes seguimos. Sobre enseñar a los estudiantes cuánto hay de útil en la lógica peripatética y muy menudamente, la naturaleza y uso del silogismo, el estudio de la geometría y demás partes de la matemática es un continuo ejercicio del silogismo* (Hernández de Alba, 1935, p. 137)

La crítica a la enseñanza de la lógica fue anticipada por Moreno y Escandón al afirmar con respecto a ella que

> *El maestro se abstendrá cuidadosamente del mal método introducido en nuestras escuelas en que se acostumbra a disputar todas las materias con cavilaciones y sofistería inútiles. Si a este mal método se agrega a la inutilidad de las materias introducidas en la lógica, se*

> *conocerá fácilmente el origen de las erradas ideas que acompañan al estudiante por toda su vida. Como hasta ahora se ha tenido por útil máxima la de corromper el entendimiento de los niños, obligándolos a silogizar desde las primeras lecciones y antes de éstas, fecundados con las ideas necesarias, ni dirigida sus mentes con las reglas de las argumentaciones, se debe cortar ese abuso* (Uribe, 2005, p. 309).

La enseñanza de la lógica de Restrepo quedó plasmada en unas notas que escribió para sus discípulos, cuyo estudio era requisito previo al de la geometría y demás temas de la matemática, porque consideraba a la lógica elemento esencial para el raciocinio, característica fundamental de la matemática. Estas notas se convirtieron en el primer texto de lógica publicado en América Latina.

Las lecciones de lógica de Restrepo fueron escritas probablemente a finales del siglo XVIII, pero se conocieron en 1822 en el curso dictado en el Colegio de San Bartolomé. Su exposición está basada en la Lógica de Port Royal,[99] considerada como una lógica clásica moderna, puesto que los textos de Wolff *Elementa matheseos universae* utilizados para la enseñanza de la matemática no tienen contenidos de lógica como se anuncio anteriormente, excepto en el discurso preliminar en donde se expone el método de las matemáticas basado en la lógica mediante 29 proposiciones simples e independientes; no obstante, Wolff a través de la lógica pretendió reducir toda forma de pensamiento a ella y en particular el método demostrativo de la geometría usando silogismos a la manera de lógica aristotélica, de tal modo que la lógica se constituyera en fundamento de la matemática.

Según Jaramillo (2003), la obra de Wolff tiene importancia porque intenta unir la revelación religiosa con la razón, en ella son características el orden, la clara exposición, la rigurosidad de las pruebas, la concepción de la matemática como un

[99] Esta escuela toma su nombre de la abadía de Port Royal, lugar en donde se estableció entre 1602 y 1711. Concibe la lógica como un arte de pensar y no como una ciencia, su objeto principal fue enseñar a pensar correctamente mediante ejemplos prácticos o de la vida real, presentando una variante de la lógica aristotélica dedicada al razonamiento correcto a través del silogismo con ejemplos apartados de la realidad. Sus principales exponentes fueron Antoine Arnauld, Lancelot y Pierre Nicole, seguidores del Jansenismo.

sistema, la minuciosidad clasificadora y un modo arquitectónico de pensar, características tomadas por Restrepo como parte fundamental de su concepción sobre la naturaleza que enseñó a sus alumnos.

La Lógica de Port Royal tiene como fundamento la obra de Arnauld y Nicole *La Lógica o el Arte de Pensar*. Esta obra presta atención especial al lenguaje como medio para expresar el pensamiento, no obstante, en la tercera parte de ella se limita a explicar las reglas de inferencia modus ponens, modus tollens, el silogismo disyuntivo y el dilema constructivo, y en la cuarta parte titulada *Sobre el Método* expone dos reglas relacionadas con las definiciones[100], dos para los axiomas[101], dos para las demostraciones[102] y dos para el método.[103]

Los Elementos de la Lógica de Restrepo comprenden diez lecciones divididas en cuatro partes. La primera parte consta de la lección primera y en ella da la noción de idea o simple percepción clasificándolas en razón de su objeto (simple y compuesta), su origen (adventicias, fácticas e innatas) y su extensión (universales, particulares y singulares); al final de la lección expone las reglas para una buena división y una buena definición. El concepto de división expuesto por Restrepo es precursor del concepto de partición, al hacer mención del carácter de exclusión o de intersección vacía entre los miembros de la división. Define la lógica como “aquella facultad que dirige al entendimiento en conocer y explicar la verdad. También se llama dialéctica, quiere decir disputatoria porque enseña el arte de disputar, impugnando y defendiendo” (Restrepo, 2002, p. 25).

---

[100] 1. Los términos un poco oscuros o equívocos han de ser definidos.
2. Sólo se han de usar en las definiciones términos perfectamente conocidos o ya explicados.

[101] 1. Sólo se ha de postular como axioma lo que es perfectamente evidente
2. Se ha de aceptar como evidente lo que para ser conocido como verdadero sólo precisa de poca atención

[102] 1. Probar todas las proposiciones un poco oscuras, no empleando para su prueba más que las definiciones ya establecidas o las proposiciones que ya hayan sido demostradas.
2. Evitar los términos equívocos sustituyendo mentalmente las definiciones que los delimitan y lo explican.

[103] 1. Tratar las cuestiones, en tanto sea posible, según el orden natural, comenzando por las mas generales y más simples, así como explicando todo lo que es propio de la naturaleza del género antes de introducir lo que pertenece a las especies particulares.
2. Dividir, en tanto sea posible, cada género en todas sus especies, el todo en sus partes y cada dificultad en sus casos.

La segunda parte consta de las lecciones segunda a sexta y se ocupa en ellas del juicio como "acto con que nuestra alma afirma o niega alguna cosa" (Restrepo, 2002, p. 30). La expresión de un juicio en el lenguaje se llama proposición y consta de sujeto, cópula y predicado, donde las conectivas lógicas representan las cópulas. En la lección tercera introduce el concepto de probabilidad, en la cuarta enuncia 33 reglas que permiten admitir una proposición por medio de la razón y la autoridad; en la lección quinta expone las reglas para *discerni*r sobre la originalidad de una obra, argumentando que es más conveniente leer un libro en su lengua original para evitar traducciones defectuosas; la lección sexta se refiere a las precauciones que deben tenerse en cuenta antes de emitir un juicio y para ello muestra algunos ejemplos a partir de sucesos probabilísticamente independientes, encontrándose aquí antecedentes de la lógica intuicionista. Las lecciones sexta bis y séptima se refieren a algunas reglas específicas para la argumentación como el silogismo, el dilema, la analogía y el principio de inducción, señalando que este último debe usarse con precaución, pues debe ser válido para la totalidad de individuos de una misma especie.

La última parte titulada *Del método*, corresponde a las lecciones octava y nona. Aquí propone los métodos analítico y sintético como los principales de la argumentación, correspondiéndose el método sintético con el método axiomático tal como lo describe en las siguientes seis reglas:

1. *Se ha de explicar primeramente cual es la verdad que deseamos enseñar.*
2. *Se han de definir o explicar los términos que deben servir para la inteligencia de la verdad propuesta y para formar las demostraciones.*
3. *Después de las definiciones se colocan los axiomas; y si nos hemos de valer de algún principio que pertenezca a otra facultad, se pone después de los axiomas con nombre de hipótesis.*
4. *En aquellas materias que se conocen por experiencia se han de poner delante los experimentos u observaciones de donde se deducen las consecuencias posteriores.*

5. *La materia de que se trata se divide en distintas proposiciones; y cada una de sus casos particulares colocándolas con tal orden que las primeras descubran la verdad de las siguientes.*
6. *Después de cada una de las proposiciones se ponen los corolarios o consecuencias que de ellas se siguen; y luego los escolios que sirven para la más plena inteligencia.* (Restrepo, 2002, p. 58)

Enuncia además otras reglas relacionadas con el cuidado que se debe tener con el lenguaje en la presentación de las demostraciones buscando claridad y elegancia evitando el abuso o palabrería. Estas reglas obedecen a una de las características de la Lógica de Port Royal, que pone especial atención al lenguaje como herramienta fundamental para la libre expresión del pensamiento y para enfrentar situaciones nuevas aparecidas generalmente en los debates. Termina la cuarta parte con las reglas de la disputa, el defendiente y el oponente, las cuales están relacionadas con el alegato jurídico.

Se cierra entonces con Restrepo una etapa de surgimiento de la matemática dominada ampliamente por el escolasticismo, ya que en todo momento la matemática no fue una temática independiente, siempre estuvo atada a la filosofía como parte de ella limitando su evolución tanto en lo conceptual como en la formación de los individuos, pues como se vio, los estudios superiores eran solamente accesibles a una élite que se preparaba para gobernar. Finalmente es importante destacar que Restrepo en su obra fusiona de manera muy conveniente las ideas de Wolff, Mutis y Port Royal en un compendio didáctico y actualizado para su época. Con sus ideas de ilustrado quiso instituir el estudio de la ciencia, la filosofía natural y la matemática moderna a imagen y semejanza de Leibniz en su obra *Teodicea*, mostrando la matemática como un método para "rectificar el pensamiento, ordenar las ideas, construir juicios y desarrollar investigaciones para encontrar verdades" (Rincón, 2008, p. 78).

3.2 LA MATEMATICA EN LA NUEVA REPUBLICA: 1826-1866

Habiéndose dado la independencia de Colombia en 1819 y creándose la Gran Colombia el 17 de diciembre del mismo año, el estado de la matemática no varió, porque en la nueva sociedad se conservaba la misma estructura heredada del Imperio Español; más aún, se sentía el poderío de los españoles dueños ellos o sus hijos de muchos negocios aún conectados con España. En lo educativo, la mayoría de los colegios seguían con el currículo dominado por la literatura y la filosofía, las universidades seguían bajo el dominio de la Iglesia Católica, la carencia de textos y de personal competente para la enseñanza era muy alta y la educación primaria y secundaria se daba de forma muy precaria.

La Gran Colombia heredó las instituciones educativas de La Colonia, pero era necesario ampliar la cobertura de la educación y convertir a esta en pública; entonces, con fecha 6 de octubre de 1820, Santander, Vicepresidente de la República, emite un decreto ordenando crear escuelas primarias en toda comunidad con más de treinta familias enseñando lectura, escritura, religión, las operaciones básicas con números naturales e instrucción cívica. Esta enseñanza fue impartida en forma igual para todos los niños.

Habiéndose establecido la educación pública, esta posteriormente fue organizada el 2 de agosto de 1821 con la implantación del sistema escolar poco después del Congreso de Angostura y la firma de la Ley Fundamental de la Unión de los Pueblos de Colombia el 12 de julio de 1821. La Ley del 6 de agosto de 1821 ordenaba abrir escuelas de niñas en los conventos de monjas y luego otra ley en la misma fecha imponía abrir escuelas de niños en comunidades con más de cien habitantes. Con esta serie de leyes el gobierno dio un paso adelante en la masificación de la educación primaria, pero paradójicamente no dispuso de fondos adecuados para el sostenimiento de las escuelas.

En cuanto a la educación secundaria, durante el Congreso de Cúcuta, se expide la Ley del 6 de agosto de 1821 para crear en cada provincia al menos un colegio con dos cátedras, la primera incluyendo gramática española, latín y retórica, y la segunda, filosofía y matemáticas, temáticas que podían variar según las necesidades de cada provincia (Ahern, 1989). Estas cátedras prácticamente eran continuación de las impartidas en La Colonia, con la diferencia de que la matemática ya no hacía parte de la filosofía. Para esa época el Colegio San Bartolomé enseñaba latín, teología, matemáticas y filosofía moral y natural.

En el nuevo sistema escolar, el gobierno se propuso fundar y financiar en las ciudades Bogotá, Caracas y Quito Escuelas Normales donde la enseñanza se haría bajo el Modelo Lancasteriano.[104] Mediante un Decreto del 28 de julio de 1823, el Congreso autorizó a Francisco Antonio Zea contratar en Francia profesores de matemáticas, mineralogía y ciencias médicas, con la condición de crear escuelas en estas disciplinas (Ahern, óp. cit); no obstante, la enseñanza universitaria seguía realizándose en las universidades coloniales.

Bajo la vicepresidencia de Santander (1819-1827), se promulga la primera reforma educativa de la Gran Colombia el 18 de marzo de 1826, conocida como la Ley de Educación de Santander. Se crean las universidades públicas de Quito, Caracas y Bogotá, cada una de ellas con las Facultades de Filosofía, Jurisprudencia, Medicina, Teología y Ciencias Naturales; además, desautoriza a la Universidad Tomística para conceder títulos universitarios, convirtiendo los Colegios de San Bartolomé y Mayor del Rosario en instituciones educativas sin carácter oficial. La Ley es reglamentada con el Decreto del 3 de octubre del mismo año, el cual se estableció un plan único de estudios para los niveles de enseñanza primaria, secundaria y universitaria. Este plan establece el pensum para los estudios universitarios, expresado en el artículo 173 de la siguiente manera:

> *La clase de filosofía y ciencias naturales comprende las cátedras siguientes: Una de matemáticas; una de física general y particular; una de geografía y cronología; una de ideología y metafísica, gramática general y lógica, una de moral y derecho natural. La*

[104] El sistema lancasteriano o de enseñanza mutua fue diseñado por Joseph Lancaster en Southwark, Inglaterra. Su objetivo principal fue la preparación de monitores a través de la capacitación de jóvenes talentosos que luego se convertirían en profesores.

> *historia natural comprenderá tres cátedras: una de mineralogía, arte de minas o geognosia; otra de botánica y agricultura y una de zoología. Una en fin de química y física experimental.*

El Colegio de Boyacá se fundó el 17 de mayo de 1822, bajo la dirección de los Agustinos y posteriormente de los Jesuitas; en 1827 por decreto de Santander se eleva a la categoría de Universidad y en 1830 se convierte nuevamente en Colegio debido a la carencia de profesores universitarios. Con la Ley del 28 de julio de 1823 se crea la Escuela de Minas y el Museo Nacional que inicia labores en 1824 bajo la dirección de Mariano Rivero, impartiéndose las cátedras de mineralogía, geología, química general y analítica, metalurgia, mecánica, geometría descriptiva, dibujo y matemáticas elementales; posteriormente, en 1826 se funda la Academia Nacional y la Ley del 18 de marzo de 1826 junto con el Decreto 3 de octubre del mismo año adoptan los textos de Bentham en las Universidades de Bogotá, Caracas y Quito.

Las ideas de Bentham eran conocidas desde 1822 en la nueva república ya que se hablaba de estas en el Periódico *La Bagatela* de Antonio Nariño. Bolívar era amigo personal de Bentham, a quien conoció en Inglaterra en 1810, y como Santander poseía cierta influencia inglesa, estas razones fueron determinantes para la implantación del Modelo Pedagógico de Bentham, además dicho modelo hacía énfasis en la necesidad de calcular, característica importante para la enseñanza de la matemática instrumental que se daba en la educación elemental y secundaria. El Benthamismo fue descartado por Bolívar mediante el Decreto del 12 de marzo de 1828 por atentar contra la moral y las enseñanzas de la Iglesia Católica y porque además era del agrado de Santander con quien Bolívar tenía serias discrepancias.

Las reformas educativas de Santander establecieron una clara división entre colegios y universidades. El Decreto Ejecutivo del 3 de octubre de 1826 señala que los estudios de derecho, teología y medicina quedan a cargo de las universidades, los de filosofía y letras estarían reservados para los colegios en donde se obtendría el título de bachiller; no obstante, la Universidad de Cartagena creada por el Decreto de 6 de octubre de 1827, cuyas labores se iniciaron en 1928, tenía anexa la Facultad de Filosofía y Letras. En

1827 se funda también la Universidad del Cauca o Universidad del Tercer Distrito según el Decreto de abril 24, con estudios de filosofía, matemáticas, teología y jurisprudencia. Los estudios de matemáticas no conducían a ningún título por estar incluidos en la filosofía.

Uno de los principales impulsadores de la matemática en la Universidad del Cauca fue Lino De Pombo, el primer ingeniero colombiano, formado en la *Escuela de Puentes y Calzadas* de París donde se graduó en 1827. De Pombo fue enviado por el General Santander a París en 1826 para que terminara sus estudios, regresó a Colombia en 1825 procedente de Inglaterra donde ocupaba un cargo diplomático. El día primero de octubre de 1830 inicia la enseñanza de la matemática impartiendo las cátedras de matemáticas elementales, geometría analítica, álgebra y trigonometría. En su Discurso Inaugural de la cátedra de matemáticas señala la importancia de su estudio, recurriendo a la historia de esta y haciendo mención a matemáticos de renombre como Newton, Laplace, Euler, Descartes y Lagrange entre otros. Señala también la gran difusión de esta ciencia en Colombia dada por Mutis y Caldas.

De Pombo recibió influencia de las ideas de Descartes, fundador intelectual de la Lógica de Port Royal o Arte de Pensar. A él se refiere en los siguientes términos: "Descartes se hizo un hombre justamente merecido como matemático y como filósofo, fundando, por decir así, el arte de pensar."[105] Critica también en su discurso el atraso en el cual se encuentran las ciencias en Colombia, la enseñanza escolástica, la falta de libros para el estudio, el abuso del latín, los vicios del aprendizaje memorístico y el tiempo perdido en discusiones filosóficas y teológicas al amparo de argumentaciones inútiles. Su obra académica consta de los libros *Lecciones de Geometría Analítica* publicada en 1850, y *Lecciones de Aritmética y Álgebra publicada* en 1858.

En 1842 se establece el plan de estudios de Mariano Ospina Rodríguez mediante la Ley del 21 de mayo. Este plan establece en las tres universidades las Facultades Mayores de Ciencias Físicas y Matemáticas, Medicina, Jurisprudencia y Ciencias Eclesiásticas. En

[105] De Pombo, L (2005). Fuentes para la historia de la matemática en Colombia. Discurso de apertura de estudios pronunciado en la Universidad del Cauca, el día primero de octubre de 1830 por el catedrático de matemáticas Lino de Pombo. *Lecturas matemáticas* 26(1), 111-124.

la Memoria del Congreso del mismo año se señala la importancia de lo práctico y lo útil, siendo primordial para ello la enseñanza de las ciencias exactas y naturales, los conocimientos industriales y la aplicación de las ideas científicas para la obtención de las riquezas, la cual se consigue con el trabajo y la industrialización y no con la política y la abogacía, por tanto es necesario crear para cada universidad una Facultad de Ciencias y Matemáticas (Soto, 2005).

En 1847 se funda el Colegio Militar durante el primer gobierno de Tomas Cipriano de Mosquera con la anuencia de Lino De Pombo autor de la ley que creaba el Colegio, y quien fuera el primer profesor de matemáticas en el mismo. Este Colegio creado bajo el modelo de la Escuela Politécnica de París, comenzó labores el 2 de enero de 1848 con 48 alumnos y cinco profesores[106], preparaba oficiales para la carrera militar los que debían desempeñarse en el cuerpo de ingenieros, la artillería, la infantería y en la ejecución de obras civiles. Su existencia fue corta y fragmentada, su primer período va de 1848 a 1854, período en el cual desarrolla prácticamente toda su labor; su segundo período va de 1866 a 1867, año en el que se articula a la Escuela de ingeniería de la Universidad Nacional. Los primeros profesores de matemática fueron Lino De Pombo y Aimé Bergeron.

A finales de 1848 ingresa como profesor el francés Aimé Bergeron en reemplazo de Lino De Pombo, del cual se sabe enseñó aritmética y cálculo. Para sus clases de aritmética De Pombo redactó unas notas convertidas en libro, en el curso de cálculo introduce los conceptos de variable dependiente e independiente y el de función según Euler, ya que en los siglos XVII y XVIII en Europa la enseñanza de la matemática se hacía según los libros clásicos de la época, el desarrollo matemático ocupaba en gran parte los desarrollos del cálculo y la aproximación a estos conceptos desde la lógica matemática comenzó a mediados del siglo XIX.

Para mediados del siglo XIX y principios del siglo XX en Colombia aún no eran de amplia difusión los trabajos de Abel, Cauchy, Bolzano y Weierstrass sobre el rigor en el

[106] Datos tomados de la traducción de la tesis doctoral de J, Helguera (1958). The first Mosquera administration in Nueva Granada, U of North Carolina, realizada por Enrique Hoyos Olier.

cálculo y el análisis; así que, la enseñanza de la matemática comprendía la aritmética, geometría euclidiana, geometría analítica y cálculo, asignaturas estudiadas por los profesores nacionales y extranjeros provenientes de las escuelas y universidades de Europa.

Los estudios de ingeniería civil predominaron en el Colegio Militar, esta carrera tenía una duración de cinco años. En los tres primeros se estudiaba aritmética, álgebra, trigonometría plana y esférica, geometría analítica, geometría especulativa y práctica, geometría descriptiva, secciones cónicas, cálculo diferencial y cálculo integral (Sánchez, 2002); los dos últimos años se dedicaban a los cursos de ingeniería. Los estudios de ciencias se hacían en el Instituto de Ciencias Naturales, Físicas y Matemáticas, del cual también fue profesor Bergeron. Este Instituto fue cerrado en 1850 al entrar en vigencia la ley supresora de las universidades.

Dentro de los textos utilizados para el estudio de la matemática en las instituciones señaladas anteriormente estaban los cinco tomos del *Tratado Completo de Matemáticas* de José Mariano Vallejo (1779-1843). En el tomo I expone los conceptos básicos de la aritmética y el álgebra, presentando en su prólogo algunas sugerencias sobre cómo enseñar matemática; señala además en la introducción la clasificación de las ideas según la lógica escolástica, luego define el juicio como una operación del alma mediante la cual se afirma o se niega una cosa de la otra, y llama proposición a las palabras para expresar el juicio. Para Vallejo las proposiciones constan de tres partes: sujeto, cópula y predicado, tal como lo había escrito Restrepo en sus Lecciones de Lógica. Después de definir las proposiciones hace mención al método inductivo y termina su introducción incluyendo una breve exposición del método axiomático. Sobre la forma de enseñar matemática afirma:

> *El fundamento que yo tuve para usar del método que espongo, es la máxima del sapientísimo Laplace, que dice: 'Preferid en la enseñanza los métodos generales, procurad presentarlos del modo más simple, y veréis al mismo tiempo que son siempre los más fáciles" (Vallejo, 1821, p. 14)*

Aunque Vallejo no habla expresamente de lógica en sus libros, manifiesta la importancia de esta para el estudio de la matemática al hacer énfasis en la necesidad de demostrar las proposiciones mediante razonamientos válidos usando el método directo o a priori y el método indirecto o de reducción al absurdo o ad absurdum. Señala también la necesidad de construir la matemática con el método axiomático, este hecho se observa cuando afirma que es necesario partir de ideas claras en el menor número posible como punto de inicio para deducir de ellas otras verdades y a su vez otras de estas últimas.

La existencia del libro de Vallejo en el Colegio Militar, permite admitir que fue estudiado por alguno de los alumnos, hecho que se evidencia posteriormente en los trabajos de Indalecio Liévano (1834-1913). Vallejo conocía los trabajos de Cauchy sobre cálculo infinitesimal publicados en 1823, a quien conoció personalmente en París; tuvo la oportunidad de intercambiar ideas sobre varios aspectos de la matemática en la *École Polytechnique* con sus profesores Laplace y Lacroix, de allí que sus textos recogen en parte puntos de vista de estos matemáticos. Otras obras de Vallejo como el *Tratado Elemental de Matemáticas* fue obra recomendada por el Consejo de Indias en 1816 para la enseñanza de las matemáticas en América, sus islas y Filipinas; de igual manera, el *Tratado de Matemáticas* se usó en los colegios de México durante varias décadas del siglo XIX (Maz, Rico y Torralbo, 2006)

El 14 de septiembre de 1847, Rufino Cuervo, Vicepresidente de la República y encargado del poder ejecutivo en ausencia del Presidente General Mosquera, expidió un Decreto de 257 artículos que cubría toda la educación superior, organizando además las universidades. Este Decreto pretendía "*reunir en un solo cuerpo las diferentes disposiciones sobre estudios, e introducir en este ramo las reformas que la experiencia, la marcha de la sociedad y las indicaciones de diversos funcionarios y corporaciones hacen indispensables*".

El artículo segundo del Decreto se refiere a los diferentes niveles de educación en los siguientes términos:

> *Los grados de la educación intelectual son los siguientes: instrucción popular o primaria, instrucción general, instrucción especial e instrucción superior. La instrucción primaria comprende las primeras letras, los términos disposiciones separadas (sic).*
>
> *La instrucción general comprende la literatura y la filosofía. La instrucción especial comprende las ciencias eclesiásticas, para los que se dedican a la iglesia; el arte militar y las ciencias de la guerra, para los que siguen la carrera de las armas, y las ciencias naturales, físicas y matemáticas en sus diferentes aplicaciones, para los que se destinan a profesiones conexionadas con estos ramos. La instrucción superior comprende las ciencias médicas y la jurisprudencia.*

El Decreto mantiene la vigencia de las Universidades de Bogotá, Popayán y Cartagena, correspondientes a los tres distritos, estableciendo en el artículo 11 que la Universidad es

> *…un cuerpo docente, que representado en sus casos por el rector y por las corporaciones que establece este decreto, centraliza los estudios en cada distrito, uniforma la enseñanza, examina a los cursantes, califica su capacidad, confiere grados académico y expide diplomas de profesores.*

La enseñanza primaria y normalista se reglamentó con el Decreto del 2 de noviembre de 1844 durante el gobierno de Pedro Alcántara Herrán (1841-1845), orientada por el plan de Mariano Ospina Rodríguez quien fuera Secretario del Interior y de Relaciones Exteriores. En lo relacionado con la matemática, en el plan de Ospina debía enseñarse aritmética y geometría en la educación primaria que comprendía las etapas elemental y superior.

El 8 de mayo 1848 se expide la ley 1842, que faculta a los ciudadanos para ejercer la libertad de enseñanza a través de instituciones públicas o privadas; posteriormente en 1850 el presidente José Hilario López suprime las universidades y con ello la expedición de títulos académicos, impulsando una "revolución de profundo corte liberal, calificada de romántica" (Pacheco, 2002, p. 12). Con la expedición de la Ley de mayo 15 se derogaron expresamente todas las normas anteriores sobre educación e instrucción pública. Los primeros artículos de esta ley disponían lo siguiente:

> *Artículo 1º. Es libre en la República la enseñanza de todos los ramos de las ciencias, de las letras y de las artes.*
> *Artículo 2º. El grado o título científico no será necesario para ejercer las profesiones científicas, pero podrán obtenerlo las personas que lo quieran del modo que establece la presente ley.*
> *Parágrafo. Exceptúense de la disposición del artículo anterior la profesión de farmaceuta. Para ejercerla se necesita obtener la aprobación en los exámenes que presentarán en la forma y los términos que prescriban los reglamentos que expida el poder ejecutivo".*
> *Artículo 16. Suprímanse las universidades. Los edificios, bienes y rentas que hoy disfrutan se aplicarán para el establecimiento de los colegios nacionales, a excepción del Colegio del Rosario, cuyos bienes serán administrados conforme lo decida la Cámara Provincial de Cundinamarca*

Durante los años comprendidos entre 1850 y 1867 ante la abolición de las universidades por la Ley de José Hilario López, hubo un notable descenso en el número de estudiantes universitarios y por lo tanto en los estudios de la matemática ya que las universidades se convirtieron en colegios. El presupuesto de las universidades (colegios) fue disminuido, así que la Universidad Central de Bogotá dictaba escasamente cuatro cursos de matemáticas debido a la carencia de recursos económicos y humanos. La Universidad de Cartagena conservaba para ese entonces las cátedras de biología, física y agricultura

Muy a pesar de la desaparición legal de las universidades hubo algunos aportes significativos a la matemática en ese lapso como los de Indalecio Liévano Reyes (1834-1913), quien realizó trabajos originales relacionados con la fundamentación de la matemática sobre los números reales, trigonometría plana, trigonometría esférica y geometría, publicando el *Tratado de Aritmética* en 1856, investigaciones científicas en 1871 y el *Tratado de Algebra* en 1875. En el Tratado de Aritmética hace una exposición de los números irracionales como parte de la construcción de los números reales, que aunque tenga varios defectos fue un paso importante en la investigación matemática del siglo XIX. Sus enseñanzas las impartió en el Colegio San Bartolomé donde aún se seguía con la cátedra de filosofía, y después en la Universidad Nacional de Bogotá en las Escuelas de Ingeniería y de Filosofía y Letras.

Hasta mediados del siglo XIX, la aritmética enseñada comprendía operaciones con los números enteros, quebrados, decimales y denominados[107], regla de tres, potenciación con enteros, raíces cuadradas y cúbicas, razones, proporciones aritméticas y geométricas. En términos generales, los contenidos variaban un poco de acuerdo con los textos utilizados y los intereses del profesor y la comunidad. En cursos más avanzados se enseñaba tanto por ciento (descuento), cambio y aligación y logaritmos. El álgebra comprendía expresiones algebraicas y sus operaciones, ecuaciones de primer y segundo grado y algunas veces se daban temas de aritmética. En geometría se enseñaban nociones elementales, áreas de figuras planas y volumen de sólidos (esfera, pirámide, prisma, cono y cilindro).

[107] El *Compendio Matemático* de Tomás Vicente Tosca Publicado por J García en 1757 define los números denominados como aquellos que numeran cosas de diferentes especies: como libras, sueldos, dineros, reales, arrobas, y su logística se comprende en las proposiciones siguientes:
Regla general 1. Escríbanse las especies que se han de sumar, cada una debajo de su semejante, con la especie de mayor valor a la izquierda y la de menor valor a la derecha.
Regla 2. Comiéncese a sumar la especie de menor valor; y en llegando a hacer el número que constituye, o igual a la especie inmediata hacia la izquierda, se hará una señal al lado, tantas veces, cuantas llegare a la especie siguiente; y lo que sobrare, se escribirá debajo. Después se llevarán tantas unidades como señales tuviere, la que se sumará del mismo modo. La suma de la última columna, siempre se hará como en los enteros.

Los textos sobre temas de matemática publicados en el siglo XIX versaron sobre aritmética, álgebra, cálculo, trigonometría y geometría; todos ellos muestran deducciones de teoremas y otros desarrollos demostrativos pero con contenidos ausentes de lógica, por tal razón, refiriéndose a la lógica en el siglo XIX, Collantes (2004) afirma que

> *El ambiente general no era propicio para continuar con una tradición con la que se deseaba romper abiertamente, y no estaba maduro, ni mucho menos, para volcarse en el desarrollo de una opción estrictamente formalista como la que se tuvo en el siglo XIX, así que hubo que contentarse con contemplar la supervivencia misma de la lógica, aunque fuera porque su padre espiritual, Aristóteles, pertenecía al mundo clásico heleno, y ningún humanista del siglo se hubiera atrevido a eliminar esa parte de su obra sin tener una alternativa sólida que ofrecer en el mismo terreno (p. 506)*

Refiriéndose a los estudios universitarios en el período 1805-1875 afirmaba Florentino González que[108]

> *La enseñanza era por supuesto, muy imperfecta, y todavía se hacía perder el tiempo a los estudiantes en aprender las añejas doctrinas de los peripatéticos, y en disputar como energúmenos en latín, sin llegar nunca a entenderse, sobre las causas eficientes y finales…… Así pasó el primer año de nuestro estudio de filosofía, en el que lo de más provecho que estudiamos fue la lógica de Heinecio, autor éste que fue proscrito ostensiblemente, pero sus principios fueron consignados en el cuaderno de lecciones que nos dictó el catedrático José María de Latorre y Uribe; pero por la misma razón fue más leído: es lo que sucede cuando se persiguen los libros.*

[108] El texto es tomado de las memorias de Florentino González publicadas por José Camacho Carreño en 1933 con el subtítulo *Controversias Bolivarianas*, reproducidas por la Biblioteca Luis Ángel Arango.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, el avance educativo en general en los años cincuenta del siglo XIX estuvo detenido por el cierre de las universidades, por el predominio de las carreras clásicas de derecho, medicina, filosofía y letras y teología por una parte, y la improvisación de profesionales sin título que ejercían diferentes profesiones sin respaldo de títulos, al amparo de la normativa de José Hilario López y los ataques ejercidos por los liberales sobre el Colegio Militar, quienes unidos a las clases altas del partido contrario lograron acabar con la institución en 1854, apoyados por el gobierno del General Herrán. No obstante, Mariano Ospina presenta un plan para reemplazar el Colegio con el Conservatorio Nacional de Ciencias y Artes, lo cual no se logró (Safford, 1989).

En 1866 Mosquera retoma el poder y reabre el Colegio con el nombre de Colegio Militar y Escuela Politécnica, bajo la dirección de Lorenzo María Lleras. El nuevo Colegio era diferente al anterior debido a que Lleras estaba interesado en hacer énfasis en historia y geografía, y no en la matemática como era el interés de Lino De Pombo, teniendo un nivel bastante bajo en esta área. Del total de un poco más de cien alumnos, solamente 22 iniciaron el curso de matemáticas superiores (Safford, 1989), pero estos se retiraron en 1867 después del golpe que derrocó a Mosquera y el Colegio "fue absorbido por la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional fundada en ese año" (Sánchez, 2002a, p. 241).

Pero igual como ocurría en tiempos de La Colonia, la enseñanza de la matemática aún era deficiente y la lógica no había pasado de la lógica aristotélica escolástica, pocos habían sido los colombianos que a mediados del siglo XIX habían estudiado ingeniería en el exterior, siendo los países escogidos Francia, España y los Estados Unidos de Norte América. Desde estos años hasta los inicios del siglo XX la prioridad fue la preparación de ingenieros que debían ayudar en la construcción de obras civiles como fueron la construcción de caminos, carreteras y edificaciones; no obstante, algunos de estos ingenieros se dedicaron al estudio de la matemática.

3.3 LA MATEMÁTICA EN LA INGENIERÍA: 1867-1948

El proceso educativo en los inicios de la nueva república fue tormentoso. Las luchas partidistas llevaron a cambios repentinos en las políticas educativas perdiéndose la continuidad en dichas políticas, quedando estas sujetas al vaivén del gobernante de turno. En lo correspondiente a los estudios universitarios, este período comienza con la fundación de la *Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia* el 22 de septiembre de 1867, bajo el gobierno del Presidente Santos Acosta Castillo, dentro de la reforma universitaria de José María Samper.[109] Por ley, la universidad era de carácter público e impartiría educación gratuita con una marcada tendencia hacia la enseñanza de las ciencias, con relativa autonomía y financiada por el estado, dependiente de la Secretaría General del Interior y Relaciones Exteriores.

La nueva Universidad inicia labores siendo rector Manuel Ancizar con las Escuelas de Derecho, Medicina, Ciencias Naturales, Ingeniería y Literatura y Filosofía; fue incluida también una Escuela de Artes y oficios, para capacitar a los artesanos en oficios industriales necesarios para avanzar en el desarrollo del país. Se adscribieron a la Universidad la Biblioteca Nacional, el Observatorio Astronómico, el Museo de la Escuela de Ciencias Naturales, el Observatorio Astronómico, los Hospitales de Caridad y Militar, el Laboratorio Químico y el Colegio San Bartolomé (Soto, 2003), iniciando clases en febrero de 1868. Por disposiciones generales era obligatorio el uso de los textos de Antoine Destutt de Tracy y Bentham, siguiendo la tradición heredada de la Colonia. Los estudiantes admitidos optaron en mayoría por las carreras de Filosofía y Ciencias Naturales.

[109] La reforma fue un proyecto de ley presentado inicialmente en 1864 ante el Congreso y contemplaba la creación de la Universidad Nacional de los Estados Unidos de Colombia

"La Escuela de Ingeniería, heredó en el momento de su fundación, los profesores alumnos y recursos del Colegio Militar, y con ellos el plan de estudios de la carrera y el énfasis de la buena formación matemática de sus estudiantes" (Sánchez, 2004, p. 2). La matemática se estudiaba en ocho materias durante los dos primeros años de la carrera comprendiendo aritmética analítica, geometría, algebra superior, geometría analítica, trigonometría plana y esférica, geometría descriptiva y cálculo diferencial e integral.

Durante las primeras tres décadas de su existencia, la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional estuvo sometida a los embates de la contienda política y las reformas. Los primeros graduados recibieron el título de *Ingeniero Civil y Militar*, pero a partir de 1871 se obtuvo solamente el de *Ingeniero Civil*, ya que en1876 se reformó el pensum para formar ingenieros militares y oficiales científicos. Luego, en 1880 la Escuela dependió del Ministerio de Guerra según el Decreto 365 del 31 de mayo; finalmente, en 1984 con la Ley 23 de julio 26 la Escuela de Ingeniería Civil vuelve a integrarse a la Universidad Nacional (Sánchez, 2007).

En este punto es importante señalar dos aspectos importantes relacionados con la Escuela de Ingeniería. A finales de 1880 se suscitó un debate en torno a la preparación matemática del ingeniero. Básicamente la discusión estuvo centrada entre los conceptos *matemática pura* y *matemática aplicada*. Si miramos la matemática a través de la historia, esta no nació como ciencia pura sino como "un intento de explicar la realidad que el hombre tenía frente a sí, es decir, con miras a su aplicación a la realidad."[110] Tomando como base los libros de matemática del siglo XVIII hacia atrás, las matemáticas se clasificaban en puras y mixtas o no puras[111], siendo estas últimas las conocidas como físico-matemáticas, así lo entendían los ingenieros de finales del siglo,

[110] Martínez, Miguel (2003). Naturaleza y aplicabilidad de los modelos matemáticos. Umbral. Revista de educación, cultura y sociedad. 3(4), 85-94.

[111] En el texto "compendio Matemático" de Tosca, matemáticas puras son aquellas que tratan de la cantidad, sin considerar en ella accidente alguno ni afección sensible como la aritmética y la geometría, las no puras son las que consideran la cantidad, vestida y acompañada con algún accidente o afección sensible; porque las afecciones sensibles son propias de la filosofía natural, o física, se llaman físico-matemáticas, como la música y la óptica.

a pesar de que en 1872 se tenía ya construida una fundamentación de la aritmética por Frege y otra sobre los números reales por Dedekind, Riemann y Cantor.

El otro aspecto se derivó del anterior. La controversia entre los ingenieros profesores Miguel Triana (1859-1931) y Manuel Antonio Rueda (1958-1907) trajo consigo la creación de un Instituto de Matemáticas conformado por las Escuelas de Matemáticas e Ingeniería. El Instituto formó los primeros profesores de matemática de Colombia. Los estudiantes del Instituto tenían la posibilidad de obtener los grados de Ingeniero y Matemático, siendo requisito para ser matemático la presentación de un trabajo final después que en todas las asignaturas de matemáticas el estudiante hubiese obtenido una nota de 5.0 (Sánchez, 2007).

Puesto que la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional fue el germen de la formación de matemáticos, es oportuno preguntarse: ¿Cuál fue el aporte de la Escuela de Ingeniería a la matemática? Para responder esta pregunta se analizó el trabajo realizado por profesores y alumnos, clasificando los aportes de los profesores y estudiantes en las categorías difusión de la matemática, transferencia de aprendizaje e investigativos. Se mencionan aquí los que para el propósito de esta investigación tienen alguna incidencia.

Miguel Triana en 1886 presenta un programa de aritmética para los estudios de Ingeniería Civil en la Universidad Nacional. El programa comprendía una unidad llamada Fundamentos de la Aritmética en la cual se estudiaban los siguientes temas:

1. Cantidad, unidad y número.
2. Clasificación de la cantidad
3. Clasificación de la unidad.
4. Clasificación del número.
5. Subdivisión del número fraccionario.
6. Número abstracto y número concreto.
7. Objeto de las ciencias matemáticas.
8. Objeto de la aritmética.

9. Objeto de la numeración.
10. Condiciones de un sistema de numeración.
11. Sistema decimal de numeración.
12. Ley decimal.
13. Lectura de un número entero compuesto.
14. Abreviaciones de la terminología decimal.
15. Escritura de números enteros y compuestos.
16. Sistema norteamericano y francés. Numeración romana.

Por razones que saltan a simple vista, esta unidad de fundamentos es sencillamente aritmética.

Indalecio Liévano Reyes, mencionado anteriormente, fue un difusor de la matemática y el primer investigador del país en el campo de la matemática, particularmente en la llamada matemática moderna, al trabajar sobre la fundamentación de la matemática tratando de demostrar el Quinto Postulado de Euclides[112]. Sus investigaciones fueron publicadas en varias obras: *Tratado de aritmética* (1856), *Tratado de álgebra* (1875), *Investigaciones Científicas* (1871), y posteriormente un *Apéndice* de las mismas. Liévano intento formalizar la construcción de los números reales mediante la introducción del concepto de número inconmensurable, para ello llama número inconmensurable a la expresión exacta de una cantidad inconmensurable con la unidad. La cantidad continua, medida con la unidad, pude representarse con un número concreto que será conmensurable o inconmensurable[113].

Manuel Antonio Rueda escribió obras didácticas para la enseñanza de la matemática, entre ellas, *Tratado de Aritmética (1882), Tratado de Aritmética Analítica y Comercial (1883), Compendio de Aritmética (1884), Lecciones de Trigonometría (1887), El Juguete de los Números (1891), Contabilidad Mercantil (1898) y Las Cuatro*

[112] Un análisis detallado de este trabajo fue realizado por Víctor Albis (1997). Vicisitudes del Postulado Euclídeo en Colombia. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. 21(80), 281-293.
[113] Liévano, Indalecio (1856). *Tratado elemental de aritmética*. Bogotá: Imprenta Echevarría Hermanos.

Operaciones Aritméticas. En la Introducción de las Lecciones de Trigonometría deja ver su faceta de pedagogo y difusor de la matemática cuando escribe

> *Vosotros sabéis que yo he dedicado a vuestro servicio la parte más preciosa de mi vida, y que desde el año 1883 me he consagrado a escribir una serie de textos de matemáticas, adecuados al plan de estudio que rige entre nosotros. No os sorprenderá, pues, que este nuevo libro, escrito como lo anteriores, en medio de vosotros, os esté especialmente destinado. Dignaos acogerlo como una prenda de cariño del último de vuestros maestros*[114].

Ruperto Ferreira (1845-1912) fue en 1873 el primer Ingeniero Civil y Militar de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional, graduado en 1870 realizando la carrera en dos años[115]. Además de ocupar diferentes cargos públicos, se desempeñó como profesor, publicó en los Anales de Ingeniería el *Curso Elemental de Matemáticas Superiores* conteniendo los temas de progresiones, logaritmos, binomio de Newton, ecuación de segundo grado, nociones de trigonometría y fórmulas para áreas y volúmenes de figuras geométricas; y el artículo *El Postulado de Euclides*, trabajo este último que señala los errores de la demostración presentada por Hermógenes Wilson (Sánchez, 2002b).

Julio Garavito Armero (1865-1920), se graduó como Ingeniero y Profesor en Ciencias Matemáticas de la Escuela de Ingeniería en 1891, siendo considerado como el matemático y astrónomo más importante de Colombia de finales del siglo XIX y principios del XX. Se dedicó al estudio de la geometría en la sociedad científica o grupo de investigación *Círculo de los nueve puntos*, trabajó sobre la teoría de *Los números inconmensurables* de Liévano, intentó la demostración del Quinto Postulado de Euclides en un trabajo sobre geometría plana no euclídea, se ocupó de la demostración

114 Tomado de la segunda edición de 1926 publicada por Librería Colombiana, Camacho & Roldán.
115 Boletín Cultural y Bibliográfico Nº 28, volumen XXVIII, 1991, Biblioteca Luis Ángel Arango.

del Teorema de Poliedros de Euler[116], publicó sus investigaciones en *Los Anales de Ingeniería* revista de la cual fue director entre 1890 y 1896, realizó significativos cálculos astronómicos y debido a su muerte no concluyó su más importante obra *Fórmulas definitivas para el movimiento de la luna*.

Garavito fue una figura polifacética, incursionó en diferentes campos del saber y tal vez su única equivocación fue oponerse a la Teoría de la Relatividad de Einstein, tal vez por el desconocimiento que se tenía sobre los avances en física y matemáticas en Colombia, por tal razón afirma Sánchez sobre el conocimiento matemático de los Ingenieros, que, "conocían las matemáticas necesarias para la ingeniería y no sólo en función de su aplicación, pues también estuvieron interesados en aspectos históricos y teóricos. Nos muestran el desconocimiento que tenían sobre temas de avanzada en Europa" (Sánchez, 2002b, p 364).

El aporte de los estudiantes se plasmó en los trabajos de grado o tesis, los cuales fueron analizados por Sánchez (2002b) y que se pueden catalogar como transferencia de aprendizaje, por estar dedicados a solución de problemas. De estos trabajos diez trataron sobre geometría analítica, uno sobre geometría descriptiva, seis sobre cálculo, dos sobre álgebra, uno sobre trigonometría, cinco sobre topografía o agrimensura, uno sobre ingeniería y 13 sobre física, comprendiendo los temas series, integrales de superficie, teoría de máximos y mínimos de funciones de una variable, teoría de ecuaciones trigonométricas, álgebra clásica, geometría analítica, e integrales eulerianas de primera y segunda especie (funciones gamma y beta). En algunos de ellos se

---

[116] Este teorema muestra diferentes relaciones entre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo. Las relaciones son:

1. $\mathbf{C} + \mathbf{V} = \mathbf{A} + 2$
2. $1/\mathbf{n} = (1/\mathbf{A})+(1/6)$
3. $1/\mathbf{r} = (1/\mathbf{A})+(1/\mathbf{6})$
4. $\mathbf{n}{*}\mathbf{C} = 2\mathbf{A}$
5. $\mathbf{r}{*}\mathbf{V} = 2\mathbf{A}$
6. $(2\mathbf{A}/\mathbf{r}) - \mathbf{A} + (2\mathbf{A}/\mathbf{n}) = 2$
7. $(1/\mathbf{n}) + (1/\mathbf{r}) = (1/2) + (1/\mathbf{A})$.

Donde C es el número de caras, V el número de vértices, A el número de aristas, n el número de lados del polígono regular y r el número de aristas que convergen en los vértices.

destacan los desarrollos matemáticos basados en el método matemático de Euclides expuesto por Mutis y presente de manera algo práctica en los textos utilizados en esa época como el *Cálculo Infinitesimal* de Sonet y el *Cours d'Analyse* de Sturm, textos con contenidos de fundamentos de la matemática ausentes, lo cual permite inferir que el aspecto demostrativo se hacía por imitación.

La apertura de la Universidad Nacional y su Escuela de Ingeniería trajo como efecto la creación del *Instituto Central de Matemáticas* según el Decreto 76 de 1886 y la Sociedad Colombiana de Ingenieros, fundada el 28 de mayo de 1887, con el objeto de "promover las obras públicas y la educación técnica y dotar a los ingenieros nacionales de una opinión más efectiva en su misión de guiar a los políticos de la nación en las decisiones adoptadas en el campo de la ingeniería" (Safford, 1989, p. 325). Un aspecto para resaltar en la enseñanza de la matemática dada por el Instituto es que el programa de aritmética en su unidad III titulada *Signos-Nomenclatura-Convenciones* comprendía los siguientes temas: explicación de los signos usados en aritmética, clasificación de las cuestiones, partes de las que consta el enunciado de una cuestión, métodos de demostración, círculo vicioso, petición de principio y empleo de las letras en aritmética. Estos temas en parte corresponden a los fundamentos de la matemática.

El 1º de agosto de 1887 el Ingeniero Manuel Antonio Rueda crea la Revista Anales de Ingeniería cuyo primer número sale en 1888. Esta revista se encarga de difundir los avances en las obras de ingeniería, decretos gubernamentales, información sobre materiales de construcción, investigaciones en las ciencias naturales, temas de matemáticas puras y aplicadas y por supuesto temas de ingeniería. En esta revista se publicaron los primeros artículos relacionados con la matemática en el país. Según Sánchez (1993), en los primeros diez volúmenes se presentaron 46 trabajos sobre matemáticas, todos ellos sobre matemática clásica, excepto la publicación del panameño Pedro José Sosa (1851-1898)[117] *Teoría de los cuaterniones* en el volumen III (1889-1890), siendo este uno de los pocos vestigios de matemática no clásica presente en

[117] Pedro J Sosa estudió en el Instituto Politécnico Troy del Estado de Nueva York, publicó también en los Anales un estudio sobre los determinantes. Un trabajo biográfico sobre Sosa fue publicado por Víctor Albis y Deisy Camargo (2005) en Revista ACCEFYN 29(113), 525-534.

Colombia en el siglo XIX. Los cuaterniones[118] fueron descubiertos en 1843 por William Rowan Hamilton (1805-1865), aparecieron en su trabajo *Lectures on quaternions* terminado en Dublín en 1852 y publicado en 1853. La importancia de los cuaterniones en la matemática es que con ellos se rompe el paradigma de la conmutatividad imperante hasta ese momento.

A finales del siglo XIX ya habían muerto Euler, Lagrange, Fourier, Galois, Gauss, Cauchy, Boole, Weierstrass y Riemann; no obstante, en las enseñanzas de la Escuela de Ingeniería se mencionan Euler, Fourier, Gauss, Cauchy y otros anteriores a estos, lo que prueba el desconocimiento de las nuevas teorías matemáticas sobre álgebra moderna, lógica, conjuntos y fundamentación de la matemática en general; no obstante, en Bogotá, en el Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario Julián Restrepo Hernández (1871-1819) regenta la cátedra de lógica desde 1890 cuando aún era estudiante. En 1907 publica su obra *Lecciones de Lógica* usadas por él en sus clases, texto enmarcado en la corriente Neo Escolástica de influencia en España, Portugal y la América Hispana. Estas notas son una exposición de los principios de la lógica escolástica, exhibe los modos del silogismo hipotético lo cual se constituye una contribución directa a la lógica; durante esos años se usó también la lógica de Stuart Mill como texto universitario.

En cuanto a la divulgación de los avances de la matemática es importante mencionar en el Colegio Mayor del Rosario la contribución de Francisco María Rengifo sobre el estudio y difusión de las teorías modernas de la matemática y la ciencia dentro del nuevo Tomismo. Rengifo fue tal vez el personaje con más brillo en el dominio de las ciencias a comienzos del siglo XX, al dedicar parte de su tiempo a justificar que ellas estaban en perfecta armonía con los principios esenciales del Tomismo, ideas expuestas en 1906 en su tesis de grado *Santo Tomás de Aquino ante la ciencia moderna*.

[118] Un cuaternión es un número de la forma: a + b**i** + c**j** +d**k**, a es la parte real y b**i** + c**j** +d**k** es la parte vectorial.

La situación de la matemática no varió mucho al comienzo del siglo XX en las instituciones de enseñanza superior. A nivel internacional, el movimiento estudiantil universitario de Córdoba Argentina en 1918 rompió con el modelo decadente imperante en la enseñanza universitaria y tuvo repercusiones en las reformas educativas de varios países latinoamericanos, entre ellos Colombia. El Decreto 141 de febrero 1º de 1922 aprueba el reglamento de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional concediendo los títulos de Ingeniero Civil, Ingeniero Industrial, Ingeniero de Minas y Arquitecto. El Artículo 103 del mencionado Decreto instituye una discriminación de los cursos estableciendo en el área de matemáticas las asignaturas aritmética analítica y comercial, álgebra inferior, geometría plana y del espacio, trigonometría rectilínea, geometría descriptiva, álgebra superior, geometría analítica, trigonometría esférica, análisis infinitesimal y estadística. Esta reglamentación posteriormente tuvo algunas modificaciones con las reformas educativas entre 1930 y 1946, pero en esencia los cursos de matemática continuaron casi lo mismo hasta la creación de la Facultad de Ciencias en 1946.

La escuela Normal de Varones de Tunja tuvo sus orígenes en 1870 durante el mandato de Eustorgio Salgar. Inició labores el 22 de septiembre de 1872 con la misión de formar profesores para la enseñanza secundaria, así se mantuvo hasta la llegada de la segunda misión pedagógica alemana de la cual hacía parte el profesor Julius Sieber, contratado en 1926 para reformar el nivel educativo de la Normal, procurando que la formación de docentes fuera de mejor calidad.

En 1928 se inicia el *curso suplementario de especialización* con una duración de dos años preparando los docentes en las áreas de matemáticas, química y física. Las materias de matemáticas fueron geometría, trigonometría, geometría analítica, álgebra, cálculo diferencial e integral, logaritmos y regla de cálculo, empleo de papeles: milimétrico, logarítmico y semilogarítmico. El curso fue legalizado posteriormente con la Ordenanza 38 de 1929; luego se crean las carreras de pedagogía y filología e idiomas; mas adelante, el Decreto 301 de febrero 13 de 1993 crea la Facultad de Pedagogía formalizando los estudios superiores de preparación del profesorado para la enseñanza secundaria en las áreas de pedagogía, lenguas extranjeras, matemáticas y ciencias fisicoquímicas, ciencias naturales y castellano, historia y geografía (Parra, 2004).

La Facultad de Pedagogía se convierte en Facultad de Educación mediante el Decreto 1379 de julio 5 de 1934, reconociendo títulos en Ciencias Pedagógicas, Matemáticas, Química e Idiomas. La Facultad se fusiona en 1935 con el Instituto Pedagógico Nacional y la Facultad de Educación de la Universidad Nacional, volviendo a su estado anterior de Escuela Normal hasta 1953 cuando se convierte en la Universidad Pedagógica de Tunja. El nivel de matemática de la Escuela Normal de Tunja no fue superior al de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de Bogotá, el pensum tenía menos materias, todas ellas trataban la matemática clásica con ausencia de la lógica y la teoría de conjuntos, por lo que la fundamentación de la matemática se daba en los contenidos de la geometría euclidiana y el cálculo infinitesimal; es decir, se trabajaba la axiomática sin hacer mención de ella[119].

Es importante destacar también la contribución a la matemática dada en Antioquia por el Colegio Técnico de Sonsón y la Escuela de Minas. En diciembre de 1854, el ingeniero francés Alfredo Callón transforma el Colegio Santo Tomás de Aquino en un colegio científico, en donde además de las materias clásicas de gramática castellana, historia, filosofía clásica, religión y retórica que se enseñan en los colegios tradicionales, propone un plan que contempla la enseñanza del francés para leer, escribir y traducir y libros en ese idioma; la enseñanza de las ciencias matemáticas, importantes para los estudios de ingeniería comprendiendo la aritmética, álgebra, trigonometría, geometría analítica, dibujo geométrico, geometría descriptiva, mecánica racional, cálculo infinitesimal y geografía ; las ciencias naturales, comprendiendo la botánica, la zoología, la historia natural, la química, la física, la mineralogía y la geología; y las aplicaciones de las anteriores en la agricultura, la industria y las obras

[119] Esta tendencia se dio por lo menos hasta 1958, lo cual se puede constatar con el certificado de notas del ex alumno Luis Polo Mercado, profesor de la Universidad de Cartagena.

públicas[120]. Este Colegio intenta la enseñanza de la matemática a nivel superior dando importancia al lugar que ocupa en ella la lógica, hecho que se corrobora en la afirmación de Callón

> *En mi concepto, las ciencias positivas son el estudio más propio para formar el juicio de los jóvenes, acostumbrándoles al método, esta parte tan importante de la lógica, y por eso opino que seria de la mayor utilidad para el adelantamiento general*[121]

El Colegio se cierra en 1856 debido al suicidio de dos de sus alumnos.

La Escuela Nacional de minas de Medellín, cuyos inicios se dieron en la Universidad de Antioquia, fue establecida por el Decreto del 14 de diciembre de 1871. Inicialmente, el 10 de enero de 1872 comenzaron los estudios de ingeniería con 14 estudiantes, en 1874 se creó la Facultad de Ingeniería la cual se cerró en 1876; luego, la Ley 81 del 28 de noviembre de 1879 crea la Escuela de Minería en el Colegio Central, nombre que tomó la Universidad en ese año. En 1880 el gobierno nacional establece la Escuela Práctica de Minería de Antioquia clausurada en 1883; posteriormente, su vida es sometida a varios vaivenes; así, durante el segundo gobierno de Rafael Núñez la Ley 60 de 1886 constituye las Escuelas de Minería de Ibagué y Medellín, de las cuales sobrevivió la de Medellín llamada posteriormente Escuela Nacional de Minas, ya que la de Ibagué se cerró en 1887.

La Escuela de Medellín inició labores en abril 11 de 1887, se cerró a los tres meses y luego fue reabierta el dos de enero de 1888 bajo la dirección del Ingeniero Tulio Ospina, hermano de Pedro Nel Ospina primer rector, egresado de la Universidad de California en Berkeley; se cierra nuevamente en 1895, y se anexa a la Universidad de Antioquia hasta 1899 cuando nuevamente es cerrada; se reabre el cinco de abril de 1904, y se

[120] Callón, Alfredo (1962). Abertura de un Colegio Científico en la antigua provincia de Antioquia. En Julio García (Ed.). *Historia de la instrucción pública en Antioquia* (208-211). Medellín: Universidad de Antioquia.
[121] Ibid.

cierra en 1905; en 1906 se reincorpora nuevamente a la Universidad de Antioquia, independizándose de esta en 1911 con el retiro de Tulio Ospina de la universidad, incorporándose definitivamente a la Universidad Nacional sede Medellín como facultad fundadora en 1936 por el acuerdo 131 del Consejo Directivo de la Universidad.

El pensum de matemáticas de la Escuela en sus inicios era el mismo de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional de Bogotá, predominaba la matemática clásica, los contenidos de lógica y fundamentos de la aritmética eran prácticamente nulos, el modelo educativo implantado fue el de la Escuela de Minas de Berkeley, con inclinación marcada hacia la ingeniería civil, porque a finales del siglo XIX la explotación de oro no era una prioridad y más bien los esfuerzos debían encaminarse hacia la construcción de carreteras y vías ferroviarias, ya que según Safford (1989), el país en 1885 contaba apenas con 206 Km de rieles. Los primeros egresados se graduaron en noviembre de 1908, luego siguieron egresando otros pocos hasta 1911 cuando Tulio Ospina se retira de la Universidad de Antioquia llevándose la Escuela Nacional de Minas.

La matemática clásica predominó en la enseñanza de la matemática en la Escuela, dado que su misión era la de preparar ingenieros, por tal razón el aporte dado a la matemática fue prácticamente académico y no investigativo. De la nómina de profesores que tuvo la Escuela es meritorio mencionar a Alejandro López, iniciador de la estadística en Colombia[122] en 1912 y quien posteriormente en 1914 publicó el texto Estadística de Antioquia con la coautoría de Jorge Rodríguez Lalinde y Luis de Greiff Bravo (1908-1967) el más destacado Ingeniero Matemático de la Escuela.

Luis de Greiff publicó los libros *Curso medio de geometría analítica* (1948), *Análisis trigonométrico y funciones exponencial-circulares* (1960), *Cálculo vectorial* (1962) e *Investigaciones matemáticas selectas* (1970), este último en edición póstuma elaborada por la Sociedad Antioqueña de Ingenieros. Como medio de expresión de los trabajos en

[122] Un estudio detallado se encuentra en Mayor, Alberto (2002). La Escuela de Minas de Medellín y los orígenes de la Estadística en Colombia. *Revista Colombiana de Estadística*. 25(2), 73-95.

ingeniería de la Escuela se creó en 1933 la Revista Dyna en la que se publicaron 24 artículos relacionados con la matemática hasta 1950 (Sánchez 2002a); de ellos tienen relación con la fundamentación de la matemática *Geometría axiomática* (1933) de Jorge Vallejo, *La intuición y la lógica matemática* (1938) de Henri Poincaré y *El valor de la hipótesis en matemáticas* (1949) de Juan Zapata.

Sin lugar a dudas, el atraso de la matemática en Colombia a mediados del siglo XX era palpable, la enseñanza se llevaba a cabo sobre contenidos de la matemática clásica[123] debido la falta de una facultad de ciencias o de un programa que formara exclusivamente matemáticos, los grandes desarrollos en matemática eran ignorados, no se conocía la lógica matemática como tampoco la temática alrededor de los fundamentos de la matemática; si bien ya existía una teoría bastante elaborada sobre las diferentes corrientes epistemológicas de la matemática, en nuestro país estas no eran del conocimiento de los matemáticos; no se discutían los problemas de Hilbert, se conservaba aún la axiomática de Euclides a espaldas de un formalismo bastante robusto; en síntesis, poco se había evolucionada en la matemática, pero se tenía conocimiento de la existencia de la teoría de conjuntos de Cantor, ya que el matemático español e historiador de la ciencia Francisco Vera(1888-1967) llegó a Colombia en 1941 procedente de República Dominicana después de haberse exiliado en Francia huyendo de la guerra civil española (1936-1939).

Vera llega a Colombia entrando por Barranquilla y pasando luego a Bogotá. Comienza su actividad de divulgación de la matemática dando una serie de conferencias en el Teatro Colón de Bogotá, dictando una serie de conferencias que luego fueron publicadas en formato de texto con el nombre *La dualidad de valores en el campo de la matemática*. En 1942 imparte en la Sociedad Colombiana de Ingenieros el ciclo de conferencias *La historia de las ideas matemáticas*, y un curso de teoría de conjuntos durante septiembre y octubre del mismo año, cuyas notas se publican posteriormente en 1948 en Buenos Aires, ciudad que fue su destino final. En 1943 dictó en la Universidad

[123] Se entiende por matemática clásica la totalidad de los métodos de demostración en uso a principios del siglo XX

Nacional el curso *Iniciación a la matemática moderna* comprendiendo tres partes: Fundamentos de la matemática, Matematización de las leyes causales y El espacio y la geometría (Sánchez, op.cit).

El curso de teoría de conjuntos de Vera recoge los avances en dicha teoría resumiendo prácticamente todo lo relacionado con el tema, excepto algunas operaciones entre conjuntos. El contenido fue dividido en seis capítulos: Nociones fundamentales, El continuo, Continuos de varias dimensiones, Conjuntos ordenados y bien ordenados, Aritmética transfinita y Paradojas del transfinito. La exposición se hace con una tendencia hacia lo informal minimizando el formalismo lógico, ya que no contempló una exposición previa de la lógica formal para formular definiciones y procesos haciéndolos un poco más rigurosos; tal vez, Vera conoció las debilidades de su auditorio y optó por una presentación asequible desde lo pedagógico, pues como se ha esbozado a lo largo de la exposición, la lógica en Colombia siguió dentro de la tendencia Neo Escolástica en los estudios de filosofía, y a veces ausente como ocurrió en las escuelas de ingeniería. Fueron muchos los aspectos positivos de la presentación que en cierta medida rompieron con el paradigma clásico como la distinción entre el infinito potencial y el actual, el concepto de función, la hipótesis del continuo, la axiomatización formal y la inclusión de las paradojas; pero a pesar de esto, en los cursos de matemática de ingeniería se hizo caso omiso a los conjuntos continuando la enseñanza de lo clásico.

En pocas palabras, la matemática en Colombia hasta la primera mitad del siglo XX estuvo atada a los estudios de ingeniería, sus contenido correspondieron a la matemática clásica[124] porque esa era la matemática demandada por los ingenieros como requisito en el tratamiento de sus teorías; de otra parte, la lógica estuvo vinculada con los estudios de filosofía, a ella se le reconoció importancia en cuanto era necesaria para el razonamiento en las discusiones pero no se asoció con la matemática a pesar de los avances de la lógica y la fundamentación de la matemática en esos tiempos. Las

[124] Así por ejemplo, el texto Course d'Analyse de Sturm publicado en 1888 seguía usándose en análisis matemático o cálculo.

ciencias y la educación en general fueron influidas por la iglesia y una política educativa cambiante, que mantuvo desestabilizado al país por las constantes guerras civiles, la educación fue socialmente excluyente.

3.4 LOS PRIMEROS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA: 1948-1961

Los primeros programas de matemática surgen a partir de algunos hechos o requerimientos dados en el segundo tercio del siglo XX. En primer lugar, en 1933 se crea la Academia Colombiana de Ciencias Exactas y Naturales con la Ley 134, como una sociedad de carácter científico, encargada de orientar y divulgar la investigación en el campo de las ciencias, órgano de consulta del gobierno nacional en asuntos científicos. Desde los inicios de esta Academia un grupo selecto de profesores de matemática y otras disciplinas científicas han hecho parte de ella, algunos pertenecientes a la Universidad Nacional. En segundo lugar, se necesitaba preparar profesores para los cursos de niveles avanzados en matemática, física, química, biología, etc. La matemática de la antigua Escuela de Matemáticas e Ingeniería estaba estancada, apreciación confirmada con las nuevas enseñanzas de Francisco Vera en la Sociedad de Ingenieros. En tercer lugar, la Universidad debía atender a las diferentes reformas educativas universitarias que se habían dado o se estaban dando en diferentes países, después del Manifiesto de Córdoba; por último, la creación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional motivó la creación de carreras de ciencias.

La Facultad de Ciencias se creó con el Acuerdo 23 de 1946 del Consejo Académico de la Universidad Nacional de Colombia y ratificada el mismo año por el Acuerdo 245 del Consejo Directivo de la misma institución (Arias y Sánchez, 2006). En 1947 se ofrece en la Facultad un curso libre de matemáticas generales dictado por el profesor suizo Henry Yerly[125], en abril de 1948 se funda la Universidad de Los Andes y llega a

[125] El profesor Yerly llegó a Colombia a principios de la segunda guerra mundial, fue profesor de matemática en el Gimnasio Moderno, jefe de los departamentos de física y matemáticas de la Universidad de los Andes y rector del Colegio Helvetia. Los temas dictados en el curso de matemáticas generales

Colombia el profesor Carlo Federici Casa, quien enseñaría las primeras lecciones de lógica matemática en nuestro país.

Antes de continuar con el aporte de Federici a la lógica en Colombia hagamos una síntesis. Siguiendo a Boyer (1992), la historia de la lógica según su desarrollo se sitúa en tres períodos: la Lógica Griega, la Lógica Escolástica y la Lógica Matemática. La Lógica Griega no se dio en Colombia porque los estudios superiores comenzaron en el siglo XVI, la Lógica Escolástica se enseñó hasta aproximadamente la primera mitad del siglo XX, y a partir de 1948 se dan las primeras enseñanzas de la Lógica Matemática con Federici y un poco antes la teoría de conjuntos con Vera iniciador de la matemática moderna en Colombia. Debe tenerse presente que en esos años la Lógica Escolástica se seguía enseñando en las Escuelas o Facultades de Filosofía, debido a la escasez de textos sobre lógica formal y la precaria preparación de los profesores universitarios en lógica matemática y en general en fundamentos de la matemática.

Desde su llegada, Federici se interesó por la enseñanza de la lógica y la creación de una carrera de matemáticas en la Universidad Nacional, anhelo materializado con el Acuerdo 226 de diciembre 5 de 1951 del Consejo Directivo según el cual se establece la *Especialidad en matemáticas Superiores* en la Facultad de Ciencias con una duración de tres años. Más adelante, el Acuerdo 363 de diciembre 9 de 1952 del Consejo Directivo modifica el plan a cinco años obteniéndose el título de *Licenciado en Ciencias Matemáticas*, cambiándose finalmente el título en 1960 al de *Matemático* (Sánchez, 1997).

La Facultad de Ciencias en su primera versión tiene vida hasta 1956 cuando el Consejo Directivo mediante el acuerdo 20 pone fin a su primera existencia, fundándose a la vez el Departamento de Matemáticas y Estadística del cual dependería la Carrera de Matemáticas y eliminando la Sección de Matemáticas dependiente de la Facultad de Ingeniería. En 1957 Federici promueve y logra que se establezca la Facultad de

fueron números irracionales, sucesiones y límites, continuidad y derivada para funciones de una variable, series y operaciones con números complejos.

Matemáticas independiente de la Facultad de Ciencias y es nombrado director de la misma; en 1965, el programa regresa nuevamente a la restablecida Facultad de Ciencias según Acuerdo 61 del Consejo Directivo.

Federici tiene el mérito de haber creado el primer programa de matemáticas e introducir la enseñanza de la lógica matemática en Colombia. En su primer curso Federici trabaja la construcción de los números naturales según Peano, las operaciones lógicas y la demostración matemática de la conformación de las escalas musicales, luego enseña lógica moderna[126] con un método inventado por él llamado *método de los palitos*, método que opera en forma mecánica permitiendo la demostración de tautologías. Sus primeras enseñanzas están organizadas en unas notas de clase publicadas con el título *Lógica Matemática* y *Fundamentos de lógica, de física y de matemáticas*. En 1956 organiza el *Primer Seminario Colombiano sobre la Enseñanza de la Matemática*, en 1958 dirige un seminario para la actualización de profesores de matemática y física del bachillerato organizado por el Ministerio de Educación Nacional, y enseña un curso de lógica en la Pontificia Universidad Javeriana tratando la temática Redes Neuronales de McCullogh.

El trabajo de Federici se fortalece con la llegada del profesor húngaro Juan Horvath en 1951, contratado por la Universidad de los Andes para dirigir el Departamento de Matemáticas. Debido a que en Los Andes no había programa de matemáticas, Horvath decide colaborar con el programa de la Universidad Nacional, permaneciendo allí hasta 1957 ofreciendo cursos de alto nivel en matemáticas para profesores y alumnos. Los cursos dictados fueron Espacios de Hilbert, Teoría de la Medida, Integral de Lebesgue y Ecuaciones diferenciales parciales. Federici se encargaba del curso Fundamentos de matemática, Cálculo operacional, Ecuaciones diferenciales ordinarias y Variable compleja[127]. Después del curso de Vera sobre iniciación a la matemática moderna, por primera vez en forma oficial se habla de fundamentos de la matemática en sentido

[126] Esta lógica moderna tenía como contenidos manejo de tablas de verdad para las conectivas, cálculo proposicional y cálculo de predicados.
[127] Afirmación de José Nieto egresado de la licenciatura en matemáticas en 1956 publicada en Nieto, J (1996). Mis años de estudiante en Bogotá. *Lecturas matemáticas*. 17(1), 95-104.

estricto como teorías contributivas de la construcción de la matemática, se enseña álgebra moderna y se comienzan a estudiar los libros de la Escuela Bourbaki, introducidos por Horvath en el curso sobre integración, quien además durante su estancia en Colombia trajo invitados a Laurent Schwartz, y Jean Dieudonné de la Escuela Bourbaki y John Von Newman.

El Programa de Matemáticas de la Universidad Nacional recibió apoyo de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) creada en 1955 de la cual Federici fue socio fundador, y del grupo de ocho profesores japoneses que llegan a Colombia en 1959 de los cuales cuatro de ellos vienen para la enseñanza de la matemática y la física. Entre ellos estaba Yu Takeuchi, quien se queda como profesor del Programa de Matemática de la Nacional, dando un nuevo impulso al desarrollo de la matemática en Colombia.

Con Takeuchi se inicia la publicación de revistas y libros para el estudio de la matemática proporcionando aportes significativos de tipo metodológico, mejorando también la formación del matemático. En las dos últimas décadas del siglo XX la enseñanza de la lógica en el Programa de Matemáticas de la Nacional se fortalece con los aportes del Grupo de Lógica de Bogotá, que a la vez colabora con el área de Especialización en Lógica de la Nacional.

Además del Programa de Matemáticas existió en la Universidad Nacional una Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación, cuyo objetivo fue el de preparar docentes para la educación secundaria. De este Programa creado en 1951 egresaron varios de los docentes del Programa de Matemáticas de la Universidad Nacional. Esta licenciatura se fue extinguiendo con el avance del Programa de Matemáticas y la desaparición de la Facultad de Educación. La última admisión de estudiantes para la Licenciatura se dio en 1978.

Hasta finales de 1961 en Colombia existían solamente un programa de matemática pura y tres programas de licenciatura en matemáticas y física: el de la Nacional y las licenciaturas en las Universidades Pedagógica y Tecnológica de Tunja, Pedagógica

Nacional y de Antioquia, los dos primeros resultantes de la división en 1951 de la Escuela Normal Superior de Bogotá en dos instituciones, la Normal Universitaria Femenina con sede en Bogotá convertida en Universidad Pedagógica Femenina en 1955 y Universidad Pedagógica Nacional en 1962, y la Normal Universitaria Masculina con sede en Tunja transformada en 1953 como la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia con las Facultades de Educación y Filosofía, Ciencias Económicas y Sociales, Filología e idiomas, Matemáticas y Física y Biología y Química.

Los primeros egresados en el área de matemáticas y física de Tunja se dieron a finales de 1953, cuyos estudios fueron prácticamente realizados en la Normal Masculina, luego se formarían licenciados en diversas áreas con un programa cuya duración era de ocho semestres. En lo concerniente a la matemática, el pensum de las licenciaturas de Bogotá y Tunja no contemplaba el estudio de la lógica y los conjuntos, ya que en los años cincuenta las materias del plan de estudios seguían la tradición de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional, dominando el estudio del cálculo y la geometría.

El Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia nace dentro de la Facultad de Educación, creada mediante el Decreto 342 de 19 de junio de 1953con cinco programas. Tres de ellos fueron exclusivos para varones: Biología, Química y Matemáticas y Física; los otros dos, Pedagogía y Ciencias Sociales solo eran ofrecidos para mujeres, con el argumento de que los primeros por su complejidad estaban destinados al sexo masculino.[128] La Licenciatura en Matemáticas se estableció según el Acta 1116 de septiembre 30 de 1953 del Consejo Directivo, con el objetivo de preparar profesores para la enseñanza secundaria en sus diferentes modalidades, con un plan de estudios inicial comprendiendo aritmética, geometría, cálculo mercantil, contabilidad, trigonometría y física. No se contemplaban materias de pedagogía ni práctica docente, porque las licenciaturas admitían inicialmente solamente alumnos egresados de las escuelas normales.[129] En 1956 con la Resolución 2470 el Programa

[128] Esta exclusión del sexo femenino en los programas de ciencias es heredada de la era colonial y en Antioquia tuvo eco en el Gobernador de ese entonces Coronel Pioquinto Rengifo.
[129] Proyecto Educativo Institucional de la Licenciatura en Matemáticas y Física elaborado en 2004 por Ana Teresa López Posada y Oscar Fernando Gallo Mesa.

recibe la primera aprobación por parte del Ministerio de Educación Nacional, y en 1973 se le otorga aprobación por diez años.

A finales de los años cincuenta y principios de los sesenta, el programa se caracterizó porque muchos de sus profesores y egresados se encargaron de la difusión de la matemática tanto en los niveles de enseñanza secundaria como universitaria. Fueron profesores del programa de Licenciatura en Matemáticas Luis de Greiff Bravo y Juan Viedma, autor este último de un famoso texto de aritmética. Egresó de este Programa en 1960 Hernando Bedoya Fernández, primer Doctor en Matemáticas de Antioquia, autor de varios textos para la enseñanza de la matemática en el bachillerato y en la universidad, entre ellos *Matemáticas Generales*, texto en el cual se hace una introducción a los fundamentos de la matemática.

Desde sus inicios hasta la primera mitad de la década de los sesenta, el Programa se ocupaba de la matemática clásica necesaria para impartir enseñanza en secundaria, en ningún momento de esos años se contempló la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos, así lo pone de manifiesto el profesor José María Rodríguez Rojas el 1º de marzo de 1954 cuando se abrieron las clases, testificando en la sesión inaugural lo siguiente:

> *Es claro que no se trata de formar Licenciados y Doctores en Ciencias Matemáticas Aplicadas (Geometría Descriptiva, Trigonometría, Mecánica Racional, Astronomía, etc.) ni en Matemáticas Puras (Aritmética, Lógica, Álgebra, Geometría, Cálculo Integral y Diferencial) que para eso están las Facultades de Ingeniería y matemáticas, sino que en esta Facultad habrán de prepararse técnica y pedagógicamente los profesores de Aritmética, Geometría, Cálculo Mercantil, Contabilidad, Trigonometría y Física,*

> *asignaturas estas que forman parte de los actuales programas de bachillerato y Escuelas Normales.*[130]

En 1965 se reforma el plan de estudios del Programa fijándose una duración de ocho semestres, se reorganizaron los contenidos fortaleciendo el saber disciplinar e incluyendo la lógica y la teoría de conjuntos en las asignaturas de fundamentos dentro de la línea llamada matemática moderna. La reforma había sido iniciada en 1962 año en el cual se da una reforma curricular del bachillerato, y un año después de la Primera Conferencia Interamericana en Educación Matemática de Bogotá.

De acuerdo con lo expuesto para este período, antes de 1948 la matemática enseñada en Colombia correspondía al nivel requerido para la formación de ingenieros de la época, aunque no a la altura de las escuelas de ingeniería de Norte América y Europa. Después de 1948 se inicia el estudio de la llamada matemática moderna y la profesionalización del matemático anunciada por Mutis en el siglo XVIII, comenzando una nueva visión de la matemática. Si nos comparamos con otros países de América Latina, llegamos a la matemática del siglo XX por lo menos con 20 años de retraso, pues Argentina inició estudios de matemática hacia 1917 con Julio Rey Pastor, Chile con Poenisch en 1930, México en 1932 con Sotero Prieto y Alfonso Nápoles Gándara y Brasil en 1934 con el matemático italiano Luigi Fantappié.

[130]Proyecto Educativo Institucional de la Licenciatura en Matemáticas y Física elaborado en 2004 por Ana Teresa López Posada y Oscar Fernando Gallo Mesa, P. 9

4. LA MATEMATICA EN EL CARIBE COLOMBIANO: 1604-1961

Para hablar de la historia de la educación en el Caribe Colombiano y en particular de la enseñanza de la matemática, es necesario empezar con el aporte dado por los ingenieros constructores de murallas y fortificaciones en Cartagena sin dejar de lado la influencia de la Iglesia Católica. En el Caribe, como en el resto de la Nueva Granada, la educación estuvo en manos de la Iglesia Católica, las escuelas de primeras letras fueron inicialmente para un sector privilegiado de la población, hijos de españoles, criollos de la aristocracia e indígenas principales.

Con el transcurrir de los años la educación primaria se extendió a sectores más amplios, ante la obligación de poder contar con una fuerza de trabajo que tuviera al menos los conocimientos básicos necesarios para beneficio de la élite, mediante la explotación de los nativos. Por otra parte, la educación secundaria alcanzó otros niveles sociales sin dejar de ser privilegio para unos pocos, y la educación superior fue más exclusiva y prácticamente inexistente durante los siglos XVII y XVIII. Estas y otras razones llevan a considerar tres períodos dentro de los antecedentes de la enseñanza de la matemática: El Período Colonial, desde el establecimiento de La Colonia hasta la creación de la Universidad de Cartagena; el Período Republicano, correspondiente a la vida de la Universidad de Cartagena con las carreras clásicas; y el Período Fundacional, desde los inicios de las ingenierías en 1946 hasta 1961

4.1 PERÍODO COLONIAL: 1604-1827

Las primeras poblaciones establecidas por los españoles en el Caribe Colombiano que se mantuvieron en pie fueron Santa Marta en 1525 y Cartagena de Indias en 1533. El primer colegio de la Nueva Granada se abrió en Cartagena en 1604, muy a pesar de haber sido Santa Marta la primera población de Colombia, debido a que los españoles llegados a la Nueva Granada se establecen en Cartagena, ciudad convertida en centro comercial de El Caribe durante los siglos XVII y XVIII. En 1614 los Jesuitas establecen el Colegio de San Carlos en Mompox y la Escuela de Primeras Letras fundada en Barranquilla en 1730 por Luis de Suárez, Párroco de San Nicolás. El estudio en el Período Colonial comprendía tres niveles: elemental, medio y superior.

En el nivel elemental las escuelas eran gratuitas, privadas y familiares; las gratuitas estaban a cargo de las comunidades religiosas, las privadas y familiares eran regentadas por laicos y para ellas se adecuaban las casas familiares o un sitio dentro de estas; también existían escuelas para indígenas. En todas las escuelas se enseñaba lectura, escritura, aritmética elemental y gramática castellana (Abu-Abara, 1981), los programas de estudio estaban basados en los escasos textos de estudio y la experiencia del instructor.

Los primeros estudios de enseñanza superior en el Caribe Colombiano estuvieron a cargo de los Jesuitas. Cartagena fue la puerta de entrada a los integrantes de la Compañía de Jesús, llegaron a esta ciudad en 1604 y se mantuvieron en ella hasta su expulsión en 1767 siendo expatriados de todos los dominios de España por orden de Calos III. Los Jesuitas, durante su permanencia en Cartagena desarrollan su labor académica en el Colegio de Cartagena, encargado de formar la juventud en virtud y letras. El Colegio se fundó en 1605, su primer rector fue Francisco Perlín, en el se enseñaba retórica, gramática, latinidad y filosofía escolástica[131] la que incluía lógica aristotélica. Las enseñanzas fueron muy restringidas ya que la institución estuvo bajo la supervisión del Tribunal de la Inquisición.

En los comienzos del siglo XVIII en Cartagena se intentaron crear instituciones educativas para militares como la *Academia de geometría y fortificaciones Nicolás de*

[131]No existe documentación sobre el plan de estudios del colegio: sin embargo, hay un registro de todos los integrantes de la comunidad que estuvieron en Cartagena en el texto Del Rey, José (2004). Los Jesuitas en Cartagena de Indias 1604-1767. Bogotá: Centro Editorial Javeriano.

Castro y la *Academia Militar de Matemáticas*[132] de Juan de Herrera y Sotomayor, donde además se enseñaba geografía y cartografía. La Academia de Herrera pretendió preparar a sus jóvenes ayudantes en las técnicas de ingeniería, funcionó algunos años y se clausuró al morir su fundador en 1732; posteriormente Antonio de Narváez (1733-1812), ingeniero cartagenero quien hizo estudios de ingeniería en España y participó en los trabajos de construcción de las murallas y el Canal del Dique estableció en Cartagena una Escuela de Ingeniería Militar que rápidamente desapareció; mas adelante, colabora con José Ignacio de Pombo en la Escuela Náutica en 1809. Finalmente, Bernardo de Anillo a comienzos del siglo XIX funda la primera Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas del Nuevo Reino, Academia que debía funcionar en Cartagena en la Calle del Sargento Mayor y que se quedó en el papel porque nunca inició clases.

Según Poveda (1993), los ingenieros militares[133] que vinieron a Cartagena hasta los comienzos del siglo XIX tenían los conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo sus construcciones, en su mayoría fortificaciones, canales, trazados de caminos y construcciones civiles. Estos conocimientos agrupados por temáticas eran: en aritmética los números naturales y sus cuatro operaciones, potencias, raíces cuadradas y cúbicas, logaritmos, nociones sobre los números primos, y divisibilidad; en álgebra Ecuaciones de primer y segundo grado, polinomios y sus operaciones, progresiones aritméticas y geométricas, teorema del binomio de Newton, nociones de trigonometría plana y resolución de triángulos; en geometría euclidiana paralelas, triángulos y polígonos, métrica plana, ángulos sólidos y métrica de sólidos; en navegación coordenadas celestes y trigonometría esférica.

En términos generales, el panorama educativo de la Región Caribe durante La Colonia fue deprimente. La ausencia de instituciones educativas formales fue una constante

[132] Esta Academia fue excluyente e intermitente porque los estudios eran muy irregulares, dependiendo de las necesidades de capacitación.
[133] Estos ingenieros fueron Cristóbal de Roda, Juan Bautista Antonelli, Turillo de Yebra, Juan de Semovilla, Lucas Báez, Luis Venegas Osorio, Juan de Herrera y Sotomayor, Carlos Desnaux, Juan Bautista Mac-Evan, Ignacio Sala, Lorenzo de Solís, Antonio de Arévalo, Juan Ximenez Donoso, Agustín Crame, Juan Betín y Bernardo de Anillo.

hasta el primer tercio del siglo XIX, la mayoría de los poblados se convirtieron en ciudades pequeñas después de la primera mitad del siglo XVIII, de allí que la enseñanza se daba en las escasas escuelas de origen privado. Las clases estaban sujetas a la presencia de los alumnos en ellas, cuyo número por lo general era muy reducido; así las cosas, durante este período, en lo referente a educación superior aparte de la influencia de los Jesuitas en materia de filosofía dentro de sus conventos y los intentos de los ingenieros constructores de fortificaciones por crear escuelas de ingeniería y matemática, no hubo nada mas hasta finales del siglo XVII. En el resto del período solo se cuentan dos instituciones formalmente establecidas, El Colegio de San Carlos y el Colegio Universidad San Pedro Apóstol.

El Colegio y Seminario de San Carlos de Cartagena se crea el nueve de septiembre de 1776, las clases de filosofía comenzaron el 18 de octubre de ese año y conformaban un curso propedéutico para ingresar a los estudios de teología, cánones, leyes y medicina que eran los estudios superiores del Colegio. Los estudiantes de esta clase, como requisito, debían presentar un examen de gramática los días 10 y 11 de octubre. Fueron profesores de filosofía Anselmo de Inaga y Joan Francisco Vásquez, quienes reemplazaron el estudio de las obras de Gaudin por las de Wolff y Copérnico, influidos por las enseñanzas de Mutis y los Ilustrados del Colegio Mayor del Rosario. El Colegio de San Carlos subsistió con muchas dificultades después de fundado, se terminó debido a la expulsión de los Jesuitas años antes en 1767 quienes pusieron el embrión del Colegio, y por la escasez de estudiantes y profesores. No se sabe en que consistieron los estudios de filosofía de este colegio, pero con seguridad en ellos se estudiaba lógica aristotélica, ya que desaparecido el Colegio en 1827 al formar parte de la Universidad del Magdalena, se mantiene la Escuela de Filosofía. Tal como ocurrió con todos los planteles educativos en el régimen colonial, el Seminario ilustra la élite cartagenera, en el se forman personajes importantes como Juan Fernández de Sotomayor conocido como el *Cura de Mompox,* personaje controvertido autor del *Catecismo o instrucción popular*.

El Colegio Universidad San Pedro Apóstol considerado la primera universidad del Caribe Colombiano se estableció en Santa Cruz de Mompox, por iniciativa del comerciante español Pedro Martínez de Pinillos, con el propósito de formar los ciudadanos de la élite, ante la dificultad de enviar a los jóvenes hasta la capital del país para realizar sus estudios y dado que el número de estudiantes era significativamente alto[134]. Otras razones para la creación del Colegio fueron la alta población existente, el desarrollo comercial de Mompox como puerto fluvial y la influencia de la élite en el gobierno ejercida principalmente por Martínez de Pinillos, personaje acaudalado contribuyente a su fundación en lo político y en lo económico.

Los orígenes del Colegio datan de 1806 cuando Martínez otorga a Eloy Valenzuela la potestad de elaborar un plan de estudios de filosofía para el Colegio y es designado rector del mismo, cargo que no ocupó por estar ejerciendo su profesión en el Curato de Bucaramanga; no obstante, Valenzuela elabora el documento fundacional conteniendo 12 títulos entregados el 12 de abril de 1806 en los cuales se contempla el plan de estudios, la metodología y las evaluaciones entre otras generalidades. Los estudios se realizarían en las Facultades de Filosofía, Derecho, Medicina y Química, privilegia el estudio de las ciencias y suprime la Facultad de Cánones (Soto, 2004), incluye la matemática en la filosofía utilizando las obras de Wolff y Newton.

El 29 de agosto de 1809 se instala el Real Colegio Universidad de San Pedro Apóstol nombrándose como rector interino el Doctor José María Gutiérrez de Caviedes. Dado que los estudios habían comenzado de manera no oficial años antes de convertirse en Universidad, el primer grado es conferido el 16 de enero de 1810 a Eugenio de la Torre y Corral como Bachiller en Filosofía, los primeros dos doctores se gradúan el 11 de octubre de 1810 en la Facultad de Derecho.[135] En 1811 se cierra el Colegio, viéndose frustrada su vida como universidad; se reabre en 1823 cerrándose nuevamente en 1840. Para el año 1825 regenta la cátedra de matemáticas el Dominico Tomás Sánchez Mora

[134] En 1778 se matricularon en el San Bartolomé 20 estudiantes provenientes de la Villa de Mompox, así se registra en Soto, Diana (2004). La primera universidad del Caribe Colombiano, un modelo ilustrado para América Colonial. Estudios Humanísticos. Historia 3(1), 9-43.
[135] Salzedo, Pedro (1987). *Apuntaciones historiales de Mompox*. Cartagena: Espitia Impresores.

quien antes se había desempeñado como profesor en la Universidad de Bogotá y después es trasladado como Cura Párroco de Corozal. Después se dan tres cierres mas, de 1858 a 1872, de 1895 a 1896 y de 1900 a 1905, convirtiéndose finalmente el Colegio de San Pedro Apóstol en una institución de estudios secundarios conocida hoy como el Colegio Pinillos.

Los textos de matemáticas utilizados en el Colegio San Pedro Apóstol, constatan que la matemática enseñada fue la matemática clásica contenida en el texto de Wolff, el cual había sido estudiado por Valenzuela quien había recibido la influencia de Mutis. La lógica presente en Wolff corresponde a las proposiciones iniciales en las cuales Mutis basó su discurso sobre el método matemático sintetizando el método axiomático desarrollado por Euclides en su geometría. Sánchez Mora, tuvo un paso fugaz por el Colegio en su segunda etapa, y sus lecciones estuvieron basadas también en Wolff, texto que usaba en Bogotá.

La *Escuela de Pilotaje y Matemáticas* fue creada por José Ignacio de Pombo en 1808, funcionó en la sede del Consulado de Cartagena ubicado en la Calle del Sargento Mayor, después de la independencia en 1811 se llamó *Escuela de Náutica y Matemáticas*. Gradúa los primeros oficiales en 1812 y cierra sus puertas en 1813 después de la muerte de su fundador. El nombre de la Institución se toma emulando la Escuela de Náutica y Matemáticas de Bilbao (1740), la Escuela Náutica de Barcelona (1769), Arenys de Mar (1779), La Coruña (1790) y otras[136]. En ella se estudiaban los elementos matemáticos básicos para el pilotaje como lo son la geometría planimétrica y estereométrica, la trigonometría plana y esférica, el pilotaje, la cartografía, la cosmografía, la astronomía, la hidrografía, y otras. Más adelante, el primer gobierno de Santander dispone la creación de la Escuela Náutica según el Decreto 086 de junio 28 de 1822. Esta Escuela prontamente culmina sus labores el 13 de junio de 1824, aunque seguía figurando funcionando en el papel hasta el 7 de diciembre de 1826, fecha en la

[136] Los estudios en estas escuelas fueron reglamentados por el plan Winthuysen del 26 de febrero de 1790 que en el primero de sus dos años incluía la asignatura de matemáticas usando como texto guía el tratado de Fernández

cual se ordena el desarme de los buques de instrucción y el retiro de los oficiales de marina.

Las enseñanzas en las dos Escuelas Náuticas correspondían al plan de estudios del *Real Colegio Seminario de San Telmo de Sevilla*, conocido también como *Escuela de Pilotos de San Telmo*. Estas enseñanzas comprendían aritmética, geometría, álgebra, trigonometría e instrumentos de navegación. La enseñanza práctica estaba a cargo de pilotos egresados de San Telmo y consistía en el embarque obligatorio en buques de la Carrera de Indias[137] y también en navíos de guerra para realizar una o varias travesías del Atlántico y así adquirir la experiencia necesaria para el ejercicio profesional. Uno de los contribuyentes en la preparación de pilotos de las dos escuelas fue Rafael Tono Llopiz, quien había llegado a Colombia con la expedición de Joaquín Francisco Hidalgo, encargado de elaborar los mapas de las costas después de haber sido director de la Escuela de Pilotos de San Telmo.

4.2 PERÍODO REPUBLICANO: 1827-1946

Durante el gobierno de Santander, el *Colegio de Cartagena* creado mediante Decreto del 18 de noviembre de 1824, fusionado con el antiguo Colegio Seminario de San Carlos se convierte en la Universidad del Magdalena según el Decreto de seis de octubre de 1827 e instalada el 11 de noviembre de 1828. La nueva Universidad inicia con la Escuela de Filosofía y Letras que en realidad era una Sección de Educación Secundaria, la Escuela de Jurisprudencia heredada del Colegio Seminario San Carlos y la Escuela de Medicina cuyos inicios se dan en 1830. En 1844 se llamó Universidad del Segundo Distrito, en 1855 se denomina Colegio Provincial de Cartagena, en marzo 26 de 1860 se llama Colegio del Estado de Bolívar, cerrado en 1864 debido a la falta de financiamiento causada por el decreto de desamortización de bienes de manos muertas de Tomás Cipriano de Mosquera de 1861, en 1866 la Asamblea Legislativa del Estado

[137] Nombre dado a la flota encargada del comercio y la navegación entre España y América.

Soberano de Bolívar expide una ley creando la *Escuela Náutica* y la *Escuela de Comercio* anexas al Colegio de Bolívar.

No se sabe exactamente hasta cuando funcionó la Escuela Náutica porque realmente no hubo un decreto poniendo fin a ella; no obstante, el Capitán de Navío Rafael Tono continuó enseñando navegación en una escuela privada de cuyo funcionamiento se conoce muy poco, recibiendo reconocimiento para la misma en el gobierno del Vicepresidente José Ignacio Márquez con la Ley de 27 de marzo de 1832. Un año más tarde, la Escuela se anexa a la Universidad del Magdalena mediante el Decreto 243 de julio 15 de 1833, pero esta anexión contribuyó a su desaparición.

Con la muerte de Bolívar en 1830 se disuelve la Gran Colombia y nuestro país se convierte en un estado regional acosado por las muchas guerras civiles que de allí en adelante se sucederían. A partir de esa época nuestro país recibió el nombre de República de la Nueva Granada, refrendado con la Ley Fundamental del Estado de la Nueva Granada de noviembre 17 de 1831 y constituida por los estados de Boyacá, Cauca, Cundinamarca, Magdalena e Istmo. La República de la Nueva Granada (1830-1853) comprendía entonces, las Provincias de Bogotá, Tunja, Socorro, Vélez, Pamplona, Magdalena, Cartagena, Panamá, Veraguas, Antioquia, Neiva, Popayán, Pasto y Barbacoas.

La Constitución de 1832, sancionada por el Vicepresidente José María Obando introdujo el régimen centralista en la Nueva Granada, con un ejecutivo débil, un período presidencial de cuatro años, un régimen de provincias regido por los gobernadores y un Congreso bicameral. Tiene lugar en este régimen la Guerra de los Supremos o Guerra de los Conventos (1839-1841) de la cual se nacen los partidos políticos como consecuencia de la inestabilidad política y los desórdenes sociales[138].

[138] http://www.colombia.com/colombiainfo/nuestrahistoria/nuevagranada.asp

El gobierno de Pedro Alcántara Herrán expide en 1842 un decreto reorganizando la educación universitaria en tres distritos, uno por cada Universidad. El primer distrito estaba conformado por las provincias de Antioquia, Casanare, Mariquita, Neiva, Pamplona, Socorro, Tunja, Vélez y Bogotá, ciudad esta última sede de la Universidad del Primer Distrito; el Segundo Distrito comprendía las provincias de Mompox, Panamá, Riohacha, Santa Marta, Veraguas y Cartagena sede de la Universidad del Segundo Distrito o del Magdalena e Istmo; el Tercer Distrito estaba formado por las provincias de Buenaventura, Cauca, Chocó, Pasto y Popayán donde funcionaría la Universidad del Tercer Distrito. Cada Universidad contaba con cinco facultades: Literatura y Filosofía, Medicina, Jurisprudencia, Ciencias Eclesiásticas y Ciencias Físicas y Matemáticas. En la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas se enseñaría álgebra, geometría, trigonometría esférica, secciones cónicas, cálculo diferencial e integral, geometría descriptiva, mecánica, arquitectura, astronomía, física experimental, química, mineralogía, geología, botánica, agricultura, anatomía, zoología y fisiología (Abu-Abara, 1981). En la Universidad de Cartagena esta Facultad no funcionó, por lo tanto no existieron estudios de matemáticas universitarias en el lapso de 1842 a 1850.

En los años cincuenta del siglo XVIII, la Nueva Granada estaba constituida por cinco estados: Antioquia, Boyacá, Cauca, Cundinamarca y Magdalena, territorio este último conformado por el Caribe Colombiano. Queda entonces el territorio nacional dividido en estados, los estados en departamentos o provincias y los departamentos en distritos. El estado se miraba mas como un conglomerado de provincias en vez de un conglomerado de departamentos. Realmente los primeros estados de la Nueva Granada fueron creados entre 1856 y 1857. El Estado Soberano de Bolívar fue creado el 15 de junio de 1857 y conservó este nombre hasta 1886 cuando pasa a ser el Departamento de Bolívar.

En octubre 15 de 1857 el Estado Soberano de Bolívar se divide en cinco departamentos: Cartagena, Corozal, Mompox, Sabanilla y Sinú. En esa misma fecha, las Villas de Corozal y Barranquilla se erigían como ciudades. Para 1857, serían siete los departamentos: Cartagena, Corozal, Chinú, Mompox, Barranquilla, Sabanalarga y Lorica.

La reforma constitucional del 22 de mayo de 1858 crea la Confederación Granadina con un gobierno federal y el territorio lo divide en ocho estados tal como lo manda el artículo 1º que dice así:

> *Artículo* ***1.-*** *Los Estados de Antioquía, Bolívar, Boyacá, Cauca, Cundinamarca, Magdalena, Panamá y Santander, se confederan a perpetuidad, forman una Nación soberana, libre e independiente, bajo la denominación de «Confederación Granadina», y se someten a las decisiones del Gobierno general, en los términos que se establecen en esta Constitución.*[139]

En lo referente a la educación, esta constitución afirma que la instrucción pública es de competencia del gobierno aunque no exclusivamente, dejando una ventana abierta a la creación de instituciones de educación de carácter privado, lo cual corrobora en el Artículo 56 al conceder "libertad de dar o recibirla instrucción que a bien tengan, en los establecimientos que no sean costeados con fondos públicos".

De acuerdo con las condiciones políticas dadas, los estados emitían leyes relacionadas con su organización; es así como el Estado Soberano de Bolívar promulga la Ley del 3 de diciembre de 1857 con el propósito de organizar la educación y crear el Instituto Boliviano que rescata la actual Universidad de Cartagena. Recogemos en este apartado los dos primeros capítulos de la Ley.[140]

> *ARTICULO 1. La instrucción se costea con fondos públicos, será de las escuelas primarias, que establezcan los distritos por el estado, i la del Instituto Bolivariano, que organizará el poder ejecutivo del estado, teniendo por base la disposición de la presente lei.*

> *ARTICULO 2. Todos los edificios, muebles, instrumentos, libros, capitales impuestos a censo i cualesquiera otros valores que han*

[139] Obtenido de la página web http://www.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/01477398877125528632268/p0000001.htm#_1

[140] Gaceta oficial del Estado de Bolívar, Número 16 trimestre II. Cartagena, Nueva Granada, 20 de diciembre de 1857.

pertenecido a la nación en el estado, o a las antiguas provincias de Cartagena, Mompox i Sabanilla destinados a la instrucción de la juventud de ambos sexos, formarán una masa común para el sostenimiento del Instituto Boliviano.

La Ley de 1857 en su articulado no sometía a los seminarios dirigidos por los religiosos ni a los establecimientos educativos de carácter privado como el caso del Colegio Pinillos de Mompox; no obstante, dejaba a discreción de los municipios algo así como la labor de vigilancia e inspección, respetando las orientaciones de los directores de esos colegios y las obligaciones contractuales para ello.

En 1858, durante el gobierno de Mariano Ospina Rodríguez, la Nueva Granada se transforma en la Confederación Granadina, refrendada por la Constitución Política de 10 de febrero de 1858, conformada por ocho estados: Antioquia, Bolívar, Boyacá, Cauca, Cundinamarca, Magdalena, Panamá y Santander. El estado de Bolívar comprendía los departamentos de Cartagena, Carmen, Corozal, Magangué, Mompox, Sabanalarga, Barranquilla y Lorica.

La Confederación llega a su fin en Septiembre de 1861, y los estados anteriores pasan a conformar los *Estados unidos de Colombia*, incorporando el nuevo estado de Tolima, acuerdo corroborado con la Constitución de Río Negro. Se destaca en esta nueva constitución la abolición de la esclavitud, pero la organización de la educación permanece sin variaciones hasta la Constitución de 1886 que pone fin al Federalismo llegando a la presidencia Rafael Núñez, cabeza del movimiento conocido como *La Regeneración*. En el gobierno de Núñez la nación toma el nombre de *República de Colombia* y los estados pasan a ser departamentos.

La fundación del Instituto Boliviano se materializó a través de la Ley de 3 de diciembre de 1857 para reemplazar la Universidad de Cartagena que había sido cerrada debido a la inestabilidad política y a las guerras civiles de la nación. Para ese entonces la Universidad formaba profesionales en medicina y derecho, pues la otra Facultad de Filosofía y Letras era el Bachillerato. Aprovechando la coyuntura, el Estado de Bolívar decide emprender la enseñanza de otras disciplinas porque necesitaba capacitar personas en diferentes oficios, pues el país estaba en construcción a pesar de la destrucción a la que estaba sometido como producto de las guerras civiles que además no permitían el crecimiento de las Universidades. Es de advertir que en 1851 la Universidad de Cartagena contaba con solo 32 alumnos todos de sexo masculino.[141]

El Instituto Boliviano, a diferencia de la Universidad de Cartagena, impartía enseñanza de tipo superior a alumnos de sexo masculino agrupados en las Academias de Ciencias Exactas, de Náutica y de Ciencias Físicas y Naturales. Las mujeres realizaban sus estudios en la Academia del Bello Sexo, donde se preparaban para encargarse del manejo del hogar y la educación de los hijos. Sus objetivos eran "1. La instrucción secundaria de varones y su educación; y 2. La instrucción i educación del bello sexo"[142]

Los alumnos del Instituto podían ser internos o externos y las clases o materias estaban sujetas a lo que determinara el poder ejecutivo, ya que era este quien lo dirigía, nombraba su director, hacía los reglamentos de los alumnos y fijaba los requisitos de admisión fijados en la ley de fundación y que variaban según la Academia en donde estudiarían los alumnos.

Los estudios en las Academias de Ciencias Exactas, de Náutica y de Ciencias Físicas y Naturales tenían una duración aproximada de cuatro años dependiendo de que se cumpliera el cupo mínimo exigido en cada año y en cada clase o materia. Los estudios en la Academia del Bello Sexo eran duración más corta, las niñas que se recibían debían tener edades comprendidas entre los siete y los 17 años, debían saber leer y escribir, provenir de una familia decente y tener certificado de ser modesta y no haber recibido malos ejemplos. Esta certificación debía ser dada por el alcalde del distrito o el respectivo Ministro del Culto, en virtud de que según la Constitución no se garantizaba la libertad de culto.

[141] El dato fue obtenido de la compilación hecha por Dora Piñeres sobre la historia de la Universidad de Cartagena.
[142] Gaceta oficial del Estado de Bolívar, trimestre III 11 de abril de 1885 Nº 35

Para ser admitido en las Academias de Ciencias Exactas y de Náutica se requería ser granadino, tener edad entre 14 y 20 años, saber leer y escribir y traducir inglés o francés, presentar certificación de buena conducta del profesor o maestro encargado de haberle dado la educación primaria o instrucción preparatoria. Además de lo anterior, debía presentarse un examen de suficiencia sobre las materias de la instrucción primaria, examen que le era practicado por los profesores del instituto. El examen de suficiencia era oral, con una duración de una hora y media para los aspirantes a ciencias exactas y náutica. En la primera hora se examinaba aritmética y geometría, y en la otra media hora lectura, escritura y traducción de idiomas. En el año 1858 se abrieron estudios de ciencias morales y políticas, siendo requisito de ingreso además de los documentos relacionados, "sufrir un examen por una hora en gramática castellana i aritmética en toda su extensión"[143]. El 14 de junio de ese año, la Academia del Bello Sexo contaba con 25 alumnas y solamente una de ellas era interna.[144]

En todos los casos, los jóvenes que deseaban ser admitidos de alumnos en las academias debían solicitar al Presidente del Instituto una autorización en papel sellado, con una autorización de su padre o persona que lo representaba, acompañada de otros documentos que acreditaran su nacionalidad y su buena conducta.

La enseñanza en las diferentes Academias del Instituto iniciaba el 2 de enero de cada año, siempre y cuando hubiera el mínimo de alumnos por clase que era de seis. Esto hacía suponer que las materias a cursar dentro de un año o período de tiempo no se hacían en un orden riguroso sino que dependía de la matrícula[145].

Desde su fundación, la administración del Instituto Boliviano dependía del ejecutivo con la potestad de nombrar su Presidente, los empleados y los profesores. La labor del Presidente sería la de ordenador secundario correspondiente a los arreglos locativos de la escuela central y las escuelas especiales establecidas, ya que no todas las academias

[143] Gaceta oficial del estado de Bolívar. Trimestre III de 11 de abril de 1858 Nº 35 p2.
[144] Curiosamente en el listado de alumnas que aparece en la gaceta Nº 50 de 27 de junio de 1858, los nombres de alumnas tienen un solo apellido.
[145] Esto estaba contemplado en el decreto de 31 de marzo de 1958 publicado en la Gaceta oficial del Estado de Bolívar. Trimestre III 11 de abril de 1858. Nº 35 p2.

se encontraban situadas en un mismo lugar. De esta manera, el Presidente del Instituto se convertía en un ejecutor de todo lo dispuesto por el mando principal que recaía sobre el ejecutivo, es decir, sobre el Gobernador del Estado. Caso similar ocurriría con la Universidad de Cartagena, donde hasta hoy, el Presidente del Consejo Superior es el Gobernador.

En lo referente a lo estructural, el Instituto inició labores con una biblioteca, gabinetes de física, laboratorios, muebles e instrumentos para cada una de las escuelas donde funcionaban las academias. La contabilidad del Instituto estaba a cargo del entonces Tesorero del Estado y la ordenación de gastos era competencia del ejecutivo a través del Secretario de Estado que hacía las veces de Subdirector del Instituto; los gastos diarios del Instituto eran administrados por un Ecónomo quien estaba bajo la inspección y vigilancia del Presidente y este a su vez era subalterno del ejecutivo. En pocas palabras, la administración del Instituto era potestad del ejecutivo quien delegaba sus actuaciones de manera muy precisa en el Presidente.

En el apartado anterior se señaló que el Instituto en su fase inicial tuvo cuatro academias:

- De Ciencias Exactas
- De Náutica
- De Ciencias Físicas y Naturales
- De Instrucción del Bello Sexo.

Como se había señalado anteriormente, era el ejecutivo quien determinaba cuales eran las asignaturas de cada programa por así decirlo, nombraba los profesores, imponía los textos de estudio y reglamentaba la vida académica.

En la Academia de Ciencias Exactas, se enfatizaba en la enseñanza de la matemática complementada con un grupo de materias de ingeniería, de tal manera que el egresado al cabo de cuatro años, previa obtención de buenas calificaciones, podía obtener el diploma de Ingeniero Civil; además de ello, el objetivo se encaminaba a formar agrimensores y personas competentes para levantar planos topográficos, cartas hidrográficas y corográficas del estado; algo así como formar topógrafos e ingenieros catastrales de hoy en día. Las materias distribuidas por año según el Artículo 5 de la Ley de 3 de diciembre de 1857 son:[146]

> *Primer año: Aritmética, áljebra, geometría especulativa y práctica, trigonometría rectilínea i esférica, geometría analítica, secciones cónicas tratadas analítica i sistemáticamente, geometría descriptiva i sus aplicaciones a las sombras, a la perspectiva, a la maquinaria i al corte de piedras, cálculos diferencial e integral, mecánica y maquinaria, cosmografía, arquitectura civil, caminos, puentes, canales i calzadas.*
>
> *Segundo año: Construcciones del ramo de ingenieros i sus materiales, presupuestos de tiempo, obreros i gastos*
>
> *Tercer año: Dibujo lineal, trazado i levado de planos, mapas, cartas geográficas, diseño y resoluciones geográficas de problemas geométricos sobre canales, caminos i calzadas*
>
> *Cuarto año: Prácticas sobre terreno, esgrima, tiro de pistola, equitación i natación*[147]

Dadas las condiciones de Cartagena de ser una ciudad con un puerto de alto movimiento, la Academia de Náutica se proponía preparar las personas destinadas a trabajar en las embarcaciones, ya sea como pilotos o ingenieros navales, en cierta forma para reemplazar la antigua Escuela de Pilotaje y Matemáticas llamada después Escuela de Náutica y Matemáticas fundada por José Ignacio de Pombo cuya duración fue entre

[146] Las materias del instituto coinciden en gran número con las del instituto de ciencias naturales, físicas, y matemáticas de 1848, o instituto granadino, de vida efímera, ya que duró solamente un año, fundado en Bogotá durante el gobierno de Tomas Cipriano de Mosquera. Esta información aparece en la revista Lecturas matemáticas Vol. 26 (2005)
[147] Artículo 5º de la lei de 3 de diciembre de 1857.

1811 y 1813, restablecida posteriormente en 1822 hasta 1826 y luego entre 1828 y 1829 agregada a la Universidad de Cartagena (Comisión Colombiana del Océano, 2002).

En la Academia de Náutica del Instituto Boliviano se enseñaban las siguientes clases o asignaturas:

> *Primer año: Aritmética, geometría especulativa i práctica, trigonometría rectilínea i esférica i secciones cónicas.*
>
> *Segundo año: Elementos de astronomía, cosmografía, pilotaje, dibujo lineal i geográfico.*
>
> *Tercer año: Construcción naval, maniobras y faenas de buques, máquinas de vapor, principios de artillería de mar, gimnástica i natación.*[148]

La Academia de Ciencias Físicas y Naturales preparaba un profesional para trabajar en el campo, pero con un fuerte componente en ciencias básicas, siendo el programa de más duración. Las asignaturas de esta especialidad eran:

> *Primer año: Mecánica aplicada a las artes, física teórica i experimental, i mineralogía.*
>
> *Segundo año: Telegrafía, química general i aplicada a las artes.*
>
> *Tercer año: Botánica y agricultura intertropical*
>
> *Cuarto año: Máquinas de vapor aplicadas a la industria agrícola*
>
> *Quinto año: Veterinaria.*[149]

El Decreto de 31 de marzo de 1858[150] modifica un poco el pensum, ya que era necesario hacer algunos ajustes de acuerdo con el perfil ocupacional. En los estudios en

[148] Artículo 8 , lei de 3 de diciembre de 1857
[149] Artículo 10, lei de 3 de diciembre de 1857

la Academia de Ciencias Exactas se pasan a segundo año las materias de geometría descriptiva, maquinaria, corte de piedra, cálculo diferencial e integral, mecánica y maquinaria, arquitectura civil, caminos, puentes, canales y calzadas; en el cuarto año se estudiarían las construcciones del ramo de ingenieros y presupuestos. Los estudios de la Academia de Náutica pasan a ser de cuatro años, estudiándose durante los dos primeros materias de ciencias exactas como el cálculo diferencial e integral, la trigonometría rectilínea y esférica; en el tercer año se estudiaría astronomía y pilotaje, y el cuarto año construcción naval y las demás materias que antes eran de tercer año. Los alumnos que ingresaban a esta Academia, debían ser admitidos primero en la Academia de Ciencias Exactas y haber aprobado en ella los cursos de aritmética, álgebra, geometría especulativa y práctica y cosmografía.

Para la Academia de Ciencias Físicas y Naturales el pensum sería ahora de tres años. En el primero se estudia física teórica y experimental, mineralogía y química general aplicada a las artes. En el segundo año, telegrafía, mecánica aplicada a las artes y máquinas de vapor aplicadas a la industria agrícola; en el último año, botánica, agricultura intertropical y veterinaria.

Es importante destacar que la Academia del Bello Sexo estaba conformada exclusivamente por mujeres las cuales podían ser internas o no y sus estudios no conducían a ningún título. Como se dijo antes, en esta Academia se preparaba la mujer para administrar el hogar y dar una mejor educación a sus hijos. De acuerdo con los requisitos de ingreso, las mujeres que estudiaban en esta academia eran por lo general provenientes de familias con cierto estatus económico y social. La Academia estaba dirigida por una señora que era la directora. En ella se enseñaba aritmética, gramática española, inglés, francés, dibujo, bordado, costura en blanco, música, baile, maneras de buena sociedad y moral (urbanidad), y geografía general y del país. Esta Academia fue anexada a la Universidad de Cartagena en 1858, siendo rector Manuel del Río (Piñeres, 2001, p.25).

[150] Gaceta oficial del estado de Bolívar Nº 35 11 de abril de 1858

Cabe señalar que el Instituto Boliviano solamente existió en Cartagena, aunque las disposiciones gubernamentales indicaban que podrían haber escuelas especiales en las cabeceras de los departamentos, pero en las demás provincias o municipios únicamente habría escuelas de enseñanza primaria. La instrucción primaria, que era para ambos sexos, en escuelas separadas para varones y mujeres, estaba a cargo de los departamentos en su parte administrativa, pero era responsabilidad de las municipalidades crear y sostener por lo menos una escuela de varones y una de niñas en cada cabecera municipal. La instrucción secundaria y profesional la daba el estado en el Instituto Boliviano y en las academias y escuelas que determinaba la ley, pero que realmente nunca existieron, al menos durante la República Federal, tal como lo evidencian las gacetas.

A finales de 1858 se anexa al Instituto la Academia de Ciencias Morales y Políticas cuyos estudios abarcaban cinco cursos anuales como sigue:

Primer curso: Lógica, teodicea, moral y derecho natural.

Segundo curso: Legislación universal, civil, penal, comercial y rural.

Tercer curso: Ciencia constitucional, principios de táctica parlamentaria, ciencia administrativa, principios de legislación militar, organización, procedimientos y pruebas judiciales.

Cuarto curso: Economía política y social, principios e legislación fiscal o económica, contabilidad y estadística.

Quinto curso: Derecho de gentes, principios de diplomacia, reglas de interpretación e historia moderna.

No se conocen egresados de esta Academia; es más, no se sabe a ciencia cierta cuando dejó de existir el Instituto ya que sus clases fueron intermitentes porque la enseñanza dada en el era considerada como enseñanza media estando la enseñanza superior en la Universidad de Cartagena. No se tiene registro de graduados del Instituto porque en el archivo histórico de Cartagena hay una discontinuidad en las Gacetas, solamente se sabe que cuando la nación tomó el nombre de Estados Unidos de Colombia, el Instituto se convirtió en el Colegio del Estado en 1870.

Dentro de los planes del Instituto estuvo también la creación de de ciertas escuelas anexas llamadas escuelas especiales, con estudios cuya duración se indica entre paréntesis.

Escuela complemental (5 años)

Escuela de literatura y filosofía (6 años)

Escuela de farmacia (3 años)

Escuela de medicina (6 años)[151]

Escuela de comercio (4años)

Escuela de política (3 años)

Escuela de jurisprudencia (4 años)

Escuela de náutica (6 años).

No se sabe acerca de la apertura de estas escuelas, ni cuál era el tipo de enseñanza en ellas, al menos en lo que se encuentra en el archivo histórico.

Los reglamentos del Instituto estaban consignados en las leyes y decretos correspondientes a su fundación y las modificaciones, publicados en la Gaceta del Estado de Bolívar. Mediante decretos se nombraban los profesores, se imponían los textos de estudio y se dictaban normas para el funcionamiento del instituto. Además de los requisitos impuestos para ingresar a las academias, se daban las siguientes normas relacionadas con la matrícula de los alumnos:

Los alumnos internos son costeados por los fondos del estado y debe haber por lo menos un alumno de cada departamento. Los internos que llenaban los requisitos de

[151] Esta escuela funcionaría en el Hospital de Caridad del estado.

admisión y pagaban sus gastos de manutención, debían hacerlo por trimestres anticipados y en la suma que designe el poder ejecutivo. No habrá devoluciones de dinero para los alumnos que se retiren antes de concluir el trimestre.

Los alumnos que no cumplan las normas establecidas son castigados en forma gradual a la falta cometida. El castigo más leve es la reprensión en privado, luego la permanencia de rodillas, le siguen el encierro simple hasta por cuatro días, el encierro sin luz, el encierro con disminución de alimentos hasta por dos días, el encierro sin alimento por un día y la expulsión definitiva de la clase. A los internos, además de lo anterior, se les puede prohibir la salida a la calle.

Cada vez que se abrirán las clases, se dará aviso oportuno en la gaceta. Las clases pueden iniciarse en cualquier mes del año siempre y cuando haya por lo menos un número de seis estudiantes por clase; no obstante, la fecha oficial de iniciación de clases es el dos de enero de cada año y terminarán a finales del mes de noviembre. La duración de las clases será de 90 a 120 minutos. La Escuela Central del Instituto tendrá su sede principal en Cartagena, en el edificio donde funcionó el Colegio Provincial. La Academia del Bello Sexo estará en lugar diferente. Habrá dos tipos de exámenes: Intermedios y anuales. Los exámenes intermedios son trimestrales y la calificación será individual; es decir, no habrá trabajos ni evaluaciones en grupo. Los profesores son nombrados por decretos emanados del ejecutivo y pueden nombrarse nacionales o extranjeros, siendo estas personas capacitadas y de buena reputación.[152]

La matemática en el Instituto Boliviano era similar a la del Colegio Militar de Bogotá. Los estudios de matemática comprendían la aritmética, el álgebra, la trigonometría rectilínea y esférica, la geometría analítica clásica y el cálculo diferencial e integral; además de ello, se enseñaba física general y un curso de lógica para los estudiantes de derecho, curso que comprendía la lógica aristotélica como base de la argumentación. Los temas de lógica fueron: Objeto y utilidad de la lógica, reglas para dirigir bien los

[152] Según la Gaceta Nº 38 de mayo 2 de 1958, se nombran como profesores de ciencias exactas a Dionisio H Araujo, Rafael Espinoza y Salvador Matos.

sentidos, imaginación, sensibilidad interna, entendimiento, proposiciones, criterio y método.[153]

Para la enseñanza de la matemática en los cursos iniciales se utilizaron las notas de clase de Aritmética y el Álgebra de Dionisio Araujo, las cuales fueron publicadas posteriormente como libros, escritos a manera de catecismo. La publicación del Tratado de Álgebra fue autorizada en 1875 y publicada en la Tipografía de Antonio Araujo en Cartagena en 1877, texto que no alcanzó a usarse en el Instituto, ya que este se fue extinguiendo hasta quedar convertido como Universidad de Cartagena o Colegio del Estado en 1870; no obstante, Dionisio Araujo lo utilizó su libro en un colegio particular que fundó posteriormente al haberse clausurado el Instituto. Araujo también publicó el texto *El Sistema Métrico Decimal Francés* en la Imprenta del Colegio en 1876.

Debido a la escasez de libros la enseñanza de las demás asignaturas de matemáticas se basó en las notas de los profesores, extraídas de libros de la época. El cálculo diferencial e integral se inició con el texto de Aimé Bergeron y en geometría se usaron textos heredados de la antigua Escuela Náutica, pero no se sabe exactamente cuales fueron estos.

El instituto Boliviano, hasta donde se ha podido investigar en las Gacetas, no graduó ningún estudiante porque los cursos tenían pocos estudiantes, lo que llevaba al establecimiento de un calendario académico muy irregular; por lo tanto, los cursos de matemática establecidos en los planes de estudio no se dictaron en su totalidad, convirtiéndose el Instituto en una establecimiento donde se estudiaban cursos que no condujeron a ningún título y desaparece lentamente por causa de las precarias condiciones de subsistencia y su asimilación por parte de la Universidad de Cartagena.

Cerrado el Instituto, Dionisio Araujo establece una escuela privada donde pretendió enseñar todo el conocimiento matemático que sabía, dividiendo el currículo de

[153] El contenido de lógica está detallado en la Gaceta de Bolívar XLVIII del domingo 15 de noviembre de 1868, cuando este curso pasa al Colegio del Estado.

matemáticas en niveles dependiendo de la profundidad de los temas, utilizando los libros de aritmética y álgebra que él había publicado.

El libro de Aritmética de Araujo trata de las operaciones con números enteros y fraccionarios no negativos, y temas relacionados con dichos números; el de álgebra[154], está escrito bajo la modalidad de catecismo, el contenido está desarrollado en 23 lecciones distribuidas de la siguiente manera: Las primeras cinco lecciones estudian las expresiones algebraicas y sus operaciones; las lecciones de la seis a la diez tratan de fracciones algebraicas y sus operaciones, fracciones a las que llama quebrados literales; las lecciones 11 y 12 corresponden a la potenciación con enteros positivos y la extracción de raíces con resultado exacto; los radicales se tratan en la lección 13; la lección 14 estudia ciertas expresiones a las que llama imaginarias por tener la cantidad subradical un signo menos, pero que en realidad no corresponden a los complejos por haber total ausencia de la unidad imaginaria[155], hecho que es notorio en la siguiente definición[156]

LECCIÓN 14ª

CANTIDADES IMAGINARIAS

P. ¿Qué son cantidades imaginarias?

R. Raíces de grado par, de cantidades negativas.

P. ¿Por qué se les da este nombre?

R. Porque pedirnos la raíz par de una cantidad negativa, es pedirnos una cantidad que, multiplicada por sí misma un número par de veces, de un producto negativo; lo cual es imposible, pues + por + da siempre +, i – por – también da +, cuando estos signos se multiplican un número par de veces.

[154] Araujo, D (1877). *Tratado de Álgebra*. Cartagena: Tipografía de Antonio Araujo.
[155] Un resultado curioso en esa lección es el siguiente
R. $\sqrt{-x} \times \sqrt{-z} = (\sqrt{x}\sqrt{-1}) \times (\sqrt{z}\sqrt{-1}) = (\sqrt{x}\sqrt{z}) \times (\sqrt{-1}\sqrt{-1}) = \sqrt{xz} \times x - 1 = -\sqrt{xz}$.
[156] Araujo, D (1877). *Tratado de Álgebra*. Cartagena: Tipografía de Antonio Araujo. (p. 33)

P. Siendo, pues, imposibles las cantidades imaginarias, ¿por qué razón el Álgebra se ocupa de ellas?

R. Porque por su medio se obtienen muchas veces valores positivos bastante notables: i porque, si la solución de un problema algebraico da por resultado una cantidad imaginaria, esto sólo es una prueva de que la cuestión es imposible.

P. ¿Qué operaciones se practican con las cantidades imaginarias??

R. Las mismas que con radicales, a que las imaginarias pertenecen.

P. ¿Cómo se suman cantidades imaginarias?

R. Colocando los sumandos, unos a continuación de otros, i practicando en seguida la simplificación que se pueda. Pero, en cuanto a esto es preciso observar, que para los términos sean semejantes, no basta que sean iguales las letras i sus exponentes, sino que también debe ser igual el exponente radical en todos.

Las lecciones de la 15 a la 19 se refieren a las ecuaciones de primer y segundo grado con una y dos incógnitas; la lección 20 hace mención a las ecuaciones de grado superior al segundo; la lección 21 tiene temas relacionados con la teoría de números: fracciones continuas, fracciones de Lambert, números poligonales, números figurados, números amigos, números perfectos y cuadrados mágicos helénicos; la lección 22 trabaja el binomio de Newton por medio del triángulo de Pascal; la última lección expone permutaciones y combinaciones en forma intuitiva.

La obra de Araujo permite inferir algunas cuestiones. En las postrimerías del siglo XIX en la matemática del Caribe no había un dominio de los números complejos al mismo nivel de Europa, el binomio de Newton en notación combinatoria era desconocido merced a que Euler en 1730 ya había descubierto la función Gamma como un factorial generalizado, y si vamos más atrás, el matemático indio Bhaskara en el siglo XII usaba la fórmula general para [illegible]; había imprecisión en el concepto de variable desde el punto de vista de la lógica, y la matemática en general se manejaba a través de fórmulas sin interesar su génesis.

Clausuradas las diferentes escuelas privadas y restablecidas nuevamente las universidades en Colombia, la educación superior en el Caribe Colombiano para finales del siglo XIX y principios del siglo XX se concentra en la Universidad de Cartagena hasta 1907 cuando según el Decreto 793 de julio 6 se constituye la *Escuela Naval Nacional*, institución destinada a preparar oficiales para la Marina Colombiana, iniciando sus labores a bordo del Crucero Marroquín. El plan de estudios de esta Escuela comprendía astronomía, hidrografía, navegación, derecho internacional marítimo, trigonometría, aritmética superior, álgebra, geometría[157], física, química, nomenclatura marítima, nudos, costuras y natación. Por falta de apoyo económico la Escuela se clausura con el Decreto 659 de diciembre 28 de 1909 y los egresados tomaron grado el 13 de febrero de 1910.

La Escuela Naval reaparece nuevamente durante el gobierno de Alfonso López Pumarejo, estableciéndose como Escuela Naval Militar con el Decreto Ejecutivo 712 de abril 13 de 1935 (Román, 1985). El plan de estudios para las asignaturas estaba dividido por años, siendo diferente a partir del tercer año para las especialidades de ingeniería, oficial ejecutivo y administración. El plan de los ingenieros comprendía:

Primer año: Algebra superior, geometría analítica, trigonometría, química, física, nomenclatura marítima, artillería e inglés.

Segundo año: Cálculo, mecánica aplicada, arte naval, navegación por estima y costera, artillería, dibujo topográfico, reglamentos navales e inglés.

Tercer año: Cálculo, mecánica aplicada, dibujo mecánico, máquinas, química, electricidad, inglés y servicio práctico.

[157] Las cátedras del área de matemática fueron impartidas por Francisco Cruz y Francisco Núñez.

Cuarto año: Electrónica, termodinámica, construcción naval, resistencia de materiales, motores, turbinas, dibujo mecánico, reglamento naval, derecho marítimo internacional, inglés y servicio práctico.

El ingreso a la Escuela contemplaba un examen de admisión sobre conocimientos generales de matemática, física, sociales, inglés y francés; para 1937, el Decreto 51 exigía para dicho examen conocimientos de aritmética comercial y analítica, álgebra inferior, geometría plana, ciencias sociales, ciencias naturales, física, química, dibujo, ética y lógica; siendo los contenidos de lógica aquellos presentes en los libros de filosofía de enseñanza secundaria.

De acuerdo con lo establecido en el pensum de la Escuela Naval, prevalece la enseñanza de la matemática clásica con el dominio del álgebra, la geometría, la trigonometría y el cálculo, asignaturas que se conservan por mucho tiempo hasta los años setenta con algunas variaciones, debido a que "los programas académicos iniciales estuvieron inspirados en una tecnología de los años anteriores a la Segunda Guerra Mundial." [158] Además de lo anterior, la actual Escuela tiene dos momentos; desde 1935 hasta 1977 y desde 1978 hasta el momento actual. En el primer momento se recibían estudiantes con cuarto año de bachillerato para culminar su enseñanza media y luego continuar con los estudios profesionales; en el segundo momento la admisión tenía como requisito ser bachiller, situación que fue determinante en la reorganización académica de la Escuela.

La educación superior en el Caribe Colombiano a lo largo del siglo XIX tuvo únicamente como institución relativamente estable la Universidad de Cartagena, ya que el Colegio Universidad San Pedro Apóstol se transformó en el Colegio Pinillos de educación secundaria, la Escuela Náutica no tuvo mucha importancia y el Colegio Universidad del Magdalena en Santa Marta organizado en 1867 fue de muy breve duración; así las cosas, el balance educativo del Caribe en ese período fue poco

[158] Reseña histórica del plan de estudios de 1978. Escuela Naval de Cadetes Almirante Padilla, 1978, documento archivo Escuela Naval, fol 2.

alentador con universidades de corta duración, carreras inconclusas y una oferta educativa solamente con derecho y medicina en Cartagena.

Barranquilla antes de 1870 contaba con el *Instituto Barranquilla* fundado en 1848 y el *Plantel de Segunda Enseñanza* de José Luis Alandete en 1866[159], en razón a que Barranquilla formó parte del Estado de Bolívar hasta 1905.

Creado el Departamento del Atlántico el 11 de abril de 1905, se incrementa el número de instituciones educativas de enseñanza media siendo una de las más importantes el *Colegio del Atlántico* fundado en 1908, llamado posteriormente *Colegio Industrial de Barranquilla* y *Colegio de Barranquilla* en 1910. A partir de la década de los cuarenta del siglo XX comienza a gestarse una institución de educación superior por iniciativa de Julio Blanco. Se logró que la Asamblea Departamental creara el *Museo del Atlántico* y luego fue adscrito a este el *Instituto de Tecnología del Atlántico* según la Ordenanza 24 de junio 3 de 1941, con el objetivo de formar "ingenieros químicos, ingenieros farmacéuticos y técnicos químicos como respuesta a las necesidades de la industria y el comercio local, y como una manera técnica y superior de prepara jóvenes que participasen activamente en el desarrollo de la región" (Bayona y Amarís, 1991. p. 14).

El pensamiento de Julio Blanco iba más allá de crear una simple institución, quería establecer una especie de universidad politécnica con carreras que permitieran el desarrollo de la región rompiendo el paradigma de la Universidad Colonial presente aún en la Universidad de Cartagena con solo dos carreras tradicionales. Para lograrlo, la Asamblea Departamental crea a mediados de 1945 la *Institución Politécnica del Caribe*, reuniendo el *Instituto de Tecnología*, la *Escuela Industrial* y el *Castillo de Salgar*[160], institución que se convierte un año más tarde en la *Universidad del Atlántico* según la Ordenanza 42 del 15 de junio. La creación de la Universidad del Atlántico abre un

[159] Restrepo, Juan (2000). Educación y desarrollo en Barranquilla a finales del siglo XIX. En J. Villalón (Ed.). *Historia de Barranquilla* (pp. 153-182). Barranquilla: Ediciones Uninorte.
[160] El Castillo de Salgar es una construcción antigua en las afueras de Barranquilla, reconstruido en los años cuarenta para servir de alojamiento a profesores y estudiantes de la recién fundada Universidad del Atlántico.

nuevo capítulo sobre la enseñanza de la matemática en el Caribe Colombiano a través de la Carrera de Ingeniería Química y la Carrera de Economía nacida en la Escuela de Comercio.

4.3 LA MATEMÀTICA EN LA INGENIERÍA: 1946 1961

Creada en 1946 la Universidad del Atlántico, y con ella las Facultades de Ingeniería Química y Economía, comienza la enseñanza de la matemática en los programas de ingeniería en forma definitiva. En el Programa de Ingeniería Química se dan los primeros cursos de álgebra, trigonometría y cálculo diferencial e integral con los textos clásicos de la época. En álgebra y trigonometría se utilizaron los textos de Hall y Knight y la Trigonometría de Palmer en los años cuarenta y cincuenta; en los años sesenta, el texto *College Algebra and Plane Trigonometry* de Spitbart y Bardel; en cálculo se usaron los textos de Granville y Thomas y en geometría analítica el texto de Charles Lehman. Todos estos textos corresponden a la matemática clásica, en ellos está ausente la lógica y la teoría de conjuntos; no obstante, el texto de Spitbart expone en su primer capítulo el sistema de los números reales, comienza introduciendo los enteros positivos o naturales en forma axiomática estableciendo ocho axiomas para la suma siendo el último de ellos el principio de inducción matemática;[161] una mezcla bastante extraña porque comienza con un enfoque de sistemas sin considerar el término conjunto en forma explícita, luego introduce los enteros como parejas de números naturales y los racionales como parejas de enteros sin considerar el concepto de relación ni mucho menos el de clase de equivalencia.

De acuerdo con los textos de matemática utilizados en la Universidad del Atlántico se observa que la enseñanza de la teoría de conjuntos estuvo ausente hasta 1961, a pesar de que Barranquilla fue la primera ciudad colombiana que visitó Francisco Vera, y se

[161] Sea M un conjunto de números naturales con las siguientes propiedades:
(a) 1 pertenece a M
(b) Si a pertenece a M entonces a+1 pertenece a M.
Entonces el conjunto M consiste de todos los números naturales.

sabe que en ella dictó una conferencia sobre historia de la matemática donde dio a conocer la *matemática moderna*.[162] Esta conferencia no incidió en un replanteamiento de la enseñanza de la matemática, pero no por este hecho podemos afirmar que en el Caribe Colombiano se desconocía dicha matemática de manera total.

El abogado polifacético Samario Rodrigo Noguera Barreneche, un autodidacta en matemática, llega a Barranquilla para ocupar la Decanatura de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad del Atlántico, crea la Revista Studia de difusión internacional y en ella publica parte de sus investigaciones matemáticas entre las cuales están: *Teoría dicotómica de la divisibilidad, con caracteres sencillos para todos los primos menores que 100; Nuevo triángulo aritmético, del cual es caso particular el de Pascal; Solución de una ecuación emparentada con el último teorema de Fermat; Estudio del último teorema de Fermat, y solución de su ecuación indeterminada algebraico-exponencial; Históricamente, primera demostración, inconcusa, completa y universal, del gran teorema de Fermat, con álgebra davídica del "príncipe de los aficionados" a la investigación matemática y El problema de la cuadratura racional del triángulo rectángulo de lados enteros y otras minucias*.

Sin duda alguna, Rodrigo Noguera había leído temas de aritmética y fundamentos en general en revistas internacionales de matemática, prueba de ello son sus trabajos publicados en la Revista Studia y sus trabajos sobre lógica relacionando los principios de identidad y contradicción al cogito ergo sum en la lógica deductiva y la demostración del principio general de tricotomía en conjuntos transfinitos. En revistas del exterior publica los siguientes artículos: *Un nuevo sistema para resolver ecuaciones algebraicas con el recurso de identidades ad hoc, cuando son resolubles por medio de fórmulas con número finito de términos; Solución general y numérica de la ecuación exponencial del último teorema de Fermat, con tablas logarítmicas y sin ellas, y cálculos brevísimos a lápiz; Solución de la misma ecuación en cuanto algebraica, y su aplicación a las coordenadas rectangulares, lo mismo que a la reducción de la*

[162] El profesor Oswaldo Dede Mejía de la Universidad del Atlántico afirma que Vera dictó la conferencia *Veinte matemáticos célebres*, pero no se tiene registro de la misma.

trigonometría rectilínea a un sistema de puras identidades, cada una con su evidencia propia, sin fundamentación en nada más; Sobre el funcionamiento probable del cerebro en las operaciones lógicas de inversión de juicios, formación de silogismos, etc.

Respecto al teorema de Fermat, Noguera (1957) escribe

> *Es mi opinión que el último teorema de Fermat no se había demostrado, en los tres siglos corridos desde que el hijo publicó su enunciación por haberse despistado de los matemáticos posteriores, primero por la orientación al descenso indefinido que a la cuestión imprimieron Leibniz y Euler, con éxito limitado, y segundo, por la que mucho mas tarde Kummer (1810 a 1893), con su invención de los números algebraicos ciclotímicos, de los que, para eliminar la doble factorización en primos, emergen los llamados ideales, con los que el teorema se ha demostrado para todos los exponentes menores que 100.* (p. 208)

Más adelante señala

> *A pesar de que la ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ aparece claramente como caso singular de la fermática, no se sospechó antes de ahora su enlace universal con la trigonométrica $x^2 -2xycosz + y^2 = z^2$ para cuando v=2,* [163] *es cosz = 0, y la última ecuación se identifica con la primera. Mi hallazgo estriba entero en el descubrimiento de este enlace. Todo lo demás es puro esfuerzo de razonamiento guiado de trecho en trecho por relámpagos afortunados, que corregían el rumbo de exploraciones intelectuales al tanteo, como el que me llevó a la trigonometría esférica, sin ventaja alguna en ella respecto de la plana, aunque con alguna copia de subproductos interesantes.* (p. 209).

[163] Se refiere a la ecuación $x^v + y^v = z^v$

Otro escenario donde hubo presencia de la matemática universitaria en la ingeniería del Caribe Colombiano antes de 1961, fue en la Universidad de Cartagena en la Facultad de Ingeniería Civil. La primera Facultad de ingeniería se reglamentó mediante el Decreto 75 de marzo 31 de 1930, las clases se iniciaron en abril del mismo año con la asistencia de cuatro estudiantes, el primer director de la facultad fue el ingeniero italiano Antonio Nordio, personaje contratado por el rector Carlos Glockner para hacer algunas refacciones en el Claustro de San Agustín, sitio donde funcionaba la Universidad, y luego nombrado para dirigir los estudios. El plan de estudios para el Programa fue el mismo de la Universidad Nacional de Bogotá, en el cual se daba una formación en matemática clásica, ya que como se mencionó en el capítulo anterior, la carrera de Ingeniería Civil en Bogotá pertenecía a la Facultad de Matemáticas e Ingeniería.

Rondón y Ligardo (2003) comentan que los estudios de ingeniería civil comenzaban con un curso introductorio de preparación en matemáticas y física. Durante el primer año se enseñó aritmética, álgebra inferior, geometría descriptiva, dibujo, física y química. En 1931, de los cuatro estudiantes quedaron solamente dos, y la Facultad se cierra debido a la falta de estudiantes y a la crítica que se hacía en contra de ella desde Antioquia, señalando el atraso de la región en materia de vías y la ausencia de minería, con lo cual los egresados no tendrían campo de acción. No se tiene registro de los temas estudiados durante su primer y único año de vida, pero sin duda alguna por el plan de estudios, se trató solamente aritmética, álgebra clásica y geometría euclidiana.

El establecimiento definitivo de la Facultad de Ingeniería Civil se logra mediante el Decreto 1127 de diciembre 30 de 1949, siendo el cuarto programa de su género en Colombia, antecedido por la Universidad Nacional de Bogotá, la Escuela de Minas de Medellín y la Universidad del Cauca. Esta Facultad fue creada unos meses antes que el Programa de Ingeniería Civil de la Pontificia Universidad Javeriana. Las clases iniciaron en 1950 con 36 estudiantes, el plan de estudios en el primer año contemplaba los cursos de aritmética analítica, álgebra, geometría plana y del espacio, trigonometría plana[164]; cursos que servirían de base para los análisis I y II correspondientes al cálculo diferencial e integral. El curso de aritmética analítica era dictado por Rafael Carmona quien había escrito un libro sobre el tema y enseñaba aritmética razonada, la geometría era dictada por José Antonio Covo con el libro Curso Superior de Geometría de Bruño, en álgebra se usaba el texto de Hall y Knight. El primer plan de estudios se mantiene hasta 1956 cuando se gradúa la primera promoción.

El ingeniero Hernando Sará, egresado de las primeras promociones comenta:

> *La enseñanza en la Facultad era presencial, con tiza y tablero, las clases de Carmona eran amenas, con base en conversaciones, se hacía demostraciones de las teorías, recuerdo que se habló de conjuntos intuitivamente, la evaluación consistía en seis exámenes de cada materia. En la promoción de 1960 habían ingresado 50 estudiantes y se graduaron cuatro, el profesor de trigonometría fue Fernando Villarreal y usaba el libro verde de Palmer, la geometría estaba a cargo de Teofrasto Tatis quien había reemplazado al Dr. Covo, se utilizó el libro de Geometría Reunión de Profesores (Une Réunion De Professeurs. Cours de Géométrie) que estaba escrito en francés. En cálculo se usaba el libro de Granville.*[165]

En 1957 se modifica el plan de estudios con una duración de cinco años, las materias de primer año eran aritmética y álgebra elemental; algebra superior; geometría plana, del espacio y trigonometría; geometría analítica. Este plan continúa hasta 1960 y en él se conservó la enseñanza de la matemática clásica, porque los profesores eran ingenieros que no poseían conocimientos de matemática moderna y como tal no conocían la teoría de conjuntos, aunque si percibían la lógica como una parte de la filosofía y no como fundamento de la matemática.

[164] Datos obtenidos del primer libro de matriculas del Archivo de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena.
[165] Entrevista con el ingeniero Hernando Sará.

5. LA MATEMÁTICA EN EL CARIBE COLOMBIANO: 1961-2000

La historia de la matemática y su enseñanza en el Caribe Colombiano está relacionada directamente con el acontecer mundial. Los movimientos sobre reformas educativas en el campo de la matemática se generan en tres fuentes: los congresos internacionales donde se ha contado con la presencia de profesores y autoridades educativas de Colombia, la iniciativa de asociaciones de individuos o asociaciones privadas que investigan sobre la enseñanza de la matemática y las reformas impuestas por los gobiernos ya sea en forma independiente o agrupados regionalmente. Cuando estas ideas llegan al país, el Ministerio de Educación Nacional y las asociaciones nacionales de profesionales de la matemática estudian las reformas para decidir si se implementan o no. La implementación se pone en ejecución mediante legislación oficial o mediante acuerdos entre los miembros de esas agremiaciones. Los cambios generalmente no son aplicados inmediatamente, sino que después de cierto tiempo son adaptados a la situación educativa del país.

En este capítulo se presentan los cambios introducidos en la enseñanza de la matemática en el Caribe Colombiano en el lapso 1961-2000, teniendo en cuenta las diferentes reformas en la enseñanza de la matemática a nivel mundial, nacional y local en todos los niveles educativos. En el orden mundial, se analizan las reformas de mayor repercusión, señalando su incidencia en lo local; en el orden nacional, se consideran las reformas en la enseñanza de la matemática con base en las disposiciones gubernamentales, las cuales son de cabal cumplimiento en todo el territorio nacional. Se describe también como se llevó a cabo la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos en la educación primaria y secundaria al amparo de las reformas.

5.1 LAS REFORMAS CURICULARES EN LA MATEMÁTICA

Desde siempre, los cambios curriculares en la enseñanza de la matemática están ligados a las reformas educativas dadas en el contexto mundial, en el contexto de un área conformada por países o en el contexto nacional. Estas reformas en el pasado, empezaron en la educación griega antigua; en Latinoamérica, las reformas durante el Período Colonial vinieron de los países de la Península Ibérica por ser los agentes coloniales; así, el Trívium, el Cuadrivium, la Ratio Studiorum, la Ilustración, el Benthamismo y el Lancasterismo fueron las principales reformas educativas hasta el siglo XIX.

Haciendo referencia a la matemática, la primera reforma considerada como moderna fue propuesta por Félix Klein en la última década del siglo XIX a partir del *Programa Erlanger*.[166] Su reforma se dirigió principalmente a la enseñanza universitaria, consideró las nociones de grupo y grupo de transformaciones como fundamento de la geometría; posteriormente, en 1905 propuso la inclusión del concepto de función y del cálculo diferencial e integral en los programas de la matemática del bachillerato *(Meraner Lehrplan-entwürfe)*. La inclusión del cálculo en la enseñanza media permitiría al estudiante tomar cursos más avanzados de matemática en el nivel universitario.

Klein revivió la enseñanza en los campos del análisis, la geometría y la física tomando el concepto de grupo y los principios de las transformaciones como el corazón de la teoría llamada por él *Estructura Matemática*; luego, la teoría de grupos llegó a ser un fundamento o base para la construcción de la matemática.

Siguiendo a Nevalina (1966), la segunda reforma en la enseñanza de la matemática se debe a David Hilbert. Su reforma se basó en dos aspectos: la enseñanza de la

[166] El programa Erlanger surgió de las investigaciones realizadas por Klein en 1872 como profesor de la Universidad de Erlangen, sintetizando las geometrías como propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo de transformaciones. Información detallada al respecto se encuentra en Bell, E (2002). *Historia de las matemáticas*. (2ª ed). México: Fondo de Cultura Económica

matemática mediante métodos formales y el estudio de los objetos matemáticos bajo los conjuntos, entendidos estos como colecciones de elementos dados sin características cualitativas desde el punto de vista intuitivo. Sobre los conjuntos se define el concepto de relación, derivándose a partir de éste los conceptos de correspondencia, mapeo y función.

Antiguamente, decía Hilbert que el concepto de función era dado por una ley del orden aritmético o analítico, donde un número producía o era transformado en otro número o argumento, o en varios números si la función era multivaluada, como en el caso de las funciones de variable compleja. No obstante, en la matemática del Caribe Colombiano se encuentra el concepto de función a la manera antigua, generalmente en los libros de cálculo y matemáticas generales; así por ejemplo, en Budnick, se define función como sigue: "la función es, en esencia, un dispositivo de entrada salida. Se proporciona una regla matemática que la transforma (manipula) en una salida específica."[167]

El pensamiento axiomático de Hilbert se impuso durante varias décadas logrando expandirse al álgebra y la topología modernas. Las ideas de Hilbert cambian la base empírica sobre la cual se fundamenta la matemática por una base sustentada en el método axiomático. En la enseñanza de la matemática cada teoría matemática surge como una estructura lógica, como un sistema de objetos básicos, relaciones básicas y un conjunto de axiomas cuya validez se asume entre esos objetos y sus relaciones. Mientras que en Francia, Alemania, Estados Unidos y otros países de Europa se pasaba de la reforma de Hilbert a la reforma Bourbaki de los años sesenta, impulsada desde el Coloquio de Royamount de 1959 en Francia, en Colombia, la enseñanza de la matemática ni siquiera había sido influida por la reforma de Hilbert.

En Colombia, la enseñanza de la matemática en la primaria comprendía aritmética elemental y nociones de geometría; en el bachillerato, la enseñanza se llevaba a cabo de acuerdo con el plan de estudios reglamentado con el Decreto 27518 de enero 17 de

[167] Budnick, S (1990). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. (2ª ed). México: McGraw-Hill.

1951. Según el Artículo 1º del decreto, en el primer año se enseñaba aritmética con una intensidad de cinco horas semanales; en el segundo año, aritmética con una intensidad de cinco horas semanales; en el tercer año álgebra con intensidad de cuatro horas semanales; en el cuarto año, álgebra con tres horas semanales; en el quinto geometría con tres horas semanales; y en el sexto año no se enseñaba matemática, pero se dejaban cinco horas semanales para intensificación de materias, consulta en biblioteca, trabajo organizado, etc.

El Decreto 27518 es derogado por el Decreto 045 de enero 25 de 1962, emitido poco después de realizarse en Bogotá la *Primera Conferencia Interamericana de Educación matemática*, auspiciada por la *Comisión Internacional de Instrucción Matemática ICME* del 4 al 9 de diciembre de 1961. De esta reunión surgió el *Comité Interamericano de Educación Matemática* y la tarea de modernizar la enseñanza de la matemática en América Latina en la escuela secundaria, estableciendo a la vez un puente adecuado para propiciar continuidad con el estudio de la matemática en el nivel universitario. El principal propósito de la conferencia fue el de explorar los métodos de la enseñanza de la matemática en los niveles medio y universitario, pero en el fondo el propósito fue el de proponer la reforma Bourbaki en América. De acuerdo con las ponencias presentadas por los delegados e invitados a la conferencia, según Ruiz (1998), se propuso lo siguiente:

1. Introducir desde los primeros cursos el lenguaje conjuntista. Enseñar a los alumnos el álgebra de conjuntos dando paralelamente el significado de las partículas lógicas “y”, “o”, para todo y existe, en relación con la gramática del idioma.
2. Dar desde temprano el concepto de función, función biunívoca, función inversa y grupo de transformación utilizando ejemplos adecuados dentro de la aritmética, el álgebra y la física.
3. Hacer que se comprendan las relaciones de equivalencia y de orden y estudiar las nociones de la topología.

4. Agrupar las propiedades aritméticas bajo las estructuras algebraicas de grupo, anillo, campo y espacio vectorial.
5. Introducir la construcción de los números reales en vez de estudiarlos bajo la geometría métrica.
6. Renunciar al estudio de la igualdad de triángulos en la geometría euclidiana y propiciar más bien la estructura vectorial del plano.
7. Cambiar las viejas aplicaciones de la matemática por otras nuevas aplicaciones que incluyan temas de la investigación de operaciones. Esto debe hacerse desde el bachillerato.

El Decreto 045 de 1962 que se venía gestando antes de la Conferencia Interamericana de 1961, se regló atendiendo a las recomendaciones del Seminario sobre Educación Secundaria de Santiago de Chile 1954-1955, la Conferencia Regional de Punta del Este Uruguay de 1961 y el Primer Seminario Sobre Problemas del Bachillerato realizado en Tunja en 1961, auspiciado por Asociación Colombiana de Universidades. El decreto dividió la enseñanza media en dos ciclos: un primer ciclo básico para los primeros cuatro años y un segundo ciclo para los años quinto y sexto, en el cual se brindaba la oportunidad de intensificar el estudio en las áreas de matemática y física, biología y química o estudios sociales y humanidades. Las materias de cada ciclo se distribuían como lo muestran las tablas siguientes.

CICLO BÁSICO	**HORAS AÑO**			
CURSOS **ASIGNATURAS**	I	II	III	IV
EDUCACIÓN RELIGIOSA Y MORAL	90	90	90	60
CASTELLANO Y LITERATURA	150	150	150	150
MATEMÁTICAS	150	120	150	210

CICLO BÁSICO	**HORAS AÑO**			
CIENCIAS NATURALES	60	60	60	120
ESTUDIOS SOCIALES	150	210	210	120
IDIOMAS EXTRANJEROS	90	90	90	90
ARTES INDUSTRIALES Y ED PARA EL HOGAR	60	60	60	60
EDUCACIÓN ESTÉTICA	60	60	60	60
EDUCACIÓN FÍSICA	60	60	60	60
ACTIVIDADES COPROGRAMÁTICAS EINTENSIFICACIONES	270	240	210	210
TOTALES POR AÑO	1140	1140	1140	1140

SEGUNDO CICLO	**HORAS AÑO**	
CURSOS	V	VI
ASGNATURAS		
EDUCACIÓN RELIGIOSA Y MORAL	60	30
PSICOLOGÍA	60	0
FILOSOFÍA	90	120
ESTUDIOS SOCIALES	0	60

CASTELLANO Y LITERATURA	90	90
IDIOMAS EXTRANJEROS	150	150
MATEMÁTICAS	90	60
FÍSICA	120	120
QUÍMICA	120	120
ACTIVIDADES COPROGRAMÁTICAS	360	330
TOTALES POR AÑO	1140	1140

A diferencia del Decreto de 1951, en el Decreto 045 contemplaba en el segundo ciclo el estudio de la trigonometría, la geometría analítica y nociones de cálculo. De acuerdo con el mismo decreto, para el área de matemáticas en el primer y segundo año se enseñaba aritmética y nociones de geometría, en el tercer y cuarto año álgebra y geometría, en el quinto año trigonometría y geometría analítica y en el sexto año nociones de análisis matemático. Los textos de matemática más usados durante la vigencia del decreto fueron la *Aritmética* y el *Álgebra* de Aurelio Baldor, el *Curso de Álgebra Superior* de Ignacio Fossi, el *Álgebra Práctica* de Carlos Mataix, la *Geometría* de Bruño, la *Trigonometría Rectilínea* de Agustín Anfossi, la *Geometría Analítica* de Charles Lehman, la *Geometría Analítica* de Anfossi, *Introducción al Cálculo Infinitesimal* de Viedma y el *Cálculo* de Hernando Bedoya entre otros. La programación de todas las asignaturas de matemática, de acuerdo con el decreto, estaba consignada en un manual publicado por la Editorial Bedout.

El programa de matemática para el primer año de bachillerato en la primera unidad trata los siguientes temas: Nociones sobre conjuntos. Clases de conjuntos. Conjunto unitario. Conjunto vacío. Conjuntos coordinables. Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la coordinación de conjuntos. Concepto de número natural. Número cardinal.

Fundamento de los sistemas de numeración. Numeración decimal. Ideas de otros sistemas de numeración. Números romanos.

La segunda unidad contiene los temas adición y sustracción en los naturales; leyes clausurativa, asociativa y conmutativa de la suma; leyes de uniformidad y monotonía; sustracción; polinomios aritméticos. Las unidades tercera cuarta y quinta tratan la multiplicación, la división como operación inversa de la multiplicación, la potenciación y la radicación. En la sexta unidad se hace un estudio introductorio de la teoría de números; la séptima y octava se ocupan de los números fraccionarios y la última presenta la geometría plana intuitiva. El contenido de las unidades coincide en gran parte con el contenido del la Aritmética de Baldor, excepto en la primera unidad. La temática del segundo año corresponde a la parte restante del texto mencionado y se ocupa básicamente del sistema métrico decimal y su utilización en medidas de áreas, volúmenes, capacidad y masa. Al final incluye las unidades de tiempo y una unidad sobre geometría.

Después de ver los contenidos de los dos primeros años cabe preguntarse ¿Para qué estudiar conjuntos si los números naturales no se estudian como un conjunto? ¿Para qué hablar de leyes de la suma y la multiplicación si no se agrupan bajo una estructura algebraica? Con el Decreto 045 se pretendió mostrar que se atendieron las recomendaciones de la Conferencia Interamericana y los seminarios de Chile y Tunja, pero lo que se hizo en realidad fue pegar un parche donde no había lugar para ello ya que se seguía enseñando matemática clásica.

Los contenidos del tercer y cuarto año son casi los mismos del Álgebra de Baldor. En el cuarto año el curso de álgebra comienza con el concepto de función al estilo antiguo como lo criticaba Hilbert; la trigonometría del quinto año se hacía mediante las relaciones trigonométricas en el triángulo divorciadas totalmente de las funciones trigonométricas; en la geometría analítica las cónicas se definían recurriendo a los lugares geométricos y el cálculo estuvo privado de los conjuntos de puntos puesto que a estos se les trata como objetos y no como conjuntos; así por ejemplo se habla de puntos de discontinuidad, en vez de el conjunto de puntos para los cuales una función es discontinua.

Teniendo en cuenta lo señalado anteriormente se observa que la organización de los contenidos de matemática dada por el Decreto 045 de 1962 es un conjunto de asignaturas dispersas sin conexión; aritmética en el primer año; aritmética y elementos de aritmética comercial en el segundo año; álgebra y geometría plana en tercero; álgebra y geometría del espacio en cuarto; trigonometría rectilínea y geometría analítica en quinto; y, análisis matemático en sexto. De igual manera, los contenidos de la matemática de primaria estaban distribuidos en asignaturas dispersas según el Decreto 710 de 1962.

Meses después de la aparición del Decreto 045 de 1962, se realizó en Budapest el *Simposio de Investigación sobre Matemática Educativa*. Esta reunión moldeó una reforma en la enseñanza de la matemática a nivel mundial introduciendo la matemática moderna en la educación primaria. En el desarrollo del simposio se esgrimieron argumentos a favor y en contra de la matemática moderna, pero al final se impuso esta nueva forma de enseñar la matemática; así, mientras los bourbakistas defendían la matemática moderna, otros como Walusisnski (1962) no encuentra diferencia entre la matemática clásica y la matemática moderna. La matemática, afirma, ha sido moderna en diferentes épocas. Fue moderna en los tiempos de aparición de los *Elementos* de Euclides, fue moderna con la invención del cálculo por Newton y Leibniz, con el surgimiento de las geometrías no euclidianas, con el nacimiento de la teoría de conjuntos, con la introducción del formalismo de Hilbert, esto por mostrar algunos ejemplos; así que, en el pasado la matemática fue moderna, hoy la matemática es moderna y en el futuro habrá otra matemática moderna. Señala también que en vez de decir *Matemática Moderna* debiera decirse *Matemática de las Estructuras*, porque son las estructuras los conceptos bajo los cuales se organiza el conocimiento matemático, la matemática moderna es una forma actual de organización, como lo será en el futuro la organización mediante *Categorías*, entonces no muy lejos estará el advenimiento de otra matemática moderna.

Las estructuras introducidas por la matemática moderna son las estructuras definidas por una relación de equivalencia, las estructuras definidas por una relación de orden, las estructuras algebraicas y las estructuras topológicas. Estas estructuras, de manera implícita, estaban presentes en la matemática antes de la matemática moderna, como también lo estaban la lógica, los conjuntos y el método axiomático, tópicos sin los cuales hubiera sido imposible la existencia de las estructuras.

Volviendo nuevamente al Decreto 045 de 1962, se insiste que este no atendió las recomendaciones de la inclusión de la matemática moderna sino las recomendaciones del Seminario de Tunja, ya que Colombia envió como delegado a Arturo Ramírez Montufar a la Conferencia de Budapest[168] , y allí lo que presentó fue un informe con las conclusiones de Tunja. Las conclusiones propiciaron los cambios reflejados en el decreto y fueron las siguientes:

1. La matemática debe ser un tópico obligatorio en sexto grado, para no perder la continuidad en la enseñanza de la matemática con el paso a los estudios universitarios.
2. Debe intensificarse la enseñanza de la matemática realizando las siguientes acciones: a) Incrementar el número de horas de estudio dedicadas a la matemática en todos los cursos; b) Incluir en los niveles inferiores algunos tópicos que son exclusivos de la enseñanza universitaria; c) la secuencia de los temas debe corresponder al desarrollo del conocimiento matemático.
3. Integrar bajo el nombre de matemáticas las denominaciones dadas a los cursos como aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.
4. La teoría de números debe ser sintética, analítica y axiomática. La enseñanza en la escuela secundaria debe establecer una clara diferencia en las distintas etapas en las cuales se construye el concepto de número, teniendo en cuenta el desarrollo psicológico de los estudiantes. Debe abstraerse el concepto de

[168] UNESCO (1962). *The present status of mathematics teaching in secondary schools in Argentina, Brazil, Chile, Colombia, Costa Rica, Perú y Venezuela*. Budapest: Sangiorgi, O.

número como propiedades o relaciones dadas en la etapa sintética, usando conceptos equivalentes en la etapa analítica.

La reforma de la educación secundaria implicó una reforma en la educación primaria, reforma materializada con el Decreto 1710 de julio 25 de 1963. Uno de los propósitos principales de la reforma fue terminar con la diferencia entre escuelas primarias rurales y escuelas primarias urbanas, estableciéndose un plan único de estudios con la posibilidad de adaptar los programas de las asignaturas a las necesidades del medio. El plan se estableció de la siguiente manera:

CURSOS / **ASIGNATURAS**	**GRADO 1**	**GRADO 2**	**GRADO 3**	**GRADO 4**	**GRADO 5**
EDUCACIÓN RELIGIOSA Y MORAL	3	3	3	3	3
CASTELLANO	9	9	7	7	6
MATEMÁTICAS	6	6	5	5	5
ESTUDIOS SOCIALES	5	3	6	6	6
CIENCIAS NATURALES	3	3	5	3	6
EDUCACIÓN ESTÉTICA	4	4	4	4	4
EDUCACIÓN FÍSICA	3	3	3	3	3
TOTAL CLASES SEMANA	33	33	33	33	33

La asignatura de matemáticas, nombre tomado de la reforma anterior para el bachillerato, comprende contenidos de aritmética y geometría. La distribución de los contenidos para cada curso fue realizada por el Ministerio de Educación Nacional, y se publicó en unos manuales que contenían también los programas de las demás asignaturas. En estos manuales, en lo relacionado con la matemática, no se vislumbra la enseñanza de los conjuntos, pues los contenidos obedecen a números naturales, números racionales vistos como fraccionarios y decimales positivos, el número pi (π) y conceptos elementales de geometría incluyendo áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas . Los conjuntos en la enseñanza primaria aparecen en los inicios de los años setenta con la llegada de la Misión Francesa que trajo los matemáticos Puteau y Parot auspiciada por el Instituto Colombiano de Pedagogía (ICOLPE) y la presencia de la Misión Alemana 1971-1975 que asesoraría al Ministerio de Educación en el diseño de programas para la enseñanza primaria.

El ICOLPE se creó mediante el Decreto 3153 de 1968, anexo a la Universidad Pedagógica Nacional, como un organismo encargado de la investigación educativa, la asesoría pedagógica y la producción de materiales educativos; además, prestaba asesoría al Ministerio de Educación Nacional (MEN), a las secretarías de educación departamentales y municipales, y a los planteles oficiales y privados de enseñanza primaria y media. Adicionalmente, el ICOLPE se encargó de la elaboración de una propuesta de política oficial sobre textos escolares[169] y se integraron a éste el Instituto de Ciencias, el Instituto Lingüístico Colombo-Americano y el Centro Lingüístico Colombo-Francés. A partir del ICOLPE se habla de currículo en Colombia; y en el campo de la pedagogía de la matemática, se investiga sobre el desarrollo del razonamiento lógico y numérico en el escolar colombiano. La investigación fue realizada por el equipo de psicólogos asesores, el equipo de matemática del ICOLPE y el Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

[169] Información suministrada en entrevista personal con el Dr. Julio Báez, funcionario del Ministerio de Educación Nacional.

El trabajo del ICOLPE en los setenta fue fundamental para la enseñanza de la matemática por tres razones. En primer lugar la Misión Francesa en noviembre y diciembre de 1970 dictó en el Colegio Refous de Bogotá el Primer Curso de Pedagogía de la Matemática Moderna, Curso en donde se capacita un buen número de profesores de matemática del país y se introducen los textos de Papy; en segundo lugar, la Misión Alemana escribe los primeros textos para enseñanza primaria incluyendo los conceptos elementales de lógica y conjuntos; y en tercer lugar, la asesoría a los Centros Experimentales Pilotos de las Secretarías Departamentales de Educación permitió la implementación de la matemática moderna posterior a las reformas dadas por los Decretos 080 de 1974 y 088 de 1976.

El Decreto 080 de 1974 deroga el Decreto 045 de 1962 y reestructura el plan de estudios del bachillerato, con el objeto de ofrecer alternativas de formación en los campos científico, técnico y humanístico mediante la llamada diversificación del bachillerato. Es así como los primeros cuatro años se siguen connsiderando como ciclo básico y los dos últimos años como ciclo vocacional ofreciendo las modalidades de bachillerato académico, normalista, industrial, comercial, agropecuario y en promoción social. Durante el ciclo básico los programas de matemática continúan sin alteración en su contenido con una inentensidad semanal de cinco horas; en el ciclo diversificadoes de tres horas semanales. En total se tienen 26 horas de matemática para los seis cursos con la posibilidad de intensificar teniendo a disposición cinco horas semanales en cada curso, posibilidad que puede ser nula cuando la modalidad del bachillerato no es la de académico; pero aún así como mínimo se dispone de 962 horas de matemática frente a 780 que se tenían con el decreto anterior. Si se compara la intensidad de la matemática frente a otras áreas se observará que siempre es mayor o igual a cualquiera de las demás. El plan fundamental mínimo de instrucción con la distribución de horas semanales por asignatura se muestra en la siguiente tabla

CURSOS	I	II	III	IV	V	VI
ASIGNATURAS						

ED. ÉTICA MORAL Y RELIGIOSA	3	3	3	2	1	1
HISTORIA	2	2	2	3		
GEOGRAFÍA	2	2	2	3		
FILOSOFÍA					3	3
COMPORTAMIENTO Y SALUD					2	2
ESPAÑOL	4	4	4	4	4	4
IDIOMA EXTRANJERO	3	3	3	3	3	3
CIENCIAS NATURALES	3	3	3	3		
QUÍMICA					3	3
FÍSICA					3	3
MATEMÁTICAS	5	5	5	5	3	3
EDUCACIÓN FÍSICA	2	2	2	2	2	2
EDUCACIÓN ESTÉTICA	2	2	2	2	2	2
VOCACIONALES Y TÉCNICAS	4	4	4	4	5	5
Intensificaciones	5	5	5	4	4	4
Total horas semana	35	35	35	35	35	35

El ministerio de Educación Nacional, teniendo en cuenta los progresos educativos en el orden mundial, y que, el sistema educativo debe adecuarse a los avances del conocimiento del niño en todos sus aspectos, reestructura el sistema educativo mediante el Decreto- Ley 088 de 1976, estableciendo dos tipos de educación: educación formal y educación no formal. La educación formal, cuyos planes son establecidos por el gobierno, comprende los niveles progresivos de pre-escolar, educación básica (primaria y primeros cuatro años de secundaria), educación media e intermedia (dos últimos años de la secundaria con diversificación en ciencias, tecnología y arte) y educación superior. La educación no formal solo requiere autorización del gobierno y prepara personas en diferentes oficios con planes ad hoc.

Reorganizado el sistema educativo, y ante las inconsistencias presentadas en los Decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974 por la falta de continuidad entre los planes de estudio de la primaria y el bachillerato, se emite el Decreto 1419 de 1978, presentando una renovación curricular a través de la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos. Según la entidad mencionada[170], los programas anteriores a este decreto presentaban fallas en su diseño curricular porque los contenidos se reducían a un listado de temas, algunas veces irrelevantes; las actividades propiciaban el aprendizaje memorístico, no dando "mayor margen para los aspectos socio afectivos o para los procedimientos metodológicos que pueden favorecer la adquisición de habilidades"[171]; finalmente, limitan la actividad del estudiante.

El diseño curricular propuesto por el Decreto 1419 de 1978 contempla para el área de matemática en la enseñanza primaria, la división del contenido en siete temas centrales para cada curso: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, y, relaciones y operaciones (ver Anexos A y B). A partir de este decreto se tienen oficialmente contenidos específicos de lógica y teoría de conjuntos para la primaria; no obstante, para el bachillerato básico y los dos años de diversificación, por medio de la Resolución 277 de 1975 (Ver anexo C), el Ministerio autorizó la enseñanza de la matemática moderna, con programas que habían sido elaborados desde 1974. El contenido de estos programas corresponde a una serie de textos escritos para tal fin desde ese año y publicados entre 1975 y 1976 por editoriales comerciales, entre ellos la serie de *Matemática Moderna Estructurada* de Guarín, Wills,

[170] Ministerio de Educación Nacional (1976). *Serie Programas Curriculares*. Bogotá: División de Diseño y Programación Curricular de Educación Formal.
[171] Ibíd.

Gómez y Londoño publicada por Editorial Norma en seis volúmenes, y la serie *Matemática Contemporánea*.

Los programas curriculares con base en la matemática moderna, propuesta por los Decretos 088 de 1976 y 1419 de 1978, tuvieron varios inconvenientes. Un número considerable de profesores responsables de la enseñanza de la matemática no estaban preparados para ello porque no eran licenciados en matemática, o habían sido formados en los planes de las licenciaturas anteriores a 1964, donde la formación se basaba en la matemática clásica con ausencia de la lógica, los conjuntos, el álgebra moderna y la topología.

Por otra parte, la reforma inició inmediatamente en todos los cursos tanto de primaria como de bachillerato, sin tener en cuenta que los estudiantes del bachillerato de los cursos diferentes al primero conocían poco acerca de los conjuntos, no conocían formalmente las relaciones y confundían los términos ecuación y función, así que sus conceptos previos para el curso siguiente no estaban en el nivel necesario; sin embargo, el profesor podía utilizar estrategias metodológicas a fin de subsanar el problema rediseñando los contenidos. Además de lo anterior, los contenidos se desarrollaban entre lo moderno y lo clásico, desconectando la secuencia de los temas porque los programas aún contenían rastros de los que le antecedieron. Finalmente, los padres de los estudiantes no conocían la matemática moderna, hecho que les impedía poder ayudar a sus hijos.

Estas razones forzaron a replantear nuevamente el plan de estudios para el preescolar, la básica y la media vocacional. En aras de resolver el problema de la reforma amparada en la matemática moderna, el gobierno emite el Decreto 1002 de abril 24 de 1984, con el objeto de garantizar la secuencia y la coherencia de la estructura educativa. En este decreto se modifica el número de horas dedicadas al estudio en cada nivel educativo como sigue:

NIVEL EDUCATIVO	HORAS SEMANALES	HORAS ANUALES
PREESCOLAR	20	800
PRIMARIA	25	1000
BÁSICA SECUNDARIA	30	1200
MEDIA VOCACIONAL	30	1200

El tiempo dedicado a cada área o asignatura era detrminado mediante resolución del Ministerio de Educación Nacional. Las áreas comunes para primaria y secundaria son Ciencias naturales y salud; Ciencias sociales; Educación estética; Educación física, recreación y deportes, Educación religiosa y moral; Español y literatura y Matemáticas. Además de las áreas mencionadas, en la secundaria se incluyen las áreas de Educación en tecnología e Idioma extranjero; en la media, se incluye filosofía.

El Decreto 1002 de 1984, con respecto al Decreto 080 de 1974, reduce la intensidad semanal en primaria y secundaria, hecho que ocasionó un menoscabo de la enseñanza, porque al reducirse el número de horas, alguna de las áreas debió ser sacrificada; además, dificultó la posibilidad de las intensificaciones. Con este decreto, la enseñanza de la matemática al verse amenazada por la disminución de la intensidad horaria tomó dos caminos.

El primero debilitó la matemática moderna al volver a lo básico, retomando la matemática tradicional e insertando en ella la teoría de conjuntos como un tema suntuoso y no fundamental, reduciéndose la lógica se al mínimo con el predominio de las tablas de verdad. Este camino fue una opción para aquellos docentes que por cualquier motivo no estaban de acuerdo con la enseñanza de la matemática moderna.

El segundo camino consistió en orientar la matemática bajo el Enfoque de Sistemas. Este enfoque propuesto por Carlos Vasco, Asesor del Ministerio de Educación Nacional, reivindica la matemática moderna, puesto que un sistema es un conjunto sobre el cual se definen relaciones y funciones (operaciones), de tal manera que si estas relaciones o funciones cumplen determinadas propiedades, entonces el sistema se convierte en una estructura. De esta forma, un sistema, es un concepto más amplio bajo el cual pueden estudiarse los conjuntos, las funciones, las relaciones y las estructuras, es decir, sistema es un concepto que permite fundamentar la matemática.

Durante la vigencia del Decreto 1002 de 1984, Colombia redacta la nueva Carta Constitucional de 1991. Los cambios introducidos por la nueva constitución vuelven obsoletas las disposiciones en materia educativa, de tal manera que obligó al gobierno nacional a redactar una nueva ley de educación. Se expide entonces la Ley 115 de 1994 o *Ley General de la Educación*, que establece en los artículos 77, 78 y 79 la autonomía escolar, la regulación del currículo mediante lineamientos generales para cada área de estudio diseñados por el Ministerio de Educación Nacional, y la elaboración del plan de estudios de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional, estructurando áreas de estudio obligatorias[172] y optativas.

El gobierno nacional, atendiendo al Artículo 78 de la Ley General de la Educación elabora los Lineamientos Curriculares para las áreas obligatorias, entre ellas la matemática. Los Lineamientos del Área de Matemática se publicaron en 1998 por el grupo de apoyo del Ministerio de Educación Nacional conformado por personalidades, instituciones universitarias y grupos de investigación en el área de la educación matemática. En su redacción se tuvieron en cuenta aspectos relacionados con la matemática y su enseñanza y aspectos legales.

En lo que tiene que ver con la matemática y su enseñanza, se tomaron en cuenta las tendencias internacionales sobre enseñanza de la matemática discutidas en el *Primer Estudio Internacional de Matemáticas* de 1964, el *Segundo Estudio* realizado en los años 1964 y 1967, y el *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias* (*Third International Mathematics and Science Study)* realizado en 1995. Los aspectos legales

[172] Las áreas obligatorias son Ciencias Naturales y Educación Ambiental; Ciencias Sociales, Historia, Geografía, Constitución Política y Democracia; Educación Artística y Cultural; Educación Ética y en Valores Humanos; Educación Física, Recreación y deportes; Educación Religiosa; Humanidades, Lengua Castellana e Idiomas Extranjeros; Matemáticas; Tecnología e Informática.

de los Lineamientos están relacionados con la Ley General de la Educación, de la cual se toman las siguientes disposiciones tomadas como objetivos de la educación básica.

> *Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.* [173]
> *El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones.*[174]
> *El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos. Lógicos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y de la vida humana.*[175]

Considerando los aspectos anteriores, los Lineamientos Curriculares proponen un currículo de matemática con una estructura apoyada en los siguientes conocimientos básicos:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos
- Pensamiento métrico y sistema de medidas
- Pensamiento aleatorio y sistema de datos
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Los conocimientos básicos propuestos en los lineamientos se aplicaron en cada uno de los cursos de matemática de la básica y la media, atendiendo el desarrollo psicológico del individuo y la construcción del conocimiento matemático. Este conocimiento aún se presenta sobre la base de los programas establecidos según el Decreto 045 de 1962 y la

[173] Ley General de la Educación. Artículo 20 literal c).
[174] Ley General de la Educación. Artículo 21 literal e).
[175] Ley General de la Educación. Artículo 22 literal c).

Resolución 277 de 1965, como una amalgama, donde se sigue considerando el estudio de la lógica y la teoría de conjuntos al inicio de cada programa, pero no se observa continuidad entre esta temática y la que sigue, lejos de las estructuras algebraicas. Es pertinente señalar que los Lineamientos Curriculares están vigentes y no se vislumbra por ahora ninguna posibilidad de reforma en la enseñanza de la matemática en los niveles de básica y media.

5.2 LÓGICA Y CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA PRIMARIA Y SECUNDARIA

Si echamos una mirada hacia atrás, con certeza puede afirmarse que la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos en el currículo de matemática de primaria y secundaria antes de 1961 estuvieron ausentes. Este hecho es verificable observando las diferentes reformas educativas instituidas hasta llegar a los Decretos 045 de 1962 y 1710 de 1963, donde por primera vez aparece el tema de conjuntos en el curso inicial del bachillerato, pero la lógica aún no aparecía. Según Vasco (1975), con la creación de los Institutos de Enseñanza Media Diversificada INEM[176] en 1969, la enseñanza de la matemática en estos institutos se presentó en forma unificada, recibiendo la influencia de la Segunda Conferencia Interamericana de Educación Matemática de Lima de 1966, introduciéndose en el ciclo básico y en el ciclo diversificado en la modalidad de Ciencias y Matemáticas los conceptos de estructura, operaciones, sistemas de numeración, conjuntos y deducciones lógicas. Para la enseñanza de la matemática en los INEM se usaron guías de trabajo elaboradas por los profesores, debido a la carencia de libros que presentaran el material a estudiar con la metodología requerida.

Los profesores de matemática de los INEM eran casi todos licenciados formados antes de 1969, y se sabe que si eran egresados antes de 1964, tenían una formación nula o deficiente en lógica y teoría de conjuntos, por lo tanto las primeras enseñanzas sobre estos temas no pudieron ser rigurosas limitándose a mostrar unos conceptos nuevos

[176] En el Caribe Colombiano se fundaron los INEM de Cartagena, Barranquilla, Montería y Santa Marta

desconectados de la temática siguiente. Una indagación a profesores del INEM de Cartagena mostró que los conjuntos se presentaron muy elementalmente y que su enseñanza no conducía a algo significativo; sin embargo, los licenciados egresados de la Universidad del Atlántico que trabajaron en los INEM y en otras instituciones de educación media a partir de 1970 enseñaron teoría de conjuntos e introdujeron la construcción axiomática de los números reales en el último curso del bachillerato. Como ejemplo puede citarse la *Escuela Normal* de Corozal, donde en 1972 se dieron estas enseñanzas.

En la enseñanza primaria la aparición de los conjuntos en el currículo se debe a la misión alemana. En 1975 se publicó la serie de guías para el maestro de enseñanza primaria por el grupo ICOLPE-CENDIP, introduciéndose en todas ellas en la primera unidad los conceptos de conjuntos; subconjuntos; operaciones con conjuntos; partes de un conjunto; conjuntos finitos e infinitos; cardinalidad; relaciones de orden y de equivalencia; propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa y cancelativa para la suma y la multiplicación e infinitud de los números naturales y racionales.

Las modificaciones al programa oficial para la primaria contemplado en el Decreto 1710 por la Misión Alemana se hicieron teniendo en cuenta las reformas que a nivel mundial se daban en la enseñanza de la matemática, así quedo plasmado en la introducción de la guía para quito grado:

> *Las Conferencias que sobre Matemática han celebrado los países de América, han llagado a la conclusión de que es necesaria la unificación de los programas, previa la actualización de los mismos. Para ello será indispensable aplicar los nuevos enfoques y los nuevos conceptos tales como: conjuntos, relaciones, sistemas de numeración en cualquier base, estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial), un tratamiento de la geometría como*

> *interrelacionada con la aritmética y nociones básicas sobre Estadística, computadores, etc.*[177]

Después de la aparición oficial de los conjuntos en la enseñanza primaria en 1975, veamos que ocurrió con la lógica. La creación de los Centros Experimentales Piloto, cuerpos en donde se daba capacitación a los profesores de primaria y secundaria, fue el medio utilizado por el estado para la difusión de las nuevas ideas en matemática. La reforma curricular dada por el Decreto 1419 de 1978 permitió la enseñanza de la lógica desde el segundo año de primaria; es así como aparece en este grado el significado de las expresiones *y*, *o*, *todos*, *algunos* y *ninguno*. En el tercer año se analizan estas expresiones dentro del lenguaje ordinario; en el cuarto grado se introduce la noción de proposición, el valor de verdad de las proposiciones y la negación de proposiciones y expresiones cuantificadas; en el quinto grado se dan los nombres a las conectivas. (Ver Anexo A). Los contenidos de la lógica en los programas curriculares de matemática primaria se mantienen hasta finales de la década de los ochenta.

Haciendo un balance de la década de los setenta sobre la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos puede decirse que en este lapso se propició un cambio bastante brusco en el currículo de matemáticas de la primaria y la secundaria. La nueva matemática introdujo con la lógica el cálculo proposicional y el cálculo de predicados, aunque muy someramente; con la teoría de conjuntos introdujo operaciones y propiedades, el cálculo de relaciones, las estructuras algebraicas y la construcción de los sistemas numéricos; en pocas palabras, se inició la enseñanza de los fundamentos de la matemática.

Respecto a la enseñanza de la lógica y los conjuntos como fundamento de la matemática en el nivel secundario de la educación colombiana Takahashi (1976) afirma que

> *El método adecuado para comprender un cuerpo de conocimientos o teoría y adquirir la capacidad de usarla y contribuir a su desarrollo*

[177] Ministerio de Educación Nacional. Centro Experimental Piloto de Bolívar (1975). Guía para el maestro 5º grado de enseñanza primaria.

> *consiste en reducirla a términos más simple desde el punto de vista lógico. El éxito de los intentos de reducción de las matemáticas a una fuente inicia con unas pocas nociones y principios fundamentales, fuente que se halló en la teoría de conjuntos abstractos, y los avances logrados con los esfuerzos para reducir la teoría de conjuntos, y por tanto la matemática todo, a la lógica, se deben reflejar en la enseñanza. Se concluye entonces que el estudio de la matemática debe comenzar con la teoría de conjuntos, precedida a su vez por la lógica.* (p. 6)

El éxito alcanzado por este nuevo enfoque sobre la enseñanza de la matemática en la década de los setenta se vio perturbado por distintos factores. La falta de preparación de los profesores de matemática obligó a estos a continuar con la enseñanza clásica de una matemática parcelada; el cambio se dio en las ciudades principales, ya que en las ciudades intermedias y en el sector rural el cambio se dio poco o simplemente no se dio. La nueva matemática también sirvió para que se cometieran excesos en la enseñanza, donde aquellos profesores aparentemente preparados para ello utilizaban la matemática moderna para hacer gala de sus conocimientos.

La enseñanza de la matemática moderna en el bachillerato estuvo caracterizada por el exceso de rigor ante estudiantes poco o mal preparados para este evento, y el empleo de una metodología que en la mayoría de los casos se convertía en repetir el contenido de unos libros generalmente áridos, porque el pensamiento axiomático no estaba en la mente de los alumnos. La mala implementación de esta metodología condujo a situaciones patológicas como la disminución drástica de las habilidades del cálculo mental, manejo de fórmulas, manejo símbolos y resolución de problemas (Vasco, 1980).

En la década de los ochenta se introduce el concepto de sistema como elemento clave del currículo de matemática. La llamada *fiebre de la teoría de conjuntos* había pasado a un segundo plano, porque se criticaba que en los primeros años de la enseñanza primaria la idea que tiene el niño de conjunto es de pluralidad, así que los conceptos de conjunto vacío, conjunto unitario e intersección de conjuntos disyuntos se constituían en obstáculos epistemológicos para el aprendizaje de ese concepto. Si se analiza la idea de conjunto como agregado presentada por Weierstrass, esta crítica no está bien fundamentada porque lo que caracteriza a los conjuntos vacío y unitario es la propiedad que los define, no la idea de objeto o elemento individual[178]. La idea de sistema recibió un número importante de adeptos y se impuso de modo oficial porque entre otras cosas, históricamente la idea inicial[179] que se tenía de conjunto era la de un sistema en el cual el orden de las partes no tiene importancia.

El hilo conductor del concepto de sistema como concepto clave de la matemática para la enseñanza primaria y secundaria fue planteado por Vasco (1980). Según este autor, lo que el niño conoce son sistemas como conjuntos de objetos con relaciones y operaciones, un conjunto por sí solo no significa mucho, si este conjunto se dota de relaciones y operaciones, entonces tendrá sentido para el aprendiz. Las relaciones permiten ver los objetos dentro de un contexto, se representan con un símbolo llamado operador que expresa algo predominante, contemplativo y teórico; las operaciones permiten manipular esos objetos y se representan con un símbolo llamado operador que expresa algo predominante, activo y práctica; de esta manera, los sistemas involucran teoría y práctica, correspondiendo las relaciones a la teoría y las operaciones a la práctica.

Expuestos los elementos o partes constitutivas de un sistema, este queda determinado por tres conjuntos: un conjunto A de objetos, un conjunto Θ de operaciones y un conjunto R de relaciones; así que, un sistema e representa con la terna ordenada (A, Θ, R). Definido ya un sistema, ¿Qué ventajas trae la introducción de los sistemas en la enseñanza de la matemática? Vasco (1980), justifica la importancia de los sistemas con las siguientes reglas:

[178] Una discusión más amplia al respecto puede leerse en Velarde, J (1989). *Historia de la lógica*. Gijón, España: Lidergraf. S.A.
[179] Esta idea es de Bolzano quien considera en su obra *Paradojas del Infinito* que un sistema de cosas es un todo consistente.

1. *El estudiante se encuentra siempre con sistemas.*
2. *Sobre un mismo conjunto de objetos pueden definirse muchos sistemas.*
3. *Un conjunto es un sistema al que se le han vaciado activamente las operaciones y las relaciones.*
4. *Lo que en un sistema es operación, o relación, en otros sistemas puede ser objeto.*
5. *Una operación nunca puede ser una relación.*
6. *Una relación nunca puede ser una operación, a menos que se considere el lenguaje acerca de los objetos del sistema.*
7. *Lo más importante en el conocimiento de un sistema es su manejo práctico.*
8. *A través del manejo práctico se descubren y dominan las relaciones del sistema.*
9. *Los sistemas matemáticos son muy simplificados, los sistemas reales son más complejos.*

La enseñanza de la matemática basada en el concepto de sistema presentó tempranamente dificultades. Para los alumnos del bachillerato y aún de la universidad, el Enfoque de Sistemas fue algo que llegó tardío cuando ya existía todo un andamiaje de conceptos y temáticas aprendidas no muy conexamente. En el nivel primario, cuando apenas comienza el estudio de la matemática el método era complicado porque se hacía difícil percibir varias relaciones y operaciones simultáneamente en un conjunto. Esto en cierta forma se debía a que el profesor no implementaba una propiedad importante de los sistemas: la complejidad. La Teoría de Sistemas utiliza preferiblemente el método deductivo, que va en dirección opuesta a la manera como el niño aprende, pues el niño aprende construyendo intuitivamente teorías acerca de su mundo, poco a poco va construyendo significados matemáticos unas veces por descubrimiento y otras por dar solución a sus juegos o sus problemas; pero esta forma de aprender no es un axioma porque el niño más temprano que tarde hace sus propias generalizaciones y abstracciones.

El comienzo de la década de los ochenta fue propicio porque en ese momento se realizaron encuentros para discutir el desarrollo de la matemática no sólo en el Caribe Colombiano sino en el país. En el Congreso Nacional de Matemáticas celebrado en agosto de 1980[180], se hizo un balance del pasado y se formularon políticas a seguir para mejorar la enseñanza de la matemática. El balance englobó la educación básica y media, la licenciatura en educación área matemática y física y la carrera de matemática.

Respecto a la educación básica y media, el Congreso consideró la inconveniencia de implantar los Programas de Matemática por parte del Ministerio de Educación Nacional sin consultar la comunidad matemática nacional. Se recomendó, que antes de continuar con la reforma basada en el Enfoque de Sistemas debía darse una discusión amplia dentro de las facultades de educación, como también garantizar la existencia de libros de matemática con buena calidad que garantizaran la implementación de esta o cualquier otra reforma.

Durante la realización del Congreso se discutieron los avances logrados con las cuatro primeras Conferencias Interamericanas de Educación matemática[181], la V Conferencia Internacional sobre Educación Matemática de Campinas (Brasil), y las propuestas del National Council of Teachers of Mathematics NTCM.[182] Se propuso motivar el estudio de la matemática entre los jóvenes mediante la realización de las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas, la conformación de clubes de matemáticas y la edición de una serie de monografías con temas de matemáticas accesibles a los estudiantes de bachillerato. Se propuso también estudiar la problemática en la transición del bachillerato a la universidad, ya que se evidenciaba la deficiente preparación de los bachilleres hasta el punto de que en el primer semestre universitario se incluía en el pensum un curso de matemáticas para remediar la situación.

[180] Sociedad Colombiana de Matemáticas (1980). La nueva década. *Lecturas Matemáticas*, 1 (3), 309-326.
[181] Las cuatro conferencias son: Bogotá 1961, Lima 1966, Bahía Blanca (Argentina) 1972 y Caracas 1975.
[182] Las propuestas del NTCM se expusieron en la sección 2.1

Para las Licenciaturas en Educación con especialidad en Matemática y Física y para la Carrera de Matemáticas se estudió el proyecto de programa mínimo propuesto por el ICFES[183] en ambas modalidades, señalándose la necesidad de discutir más a fondo la cuestión en seminarios que se establecerían para tal fin. Se recomendó también estudiar la posibilidad de orientar la Carrera de Matemáticas hacia la Matemática Aplicada.

Después del Congreso de Matemáticas de 1980, el ICFES organizó entre el 30 de noviembre y el 4 de diciembre de 1981 el Primer Simposio Nacional sobre Enseñanza de la Ciencia, con el objeto de estudiar las características de la enseñanza de las ciencias en todos los niveles, principalmente en el nivel de Educación Básica; pero más que eso, en el área de matemática el propósito fue reafirmar el Enfoque de Sistemas como enfoque unificador en la enseñanza de la matemática, presentándose los programas para los primeros cinco grados de enseñanza básica. La justificación del Enfoque de Sistemas, según la SCM (1981), se expresó con el siguiente argumento. “En la matemática como en todas las ciencias ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituido escuelas matemáticas.” (p. 229). Más adelante afirma

> *En círculos dedicados a la docencia y a la investigación matemática en Colombia son ya bien conocidos estudios como Relatores y Operadores; Lógica, Conjuntos y Estructuras; Relaciones, Operaciones y Sistemas; El concepto de Sistema como clave del Currículo de Matemática, en los cuales el asesor del MEN para la elaboración de los programas de Matemática para el nivel básico, Carlos E Vasco, desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y los específicos al caso particular de los sistemas Matemáticos.* (p. 230)

[183] ICFES es la sigla del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, organismo encargado de la vigilancia y evaluación de las instituciones de educación superior en ese entonces.

La enseñanza de la matemática en la primaria con el Enfoque de Sistemas se llevó a cabo utilizando una metodología basada en la Psicología Evolutiva de Piaget, según la cual para cada etapa del desarrollo psicológico se pueden enseñar ciertos conceptos matemáticos presentándose la abstracción alrededor de los trece o catorce años, edad apropiada para enseñar las estructuras algebraicas. Los programas de los cinco grados fueron redactados con sus objetivos, sugerencias metodológicas, ejemplos para los temas propuestos e indicadores de evaluación; es decir, los programas constituían una guía y un elemento de capacitación para los docentes. Los textos se distribuyeron a través de los Centros Experimentales Pilotos; así por ejemplo, el Centro de Cartagena se encargaba de hacer llegar el material a los docentes de Bolívar. El Anexo A presenta un resumen del contenido de los programas de la primaria presentado en los textos mencionados.

La enseñanza de la matemática con el Enfoque de Sistemas comenzó experimentalmente en el Distrito Especial de Bogotá, mientras que en el Caribe Colombiano se implementó después de 1981 en los colegios de las ciudades capitales, pues la reforma no llegó a muchas de las poblaciones apartadas de las capitales; aún mas, la reforma no llegó al sector rural del Caribe donde los profesores de primaria y bachillerato escasamente tenían el título de Maestro concedido por las Escuelas Normales que preparaban los docentes de la primaria.

Muchas fueron las críticas que recibió el Enfoque de Sistemas a partir del Simposio de 1981. La primera crítica se refiere a que como constante general, las reformas se dan sin contar con docentes capacitados ni textos para los estudiantes, lo cual hace muy difícil la puesta en ejecución. Respecto al concepto de sistema[184], este existe en diversos campos, por lo tanto debió explicarse la diferencia entre los sistemas en general y los

[184] La teoría de sistemas fue estudiada por Ludwig Von Bertalanffi en la década de los sesenta. Un sistema se define como un conjunto de partes interrelacionadas que interactúan en la búsqueda de un objetivo común. Según esta definición ¿Cuál es el objetivo común de un sistema matemático? La respuesta es evidente, funcionar como un sistema con propiedades comunes satisfechas por los elementos del conjunto establecidas por las relaciones y operaciones.

sistemas dentro de la matemática; además, este es un concepto abstracto, y si la abstracción llega alrededor de los trece o catorce años, no es conveniente introducir un concepto que el niño no es capaz de abstraer.

En lo relacionado con la enseñanza de la lógica en primaria, el objetivo fue introducir el estudio de esta a través del lenguaje, lo que se hizo en forma fraccionada, pues primero se introdujeron la disyunción, la conjunción y los cuantificadores en los tres primeros años, terminando los dos últimos grados con proposiciones en general y la implicación simple. De esta propuesta es posible deducir varias afirmaciones. La introducción de la lógica no implicó que el alumno razonara más tempranamente en forma correcta; la intención de dar al lenguaje una estructura de sistema no consiguió su cometido porque los lenguajes de por si son una estructura compleja entendida en niveles superiores con el estudio de la semántica, la sintaxis y la pragmática, teorías poco comprensibles para un niño de primaria; además, la aparición de implicaciones simples pretendían la construcción de pequeñas inferencias organizando a la vez el lenguaje del niño, hecho que se da por la naturaleza del desarrollo mental sin necesidad de recurrir a un sistema lógico.

Mirando ahora la teoría de conjuntos, su propósito en la reforma fue dar un soporte al concepto de sistema, permitiendo la introducción del sistema de los números naturales como primer sistema fundamental dentro de la matemática. Este propósito se diluye a lo largo de los cinco años en los cuales se dan operaciones con conjuntos hasta llegar a la definición de conjunto abstrayendo finalmente dicho concepto. Si lo que se buscó fue fundamentar la matemática desde la primaria, se cometió un error porque la mente del niño no está preparada para ello. Pero no todo los comentarios pueden ser negativos, fundamentar una ciencia desde los primeros niveles de enseñanza no es tarea fácil. En este sentido afirma Thom (1981) que

> *Es muy común el error de creer que los fundamentos de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que deben ser el punto de partida para su estudio. La*

> *realidad no es así: la fundamentación suele ser la parte más difícil de una ciencia y, en general, ha sido siempre hecha por especialistas de larga experiencia y no ha tomado forma hasta etapas muy avanzadas de la teoría. Para poder descender el estudio de los fundamentos a los primeros niveles de enseñanza hace falta adaptar los mismos a la capacidad del aprendizaje juvenil, adaptación siempre difícil…* (p. 301)

Ante las numerosas críticas hechas a la reforma en el seno del Simposio, se recomendó suspender temporalmente la implementación de los nuevos programas hasta cuando se realizara un análisis profundo de estos, dando así tiempo para la capacitación del magisterio mediante un plan nacional liderado por las universidades colombianas y contando con la asesoría de grupos de investigación en la enseñanza de la matemática. Mientras la reforma se suspendía en el Distrito Especial de Bogotá, en las escuelas del Caribe Colombiano comenzaba su implementación, la cual se llevó a cabo parcialmente hasta 1986 bajo la orientación de los Centros Experimentales Pilotos. Se afirma que la implementación fue parcial porque no se ejecutó en todos los colegios, ya que los profesores que trabajaban en municipios distantes de las capitales departamentales no recibieron capacitación en los Centros Pilotos y continuaron la enseñanza de la matemática sin contenidos de lógica y con las nociones esenciales de teoría de conjuntos, descontextualizada de la teoría matemática en cada grado.

La situación de la enseñanza de la lógica y los conjuntos en el bachillerato del Caribe Colombiano fue similar a la del resto del país. Siendo precisos, la enseñanza de la lógica y los conjuntos en el bachillerato se dio a partir de la Resolución 277 de 1975, que implementó la enseñanza de la matemática moderna en todas las modalidades del bachillerato establecidas en el Decreto 080 de 1974. La difusión de la matemática moderna mediante la serie *Matemática Moderna Estructurada* se realizó a nivel nacional, por lo tanto el Caribe Colombiano no fue la excepción. Tal como sucedió con los textos diseñados para la enseñanza de la lógica y los conjuntos en los programas de matemática de la primaria, en el bachillerato esta serie no se utilizó en todos los planteles educativos porque no hubo una preparación adecuada de los docentes; además, la introducción repentina de esta temática creó traumatismos debido a que los textos comenzaron a utilizarse en los seis cursos simultáneamente y no se implementó gradualmente; así que, los contenidos de lógica y conjuntos parecían repetirse en todos los cursos.

La serie *Matemática Moderna Estructurada* y otras que aparecieron por esos años, tenían una característica en común: la presentación de la matemática moderna a partir de los conjuntos, la lógica y las estructuras. El primer curso de matemática del bachillerato comenzaba con conjuntos y no con la lógica, presentándose una ruptura con los contenidos de primaria ya que estos incluían expresiones del lenguaje con cuantificadores y proposiciones con las conectivas negación, disyunción y conjunción, mientras que la lógica aparecía en el tercer curso. Los sistemas numéricos surgen en el curso tercero y no en el primero donde debía aprovecharse el Sistema de los Números Naturales para su inclusión; la estructura de grupo aflora en el tercer curso y no en el segundo donde se trabajan los números racionales; además de esto, algunos temas se repiten en casi todos los cursos. La siguiente tabla muestra la frecuencia de los temas relacionados con lógica, conjuntos y estructuras en cada uno de los cursos.

CURSOS	1	2	3	4	5	6
TEMAS						
Noción de conjunto	x		x	x		
Operaciones con conjuntos	x		x	x		x
Coordinabilidad	x					
Cardinal de un conjunto	x			x		x
Producto cartesiano	x	x	x			x
Relación de equivalencia	x	x				
Clase de equivalencia	x	x	x			
Relación de orden	x	x	x			

Partición de un conjunto	x		x	x		
Funciones: Funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva	x	x	x	x	x	x
Composición de funciones			x			
Álgebra de funciones					x	x
Relaciones binarias			x			x
Sistema matemático y sistema numérico			x			
Proposiciones, conectivas y tablas de verdad			x			
Implicación y equivalencia lógica			x			x
Funciones proposicionales			x			
Cuantificadores			x			
Métodos de demostración				x		x
Estructura de grupo			x			
Estructura de anillo y campo				x		
Noción de espacio vectorial					x	

La introducción de la matemática moderna en el bachillerato no modificó sustancialmente la estructura de los programas dadas por los Decretos 045 de 1962 y 080 de 1974. En los dos primeros cursos el contenido dominante fue la aritmética y la geometría; en los cursos tercero y cuarto, algebra y geometría; en quinto, trigonometría y geometría analítica; y en sexto, cálculo o análisis matemático.

Los inconvenientes de la matemática moderna en el bachillerato, debido a la falta de preparación de los profesores, y la dificultad de asimilación de los estudiantes de esta nueva forma de presentar la matemática, causada en parte por un currículo de matemática en primaria que no presentó avances significativos en el aprendizaje de esta matemática, propiciaron un cambio curricular que en el interior del país se dio en los inicios de la década de los ochenta y en el Caribe Colombiano a mediados de la misma década.

A partir de más o menos 1985, los nuevos programas del bachillerato siguieron la tendencia del movimiento Volver a lo Básico, dándose prioridad al aprendizaje mediante la solución de problemas. No obstante, algo de la matemática moderna aparecía en los nuevos currículos, la enseñanza de las estructuras desapareció pero seguían los contenidos de lógica y teoría de conjuntos, los cuales se daban por lo general al principio de los cursos como un conocimiento de tipo cultural porque realmente no estaban acoplados a los demás temas; si acaso, se mencionaban conjuntos de puntos o conjuntos numéricos, pero lo poco de lógica que se incluía conducía únicamente a definir las operaciones entre conjuntos y nada más.

Corroborando lo dicho, una exploración de los programas[185] del bachillerato utilizados para la enseñanza de la matemática entre mediados de los ochenta y finales de los noventa mostró lo siguiente: En sexto grado la primera unidad comprendía los temas razonamiento y conjuntos, proposiciones y sus negaciones, proposiciones abiertas y cerradas, cuantificadores, conjuntos, notación y representación, disyunción y unión entre conjuntos, conjunción e intersección de conjuntos, diferencia y diferencia simétrica; en séptimo grado la primera unidad estudiaba lógica y conjuntos, las proposiciones, de los conjuntos a la intersección, disyunción y unión, complemento y negación, diferencia de conjuntos, diferencia simétrica y cuantificadores; en octavo grado la unidad ocho incluía lógica y conjuntos, lógica proposicional, tablas de verdad para las proposiciones compuestas, método directo de demostración, método indirecto de demostración; en el noveno grado se retoman nuevamente las tablas de verdad y los métodos de demostración ; en los grados diez y once no hay contenidos de lógica ni conjuntos.

A mediados de los noventa, la Ley 115 de 1994 reorganiza la educación en Colombia y con ella se da prioridad a la enseñanza de la matemática a partir de los Lineamientos Curriculares de 1998. Según los Lineamientos del MEN (1998), para la enseñanza de la

[185] La exploración se realizó tomando los contenidos se tomaron de la serie *MATEMÁTICA MENTE* de la Editorial Voluntad.

matemática en la educación básica y media, los conocimientos matemáticos se organizan en los siguientes pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistema de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Parcelada la matemática de acuerdo con estos pensamientos y en relación con los propósitos de este trabajo surge el interrogante, ¿En qué pensamiento quedan la lógica y la teoría de conjuntos? Tratando de encontrar una respuesta, se revisaron los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas con la esperanza de encontrar algo en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, pero nada aparece; no obstante, en los Estándares se habla de describir, comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos, términos que son del dominio de la lógica.

Continuando con la búsqueda de la lógica y los conjuntos en los lineamientos curriculares, se encuentra que cada pensamiento tiene un carácter transistémico y dentro de este se tiene el razonamiento como un proceso de tipo general. Al hablar de razonamiento implícitamente se habla de lógica como elemento formalizador del razonamiento, por tanto los programas curriculares de la primaria incluyen las nociones elementales sobre conjuntos, y los programas de bachillerato en el grado sexto, séptimo, octavo y noveno incluyen nociones de lógica y conjuntos estudiándose inclusive los métodos de demostración (Ver anexo B).

Un análisis detallado de los textos y el programa como tal permiten afirmar que no existe una secuencia progresiva en los contenidos de lógica y conjuntos, la inclusión de la lógica no logra que el estudiante razone mejor, los métodos de demostración no se usan porque la geometría no abarca aspectos de mostrativos y los conceptos sobre la teoría de conjuntos no se transfieren a otros temas dentro de los mismos programas. Evidentemente, los contenidos de lógica y conjuntos se presentan desconectados de la temática en donde están insertados.

6. LOGICA Y CONJUNTOS EN EL CURRICULO UNIVERSITARIO DEL CARIBE COLOMBIANO

La inclusión de la lógica y la teoría de conjuntos[186] en el currículo de las universidades del Caribe Colombiano es un hecho relativamente reciente. Se sabe que en el Caribe Colombiano, tal como aconteció en resto de Colombia y otros países de América Latina, el desarrollo de la matemática universitaria se dio primero en los programas de ingeniería y después en los programas de Licenciatura en Matemática y Matemática Pura. También es de conocimiento que en América Latina los estudios sobre teoría de conjuntos se dieron primero en Argentina; en Colombia, la lógica matemática y la teoría de conjuntos llegaron un poco tarde, siendo la Universidad Nacional de Bogotá la pionera en este aspecto. En lo que atañe al Caribe Colombiano, la presentación de la lógica matemática y la teoría de conjuntos se mostró en diferentes escenarios universitarios del Caribe; por lo tanto, se consideran aquí por razones prácticas el Cesar como parte del antiguo Departamento del Magdalena y los que conformaron el antiguo Estado Soberano de Bolívar, sin menoscabo de los programas universitarios de la Universidad del Magdalena iniciados en 1962 en donde se ha dado desde los años setenta un programa de Licenciatura en Matemáticas, y la Universidad de La Guajira que inició labores en 1977 con tres programas, entre ellos uno de Licenciatura en Matemáticas que duró solamente un semestre.

6.1 LAS LICENCIATURAS EN MATEMÁTICA

El inicio de la década de los sesenta fue importante para la educación colombiana porque hubo un notable aumento de las Facultades de Educación y en ellas se dieron

[186] Aparte de lo estrictamente ortográfico se usará Lógica y Lógica y Teoría de conjuntos con mayúscula para indicar la relación de los términos con los objetivos del trabajo.

programas de Licenciatura en Matemáticas. Hasta 1961 en Colombia se contaba con las licenciaturas en matemática de la Universidad Pedagógica de Tunja, la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad de Antioquia, las cuales por su cobertura, eran insuficientes para la formación de los profesores de bachillerato en el área de matemática. Para superar el déficit de profesores de bachillerato, el Gobierno Colombiano incrementó la apertura de programas de Licenciatura en Matemática, apertura que estuvo motivada por tres elementos o causas: el primero fue obviamente el déficit de profesores capacitados para la enseñanza en el bachillerato; el segundo, las nuevas reformas educativas dadas por los Decretos 045 de 1962 y 1710 de 1963, al incluir la enseñanza del análisis matemático; y el tercero, la primera CIAEM en 1961 que mostró la falta de preparación de los profesores de enseñanza media para implantar las reformas educativas en el currículo de matemática. En el Caribe Colombiano, la Universidad del Atlántico toma la iniciativa en esta dirección creando la Facultad de Educación y luego la Licenciatura en Matemática.

6.1.1 La Universidad del Atlántico

La Facultad de Educación de la Universidad del Atlántico fue creada mediante la Ordenanza 47 de noviembre 29 de 1963, como resultado de la incorporación de la Universidad Pedagógica del Caribe a dicha Universidad como Facultad de Educación. El acuerdo Nº 1 del Consejo Superior de la Universidad del Atlántico de enero 10 de 1964 en su Artículo 2º establece los programas de Filosofía e Idiomas, Ciencias Sociales y Económicas, Ciencias Biológicas y Químicas y Matemáticas y Física como integrantes de la Facultad de Educación; además anexa a la Facultad la sección del bachillerato en las ramas de Filosofía y Letras, Comercial y Normalista, y la Sección de Difusión y Capacitación en Idiomas.

La Licenciatura en Matemáticas y Física inició labores en febrero de 1964, con un plan de estudios provisional por semestres que fue legalizado posteriormente según el

Acuerdo Nº 7 del Consejo Directivo de la Universidad del Atlántico con fecha febrero 12 de 1965. El plan[187] comprendía las siguientes asignaturas distribuidas por semestres:

Semestre I

Álgebra (con elementos de trigonometría y geometría analítica), lógica matemática, geometría euclídea, geometría descriptiva, pedagogía, psicología general y evolutiva, español y redacción de informes, idioma extranjero (inglés o alemán), cultura religiosa y humanidades.

Semestre II

Álgebra (con elementos de trigonometría y geometría analítica), conjuntos, geometría euclídea, geometría descriptiva, pedagogía, psicología general y evolutiva, Epañol y redacción de informes, idioma extranjero (inglés o alemán), cultura religiosa y humanidades.

Semestres III y IV

Cálculo y geometría analítica, álgebra abstracta (lineal, con espacios vectoriales, matrices y tensores), geometría afín y proyectiva, física general, metodología, idioma extranjero (inglés o alemán) y seminarios.

Semestres V y VI

Ecuaciones diferenciales, topología, geometría diferencial, laboratorio de física, física (mecánica racional, óptica física, termodinámica, fisión nuclear, etc.), observación y práctica docente, filosofía, química general y seminarios.

Semestres VII y VIII

Teoría de ecuaciones, laboratorio de física, física (mecánica racional, óptica física, termodinámica, fisión nuclear, etc.), práctica docente, filosofía, español y redacción de informes y seminarios.

[187]Universidad del Atlántico. Facultad de Ciencias de la Educación. Programa de Matemáticas y Física. (1984). Documentación Académica-Administrativa. Anexos.

Realmente la carrera estaba anualizada excepto en el primer año en donde se daba lógica en el primer semestre y conjuntos en el segundo, iniciándose aquí la enseñanza de la matemática moderna en el Caribe Colombiano. Este plan anualizado se ejecutó hasta la cohorte de 1970, y con la cohorte de 1971 se estableció un nuevo plan por semestres. Respecto a la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos durante la vigencia del primer plan de estudios el profesor Oswaldo Dede, asevera:

> *Ingresé a la Universidad en 1966 en la Licenciatura en Matemáticas y Física. Lo que se estudió en primer semestre en esa época yo recuerdo que fue el libro de Spitbartz en inglés, ese libro lo estudiamos durante un año porque la licenciatura no era por semestres sino por años. La licenciatura empezó en 1964 y el curso de fundamentos comprendía álgebra y trigonometría. Había lógica matemática y teoría de conjuntos, pero en el pensum inicial no estaban en el primer semestre sino en semestres más avanzados. En el primer año vi álgebra y trigonometría y geometría, dividían las materias en dos semestres pero la calificación era anual, el álgebra y la trigonometría fue todo el primer año y después se vio el cálculo. En el tercer semestre vi teoría de conjuntos con el profesor Luis Ortega, enfocaba el tema por el libro de Bourbaki como categorías. En lógica estudié el libro Introducción a la Lógica Simbólica de Patrick Suppes. Me gradué en 1971 y no se hablaba de fundamentos sino de álgebra y trigonometría; luego fueron cambiando de acuerdo con otros libros que salieron, como Álgebra y Trigonometría de Vance y Matemáticas Básicas de Taylor y Wade, el cual se utilizó mucho en los programas de licenciatura porque tiene una estructura constructiva sobre los números reales, fue otra época con unos nuevos planes de estudio.*[188]

[188] O, Dede Mejía (Comunicación personal, octubre 24 de 2008)

El Acuerdo número 3 de febrero 12 de 1971 del Consejo Directivo de la Universidad, establece un nuevo plan de estudios para todas las licenciaturas de la Facultad de Educación, incluyéndose en el primer semestre de filología e idiomas un curso de matemática cuyo contenido era lógica informal elemental. El propósito de esta materia era la formalización del lenguaje para evitar el razonamiento falaz, pero el curso estaba aislado, ya que no era requisito de ninguno otro y quedaba perdido en la estructura curricular sin lograr conectarse ni siquiera a los cursos de español dedicados a la composición escrita y oral. Para 1974 se cambia el curso de lógica matemática por el de historia de la cultura. Este mismo curso se incluye en la Licenciatura de Ciencias Sociales y Económicas apareciendo luego como requisito del curso Estadística Social, ocupando la lógica solamente una unidad del curso; en la Licenciatura en Biología y Química también aparece el curso de matemática I sirviendo de requisito a otros tres cursos de matemática, pero aquí la lógica también ocupaba solamente una parte, ya que el resto de la temática se dedica a matemática clásica.

El acuerdo señalado anteriormente semestraliza el Programa de Matemática y Física, creando un núcleo común hasta el cuarto semestre, y luego a partir del quinto semestre instituye una profundización en cada área, continuando los cursos de cálculo y ecuaciones diferenciales comunes a ambas áreas. En el primer y segundo semestre se continúa con el curso de álgebra y trigonometría, en el tercero y cuarto semestres aparecen los cursos de teoría de conjuntos y lógica I y II, enfocados según el texto de conjuntos de Bourbaki. La presentación de la lógica y los conjuntos en una sola materia resultó inadecuada porque el texto de Bourbaki supone que el estudiante en el bachillerato estudió matemática moderna, y tal como se constató en el capítulo anterior, el bachillerato colombiano introdujo la matemática moderna en la Región Caribe a partir de 1976.

A finales de 1973, el Acuerdo del Consejo Directivo del 14 de noviembre elimina el curso de dibujo del primer semestre, e introduce un curso de geometría euclidiana que continúa en el segundo semestre como geometría euclidiana II. Es pertinente preguntarse ¿Qué papel desempeñó la lógica en el tercer semestre? Si el propósito de la lógica es fundamentar la demostración en matemática, y siendo la geometría una especie de réplica del método axiomático, su propósito llegó tardíamente, la lógica ubicada allí se convirtió simplemente en un requisito para introducir los conjuntos y estos a su vez para introducir el álgebra abstracta.

La problemática suscitada por la integración de la lógica y la teoría de conjuntos en un solo curso llevó a la reforma del plan de estudios de 1975 según el Acuerdo 026 de septiembre 22 del Consejo Directivo de la Universidad. Según este Acuerdo, los cursos que integraban lógica y conjuntos se reestructuran en un curso de lógica y otro de teoría de conjuntos en los semestres tercero y cuarto respectivamente. En el primer semestre el curso de matemática I pasa a denominarse álgebra y trigonometría como requisito del curso de cálculo que pasa al segundo semestre, y la geometría continúa en los dos primeros semestres. El curso de lógica se estudiaba con los textos de *Introducción a la Lógica Simbólica* e *Introducción a la lógica Matemática* de Patrick Suppes; en teoría de conjuntos se usó el texto *Teoría Axiomática de Conjuntos* de Suppes, el texto de la *Colección Schaumm* y *Teoría intuitiva de Conjuntos* de Halmos. Esta reforma avanzó en el sentido de organizar un contenido entreverado en los cursos de lógica y conjuntos, pero las temáticas continuaban desubicadas sin cumplir realmente su cometido.

El plan de estudios de 1975 continuó hasta 1982 estableciéndose en la práctica dos licenciaturas: una en Matemática y otra en Física. En 1982 ocurrieron dos sucesos que cambiaron nuevamente la orientación del Programa de Licenciatura en Matemática y Física. En primer lugar, la Licenciatura en el área de Física se estaba extinguiendo por falta de alumnos; y en segundo lugar, la Licenciatura apuntaba más a un programa en ciencias que a uno de tipo pedagógico. Respecto a esto el Profesor Oswaldo Dede testifica

> *…el ICFES tenía en la mira cerrar las Facultades de Educación, luego al acabar con las facultades de educación se acababan las licenciaturas. Al programa de Licenciatura en Matemática y Física le quitaron la licencia porque argüían que no era un programa de*

> *licenciatura sino un programa en matemática pura, entonces ante esas nuevas cuestiones hubo que dar un barniz a ese programa. A mí me tocó como coordinador cuando entré, estaba recién llegado de la maestría, eso fue en 1982, con el agravante de que el área de Física no tenía estudiantes y no había más gente para Física, los últimos que se graduaron fueron dos estudiantes. Se decidió entonces fusionar las dos áreas para no acabar con la carrera, se hizo un plan que llamamos de emergencia fusionando Matemática y Física; en esa fusión se perdieron algunas asignaturas; sin embargo, las asignaturas de abajo quedaron iguales con los cuatro semestres.*[189]

La reforma de 1982 ajusta los cuatro últimos semestres y deja igual los primeros cuatro, por lo tanto la situación de la lógica y la teoría de conjuntos permanece sin alteración. En 1985 se recompone el plan de estudios ajustando los contenidos al sistema de Ulas[190] según la reglamentación del MEN. En la asignatura de Álgebra y Trigonometría,[191] tratando de subsanar la deficiencia en lógica y conjuntos se introducen al principio dos unidades llamadas *Conceptos básicos* y *Sistemas numéricos* con los siguientes contenidos:

UNIDAD I CONCEPTOS BÁSICOS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Concluida la unidad los alumnos estarán en condiciones de:

- Demostrar tautologías de proposiciones compuestas, usando las tablas de verdad.

---

[189] O, Dede Mejía (Comunicación personal, octubre 24 de 2008)

[190] ULA significa Unidad de Labor Académica y es una medida del trabajo académico del estudiante implantada en el artículo 40 del decreto 080 de 1980 como sigue: "Los programas de las diversas modalidades educativas del sistema de Educación Superior se organizan con base en unidades de labor académica (ULA), cuya definición tendrá en cuenta un valor para la actividad teórica y otro para la práctica." La ULA fue reglamentada mediante el decreto 3191 de diciembre 1 de 1980.

[191] Universidad del Atlántico. Vicerrectoría Académica. Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física. (1987, Octubre). Contenidos curriculares de los campos de formación científico y metodológico y humanístico y social. Barranquilla: Oswaldo Dede e Isidro Ávila

- Relacionar las equivalencias de operaciones entre conjuntos (unión, intersección, diferencia y complemento) con el uso de los conectivos lógicos, atendiendo a sus respectivas definiciones.

TEMAS:

Conectivos lógicos. Tautologías, tablas de verdad. Conjuntos y elementos de un conjunto. Conjuntos especiales (vacío, unitario, universal). Símbolos. Subconjuntos. Operaciones entre conjuntos. Parejas ordenadas y producto cartesiano. Relaciones.

UNIDAD II SISTEMAS NUMÉRICOS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Cuando termine la unidad los alumnos podrán:

- Identificar los sistemas numéricos, según las propiedades respectivas.
- Distinguir en los sistemas numéricos las leyes que hacen de la estructura un campo ordenado.

TEMAS:

Relación de equivalencia. Operaciones binarias. Sistemas numéricos. Conjunto de fracciones. Conjunto de números racionales. Sistema de números racionales como campo. Relaciones de orden. Sistema de números racionales como un campo ordenado.

Con esta reforma se intentó resolver en la primera unidad el problema de la inexistencia de conocimientos sobre lógica que permitieran sustentar las demostraciones en geometría y luego en cálculo I o cálculo diferencial, pero esto no se logró porque en esta unidad no se estudia la inferencia lógica; así que, nuevamente los temas de lógica estudiados no conducen a entender las demostraciones, quedando como elementos teóricos para definir las operaciones entre conjuntos estudiadas allí mismo. Los temas de la segunda unidad se incluyeron para dar la definición de operaciones binarias en el conjunto de los números reales y el estudiar las funciones polinómica, exponencial, logarítmica y trigonométricas. Los contenidos de estas unidades y los demás temas del curso corresponden al texto de Álgebra y Trigonometría de Keedy y Bittinger,[192] cuya

[192] En los años setenta y principios de los ochenta aparecen varios textos universitarios para un primer curso de matemática que tratan de combinar la matemática moderna con la clásica. De estos textos los

edición en castellano aparece en 1981, texto que trata de establecer un puente entre la matemática moderna y la matemática clásica.

El curso de lógica no fue afectado en su estructura con la reforma de 1985. Los contenidos seguían siendo los mismos pero con diferente orientación, se pasó de la concepción un poco formal a una concepción informal. El Programa de lógica era básicamente el contenido del texto *Introducción a la Lógica Simbólica* de Patrick Suppes complementado con el texto *Introducción a la Lógica Matemática* del mismo autor. Este contenido trataba el cálculo proposicional y de predicados, la teoría general de la inferencia y la axiomatización de la lógica; es decir, lógica informal o teoría de la argumentación; por lo tanto, puede decirse que, no se enseñó lógica matemática sino lógica informal hablando en sentido estricto según María Manzano, hecho que se confirma en la descripción del curso dada en el programa donde se escribe: "Esta asignatura es teórica y pretende informar a los estudiantes sobre las técnicas de demostración en matemáticas y proporcionar las herramientas necesarias en el desarrollo deductivo"[193].

El curso de teoría de conjuntos se esbozó según el texto *Set Theory* de Charles Pinter presentando el siguiente objetivo general:
El programa de teoría de conjuntos propone que el estudiante:

- Adquiera conocimientos de los conceptos básicos, principios y resultados fundamentales de la teoría de conjuntos y las aplicaciones de éstos a las demás ramas de las matemáticas.
- Se familiarice con las propiedades de las operaciones entre conjuntos, los diferentes tipos de relaciones, funciones, etc.

más usados en el Caribe Colombiano fueron el de Keedy y Bittinger, el Álgebra y Trigonometría de Vance, el Álgebra y Trigonometría de Spitzbart y las Matemáticas Básicas de Taylor y Wade.

[193] Universidad del Atlántico. Vicerrectoría Académica. Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física. (1987, Octubre). Contenidos curriculares de los campos de formación científico y metodológico y humanístico y social. Barranquilla: Oswaldo Dede e Isidro Ávila

- Desarrollar habilidad y destreza para utilizar correctamente los principios básicos fundamentales de la teoría de conjuntos para resolver problemas en otras áreas de la matemática.[194]

De acuerdo con los objetivos de la lógica, su propósito fue el de servir como herramienta en el estudio de los conjuntos y estos a su vez poder ser utilizados como herramienta teórica en otras asignaturas de la carrera como álgebra abstracta, análisis y topología principalmente. El papel de la lógica y la teoría de conjuntos como fundamentos de la matemática pasaba inadvertido para el futuro profesor de matemática; entonces, para una persona cuya labor era enseñar matemática, desde lo epistemológico se ignoraban las bases de su disciplina con la creencia de que la matemática estaba formada por temáticas relacionadas entre sí, pero cada una con su propia fundamentación, coincidiendo esta apreciación con la concepción pragmática de los fundamentos de la matemática. No obstante, en la descripción del programa de teoría de conjuntos se dice que

> *La teoría de conjuntos se encuentra en los fundamentos de la matemática, que explícita e implícitamente, en todas sus ramas utiliza conceptos de la citada teoría, tales como los de función y relación. Lo que aquí se desarrolla es un curso riguroso axiomático de la teoría de conjuntos, un estudio detallado de los conceptos de relación y función; trata también los conjuntos parcialmente ordenados, el axioma de elección y sus equivalentes y la teoría de los números cardinales y ordinales*[195]

Lo escrito en la descripción era meramente formal y contradictorio ya que ni en los objetivos ni en el contenido se señala la construcción axiomática de la teoría de conjuntos; además, el texto de Pinter presenta un enfoque intuitivo de dicha teoría a

[194] Universidad del Atlántico. Vicerrectoría Académica. Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física. (1987, Octubre). Contenidos curriculares de los campos de formación científico y metodológico y humanístico y social. Barranquilla: Oswaldo Dede e Isidro Ávila.
[195] Ibíd.

partir del concepto de clase, concepto que sí figura en el contenido del programa. Finalmente se señala que la lógica y la teoría de conjuntos se enseñaron con diferentes enfoques, primero fue un enfoque informal, luego se orientó según la Corriente Bourbakista y de nuevo pasó a lo informal; pero siempre se trató rigurosamente.

6.1.2 La Universidad de Córdoba

El segundo programa de Licenciatura en Matemáticas y Física en el Caribe Colombiano comenzó en el segundo semestre de 1972 en la Universidad de Córdoba, institución creada mediante la Ordenanza número 6 de 1962, la cual inició labores académicas el 6 de abril de 1964 con las Facultades de Ingeniería Agronómica y Medicina Veterinaria y Zootecnia. Los programas de Licenciatura en Ciencias Sociales y Matemáticas y Física nacen dentro de la Facultad de Educación creada en febrero de 1972, inicialmente con el programa de Licenciatura en Biología y Química.

El propósito de los programas de licenciatura fue formar profesores para la enseñanza de la matemática, la física, las ciencias sociales, la química y la biología en el bachillerato, con el objeto de suplir el déficit de profesores en la Región del Sinú y Sabanas, ya que el único programa de la Región Caribe encargado de formar profesores estaba en la Universidad del Atlántico, teniéndose para esa época un número significativo de egresados del bachillerato y de las escuelas normales de la región que no podían desplazarse hasta Barranquilla para realizar estudios de licenciatura.

La Licenciatura en Matemáticas y Física inició en jornada nocturna, de allí que el plan de estudios se distribuyera en diez semestres. A lo largo de su vida académica, la Licenciatura en Matemáticas y Física presentó dos reformas del pensum, reformas que estuvieron ligadas a los fundamentos de la matemática. En los inicios del Programa el pensum fue el siguiente:

Primer semestre: Fundamentos de matemática I, teoría del conocimiento, metodología de la investigación I, ciencias humanas I, lógica matemática y teoría de conjuntos I.

Segundo semestre: Fundamentos de matemáticas II, cálculo I, metodología de la investigación II y ciencias humanas II.

Tercer semestre: Teoría de conjuntos II, cálculo II, geometría euclidiana y filosofía e historia de la educación.

Cuarto semestre: Álgebra lineal, sociología general y cálculo III.

Quinto semestre: Cálculo IV, física I, psicología evolutiva y física práctica I.

Sexto semestre: Álgebra moderna, física II, elementos de estadística, psicología del aprendizaje y laboratorio de física II.

Séptimo semestre: Ecuaciones diferenciales, física III y principios generales de Pedagogía y Didáctica (P.G.P.D).

Octavo semestre: Análisis matemático I, estadística matemática, matemática aplicada y teoría y Práctica educativa (T.P.E).

Noveno semestre: Análisis matemático II, física moderna, sociología educativa y práctica docente I.

Décimo Semestre: Topología, administración y supervisión educativa y práctica docente II.

En los inicios de la Licenciatura el profesor de lógica matemática venía de Medellín porque no había profesor para dicha materia en la universidad.[196] En la enseñanza de la lógica se empleaban notas de clase del profesor y el texto *Introducción a la Lógica Matemática* de Suppes y Hill, el contenido correspondía a un curso de lógica informal incluyendo cálculo proposicional y cálculo de predicados. El curso fundamentos de matemáticas I correspondía a álgebra y trigonometría, luego en el segundo curso de fundamentos se daba álgebra vectorial y superficies en $\mathbf{R}^3$. El curso de teoría de conjuntos correspondía a un curso de teoría intuitiva de conjuntos, incluyendo operaciones con conjuntos, relaciones, funciones, conjuntos infinitos, cardinalidad y el axioma de elección. Inicialmente en este curso se usaron los textos de la Colección Schaumm, el de Álvaro Pinzón y el de Pinter.

En 1976 se da la única reforma en el pensum de la Licenciatura, la cual elimina el curso de lógica matemática del primer semestre, pasándose parte de su contenido al curso fundamentos de matemáticas I, y el curso teoría de conjuntos II se convierte en teoría de

[196] A, Plaza (Comunicación personal, marzo 20 de 2009)

conjuntos, ubicándose en el tercer semestre como en el pensum inicial. En el segundo semestre continuaba el curso fundamentos de matemáticas II sin variación. Con esta nueva reforma el contenido de lógica se presenta en forma resumida en la primera unidad de fundamentos de matemáticas I, asignatura en la que se plantean los siguientes objetivos:[197]

- Adquirir elementos sólidos sobre el cálculo proposicional y álgebra de conjuntos.
- Analizar e interpretar conceptos básicos sobre relaciones y funciones.
- Estudiar en detalle el conjunto de los números reales como conjunto ordenado arquimediano.
- Estudiar el conjunto de polinomios con coeficientes reales y sus aplicaciones.

El primer objetivo del programa fundamentos de matemáticas I correspondía a las unidades de lógica (proposiciones, tablas de verdad, fórmulas bien formadas, tautologías, reglas de inferencia, consistencia e inconsistencia de premisas, argumentos válidos, cuantificadores, nociones del cálculo de predicados, deducciones en el cálculo de predicados y regla de manejo de cuantificadores), y conjuntos (determinación por extensión y comprensión, operaciones entre conjuntos, número de elementos de un conjunto y colecciones de conjuntos). El segundo objetivo se lograba con las unidades de números reales (axiomas de campo, axiomas de orden, axioma de completitud, conjuntos inductivos, números naturales, números enteros, números racionales, propiedad arquimediana, densidad de los reales, valor absoluto, desigualdades, números combinatorios, notación sumatoria, factoriales y polinomio de Newton), y la unidad de relaciones y funciones (relaciones de orden, ordenación de los naturales, minimales y maximales, relaciones de equivalencia, clases de equivalencia, conjunto cociente, funciones, tipos de funciones, imagen directa e inversa, composición de funciones, función inversa, extinción y restricción de funciones). El tercer objetivo corresponde a la unidad de ecuaciones que comienza con los números complejos y continúa con la

[197] Programa de Fundamentos de Matemáticas I. (s.f). Departamento de Matemáticas y Física. Facultad de Educación y Ciencias Humanas. Universidad de Córdoba.

teoría de polinomios incluyendo el teorema fundamental del álgebra, raíces de la ecuación polinómica, fracciones algebraicas, descomposición en fracciones parciales, exponentes fraccionaros y ecuaciones con radicales.

El curso de teoría de conjuntos continuaba con el enfoque intuitivo teniendo como justificación "permitir al estudiante entender los conceptos avanzados del análisis y la topología."[198] El programa[199] para este curso dividía el contenido en cuatro unidades: Fundamentación de la teoría de conjuntos (paradojas y lenguajes de primer orden); números naturales (axioma del infinito, axiomas de Peano, orden, inducción matemática y operaciones con los números naturales); conjuntos infinitos y cardinales (conjuntos infinitos en el sentido usual y en el de Dedekind, Teorema de Scröder-Berstein, Teorema de Cantor, conjuntos contables, números cardinales, aritmética cardinal) y Axioma de Elección (Lema de Zorn, Teorema del Buen Orden, inducción transfinita y números ordinales).

En 1978 egresan los primeros licenciados en matemática, algunos de ellos ocupan las cátedras de matemática en la misma universidad ante la falta de docentes en el área, ya que los primeros profesores de la licenciatura eran algunos ingenieros que a su vez impartían la matemática en los Programas de Agronomía y Veterinaria, y otros egresados de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico. En particular, la cátedra de fundamentos y teoría de conjuntos fue ocupada por el egresado Lázaro Gastelbondo quien utilizó el texto *Teoría de Conjuntos* de Rafael Mariño Sarmiento, primer texto sobre la materia publicado en la Universidad Nacional sede Bogotá; posteriormente se utilizó el texto *Introducción a la Teoría de Conjuntos* de José Muñoz Quevedo, publicado también en la Universidad Nacional de Bogotá, texto en el cual se basa el último programa para el curso.

[198] Programa de Teoría de Conjuntos. (s.f). Departamento de Matemáticas y Física. Facultad de Educación y Ciencias Humanas. Universidad de Córdoba.

[199] Ibíd.

La información presentada sobre los contenidos de lógica y teoría de conjuntos muestra que si bien los cursos tenían el nombre de *Fundamentos de la Matemática*, durante la existencia del programa estos no contribuyeron a fundamentar la matemática como tal, su papel fue más bien el de servir de herramienta para otros cursos avanzados. Nuevamente, como ocurrió en la Licenciatura de la Universidad del Atlántico los cursos obedecieron a los fundamentos como caja de herramientas, como dispensario de recursos para utilizar posteriormente. La enseñanza de la lógica se hizo desde lo informal, los contenidos no fueron más allá del cálculo de predicados, por lo tanto puede afirmarse que no se dio la lógica matemática en sentido estricto sino lógica simbólica orientada al razonamiento intuitivo y al manejo de operaciones entre conjuntos. Adicionalmente, el contenido de los programas no se daba tal como se estipulaba en los documentos oficiales, sino que este era adaptado según el texto a seguir, trayendo como consecuencia una alteración de los objetivos propuestos.

La vida de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Córdoba transcurrió en cuatro etapas: iniciación, expansión, equilibrio y decadencia. La etapa de iniciación abarca los años desde su creación hasta 1975, etapa en la cual el programa se consolida adquiriendo reconocimiento a nivel regional y nacional.

La etapa de expansión se da entre el segundo semestre de 1975 y 1980, al implementarse en Sincelejo, mediante convenio con las entidades departamentales, los Programas de Licenciatura a cinco años de carácter nocturno, en las áreas de Matemática y Física y Ciencias Sociales, atendiendo a lo dispuesto en el Congreso de Profesores de Educación Media realizado en Fusagasugá en 1971, donde los maestros solicitaron al Gobierno Nacional extensión de los programas de educación a través de un Plan Extramuros a nivel nacional para capacitar técnica y cientificamente los profesores de educación primaria y media.

En el primer semestre de 1976 el Plan Extramuros de la Universidad Nacional de Córdoba tenía matriculados en su sede de Sincelejo un total de 286 estudiantes de los cuales más del 90% eran docentes en ejercicio.[200] Este plan desarrolló el mismo pensum de los programas de Montería, pero para la enseñanza de algunos cursos se recurrió a profesores licenciados en matemática de los colegios de bachillerato de Sincelejo.

La etapa de equilíbrio se da entre 1980 y 1984, años en los cuales el programa consigue su madurez, allí se robustece la enseñanza con una planta docente estable. La etapa de decadencia comienza en 1984 al crearse la Facultad de Ciencias, mediante Acuerdo 014 del 23 de julio del Consejo Superior de la Universidad. En 1998 la Facultad de Ciencias se convierte en Facultad de Ciencias e Ingenierías y la de Educación en Facultad de Educación y Ciencias Humanas. Desde 1984 comienzan las vicisitudes para la Licenciatura en Matemáticas y Física porque los profesores de la Licenciatura pasan a ser parte da la nueva Facultad, hecho que se agravó a partir de 1994 con la aparición de otros programas de licenciatura y ciencias como el Programa de Licenciatura en Informática Educativa y Medios Audiovisuales y los programas de Matemáticas, Física, Biología y Estadística. La licenciatura en Matemáticas y Física se fue desvaneciendo hasta extinguirse sin que se diera un parte oficial de su expiración.

Dos fueron las causas por las cuales desapareció la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Córdoba. En primer lugar, cuando los profesores de matemática y física pasan a la Facultad de Ciencias estos orientan sus energías a la creación de programas para la nueva facultad, la Licenciatura queda sin dolientes[201] en la Facultad de Educación, sin que nadie se preocupara por ello hasta llegar al vencimiento del registro calificado; en segundo lugar, las directivas de la Facultad de Educación encaminaron sus esfuerzos a la creación de nuevos programas y descuidaron las licenciaturas fundadoras de la Facultad.

6.1.3 La Universidad de Sucre

[200] Datos publicados en el Proyecto de Ley 094 de 2008 de la Cámara de Representantes, con el cual la nación se asocia a la celebración de los 30 años de actividades académicas de la Universidad de Sucre.
[201] Esta expresión es acuñada por el profesor Amaury Plaza quien fue profesor de la licenciatura y actualmente es profesor del Programa de Matemáticas en la Universidad de Córdoba

La presencia de la Universidad de Córdoba en Sincelejo dada por el Plan Extramuros, motivó a las autoridades del Departamento de Sucre para la creación de una universidad pública; creación que se hace efectiva con la Ordenanza 01 del 24 de noviembre de 1977. El 7 de diciembre de 1977 se nombra como rector al Doctor Víctor Albis González profesor de matemática de la Universidad Nacional de Colombia, y el 5 de agosto de 1978 se inician las labores académicas con los programas de Ingeniería Agrícola, Tecnología en Producción Agropecuaria, Tecnología en Enfermería y Licenciatura en Matemática.

La nueva universidad para lograr su misión plantea como objetivos:

1. Promover el desarrollo económico, social y cultural del departamento, como centro de investigación y análisis de su problemática.
2. Preparar profesionales, técnicos e investigadores que participen activamente en la planeación, ejecución, control, dirección y evaluación del desarrollo departamental.
3. Prestar su concurso técnico a los Centros de Educación Secundaria del departamento.
4. Actuar en forma sistematizada con los demás centros universitarios de la Nación, a fin de utilizar eficientemente los recursos docentes disponibles.
5. Fomentar y colaborar con aquellas acciones gubernamentales que propicien la incorporación efectiva de todas las regiones del Departamento al desarrollo regional.[202]

La Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre se convierte en la tercera dentro de las universidades públicas de la Región Caribe, inició labores con el siguiente plan de estúdios:

Primer semestre: Matemáticas generales, introducción al cálculo, filosofía de la educación, sociología educativa y técnicas de expresión oral y escrita.

[202]Proyecto de Ley 094 de 2008 de la Cámara de Representantes, con el cual la nación se asocia a la celebración de los 30 años de actividades académicas de la Universidad de Sucre.

Segundo semestre: Geometría analítica, cálculo I, geometría elemental, sicología general e inglés técnico I.

Tercer Semestre: Cálculo II, álgebra lineal, física I, pedagogía general, sicología educativa e inglés técnico II.

Cuarto semestre: Teoría de conjuntos, cálculo III, programación de computadores, laboratorio de física I, sicología del aprendizaje y metodología y técnicas de investigación I.

Quinto semestre: Ecuaciones diferenciales, estadística I, física II, didáctica general, medios audiovisuales y administración educativa.

Sexto semestre: Análisis matemático, álgebra moderna I, estadística II, laboratorio de física II, didáctica de las matemáticas y metodología y técnicas de investigación II.

Séptimo semestre: Electiva I, álgebra moderna II, electiva II, práctica docente I y ética.

Octavo semestre: Electiva III, seminario, taller de investigación y práctica docente II.

Los cursos electivos comprendían asignaturas como topología, física III, matemáticas aplicadas y métodos numéricos entre otras.[203]

El curso de matemáticas generales estaba distribuido en dos partes. La primera comprendía una primera unidad llamada *Introducción a la Lógica* estudiándose en ella proposiciones, tablas de verdad, tautologías, contradicciones, cuantificadores, reglas de inferencia y métodos de demostración; la segunda unidad trataba sobre números enteros, divisibilidad, teorema fundamental de la aritmética, números racionales, números irracionales, números reales y números complejos. La segunda parte correspondía al álgebra clásica, el contenido constaba de cuatro unidades en donde se estudiaba exponentes y radicales, polinomios, ecuaciones polinómicas, teoremas del residuo y el factor, teorema fundamental del álgebra, sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones y trigonometría.

[203] Las materias electivas variaban según lo consideraba el comité curricular, teniendo en cuenta los intereses de los estudiantes y la disponibilidad de los profesores.

La lógica estudiada en el curso de Matemáticas Generales era lo único que se estudiaba sobre este tema en la licenciatura, el contenido abarcaba el primer capítulo del texto de Allendoerfer y Oakley[204] ediciones segunda y tercera, cuyos conceptos estaban entremezclados con teoría de conjuntos; así por ejemplo, en un ítem aparecían la disyunción y la unión, luego la conjunción y la intersección, y en otro la negación y el complemento. Este hecho es puesto de manifiesto por los mismos autores en la cuarta edición cuando en la introducción afirman: "El capítulo I de la edición anterior, que contenía una mezcla de lógica y conjuntos, se separó en dos capítulos, uno de conjuntos y otro de lógica, en donde se aclaran muchos de los conceptos." [205]

Después del año 2000, la Universidad de Sucre cambia la Licenciatura en Matemáticas por otra llamada *Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas*, cuyo plan de estudios es bastante novedoso, dedicándose en gran parte al estudio de la aritmética y el álgebra como temáticas básicas de la llamada *Matemática Escolar*. El propósito de este cambio fue privilegiar la formación del docente para la enseñanza de la matemática en los niveles de educación básica y media.

6.1.4 Otras instituciones

En el segundo semestre de 1972 se funda en Cartagena la Corporación Autónoma de la Costa, entidad educativa de carácter privado con estudios de Licenciatura en Biología y Química, Idiomas, Ciencias sociales y Matemáticas y física. Este centro de estudios superiores cuyo propósito era preparar profesores para la enseñanza secundaria tuvo muy corta vida, se cerró en junio de 1974 debido a múltiples razones que aquí no se analizarán. Durante su efímera existencia se desarrollaron allí los primeros cursos de lógica, teoría de conjuntos y álgebra moderna impartidos en Cartagena, presentados en sus tres semestres de vida con el siguiente plan de estudios.

Primer semestre: Matemáticas generales, lógica, inglés, filosofía y español y redacción

[204] H, Pérez (Comunicación personal, septiembre 7 de 2009)

[205] Allendoefer, C y Oakley, C (1990). Fundamentos de Matemática Universitaria. (4ª ed.). Bogotá: McGraw Hill.

Segundo semestre: Cálculo diferencial, geometría analítica, teoría de conjuntos, geometría euclidiana y psicología general.

Tercer semestre: Cálculo integral, álgebra moderna, física i, psicología evolutiva y álgebra lineal.

La lógica enseñada en la Corporación Autónoma de la Costa era muy sencilla, se reducía al cálculo proposicional usando tablas de verdad, manejo de cuantificadores y algunos aspectos sobre la definición y la silogística. El profesor de la materia era un filósofo que había sido profesor de filosofía en el Seminario de San Benito Abad (Sucre), orientó la lógica hacia la silogística del siglo XIX y algunos aspectos relacionados con los juicios y la teoría de la definición al estilo de Elí de Gortari[206]; por tanto, puede decirse que este curso no fue ni siquiera una introducción a la lógica informal. El curso de teoría de conjuntos abarcó operaciones con conjuntos, relaciones y funciones, dándose aproximadamente el contenido de los dos primeros capítulos del texto *Teoría de Conjuntos* de Seymour Lipschutz de la Colección Schaumm. En el curso de álgebra moderna se utilizaron los textos *Álgebra Moderna* de Lentin y Rivaud, *Introduction to Modern Algebra* de Neal Henry McCoy y *Algebraic Structures* de Serge Lang. Fue un curso introductorio sobre grupos anillos y campos sin detalles profundos.

Sin lugar a dudas, la lógica matemática tuvo presencia mínima en la Corporación Autónoma, la teoría de conjuntos fue deficiente, ambas temáticas no contribuyeron realmente a la fundamentación de la matemática, y como caja de herramientas quedó incompleta; sin embargo, el curso de matemáticas generales utilizó el texto *Matemáticas Básicas* de Taylor y Wade, donde se hace una construcción axiomática de los números reales, lo cual no se había dado en la matemática enseñada en la Universidad de Cartagena hasta 1973. Obviamente, el cierre temprano de esta Institución no permitió vislumbrar el propósito de la Licenciatura, pero sí dejó ver que los contenidos de lógica y conjuntos estudiados contribuyeron muy poco a la formación matemática.

[206] Gortari, E (1965). *Lógica general* (26ª ed.). México: Grijalvo.

La Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Popular del Cesar inicia labores en el segundo semestre de 1977, luego que el Instituto Tecnológico del Cesar ITUCE creado en 1973 se convirtiera en universidad con la Ley 34 del 19 de noviembre de 1976. En el segundo semestre de 1997 inicia la Licenciatura en Matemáticas con énfasis en Informática, como una segunda alternativa. El pensum inicial de la Licenciatura, comprendía las siguientes asignaturas: Introducción a la matemática moderna, geometría euclidiana, algebra lineal, teoría de conjuntos, algebra moderna I, álgebra moderna II, teoría de números; introducción al cálculo, cálculo I, cálculo II, cálculo III, ecuaciones diferenciales, análisis matemático, topología, además de estadística. Según el profesor Álvaro Lozano, no se tiene la fecha de la primera reforma del pensum y no se pudo encontrar evidencias de la reforma, pero recuerda que el cambió consistió en reemplazar el curso de Introducción a la matemática moderna por los cursos de matemáticas fundamentales, lógica y conjuntos y geometría analítica; además quedó una sola algebra moderna y desaparecieron los cursos de teoría de números e introducción al cálculo. Sobre los textos utilizados el profesor Álvaro Solano expresa:

> *Los libros que se utilizaban para la asignatura Introducción a la matemática moderna eran Lipschutz, Seymour. Teoría de Conjuntos y temas Afines. Edit. McGraw-Hill; Muñoz Q, José Introducción a la teoría de conjuntos. Edit. U. Nacional de Colombia; Oubiña, Lia Introducción a la Teoría de Conjuntos; Suppes, Patrick Introducción a la Lógica matemática. Edit. Reverté, Taylor y Wade. Matemáticas básicas con vectores y matrices. En la asignatura Lógica y conjuntos se emplean además los siguientes: Electrónica Digital de Tau, Albert, Matemáticas para computación de Seymour Lipstchutz, Lógica Digital y Diseño de Computadores de Mano Morris Ediorial. Prentice Hall. En Matemáticas fundamentales se utilizan actualmente los que estaban en Introducción a la matemática moderna además de Algebra y Trigonometría de Sowkowski.*[207]

Referente a los contenidos de lógica y conjuntos el profesor Solano afirma:

[207] A, Solano. (Comunicación personal, octubre 13 de 2009)

> *En la Licenciatura de Matemáticas y Física de nuestra UPC inicialmente había una asignatura que se llamó Introducción a la Matemática moderna, la cual se modificó por allá por los años 1996. Sus contenidos eran más o menos los siguientes: lógica proposicional, inferencia lógica, breve introducción a los conjuntos, funciones y sistemas numéricos. Esta asignatura tenía una intensidad horaria de 5 horas semanales.*
>
> *Con la modificación aparecieron dos asignaturas: Lógica y conjuntos, y Matemáticas fundamentales con 3 y 5 créditos respectivamente (igual número de horas semanales).*
>
> *Los contenidos de Lógica y conjuntos son: lógica proposicional, inferencia lógica, introducción a los conjuntos, sistemas de numeración (decimal, binario, octal y hexadecimal) y álgebra de Boole.*
>
> *Los contenidos de Matemáticas fundamentales son: relaciones y funciones, funciones reales, sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, reales, complejos). En este último capítulo se ven polinomios, ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones, ecuaciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas.*[208]

La información anterior lleva a colegir que la enseñanza de la lógica en la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Popular del Cesar se llevó a cabo siguiendo la tendencia informal, predominante en la enseñanza universitaria de la lógica en el Caribe Colombiano y en Colombia, en las últimas cuatro décadas del siglo pasado. Los contenidos corresponden al cálculo proposicional, inferencia en el cálculo proposicional y cálculo de predicados, todo dentro de la lógica de primer orden bajo la influencia aristotélica. Respecto a la teoría de conjuntos, la enseñanza se realizó dentro de un marco intuitivo, la bibliografía utilizada no supone la presentación de la lógica y los

[208] A, Solano. (Comunicación personal, diciembre 16 de 2008)

conjuntos bajo la axiomática; no obstante, la axiomática se emplea en el desarrollo de otras teorías matemáticas en sentido no estricto.

Las dos licenciaturas, de acuerdo con la última reestructuración del plan de estudios, tienen las siguientes materias comunes en el área de matemática: Historia de las ciencias naturales, lógica y conjuntos, matemáticas fundamentales, teoría de conjuntos, álgebra moderna, algebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales, geometría euclidiana, geometría analítica, estadística descriptiva y probabilidades, estadística inferencial y muestreo, análisis matemático e historia y epistemología de la matemática. Adicionalmente comparten dos cursos de física, dos de informática y otros cursos sobre pedagogía y humanidades. La Licenciatura en Informática da también un curso de topología.

En 1988 la Universidad de Antioquia extiende los programas de Licenciaturas en Matemática, Biología y Español al Departamento de Sucre, creando un núcleo en Sincelejo. El plan de estudios era el mismo que se daba en Medellín, pero los estudios se hacían en la modalidad a distancia, con sesiones de orientación los fines de semana para cada asignatura. Antes de iniciar el primer semestre se dio un curso introductorio de lógica matemática para las tres especialidades orientado con el texto del profesor Hugo Guarín, *Introducción al Simbolismo Lógico*. Este texto determinaba exactamente el programa del curso comprendiendo los temas proposiciones, conectivas, tablas de verdad, equivalencia, contradicción y tautologías en la primera unidad; en la segunda se enseñó cálculo de predicados, simbolización de expresiones del lenguaje usando cuantificadores y equivalencias entre cuantificadores; y en la tercera, el razonamiento lógico basado en las reglas de inferencia, determinación de la validez de un razonamiento, métodos de demostración directo y reducción al absurdo y algunas falacias. Este programa de extensión tuvo solo una cohorte capacitándose en ella profesores de la región que no tenían el título de licenciado.

6.2 LOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA PURA

Los escenarios más recientes para la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos son los Programas de Matemática Pura, creados en el Caribe Colombiano en la última década del siglo pasado. Con la creación de estos programas la matemática dejó de ser una ciencia auxiliar especialmente para las ingenierías y las ciencias económicas, convirtiéndose en elemento esencial integrante de las facultades de ciencias, ya que son estas las que le dan a las instituciones de educación superior el carácter de Universidad.

6.2.1 La Universidad de Cartagena

El Programa de Matemáticas de la Universidad de Cartagena fue creado mediante el Acuerdo Nº 41 del 23 de noviembre de 1993 del Consejo Superior de la Universidad, con la Resolución 01 de enero 24 de 1994 se cita a exámenes de admisión para el 19 de febrero de 1994, ingresando 47 estudiantes que iniciaron clases el 8 de marzo del mismo año. Inicialmente, el Programa se creó con los siguientes objetivos:[209]

1. Formar investigadores en matemáticas capaces de apoyar la transformación científica y tecnológica del país.
2. Formar matemáticos en las áreas de estadística y sistemas, para que participen a nivel de producción en el sector industrial del país.

El título ofertado era el de Matemático con énfasis en análisis, estadística o sistemas, el que se conseguía con un plan de estudios mediante un ciclo de formación básica y otro de énfasis.

El ciclo de formación básica abarcaba los primeros seis semestres con asignaturas distribuidas de la siguiente manera:

Primer semestre: Humanidades I, metodología de la investigación, cálculo I y fundamentos de matemática.

Segundo semestre: Humanidades II, cálculo II, geometría vectorial y lógica matemática.

Tercer semestre: Cálculo III, teoría de números, teoría de conjuntos y álgebra lineal I.

[209] Documento inicial Programa de Matemáticas. Universidad de Cartagena, 1993. T.V., fols. 7-8.

Cuarto semestre: Cálculo de ecuaciones diferenciales, análisis I, álgebra lineal II y álgebra abstracta I.
Quinto semestre: Análisis II, topología I, álgebra abstracta II y variable compleja I.
Sexto semestre: Análisis III, topología II, teoría de la medida y variable compleja II.

El ciclo de énfasis comprendía los cuatro últimos semestres con materias específicas en cada área. En la línea de análisis los cursos versaban sobre análisis funcional, teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales y geometría diferencial; en la línea de estadística se tenían cursos sobre métodos estadísticos, optimización, muestreo, análisis de sobrevivencia y diseño de experimentos; en el área de sistemas los cursos incluían lógica de programación, estructura de datos, bases de datos y optimización.

En 1997 se modifica el plan de estudios debido a la imposibilidad de mantener los tres énfasis, ya que el programa no tenía un número suficiente de profesores para impartir las materias especializadas y el número de estudiantes era muy reducido debido a la alta mortalidad y deserción. Esta modificación cuya vigencia va hasta el año 2004, elimina los énfasis y propone un conjunto de materias electivas procurando una profundización en un área específica de la matemática, quedando el pensum de la siguiente manera:
Primer semestre: Fundamentos de matemática, matemáticas operativas, inglés técnico I y humanidades.
Segundo semestre: Cálculo I, geometría euclidiana, programación de computadores I, teoría del conocimiento e inglés técnico II.
Tercer semestre: Cálculo II, teoría de números, geometría vectorial, programación de computadores II y física I.
Cuarto semestre: Cálculo III, teoría de conjuntos, álgebra lineal I, estadística I y física II.
Quinto semestre: Cálculo IV, álgebra lineal II, estadística II, álgebra abstracta I y ética.
Sexto semestre: Análisis I, cálculo de ecuaciones diferenciales, álgebra abstracta II, análisis numérico e historia de la matemática.

Séptimo semestre: Análisis II, topología, ecuaciones diferenciales parciales, topología y electiva I.
Octavo semestre: Análisis III, teoría de la medida, electiva II y electiva III.
Noveno semestre: Análisis funcional, variable compleja, electiva IV y seminario de investigación.
Décimo semestre: Electiva V, Constitución Política y trabajo de grado.

Veamos como fue la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos en el lapso 1994-2000. Durante la vigencia del primer plan de estudios, el curso de fundamentos de matemática correspondió básicamente a álgebra y trigonometría orientado según el texto de Allendoerfer y Oakley (1982). Se pretendió dar algunas nociones primarias de lógica sobre proposiciones, argumentación y conjuntos tendientes a justificar las demostraciones del cálculo por una parte, y con el álgebra facilitar los procedimientos algebraicos a utilizar en la introducción del concepto de integral, ya que el curso de cálculo I comenzó con la integral siguiendo el texto de cálculo de Tom M Apóstol. De esta experiencia metodológica[210] surgieron dos inconvenientes. En primer lugar los conceptos iniciales del curso de fundamentos no lograron su objetivo porque el concepto de integral en Apóstol se basa en funciones escalonadas sobre las cuales no se tenía conocimiento claro por parte de los alumnos; en segundo lugar, los conceptos iniciales de lógica estaban entremezclados con los conjuntos sin precisarse hacia donde conducían, pues en el texto de Allendoerfer no se tiene una adecuada conexión entre este tema y la construcción de los números reales como tema siguiente. Terminado el primer año se optó por enseñar primero el cálculo diferencial y luego el cálculo integral.

El primer curso de lógica del programa fue dictado por el profesor Gilberto López Caraballo en el segundo semestre de 1994, quien utiliza el texto de *Lógica Simbólica* de Suppes, texto que presenta la lógica de manera informal dentro de la corriente de

[210] En el Cálculo de Apóstol, la presentación de la integral como primer tema corresponde a un hecho de tipo histórico. El Padre deTom M Apóstol era de nacionalidad griega y Tom quiso rendirle tributo a sus ancestros presentando primero la integral, ya que este concepto apareció en Grecia con Arquímedes antes del concepto de derivada de Newton y Leibniz. Metodológicamente, Euler sustentó la presentación del cálculo partiendo de la definición de límite y derivada.

Pensamiento Crítico; posteriormente, el curso de lógica cambia un poco su contenido orientándose además con los textos *Introducción a la Lógica Formal* de Alfredo Deaño y *Elementos de lógica y calculabilidad* de Xavier Caicedo haciéndose con este último una introducción a los lenguajes y la teoría de modelos. Este curso se dictó en 1995 y 1996 una vez por año, debido a que la admisión al programa en las primeras cohortes era anual. En el primer semestre de 1997se modifica el plan de estudios y la lógica desaparece como materia, quedando una parte de sus contenidos en el curso de fundamentos. El curso de teoría de conjuntos se dio la primera vez con el texto *Teoría axiomática de conjuntos* de Suppes y a partir de 1995 se utilizó el texto *Set theory* de Pinter, puesto que muy prontamente pudo observarse la dificultad de aprender una teoría amparada en la axiomática sin el lleno de los requisitos, ya que aunque la enseñanza de la matemática se hace de manera formal, lo axiomático no se maneja en sentido estricto.

La corta vida de la lógica como asignatura individual en el Programa de Matemáticas de la Universidad de Cartagena muestra que respecto a la concepción de los fundamentos de la matemática, algunos matemáticos no tienen claridad acerca de su objetivo y cómo puede esta teoría contribuir la lógica a la fundamentación de la matemática. La temática enseñada en lógica estaba dominada por el cálculo proposicional y de predicados, solamente con el propósito de servir como soporte a los métodos de demostración, pues la argumentación informal, la del pensamiento crítico, se proponía apuntar a la justificación de la operatoria de la demostración de teoremas.

Como se anunció anteriormente, el plan de contingencia de 1997 incluyó parte de la lógica en el curso de fundamentos ubicado en el primer semestre, quedando la lógica reducida al cálculo proposicional y de predicados y la teoría informal de la argumentación, amparada en los métodos de demostración directa e indirecta o reducción al absurdo. Así las cosas, la lógica quedaba desarticulada de la teoría matemática siguiente, el escaso contenido estaba encaminado a servir de soporte a la geometría euclidiana introducida en el segundo semestre como caja de herramientas y a la teoría de conjuntos que pasaba al cuarto semestre.

La distribución de las materias en la modificación de 1997 quedó como sigue: Fundamentos, matemáticas operativas, inglés técnico I y humanidades en el primer semestre; cálculo I, geometría euclidiana, programación de computadores I, inglés técnico II y teoría del conocimiento en el segundo semestre; cálculo II, teoría de números, geometría vectorial, programación de computadores II y física I en el tercer semestre; cálculo III, teoría de conjuntos, álgebra lineal I, estadística I y física II en el cuarto semestre; cálculo IV, álgebra lineal II, estadística II, álgebra abstracta I y ética en el quinto semestre; análisis I, ecuaciones diferenciales ordinarias, álgebra abstracta II análisis numérico e historia de la matemática en el sexto semestre; análisis II, topología, ecuaciones diferenciales parciales y electiva I en el séptimo semestre; análisis III, teoría de la medida, electiva II y electiva III en el octavo semestre; análisis funcional, variable compleja, electiva IV y seminario en el noveno semestre; electiva V, Constitución Política de Colombia y trabajo de grado en el décimo semestre.

Teniendo en cuenta el plan de 1997, se observa una discontinuidad por lo menos de un año entre la lógica y la teoría de conjuntos, corroborando que la enseñanza de la lógica tuvo como propósito servir de soporte a la argumentación y no procurar la fundamentación de la matemática, quedando la lógica invisibilizada en el contexto matemático. Este hecho se dio también en las licenciaturas en matemática de las universidades del Atlántico y Córdoba, mientras que en otras universidades como la Nacional y la de Antioquia el curso de Fundamentos tenía un doble propósito: introducir la lógica como elemento formalizador del lenguaje y servir de plataforma[211] a los cursos de teoría de conjuntos y lógica matemática estudiados formalmente después de los fundamentos.

En el año 2002 nuevamente se reforma el plan de estudio atendiendo a la asignación de créditos a las materias según lo dispuesto en el Decreto 808 de 2002 del MEN; luego en el 2004 se lleva a cabo la última reforma en cumplimiento del Decreto 2566 del 10 de septiembre de 2003 del MEN por el cual se establecen las condiciones mínimas de

[211] El término plataforma se entiende como fundamentals requisito de los foundations.

calidad. A lo largo de todas las reformas, la temática de teoría de conjuntos permanece más o menos estable enseñándose operaciones con conjuntos, relaciones, funciones, conjuntos infinitos y cardinalidad, axioma de elección y ordinales. Esta temática es estándar en los cursos de teoría de conjuntos a nivel nacional e inclusive mundial, con un enfoque que puede ser intuitivo como el que se sigue con el texto de Pinter o axiomático como se muestra en el texto de Suppes siguiendo la axiomática de Zermelo Fraenkel (ZF), la más usada por su bondad pedagógica, ya que no hace diferencia entre los conceptos de clase y conjunto, los axiomas se expresan en términos sencillos permitiendo que la transposición didáctica se haga en forma directa sin despersonalizar el saber y sin estar sometido a una vigilancia epistemológica (Chevallard, 2000); así por ejemplo, en la axiomática de ZF la unión es un axioma mientras que la intersección es un teorema, lo que no ocurre en la axiomática de Von Neumann-Bernays-Gödel. Este ejemplo no implica que desde lo epistemológico una axiomática sea mejor que otra, pero en términos de construcción de la teoría facilita el aprendizaje.

6.2.2 La Universidad del Atlántico

El Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico surge en el año 2001 a raíz de la creación de la Facultad de Ciencias y el debilitamiento en el saber específico de la matemática de la Licenciatura en Matemáticas y Física de acuerdo con la propuesta planteada en el 2000 ejecutada en el 2001, la cual reorienta el plan de estudios para propiciar la articulación de los saberes matemáticos y físicos con el saber pedagógico, pretendiendo además fortalecer el papel de la investigación pedagógica en la formación del docente.[212]

De acuerdo con el documento realizado por el Comité del Proyecto de la Licenciatura, el Programa de Matemática se justificó porque

> *Un análisis detallado de los cinco planes de estudio que ha tenido el programa, desde 1965 hasta el actual, nos muestra que los dos*

[212] Universidad del Atlántico. Facultad de Ciencias de la Educación (2000). Propuesta de actualización del programa Licenciatura en Matemáticas y Física.

últimos (1985 y 1992), si bien obedecen a la necesidad de poner a tono los estudiantes de la licenciatura con los objetivos de esta carrera y desmontar las "especialidades" que mas bien tendían a ser carreras de Matemáticas y Física pura, sacrificaron mucho en lo que a saberes específicos se refiere para incrementar lo referente a saberes en Educación y Pedagogía, lo que constituye un acto plausible que pareciera estar en concordancia con las tendencias actuales. Sin embargo, a pesar de que se comparte la idea de que el maestro debe poseer una sólida formación pedagógica, se piensa que para orientar los procesos de aprendizaje en Matemáticas y liderar los cambios encaminados a una formación integral no solamente basta con la pedagogía y legislación educativa, se requiere poseer sólidos conocimientos en lo que se refiere a la naturaleza de los objetos matemáticos, al quehacer matemático, al pensamiento matemático y a las estrategias pedagógicas apropiadas para construir el pensamiento matemático, así como de una cierta actitud investigativa. Esos conocimientos y estrategias influirán a la postre en el tipo de decisiones que el maestro tome en su accionar cotidiano, las cuales deben redundar en provecho de la calidad de la educación. [213]

Estas consideraciones llevaron a modificar el plan de estudios de la licenciatura y consignar el saber específico profundo de la matemática en el Programa de Matemáticas.

En lo relacionado con los fundamentos de la matemática, la propuesta se plantea de dos maneras diferentes pero no muy alejadas para la Licenciatura y el Programa de Matemáticas. En la Licenciatura, los cursos fundamentos de matemática I y II estarían orientados al "estudio de las bases estructurales de las Matemáticas teniendo en cuenta sus elementos, como son lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y

[213] Ibíd. (p.2)

particularidad."[214] Estos cursos deben abordar los siguientes temas: Principios lógicos fundamentales y razonamiento deductivo; teoría elemental de conjuntos, funciones y relaciones; números naturales y semigrupos; números enteros, grupos y anillos; números racionales y reales, campos y campos ordenados, topología de $\mathbf{R}$; polinomios sobre un campo; extensiones algebraicas y números complejos; espacios vectoriales, espacios $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ como espacios nominados; sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes; sistemas de coordenadas y estudios de algunas curvas.

Dado que en el curso de fundamentos se hace una introducción a la teoría de conjuntos, en el quinto semestre se propone completar su estudio con un curso de teoría de conjuntos y estructuras algebraicas. Se constata en esta propuesta que una vez más, en las puertas del siglo XXI, la lógica sigue orientándose hacia el razonamiento informal.

La lógica y la teoría de conjuntos del nuevo Programa de Matemáticas tienen una tendencia hacia el segundo plan de estudios de la Licenciatura, con la diferencia de que en el curso de fundamentos se incluye el cálculo proposicional con base en las tablas de verdad y los métodos de demostración, reservando la argumentación para el curso de lógica y teoría de conjuntos, curso que se orienta intuitivamente. La programación de los cursos de matemática se estructura con el siguiente pensum.

Primer semestre: Fundamentos de matemáticas, cultura y sociedad, geometría y español.
Segundo semestre: Cálculo I, programación de computadores I, inglés estructural e historia de la cultura y la matemática.
Tercer semestre: Cálculo II, programación de computadores II, álgebra lineal I, física fundamental I e inglés técnico.
Cuarto semestre: Cálculo III, lógica y teoría de conjuntos, ecuaciones diferenciales ordinarias y física fundamental.
Quinto semestre: Análisis I, análisis numérico, probabilidad y estadística, programación lineal y preseminario.

[214] Ibíd. (p.10)

Sexto semestre: Análisis II, topología general, inferencia estadística y electiva terminal I.

Séptimo semestre: Análisis III, álgebra abstracta I, variable compleja y electiva terminal II.

Octavo semestre: Ecuaciones en derivadas parciales, álgebra abstracta II, epistemología de la matemática, matemática y entorno y electiva terminal III.

Noveno semestre: Análisis funcional, seminario I, mecánica teórica y electiva terminal IV.

Décimo semestre: Seminario II y trabajo de grado.

Observando el pensum del Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico es pertinente señalar dos aspectos importantes: Este pensum guarda similaridad con el pensum del Programa de Matemáticas de la Universidad de Cartagena al incluir un número de materias electivas y dos seminarios; adicionalmente, se observa discontinuidad entre el curso de fundamentos y el de lógica y conjuntos, ya que después de un año se vuelve a retomar el tema, presentándose ruptura en la secuencia de temas conducentes a la fundamentación de la matemática.

Por otra parte, el curso de fundamentos se propone “introducir al estudiante en el rigor de la matemática axiomática, como también brindar una primera información básica acerca de los distintos sistemas numéricos y elementos del álgebra y trigonometría”[215], objetivo que no se logra porque la enseñanza de los llamados principios lógicos se hace de manera informal y no axiomática.

El curso de lógica y teoría de conjuntos plantea “Proporcionar al estudiante habilidades y destrezas en el manejo de las leyes de la lógica de tal forma que apliquen los conocimientos adquiridos en la construcción de conceptos y teorías más avanzadas”[216], teniendo como contenidos el desarrollo intuitivo de la lógica, proposiciones y conectivos, fundamentos y paradojas de los conjuntos, construcción de un lenguaje,

[215] Universidad del Atlántico. Departamento de Matemáticas (2006). Documento general Programa de Matemáticas.
[216] Ibíd.

cuantificadores y pruebas, equivalencias e implicaciones lógicas, inferencia lógica, desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos, construcción de conjuntos, etc. Se evidencia que formular una teoría axiomática de los conjuntos a partir de un desarrollo intuitivo de la lógica es complicado por no decir imposible, pues si no se tiene conocimiento de la axiomática, difícilmente se pueden plantear teorías de construcción axiomática. Esta debilidad está presente en la enseñanza de la lógica y los conjuntos en todos los cursos universitarios conteniendo estos aspectos, a lo largo del período estudiado.

6.2.3 La Universidad de Córdoba

El Programa de Matemáticas de la Universidad de Córdoba surge con la instauración de la Facultad de Ciencias y el decaimiento de la Licenciatura en Matemáticas, se crea según el Acuerdo 0044 del Consejo Superior Universitario de 30 de septiembre de 1998, se le asigna el registro calificado el 10 de mayo de 1999 y comienza labores en el segundo semestre de ese año. Su justificación obedece a que el país y la región necesitan de recurso humano altamente calificado en ciencias básicas, para elevar el nivel de investigación y desarrollo científico demandado por la competitividad a nivel nacional e internacional. En lo nacional, porque existe el deseo del gobierno de equilibrar el desarrollo armónico y eficiente de las regiones; en lo internacional, porque Colombia está obligada a crear ciencia y tecnología propias, para no ser altamente dependiente de otros países.

Adicionalmente, el programa es creado con la intención de ayudar en la solución de la crisis educativa de la región, cuyos síntomas, según el documento inicial del Programa de Matemáticas[217] se manifiestan por:

- *La insuficiencia cualitativa de los programas de capacitación docente.*
- *La seria problemática de la educación básica que existe, según recientes investigaciones del ICFES y del MEN, sobre la calidad de la enseñanza de la matemática.*

[217] Archivo Programa de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Córdoba. 1998.

- *Los bajos índices de calidad de los procesos educativos que indiscutiblemente imperan en la región, causados por múltiples y complejos factores.* (p. 8)

Presentada la documentación para la obtención del registro calificado el programa inicia con el siguiente plan de estudios[218]

I Semestre	II Semestre
Fundamentos I	Fundamentos II
Cálculo I	Cálculo II
Geometría Analítica	Álgebra Lineal
Inglés I	Inglés II
Informática I	Física I
Aprendizaje autónomo	Universidad y Contexto
Comprensión y producción de textos I	Comprensión y producción de textos II
III Semestre	*IV Semestre*
Cálculo III	Análisis Matemático I
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Métodos Numéricos
Probabilidad	Ecuaciones Diferenciales Parciales
Inglés III	Inferencia Estadística
Física II	Inglés IV
Matemática computacional	Humanidades I
Desarrollo y convivencia	
V Semestre	*VI Semestre*
Análisis Matemático II	Teoría de Números
Álgebra Abstracta I	Análisis Matemático III
Análisis Numérico I	Álgebra Abstracta II
Programación lineal	Electiva de carrera I
Electiva libre I	Electiva libre II
Humanidades II	
VII Semestre	*VIII Semestre*
Análisis Funcional	Topología
Variable compleja	Teoría de la Medida
Electiva de carrera II	Electiva de profundización II
Electiva de profundización I	Epistemología de la Matemática

[218] Tomado de la página web de www.unicordoba.edu.co

Electiva libre III	
IX Semestre	*X Semestre*
Geometría Diferencial Seminario de Investigación Electiva de profundización III Historia de la Matemática	Trabajo de Grado Práctica Profesional

Sin lugar a dudas, el Programa de Matemáticas hereda varios cursos de la licenciatura, lo cual se manifiesta en el plan de estudios. Los cursos fundamentos I y fundamentos II tienen los mismos contenidos de la Licenciatura y también el curso de Teoría de conjuntos, por lo tanto la enseñanza de la lógica como caja de herramientas, se propone ejercitar un conjunto de reglas para aplicar a la argumentación y dar una razón explicativa de la demostración en matemática; la teoría de conjuntos se enseña como un cuerpo de conocimientos, pero en la práctica se convierte en una herramienta utilizable en la enseñanza de otros conceptos matemáticos desde un enfoque intuitivo, ya que sin una lógica estrictamente formal no tiene cabida una teoría axiomática.

6.3 OTROS PROGRAMAS UNIVERSITARIOS

El panorama de la lógica y los conjuntos en otros programas diferentes a los programas de licenciaturas en matemática y matemática pura es bastante sombrío, porque en ellos estos temas estuvieron ausentes hasta la década de los setenta, y después de su aparición, estas teorías se utilizaron solamente como herramientas para el desarrollo de otros temas de la matemática, como un requisito forzado por la aparición de textos más modernos de matemáticas generales y cálculo, donde aparecían dichos conceptos. Se considerarán aquí aquellos programas pioneros de la Ingeniería y las Ciencias Económicas.

6.3.1 Las ingenierías

Las primeras ingenierías en el Caribe Colombiano fueron el Programa de Ingeniería Química de la Universidad del Atlántico, el programa de Ingeniería Civil de la

Universidad de Cartagena y el Programa de Ingeniería Naval de la Escuela Naval de Cadetes.

El Programa de Ingeniería Química de la Universidad del Atlántico inicia en 1941 pero surge oficialmente junto con la Universidad en 1946; el Programa de Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena, como ya se sabe, es creado en 1949 con el Decreto Nº 1127 de diciembre 30 de 1949 e inició labores en el primer semestre de 1950; el Programa de Ingeniería Naval de la escuela Naval de Cadetes, cuyos inicios se dan en 1960, sale a la luz en la Facultad de Ingeniería Naval, reconocida por la Asociación Colombiana de Universidades mediante el Acuerdo Nº 5 de mayo 17 de 1963, aprobada con la Resolución 1506 del MEN de mayo 30 de 1963. El MEN, por medio del Decreto 2892 del 19 de noviembre de 1964 confirma oficialmente el grado académico de Ingeniero Naval.

La enseñanza de la matemática en los primeros semestres de las ingenierías de las universidades del Atlántico y Cartagena en la década de los sesenta se centró en el álgebra clásica o álgebra superior, la geometría analítica, la geometría euclidiana y la trigonometría. Los contenidos de álgebra estuvieron orientados por el *Álgebra superior* de Hall y Knight y el texto *College of algebra and trigonometry* de Abraham Spitzbart y Rose Bardell, cuya primera edición es de 1955, utilizándose también la edición en español de 1964. Estos textos, que determinaron los programas de los cursos iniciales de matemática no hacían mención explícita de los conjuntos y mucho menos de la lógica, ya que la construcción del sistema de los números reales se concibe con una axiomática muy particular a la cual nos referiremos más adelante, y el concepto de función se introdujo como relación entre variables las cuales toman valores en un conjunto o sistema determinado; así que, el término conjunto se introdujo tímidamente en los años sesenta, debido a que la generación de profesores de esta década estudiaron la matemática sin conjuntos.

Los años setenta ofrecen pequeños cambios en la presentación de los cursos universitarios de matemática en ingeniería. En esta década, comienza la enseñanza del álgebra lineal en la Ingeniería Química de la Universidad del Atlántico en 1971 y en la Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena en 1973. El concepto de conjunto es introducido inicialmente a través del curso de cálculo diferencial orientado por los textos de Thomas y Purcell en la Universidad del Atlántico, y por los textos de Thomas y Miquel[219] en la Universidad de Cartagena. En ambas universidades se utilizó también el *Cálculo Diferencial e Integral* de Granville[220] en la década de los cincuenta y gran parte de los sesenta, Thomas y Miquel se utilizan en los años sesenta, y en los años setenta comienza a utilizarse el Cálculo de Purcell en la universidad del Atlántico.

El cálculo de Thomas, supone que el estudiante conoce el concepto de conjunto, porque el libro fue escrito para las universidades de los Estados Unidos donde los estudiantes de bachillerato estudiaban estos temas impuestos por las reformas en la enseñanza de la matemática a través de los diferentes congresos sobre enseñanza de la matemática como el de Budapest en 1962; así que encontramos el término conjunto en las definiciones de variable y función , por ejemplo en Thomas[221] se definen de la siguiente manera: “Emplearemos la palabra variable para un símbolo x que pueda tomar cualquier valor de los de un conjunto de números”, luego hace referencia al concepto de función como conjunto de pares ordenados (x,y), con $x \in X$ e $y \in Y$, X e Y son conjuntos no vacíos. La función se denota con la letra f y se dice que f es una función de X en Y si para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$.

Los conjuntos junto incluyendo en estos las operaciones de unión e intersección son también introducidos en el Cálculo de Purcell[222] como *colección de cosas*. Se articulan

---

219 Miquel, P (1941). *Curso de Cálculo Diferencial*. La Habana: Editorial Cultural S.A. En el primer capítulo de este texto se define conjunto o agregado de números como “toda reunión de números que satisfacen a una o varias condiciones dadas.” Miquel presenta la definición de conjunto siguiendo a Weierstrass.

220 Granville, W (1959). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Uteha. Esta es una versión bastante conocida en español, traducida de las versiones originales de 1904 y 1911 *ELEMENTS OF DIFFERENTIAL AN INTEGRAL CALCULUS*. El texto se modificó muy poco, algunos conceptos permanecieron intactos como el de función, definido como la relación entre dos variables, donde el valor de una de ellas depende del valor de la otra, tomando estas variables valores en una porción del sistema de números llamado *intervalo* de la variable, muestran la inexistencia explícita de los conjuntos.

221 Thomas, G (1974). *Cálculo infinitesimal y Geometría Analítica*. (5ª ed.). Madrid: Aguilar s a de ediciones.

222 Purcell, E (1969). *Cálculo y Geometría Analítica*. Cali: Editorial Norma.

también aquí los axiomas de inducción y completitud en un intento de construcción axiomática de los números reales. Aisladamente se acuñan la implicación lógica y la equivalencia lógica desde lo semiótico, como significado de símbolos, ya que se definen como sigue: *Si A y B son enunciados, los símbolos A => B significan si A es verdadero entonces B es verdadero, o lo que es lo mismo A implica B*; luego aclara que *A y B son equivalentes si A implica B y B implica A*, lo cual simboliza con A < = > B. El concepto de función se expone en Purcell de manera similar como en Thomas, tal vez un poco más detallado e incluyendo las definiciones de dominio y contradominio.

Como consecuencia de la entrada de nuevos textos sobre matemáticas universitarias y el ingreso a los programas de ingeniería de profesores licenciados en matemáticas y física formados con la matemática moderna a la docencia universitaria, los contenidos para la enseñanza de la matemática reciben un aire renovador. Los principios de lógica correspondientes a proposiciones, tablas de verdad, implicación y equivalencia lógica, métodos de demostración y cuantificadores, son estudiados en el curso de Matemática I de la Escuela Naval de Cadetes a partir de 1973 con el texto *Matemáticas Universitarias* de Jack Britton[223].

En la Universidad del Atlántico se introducen también conceptos de lógica en el curso de álgebra de primer semestre o matemáticas generales en Ingeniería[224] y Arquitectura, y en la Universidad de Cartagena estos contenidos son enseñados en el curso de matemáticas I de Ingeniería Civil entre 1973 y 1993, cuya primera unidad[225] se orientan según el primer capítulo del texto *Fundamentos de Matemáticas Universitarias de* Allendoerfer y Oakley[226] y tiene como objetivos: 1) Identificar y hallar el valor verdadero de cualquier enunciado. 2) Identificar y representar los conjuntos y las operaciones entre ellos. 3). Identificar y resolver los problemas relativos a conjuntos y proposiciones utilizando sus propiedades. Respecto a la teoría de conjuntos en los

[223] Britton, J (1969). *Matemáticas Universitarias*. México: Editorial Continental.
[224] Este curso es impartido para Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Industrial e Ingeniería Agroindustrial.
[225] Archivo Facultad de Ingenierías Universidad de Cartagena.
[226] La primera versión de este texto es Allendoerfer, C y Oakley, C (1959). *Fundamental of Frehman Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

cursos mencionados se estudian los conjuntos, operaciones entre conjuntos, propiedades de las operaciones entre conjuntos y funciones.

A partir de la reforma de 1976 en la enseñanza de la matemática a nivel del bachillerato, fue indispensable la aplicación de la teoría de conjuntos tanto en la matemática como en las asignaturas que necesitan de ella como herramienta, pero lo mismo no ocurrió con la lógica, pues su enseñanza se redujo al manejo de tablas de verdad para las conectivas, el empleo de estas en las definiciones de las operaciones entre conjuntos y algunas equivalencias destinadas a sustentar los métodos de demostración. La teoría de la argumentación no tuvo lugar en los principios de la lógica y el manejo de cuantificadores se redujo al uso de estos en el lenguaje.

En 1978 inicia labores el Programa de Ingeniería Agrícola de la Universidad de Sucre. El plan de estudios incluye en el primer semestre un curso de Matemática, curso que permanece hasta el año 2000 sin modificaciones, conteniendo seis unidades: Lógica y conjuntos, conceptos básicos del álgebra, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, ecuaciones polinómicas, funciones trigonométricas y conceptos de geometría euclidiana plana. Este curso propone como objetivo

> *Proporcionarle al estudiante la oportunidad de adquirir destrezas operacionales en aquellos conceptos básicos de la lógica matemática, el álgebra y la geometría euclidiana a un nivel más avanzado, buscando que el estudiante pueda plantear, resolver e interpretar problemas o modelos propios de la ingeniería.*[227]

La unidad 1, titulada *Lógica y Conjuntos* presenta el siguiente contenido analítico: Proposiciones lógicas, conectivos lógicos y tablas de verdad, leyes de las proposiciones lógicas, argumentos lógicos y cuantificadores, conjuntos, notaciones, determinación de un conjunto, operaciones con conjuntos, diagramas de Venn, número de elementos de

[227] Programas de Estudio. Matemática. Universidad de Sucre. Facultad de Ingeniería. Archivo Departamento de Ingeniería Agrícola. 1978.

un conjunto, conjuntos numéricos, propiedades de los números reales, desigualdades e intervalos. El tema de funciones se estudia en el curso de cálculo I, ubicado también en el primer semestre.

Teniendo en cuenta el objetivo del curso introductorio de matemática, salta a la vista el carácter instrumental del mismo. El dominio operacional de las destrezas lleva a la mecanización de conceptos para ser aplicados como recetas en la interpretación y solución de problemas, bajo la concepción de que la lógica facilita la interpretación por ser una herramienta del pensamiento, pero la lógica por si sola y mucho menos los principios elementales considerados aisladamente facilitan la comprensión de los distintos significados de la matemática. Esta tendencia está presente en todos los cursos introductorios de matemática, para las universidades bajo investigación que incluyen principios básicos de la lógica informal.

Precisando el contenido de lógica y conjuntos presente en los programas del primer curso de matemática puede decirse que en lógica se enseñaron las nociones de proposición, negación, disyunción, conjunción, condicional, bicondicional, implicación, equivalencia, tautología, contradicción, métodos de demostración, cuantificador universal, cuantificador existencial y negación de cuantificadores.

En teoría de conjuntos se enseñó la noción de conjunto, elemento, pertenencia, conjunto vacío, clases de conjuntos, subconjuntos, unión, intersección, complemento, propiedades de las operaciones, conjunto de partes, par ordenado, función, función inyectiva, función sobreyectiva, función biyectiva, función inversa, composición de funciones y sistema de los números reales. Estos contenidos jugaron el papel de *Fundamentals,* ya que su enseñanza está encaminada a servir de soporte a la construcción de otras teorías de la matemática desde el punto de vista pragmático.

La enseñanza de los temas mencionados se llevó a cabo con un enfoque intuitivo, la presentación de las teorías fue formal mas no completamente axiomática, ya que a juicio de los ingenieros[228] no se necesita saber mucho de lógica y conjuntos para estudiar la matemática, para ellos el aprendizaje de dichos conceptos es instrumental, los conceptos se constituyen en herramientas para desarrollar otros conceptos. Preocupa en la presentación de los programas la concepción de que la lógica no pareciera importante para la matemática, esto se observa en las definiciones sobre conjuntos en donde se pretende reemplazar el simbolismo lógico por el lenguaje común y corriente, así que, en algunos programas, los principios lógicos fundamentales quedan invisibilizados por el lenguaje. Comparando los contenidos de lógica y conjuntos en ingeniería con los de las licenciaturas y los programas de matemática, se observa que la influencia de las reformas en matemática en ingeniería logró pocos avances en la enseñanza de los fundamentación de la matemática, y podría pensarse que después de avanzar un poco estamos retrocediendo al estado inicial en 1961.

6.3.2 Ciencias económicas

Los estudios relacionados con las Ciencias Económicas en el Caribe Colombiano surgen en Barranquilla en 1943, al crearse la Facultad de Comercio y Finanzas como parte de la institución de estudios superiores *Museo del Atlántico* creado mediante la Ordenanza Nº 035 de 1940 a la cual se le sumaron posteriormente los programas de Ingeniería Química y Química y Farmacia, para luego convertirse en la *Institución Politécnica del Caribe*, creada por Ordenanza Nº 36 de 1945, transformada finalmente en la Universidad del Atlántico en 1946. Posteriormente, el 12 de diciembre de 1958, el Consejo Superior de la Universidad de Cartagena, mediante el Acuerdo Nº 6 crea el Programa de Economía; más tarde, a partir de 1966, establecida la Universidad del Norte, inician en esta y otras instituciones públicas y privadas programas de Administración de Empresas, Contaduría y por supuesto Economía.

El Programa de Economía de la Universidad del Atlántico desde su inicio estableció su propio pensum, mientras que el de la Universidad de Cartagena tomó el pensum del programa de economía de la Universidad Nacional de Bogotá. En estos programas,

[228] Esta afirmación se hace con base en la creencia que en general tienen los ingenieros sobre el porqué de la matemática en los programas de ingeniería, cómo se concibe y cuál es su utilización.

como bien se sabe, la enseñanza de la lógica y los conjuntos estuvieron ausentes hasta la aparición de textos dedicados a la matemática para Ciencias Económicas, erróneamente llamados de *Matemáticas Aplicadas*[229] por los profesionales de esta área. En conformidad con Abrate, Gabetta y Pochulu (2007), en las universidades latinoamericanas, la enseñanza de la matemática en esta área estuvo bajo la influencia de las tendencias norteamericanas, influencia determinada por el empleo de ciertos libros en dicho contexto; por tal razón, el estudio de los programas se centrará en la Universidad de Cartagena.

Durante la década de los sesenta, en parte, como ocurrió con las ingenierías, el primer curso de matemática correspondió al álgebra clásica y la geometría analítica; a mediados de los setenta aparece en escena el texto *Métodos Fundamentales de la Economía Matemática* de Alpha Chiang,[230] texto con muchos modelos económicos en los cuales se aplican matrices, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales. Este texto trata los siguientes temas: Naturaleza de la economía matemática, modelos económicos, análisis estático, análisis de equilibrio en economía, modelos lineales y algebra de matrices, análisis estático comparativo, estática comparativa y el concepto de derivada, reglas de diferenciación y su uso en estática comparativa, análisis estático comparativo de modelos con funciones generales, problemas de optimización, optimización como variedad especial de análisis de equilibrio, funciones exponenciales y logarítmicas, el caso de más de una variable de elección, optimización con restricciones de igualdad, temas adicionales de optimización, análisis dinámico, la dinámica económica y calculo integral, ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones diferenciales de orden superior, ecuaciones en diferencias de

[229] Para Russell (1977) la matemática pura es la clase de las proposiciones de la forma p implica q, donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni p ni q contienen constante alguna, excepto las constantes lógicas. La matemática aplicada consiste en tomar los resultados respecto a una variable que la matemática pura demostrara deducidos de alguna hipótesis y afirmarlos reemplazando la variable por una constante que satisface la hipótesis. En el campo de la teoría de modelos sería verificar el modelo abstracto para un dominio específico. Así por ejemplo, el concepto de espacio vectorial es un concepto de matemática pura, si reemplazamos el espacio vectorial por R^n, el nuevo modelo específico se convierte en matemática aplicada; esto es lo que precisamente se hace en los cursos de cálculo y álgebra lineal.

[230] Chiang, A (1967). Métodos Fundamentales de Economía Matemática. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

primer orden, ecuaciones en diferencias de orden superior, ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferencias simultaneas y teoría de control optimo.

Como puede verse, el texto de Chiang no trata la lógica ni la teoría de conjuntos; además, se utilizó como texto auxiliar y no como texto guía en Economía, ya que temas como las ecuaciones en diferencias y el control óptimo no formaron parte de los cursos de matemática; adicionalmente, para los setenta había hecho aparición el texto de Allendoerfer, el que a finales de los ochenta dio un viraje hacia las aplicaciones económicas, orientando el currículo de matemáticas en las facultades de Ciencias Económicas.

De acuerdo con la documentación recolectada sobre programas del curso inicial de matemática, se presume que la inclusión de temas sobre lógica y conjuntos en la enseñanza de la matemática en el área de Ciencias Económicas se da a finales de los setenta y comienzo de los ochenta, muy probablemente por imposición de los textos y el conocimiento del tema por algunos docentes que por decisión de los directivos de las facultades; para estos, los conceptos fundamentales sobre conjuntos son aceptados porque les ayuda a comprender otros conceptos matemáticos y porque surgieron en aplicaciones en las cuales estos conceptos eran necesarios.

En este mismo sentido siguiendo a Santaló (1990, c. p. Abrate, Gabetta y Pochulu 2007), la elección de los temas de matemática para quienes no van a ser matemáticos es un problema para la enseñanza de estos temas, puesto que en estas disciplinas como en otras donde la matemática es escasa, la matemática se acepta como “una necesidad que les ayude a desempeñar mejor sus ocupaciones y a entender mejor sus sostén básico” (p. 53).

Como características notables en la enseñanza de la matemática en el área de las Ciencias Económicas, se encontró que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática estuvieron orientados por el profesor, basándose en sus conocimientos sobre la matemática y los libros de texto; la exposición de los contenidos siguió un orden lineal, conservando el orden de requisitos, yendo de lo simple a lo más complejo, con un programa rígido planeado en tiempos de clase; la aplicación de los conceptos se hizo en forma inmediata, tratándose de transferir la teoría a la misma matemática y a la economía, para que los estudiantes vieran el uso de la matemática; la presentación de los contenidos teóricos se hizo acompañada de procedimientos a partir de los mismos contenidos; la enseñanza, de tipo mecanicista, se preocupó por buscar su utilización en vez de aprovechar la exposición de la misma para fundamentarla; finalmente, se procuró la ejercitación y no el razonar y argumentar.

Las características anteriormente señaladas ayudaron a que la lógica se invisibilizara en los contenidos del primer curso de matemática y la teoría de conjuntos se redujera a lo estrictamente necesario en el desarrollo de otras temáticas.

El hecho de que las características anotadas estén presentes en la enseñanza de la matemática en los primeros cursos universitarios, no es razón suficiente para afirmar que así sucedió en todo el Caribe Colombiano. Se sabe,[231] que la Universidad del Atlántico en la década de los ochenta instituyó la enseñanza de los conceptos fundamentales de la lógica aristotélica en varias facultades entre ellas la de Educación, con el objeto de lograr precisión en el lenguaje utilizado por los estudiantes.

También, en la Universidad de Sucre, en la reforma al pensum de Economía a finales de los noventa, se incluyó la asignatura *filosofía*, con contenidos de lógica informal, justificada por el hecho de que las personas frecuentemente están enfrentadas a situaciones que las obligan a presentar argumentaciones y a precisar el lenguaje en las conversaciones diarias; por tal razón, expone como objetivo general, "Preparar al estudiante para que pueda determinar la validez o invalidez de los argumentos utilizado en la conversación diaria, y en los utilizados en el desarrollo de esta, y de las demás asignaturas del programa."[232] El contenido del programa se distribuye en cuatro unidades: La lógica y la filosofía; el concepto, el juicio y razonamiento; cálculo

[231] Afirmación del profesor Oswaldo Dede Mejía.
[232] Archivo Facultad de Ciencias Económicas y administrativas. Programa de Economía. Documento General del programa. Universidad de sucre.

proposicional y elementos de lógica cuantificacional. Se sugiere como bibliografía los libros Introducción a la Lógica Matemática de Suppes y Hill, Lógica Simbólica de Copi, Introducción al Simbolismo Lógico de Guarín, Filosofía de las Lógicas de Haack, Lógica Elemental de Negrete, Introducción a la Lógica Simbólica de Smith y Lógica para Lingüistas de Allwood.

Las situaciones antes descritas indican que la lógica informal, y sobre todo los conceptos básicos de conjuntos, operaciones con conjuntos y función fueron parte de los primeros cursos de la matemática universitaria en el Caribe Colombiano, con énfasis y contenidos variados según criterios particulares de universidades y programas, tratando lograr los objetivos de proporcionar a los estudiantes conocimientos para fundamentar el desarrollo de otras materias de carácter cuantitativo y a la vez propiciar la capacidad de estructurar el pensamiento y argumentar lógicamente. Esta realidad no dista mucho de lo presentado en el contexto nacional e internacional.

A nivel nacional, existió y existe similitud en los programas universitarios de la matemática de Economía, Administración de Empresas y Contaduría; a nivel internacional, la enseñanza de la matemática está influida por la utilización de textos estadounidenses, e intervenida por el Proyecto Tuning que redujo el peso de la matemática en la formación de los economistas y administradores en Europa.

7. LOS TEXTOS UNIVERSITARIOS UTILIZADOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA Y LOS CONJUNTOS EN EL CARIBE COLOMBIANO

El análisis de los libros de texto es importante por varias razones. En primer lugar, en materia educativa, en la enseñanza de la matemática, la práctica ha demostrado que los programas de estudio y en general el currículo están determinados por los libros de texto más que por los decretos de los gobiernos (Schubring, 1987). En segundo lugar, la implementación del libro de texto como programa de estudio ha sido casi una práctica pedagógica desde hace mucho tiempo, ya vimos como el texto de Wolff en la Etapa Colonial determinó el currículo de matemática y el Organon de Aristóteles determinó la enseñanza de la lógica. En tercer lugar, los textos permiten extraer información sobre la difusión y la evolución de los saberes en el tiempo.

En el marco de la investigación histórica sobre la enseñanza de la matemática, el texto es reflejo de la actividad que se desarrolla en el aula (González y Sierra, 2004); finalmente, según Schubring (2003), el estudio de los libros antiguos de texto ha permitido estudiar la evolución de la matemática, el abordaje de los libros de texto permite determinar si hubo un cambio revolucionario en la enseñanza o si solamente estos permiten normalizar y transmitir la ciencia como un cúmulo de conocimientos.

Para apuntalar ideas, se entiende por libros de texto aquellos que han utilizado los profesores y alumnos en un curso escolar, en este caso, a lo largo de los cursos relacionados con lógica y teoría de conjuntos en las instituciones universitarias del Caribe Colombiano en el lapso 1961-2000. Los libros de texto son fácilmente reconocibles porque tratan un tema correspondiente a un curso escolar y se estructuran en capítulos y estos a su vez en temas proponiendo al final de los capítulos o los temas una lista de ejercicios. A lo largo del contenido los textos son “una norma de progresión en el conocimiento” (Chavellard, 2000, p.73) y los profesores buscan “buenas transposiciones de los saberes correspondientes a las demandas didácticas de la sociedad" (Chavellard, 2000, p.54), por lo tanto, al final del proceso son los profesores los que trasponen[233] la teoría, ilustrándola con ejemplos para abrir el camino hacia la transferencia.[234]

Los libros por analizar se han clasificado en dos grupos: los de lógica y conjuntos y los de matemáticas generales que contienen temas de lógica o conjuntos. El análisis de los textos se hace siguiendo a Pestaña (s.f) para determinar en qué época se enmarcan, y a González y Sierra (2004) considerando tres modalidades para la presentación de los contenidos: Expositivo[235], Tecnológico[236] y Comprensivo[237].

7.1 TEXTOS DE LÓGICA Y CONJUNTOS

El texto *Introducción a la Lógica Simbólica* de Patrick Suppes fue publicado en Lengua Española en 1966, traducido de la primera edición en inglés de 1957 cuyo título original es *Introduction to Logic*. Este libro se reimprimió en Español doce veces hasta 1979, sin cambios en el contenido de la versión original. El texto fue escrito durante la época del predominio del Pensamiento Crítico, corriente que como ya se sabe propendió por la enseñanza de la lógica informalmente; así que, este texto corresponde a la década de los cincuenta, cuando los filósofos norteamericanos incursionaron en la lógica buscando caminos pedagógicos para la enseñanza de los fundamentos de la matemática. En la traducción se agregó el apelativo de simbólica porque esta lógica tiene un

[233]Se habla de trasponer y no de exponer ya que los textos son los elementos a través de los cuales el profesor da la transposición didáctica en el sentido de Chevallard.
[234] Se refiere a la transferencia del aprendizaje.
[235] El conocimiento matemático se presenta como una acumulación de definiciones, reglas y procedimientos aislados, desconectados de la realidad, pero con una estructura matemática deductiva. Inducen la exposición magistral y la realización de ejercicios repetitivos, poniendo énfasis en dicha repetición y no en la comprensión de conceptos.
[236] Exponen una serie de temas casi siempre desconectados pero con una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos tendientes a lograr una transferencia cercana. La realización de los ejercicios conduce a una mecanización progresiva, haciendo énfasis en la memorización de las reglas.
[237] El contenido propuesto lleva ala aprendizaje por descubrimiento permitiendo la construcción de redes conceptuales en las que se relacionan unos contenidos con otros dando sentido a la matemática. Conciben la matemática como un instrumento para interpretar la realidad entendida en sentido amplio. Los ejercicios propuestos llevan al estudiante a obtener una ampliación de la teoría como propósito de la transferencia en el aprendizaje.

parecido con la matemática en su simbología y en la presentación de la misma a manera de cálculo.

Desde su concepción, Suppes (1979) se propone presentar la lógica mediante un "libro de texto de un primer curso de lógica moderna" (p. 6), con enfoque semántico, sustituyendo la axiomatización por un sistema formal amparado en definiciones y pruebas semiformales, pretendiendo "familiarizar al lector con una teoría exacta y completa de la inferencia lógica y mostrar cómo puede ser ésta usada en matemáticas y en las ciencias empíricas" (p. 6). Su obra, de carácter tecnológico, se constituye en el primer texto de lógica simbólica usado para la enseñanza de la lógica en las universidades del Caribe Colombiano, debido a que exhibe la lógica como cálculo, predominando en este las reglas que rigen el uso de las conectivas, los cuantificadores y las operaciones para la argumentación. El cálculo es presentado con el establecimiento de las reglas que rigen las fórmulas bien formadas y las llamadas reglas oracionales de la deducción.

El contenido del texto se divide en dos partes. La primera expone la teoría de la inferencia y la teoría de la definición, desarrolla una representación simbólica del lenguaje ordinario para formalizarlo y precisarlo, y hace una exposición de cómo se transfiere la teoría de la deducción a las demostraciones que habitualmente hace un profesor en la clase de matemática, demostrando algunos teoremas relacionados con la construcción axiomática de los números reales. La segunda parte trata la teoría de conjuntos siguiendo un enfoque intuitivo, utilizando la teoría lógica expuesta en la primera parte. Esta parte del libro por lo general no se estudiaba ni estaba incluida en los programas de los cursos.

Ubicando el texto en la época de los cincuenta cuando fue escrito, sin lugar a dudas para ese entonces era un texto de lógica moderna, pero lo mismo no puede decirse si el texto se utiliza en la última década del siglo XX, donde ya hay un discurso bien elaborado sobre lo que significa la lógica moderna. La lógica moderna se construye a través de axiomáticas iniciando con la axiomática del cálculo proposicional y de predicados, para continuar después con la teoría de modelos, la recursividad y los lenguajes. Si bien el programa de lógica de las carreras de matemática en la Universidad Nacional de Bogotá y la Universidad de los Andes desde finales de los ochenta ya contemplaba estos temas, las universidades del Caribe se habían quedado estáticas en la lógica de los cincuenta, pues el libro de Suppes seguía determinando el contenido curricular de los cursos de lógica o de los cursos con contenidos de lógica.

La Lógica Simbólica de Suppes considera la lógica como ciencia del razonamiento, por lo tanto su carácter de libro tecnológico está orientado hacia la mecánica de la argumentación tomando en los ejercicios algunos presentados en la Lógica de Lewis Carroll[238]. Por otra parte, el interés de Suppes por los aspectos semánticos tiende a presentar la lógica como formalización del lenguaje traduciendo este a símbolos, hecho que se manifiesta en los ejercicios propuestos al final de cada capítulo; además, en este texto deja clara su tendencia hacia la ejercitación del razonamiento obedeciendo a ciertas reglas.

En 1964 Suppes publica con Shirley Hill *A First Course in Mathematical Logic*, texto dedicado a los estudiantes del bachillerato de los Estados Unidos y que es utilizado en las universidades de Colombia en los cursos introductorios de matemáticas de primer semestre donde se inicia al alumno en el estudio de la lógica matemática y los aspectos de la demostración matemática. El contenido del libro es el siguiente: Simbolización de proposiciones, inferencia lógica, certeza y validez, tablas de certeza, términos, predicados y cuantificaciones universales, especificación universal, generalización universal, leyes de identidad y presenta un sistema matemático simple exponiendo los axiomas de la adición. Si el libro fue escrito para estudiantes del bachillerato, ¿Por qué se utilizó en cursos universitarios?

Un análisis de la enseñanza de la matemática moderna en el bachillerato colombiano basado en la exposición presentada en el capítulo quinto conduce a señalar que, la lógica y la matemática moderna no cumplieron su cometido porque no hubo suficiente

[238] La Lógica Simbólica de Charles Dodgson nombre verdadero de Lewis Carroll cuya primera parte fue publicada en 1896, es un texto de transición entre la Lógica Clásica Aristotélica y la Lógica Moderna. Esta Lógica no está dirigida a la fundamentación de la matemática sino que más bien es un texto pedagógico orientado a entender las demostraciones como si estas fueran un acertijo.

preparación para la aplicación de las reformas, los profesores en general fueron un obstáculo porque se dedicaron a transcribir la teoría, la lógica fue introducida a la fuerza, y estos conocimientos no fueron transferidos a la misma matemática o simplemente no se estudiaron. Por estas y otras posibles razones los estudiantes llegaban a la universidad olvidando los principios lógicos estudiados.

Cotejando el contenido del texto de Lógica Simbólica de Suppes con los programas universitarios de lógica tanto en las licenciaturas como en los programas de matemática, se observa que solamente estudiaban la primera parte del texto, y de esta los primeros cinco capítulos. Ninguno de los programas universitarios contenía los temas apostilla sobre el uso y la mención y transición de las demostraciones formales a las informales, tema en el cual se muestra el empleo de la lógica en las demostraciones matemáticas. Siendo la definición una operación lógica fundamental en la construcción de las teorías matemáticas, este tema se omitía, debilitando así el aspecto formal de la presentación de dichas teorías.

El texto *Introducción a la Lógica Formal* de Alfredo Deaño se utilizó para la enseñanza de la lógica como texto auxiliar. Este libro cuya primera edición data de 1974 y que consta de cuatro capítulos es conocido en las universidades del Caribe Colombiano aproximadamente desde principios de los ochenta. A diferencia del texto de Suppes, Deaño en el primer capítulo introduce los conceptos de lenguaje, metalenguaje y la noción de cálculo; en el segundo capítulo dedicado a la lógica de enunciados y el cálculo proposicional, introduce la axiomatización de dicho cálculo; el tercer capítulo lo dedica a la lógica de predicados de primer orden como lo hace Suppes; en el último capítulo presenta una introducción a la lógica de predicados de orden superior y a las llamadas lógicas no clásicas. El aspecto formal del texto tiene que ver más con el aspecto formal del lenguaje que con el aspecto formal de la matemática.

La Lógica de Deaño, la que define como *la ciencia que estudia las reglas de la validez formal del razonamiento* es la lógica de las formas, la lógica de las estructuras construida con partes dispuestas en forma ordenada, esta es la misma lógica de Suppes, de Russell, de Garrido[239], de Copi[240] y otros tantos, expuesta en lenguaje común, informal por su presentación, pero formal por cuanto estructura el pensamiento con estructuras unas análogas a otras. Este propósito es el que asumen los cursos de lógica de las licenciaturas, los programas de matemática y otros que incluyen la lógica en los cursos iniciales de la matemática universitaria. Según López (1980), la Lógica de Deaño

> *…podría entenderse como una descripción de la competencia de un sujeto razonante ideal. Aspira a construir la formalización de los criterios a los que ese razonador se atendría. Intenta exhibir el sistema de reglas que permitirían a un ser humano lógico formalmente puro construir razonamientos validos o reconocer la validez de los que otros pudieran construir. Traza la lógica de elaborar el marco sistemático de referencia desde el cual se pueda decidir que deducciones son válidas y que otras no lo son, proporcionando un análisis formal de ellas.* (p. 61)

La concepción de López sobre la lógica es lo que se pretende con la enseñanza de la lógica en los programas universitarios, lo que se busca es razonar para la comprensión de los conceptos matemáticos y razonar acerca de los razonamientos para determinar cuando son correctos y cuando no lo son; es decir, lógica como arte de pensar según la Lógica de Port Royal con los progresos pedagógicos del pensamiento crítico. En síntesis, estas palabras describen el objetivo general de la enseñanza de la lógica en los programas universitarios. Desafortunadamente el objetivo no siempre se logró porque la temática no se transfiere en la comunicación del saber matemático, y los contenidos mínimos, incluyendo el cálculo de predicados, generalmente no aparecen en los programas curriculares de algunas carreras inclusive licenciaturas en matemática, como se mostró en el capítulo anterior.

---

[239] Garrido, M (1974). *Lógica Simbólica*. Madrid: Editorial Tecnos S.A.
[240] Copi, I y Cohen, C (1998). Introducción a la Lógica. México: Noriega Editores. Esta versión se utiliza como texto auxiliar en la Universidad Nacional sede Bogotá en los cursos de Fundamentos del Programa de Matemáticas y en los cursos de Lógica en el Programa de Filosofía. La primera versión del libro escrita solamente por Copi data de 1953, cuatro años antes de que apareciera el texto de Suppes. Entre 1962 y 1969 aparecen siete ediciones de la Editorial Eudeba de Buenos Aires, traducidas por Néstor Míguez y revisadas por Gregorio Klimowsky, quien se ha dedicado a la investigación sobre la enseñanza de los Fundamentos de la Matemática en la Universidad de Buenos Aires.

Después de revisar la bibliografía de los programas de estudio para los cursos de lógica, puede decirse que la enseñanza de la lógica en las licenciaturas de matemática estuvo influida básicamente por los libros de Suppes, mientras que en las universidades del interior en la enseñanza de la lógica se utilizaba una variedad de textos, entre ellos Garrido, Copi, Gortari, Tarski, Enderton, etc. En particular, en las Universidades Nacional y de Los Andes[241] a partir de los ochenta, en la Carrera de Matemáticas ya existía un curso de lógica matemática incluyendo calculabilidad, decidibilidad, modelos recursión y otros temas. Los primeros profesores de estos cursos en las Universidades del Caribe Colombiano fueron autodidactas, ya que los contenidos de lógica que algunos de ellos conocían eran mínimos o tal vez ninguno. En este punto es importante resaltar que Rodrigo Noguera Barreneche fue el primero en introducir la lógica en la Universidad del Atlántico mucho antes de que se vislumbrara la apertura de la Licenciatura en Matemáticas.

Respecto a la enseñanza de la teoría de conjuntos, la realidad de los textos de estudio es más alentadora. Las diferentes reformas educativas tanto en los niveles de enseñanza primaria como media, obligaron a las universidades a replantear la enseñanza de la matemática a nivel nacional. Estas reformas permitieron que la difusión de los textos sobre conjuntos a nivel mundial fuera mucho más rápida, lo que no ocurrió con la lógica, porque en cierta forma se desconocía que la lógica podría ser el fundamento de la matemática y aún se consideraba que los estudios de lógica seguían en el dominio de la filosofía.

Implementadas las reformas educativas para la enseñanza de la matemática, estas lograron que la teoría de conjuntos tomara gran fuerza en América, particularmente a partir de la Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática de 1961. La nueva teoría produjo cambios inmediatos en la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos. En afinidad con lo expresado, Arrieche (2002) señala

> *El estudio de la teoría de conjuntos ha sido suficiente para mostrar que esta teoría llegó a convertirse en una rama propia de*

[241] Este curso utilizó el texto Caicedo, X (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes. Una Empresa Docente.

> *investigación en matemáticas, pero sobre todo se ha convertido en una herramienta que aporta un lenguaje unificador para las matemáticas en su totalidad, que no puede ser totalmente desconocido por el maestro que debe enseñar matemática.* (p. 392)

Dos fueron los enfoques a los cuales se recurrió para la enseñanza de la teoría de conjuntos en las licenciaturas y en los programas de matemática pura: el enfoque intuitivo y el enfoque axiomático, ambos determinados por los textos de estudio. El enfoque intuitivo se dio principalmente con los textos de Lía Oubiña, Seymour Lipschutz, Álvaro Pinzón y Charles Pinter; el enfoque axiomático se dio con los textos de Bourbaki y Suppes; el enfoque intuitivo-axiomático estuvo presente en los textos de Rafael Mariño y José M Muñoz.

Habiendo predominado la enseñanza de la lógica informal en las universidades del Caribe Colombiano, el camino expedito para la enseñanza de los conjuntos tuvo que ser el enfoque intuitivo, pues por razones evidentes, si no hay conocimiento de una axiomática pura, pretender axiomatizar una teoría sin comprender claramente la vía axiomática pura es un ensayo tortuoso. Atendiendo a esta reflexión, Oubiña (1976), en su texto *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, cuya primera edición aparece en 1964, presenta una exposición sistemática e intuitiva pero rigurosa de dicho tema. Este texto se utilizó en los cursos de teoría de conjuntos de las licenciaturas, en la Universidad del Atlántico a finales de los sesenta y en otros programas, unas veces como libro de texto y otras como bibliografía complementaria, decisión que dependía del docente de la materia, quien generalmente tendía a utilizar los textos con los cuales había estudiado.

De acuerdo con el contenido del texto de Oubiña, este se ubica en la década de los sesenta, década en la que como ya se ha señaló anteriormente, fue aquella en donde aparecieron los textos de matemática moderna impulsados por los movimientos de reforma de la enseñanza de la matemática en América. Este texto es esencialmente un texto sobre fundamentos de la matemática, por lo tanto puede clasificarse como comprensivo, no obstante conserva una presentación instrumental de la matemática pero siguiendo un orden lógico en la presentación de los temas dosificados en nueve capítulos: Conjuntos, operaciones entre conjuntos, correspondencia y función, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, números cardinales, axioma de elección y aplicaciones a la sociología. Este último capítulo es una novedad que diferencia a este texto de los demás textos de teoría de conjuntos utilizados para la enseñanza en el período 1961-2000.

En términos generales, el texto de Oubiña determinó el programa del curso teoría de conjuntos porque fue uno de los primeros libros en español adecuado al currículo de las licenciaturas y además escrito en Latinoamérica, se adaptaba a las necesidades educativas en matemática, su lenguaje sencillo y formal facilitó el aprendizaje del tema con la ventaja adicional de que los requisitos de lógica necesarios para abordar el tema se encontraban en la lógica informal. Otra ventaja importante es el aspecto pragmático-didáctico en la explicación de la temática mediante gráficas y ejemplos apropiados en cada caso.

El texto teoría de conjuntos y temas afines de Seymour Lipschutz de la Serie Schaumm fue publicado en inglés en 1969 y traducido al español en 1970, siendo un texto que por la presentación de sus contenidos puede catalogarse como expositivo, utilizándose como texto auxiliar o de complementación. La característica de los textos de esta serie es que incluyen un gran número de ejercicios propuestos y resueltos que llevan al estudiante a la mecanización y a la memorización, hecho que le permitió ser muy popular y de uso frecuente en profesores y alumnos. Los temas tratados en este libro no siguen un orden lógico, un mismo tema se da fraccionado apareciendo en capítulos diferentes; por citar un ejemplo, el tema de funciones se da en los capítulos cuatro y ocho. Este libro contiene 17 capítulos conteniendo en los 13 primeros los temas conjuntos, operaciones con conjuntos, conjuntos de números, funciones, relaciones, cardinalidad, conjuntos parcial y totalmente ordenados, ordinales, Axioma de Elección, Lema de Zorn y paradojas de la teoría de conjuntos. Los últimos cuatro últimos están dedicados a la lógica clásica como tema anexo.

Los años setenta fueron una década importante para el progreso de la matemática en Colombia, porque en ella comenzó la edición de una serie de libros de matemática en la

Universidad Nacional de Colombia, bajo la dirección de Yu Takeuchi. El texto *Teoría de conjuntos* de Rafael Mariño se publica en 1978 dentro de esa serie y se utiliza en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Córdoba como referencia principal en el curso con el mismo nombre.

Mariño (1978), pretende que la enseñanza de la teoría de conjuntos basada en su texto se desarrolle entre lo intuitivo y el axiomático, estableciendo sinonimia entre los conceptos clase y conjunto, por ello comenta

> *Nos proponemos en los primeros 6 capítulos, hacer un desarrollo intuitivo de la teoría de conjuntos; estudiando los conceptos más básicos. En el capítulo VII mostramos cómo este desarrollo intuitivo se puede involucrar dentro de un desarrollo axiomático riguroso de la Teoría de Clases.* (p. 1)

El contenido programático del curso, según el texto, se distribuyó en nueve capítulos: Conceptos fundamentales, relaciones, funciones, familias de conjuntos, equivalencia, orden, teorías axiomáticas, el axioma de elección y ordinales. El aspecto más importante de este curso es la presentación de una teoría axiomática paso a paso con todos sus elementos constitutivos, y luego ilustrar esta axiomática con la Teoría Axiomática de Zermelo-Frankel, aspecto ausente en los otros textos utilizados para la enseñanza de los conjuntos en otras universidades de la Región Caribe Colombiana. Teniendo en cuenta las características de la obra, este texto comprensivo es un texto de fundamentos que impacta por la presentación de los temas; desafortunadamente, por la diversidad de intereses pedagógicos y la concepción que tiene cada profesor sobre los fundamentos de la matemática, el texto fue reemplazado por otros textos da carácter menos formal.

En la década de los ochenta, la publicación de textos de matemática en la Universidad Nacional de Colombia había aumentado considerablemente. El texto *Introducción a la Teoría de conjuntos* de José Muñoz se publica en 1979, adquiriendo prontamente aceptabilidad como texto básico por su enfoque intuitivo-axiomático y su presentación pedagógica, características que lo hicieron utilizable en carreras diferentes a la matemática.

Este texto, de carácter comprensivo, aparece tres años después de la introducción de la Matemática Moderna en el bachillerato, justamente en el período de implantación de la *nueva matemática*, de allí que fuera de gran aceptación porque además combina adecuadamente lo intuitivo, lo formal y lo axiomático, comenzando con una corta pero útil introducción sobre lógica proposicional y manejo de cuantificadores, proporcionando una herramienta esencial en las definiciones de operaciones entre conjuntos. El contenido expuesto comprende ocho capítulos: Desarrollo intuitivo, desarrollo axiomático, funciones y relaciones, números naturales, construcción de los sistemas numéricos, conjuntos infinitos y cardinales, elección, cardinalidad y regularidad; y finalmente, números ordinales.

Algunos aspectos para destacar en esta forma de enseñar los conjuntos son: 1. La construcción de los sistemas numéricos, tema que no aparece en la mayoría de los libros sobre teoría de conjuntos y que además se presenta deficiente en los textos de matemática básica; 2. La presentación axiomática de la teoría de conjuntos según la axiomática de Zermelo- Fraenkel; 3. La aplicación del axioma de elección en la obtención de enumeraciones de conjuntos mediante funciones sobreyectivas (Muñoz, 1994); 4. La incorporación de exposición de motivos al comienzo de cada capítulo. Un aspecto débil en la presentación de los ejemplos es la inclusión de los números naturales y sus operaciones antes de su construcción. Si se está construyendo una teoría formal, no es del caso incluir anticipadamente elementos que no han sido definidos; si se usan ejemplos de conjuntos u operaciones entre conjuntos, estos números deben mirarse como simples objetos o elementos sin atribuirles propiedad alguna.

Falencias de este tipo están presentes en textos de cálculo, álgebra, etc., donde en la introducción de conceptos se usan elementos que no han estado en la discusión; en el caso de la inclusión de los números, esto se hace buscando que los conceptos sean asimilados fácilmente por los alumnos, por tanto, se sacrifica la abstracción y el rigor del formalismo que exige olvidarse del significado de los objetos para trabajar únicamente con las formas en beneficio de la pedagogía.

De todos los textos utilizados para la enseñanza de la teoría de conjuntos, el de Suppes (1968), *Teoría Axiomática de Conjuntos*, es quizá el que más se aproxima a un texto comprensivo de fundamentos de matemática, aunque no es el más pedagógico porque de entrada enfrenta al alumno con la axiomática. Se estudió en la década de los setenta y los ochenta en las Universidades del Atlántico y Córdoba; posteriormente, en 1994, se utilizó como texto guía en el Programa de Matemáticas de la Universidad de Cartagena. Como su nombre lo indica, presenta un enfoque axiomático exponiendo la axiomática de Zermelo-Frankel, y según lo afirma en su prólogo (Suppes, 1968), “no se requiere conocimiento previo de teoría de conjuntos o de lógica matemática” (p. v); sin embargo más adelante afirma que el libro preferiblemente debe usarse “en un curso semestral de teoría de conjuntos para estudiantes de cuarto año de universidad o primero de post-grado” (p. vii).

El contenido del texto está distribuido en ocho capítulos: una introducción al simbolismo lógico, algunas paradojas y el esquema axiomático; desarrollo general de la axiomática de Zermelo-Frankel; relaciones y funciones; equipotencia, conjuntos finitos y números cardinales; ordinales finitos y conjuntos enumerables; números racionales y números reales; inducción finita y aritmética ordinal; y finalmente, el axioma de elección.

El desarrollo de los temas es estrictamente formal y supone que el estudiante está familiarizado con los desarrollos axiomáticos, hipótesis que no era del todo cierta, porque la enseñanza de la matemática desde el bachillerato conservaba el aspecto instrumental prolongándose hasta la matemática universitaria, y en el primer año de universidad para los estudiantes de matemática, la enseñanza de la matemática intentaba aproximarse a lo formal a partir de lo informal; así que, utilizar un texto completamente axiomático para la enseñanza de la matemática se convirtió en algo traumático para los estudiantes, hecho que produjo un rápido abandono del texto en las licenciaturas.

Siendo consecuente con lo anterior, podría decirse que el deseo del fin formativo propuesto mediante la enseñanza axiomática de la teoría de conjuntos se convirtió en un fin instrumental, porque el resto de las asignaturas de matemática no se enseñaron dentro de una axiomática estricta; además, como ocurrió con la enseñanza de la matemática moderna en el bachillerato, muy pocos profesores al exponer su teoría advierten que lo hacen bajo el formalismo, estos simplemente transmiten, trasponen y transfieren la teoría enseñada.

Otro texto de bastante manejo en los programas de licenciaturas en las Universidades del Atlántico y Sucre y en el Programa de Matemáticas de la Universidad de Cartagena fue *Set theory* de Charles Pinter. Este texto comprensivo sobre un tópico de los fundamentos de la matemática fue publicado en 1971, y comenzó a utilizarse como referencia principal más o menos a partir de 1978 en el curso teoría de conjuntos. Pinter propone un texto sobre fundamentos de la matemática o teoría de conjuntos para estudiantes de matemática, preferiblemente de segundo o tercer semestre, presentando una teoría formal con tendencia axiomática basada en el concepto de clase.

En el prefacio del libro (Pinter, 1971) manifiesta que la teoría se expone de manera rigurosa pero sencilla como sea posible, haciendo comentarios sobre las definiciones expuestas con un nivel creciente de complejidad cuidadosamente planeado. “A través de los primeros cuatro capítulos el nivel de abstracción surge gradualmente llegando a ser mas difícil en pequeños pasajes” (p. iv). Asegura también, que es aconsejable comenzar con la historia sobre el surgimiento de los conjuntos, luego presentar los temas concernientes a propiedades de clases, funciones, relaciones y orden, con un enfoque axiomático particular que no difiere mucho de un tratamiento intuitivo; y después, introducir el Axioma de Elección, los números naturales, conjuntos finitos e infinitos, cardinalidad, ordinales y recursión transfinita; es decir, realizando un procedimiento de tipo inductivo[242] en cuanto al orden de presentación de los temas.

[242] Se refiere al procedimiento que consiste en comenzar con lo más sencillo y luego ir aumentando la complejidad.

La enseñanza de los conjuntos con el texto de Pinter a partir del concepto de clase ofrece confusión a los estudiantes porque estos no tienen clara la diferencia entre clase[243] y conjunto, confusión que se aumenta cuando Pinter establece el concepto de clase como término no definido dentro de su axiomática particular y dedica su estudio a aquellas clases que son conjuntos, estableciéndose entonces una sinonimia entre conjunto y clase que no es del todo clara, pues las clases son colecciones cuyos objetos son los objetos de la teoría de conjuntos. Obviando esta discusión, el texto tiene como objetivos presentar una axiomática particular para la teoría de conjuntos, mostrar la teoría de conjuntos como parte de los fundamentos de la matemática y desarrollar la teoría de conjuntos como herramienta para la cimentación de la matemática.

El método predominante para alcanzar estos objetivos de la enseñanza según este texto, consistió en presentar un número representativo de variados ejemplos intercalados en el contenido, como ilustración o ampliación de la teoría expuesta, de manera mixta como se hizo con los otros textos analizados y como se presenta en la mayoría de los textos. Al final de cada sección o capítulo aparecen numerosos ejercicios de revisión, recapitulación y ampliación que el estudiante debe resolver para demostrar que aprendió, siendo esta la metodología de la enseñanza de la matemática en general en el Caribe Colombiano y quizá a nivel mundial. Resumiendo lo dicho, la enseñanza de la matemática, o mejor, el quehacer matemático ha transcurrido en la mayor parte del tiempo entre la exposición de una teoría, la exhibición de ejemplos para ilustrar o reforzar le teoría y la propuesta de ejercicios para afianzar dicha teoría.

7.2 TEXTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES

En este apartado se analizará la influencia de la lógica y los conjuntos en la enseñanza del curso de matemáticas generales y similares, mediante el examen de tres libros que sirvieron como libros de texto o de referencia en las universidades del Caribe Colombiano a partir de los años setenta, imponiendo en algunos casos el contenido

[243] Una clase x es un conjunto si y solo si existe una clase y tal que $x \in y$. Un conjunto es una clase que pertenece a alguna clase; si una clase no es un conjunto entonces diremos que es una clase propia

curricular del primer curso de matemática. Los libros por analizar son *Fundamentos de Matemáticas Universitarias* de Allendoerfer y Oakley, *Álgebra y Trigonometría* de Vance y *Matemáticas Básicas con Vectores y Matrices* de Taylor y Wade, considerados los precursores en presentar la matemática fundamental con base en los conjuntos.

El texto de Allendoerfer[244] y Oakley fue escrito para establecer un puente entre el álgebra clásica del bachillerato y el cálculo universitario, presentando los conceptos primarios de lógica y conjuntos tratando llenar el vacío existente en la presentación de algunos conceptos exigidos por las nuevas tendencias de la matemática en los años sesenta. En la presentación al estudiante los autores conceptúan que "como la matemática es una materia técnica, necesitamos introducir una terminología nueva que comprende palabras que no son familiares, tales como conjunto, unión, intersección, ley distributiva, matriz, función, derivada, integral y otras muchas."

Por el contenido presentado, el texto se clasifica como tecnológico y se ubica en los años sesenta. Sus diecisiete capítulos presentan una distribución de temas que puede agruparse en las secciones sistemas numéricos, álgebra clásica, trigonometría, geometría analítica y cálculo. La primera sección, la que realmente presenta innovación, contiene dos capítulos: El método matemático y el sistema de los números. El método matemático contiene aspectos sobre conjuntos, proposiciones, operaciones con conjuntos, implicaciones, métodos de demostración y modelos matemáticos, en una extraña mezcla de lógica y conjuntos, quizá parafraseando a Mutis en la exposición de su *método matemático* en una versión moderna. El segundo capítulo expone una presentación un poco axiomática de los números reales comenzando con el concepto de operación binaria para sustentar las operaciones con los números; luego introduce los naturales y continúa con los enteros, los racionales, los irracionales, extendiéndose después a los complejos. Las demás secciones corresponden a temas de la matemática clásica presentados con el apoyo de los conjuntos.

[244] El primer texto conocido en el Caribe Colombiano fue la segunda edición en español Allendoerfer, C (1967). *Introducción a la matemática Moderna Superior*. (2ª ed.). Madrid: Editorial El Castillo.

La idea general de Allendoerfer y Oakley (1973), es presentar los conceptos fundamentales de la matemática para el estudio del cálculo, con un enfoque relativamente moderno para la época, partiendo del concepto de conjunto. La presentación que pretende ser formal, se queda un plano informal e intuitivo, porque la lógica se emplea conjuntamente con las operaciones entre conjuntos, así por ejemplo, unión y disyunción, intersección y conjunción, relación de contenencia y condicional, igualdad y bicondicional, negación y complemento. Los pocos elementos de lógica tienen por objeto justificar los métodos de demostración; el directo, que se expone mediante el empleo de la propiedad transitiva del condicional, y el indirecto como equivalencia del condicional y el contrarecíproco.[245] Los métodos de demostración son utilizados a lo largo del texto para probar los teoremas en el desarrollo de cada tema.

Aunque los desarrollos de la lógica y la teoría de conjuntos son muy reducidos, el texto de Allendoerfer y Oakley determinó los temas a enseñar en las carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas a partir de su publicación en español en 1973, hasta el punto de encontrar programas de matemáticas cuyo contenido es igual al del libro. Es importante destacar que en este libro aparece la definición de operación binaria y sus propiedades y la representación de números complejos como pares ordenados. Sin duda, este libro originó cambios significativos en la enseñanza de la matemática universitaria en el Caribe Colombiano y contribuyó a la fundamentación de los sistemas numéricos, pero ayudó muy poco a la generalización y la abstracción por su forma intuitiva de exponer la teoría transferida en forma inmediata con ejercicios de tipo mecánico.

En 1990 aparece la cuarta edición[246], reorganizando los contenidos y orientando los problemas sobre aplicaciones hacia las Ciencias Económicas, se elimina la sección de trigonometría reorganizando las otras cuatro secciones con algunos cambios significativos porque se aclaran mucho más los conceptos y se reduce la dificultad de los ejercicios. La primera sección se separa en tres capítulos: Conjuntos, Lógica y Números. El capítulo uno se dedica a los conjuntos y se incluyen los conceptos de conjunto de partes, propiedades de las operaciones con conjuntos y número de

[245] $p \to q$ es equivalente a $-(q) \to (-(p))$

[246] Allendoerfer, C y Oakley, C (1990). *Matemáticas Universitarias*. (4ª ed.). México: McGraw Hill.

elementos de un conjunto; el capítulo dos comprende proposiciones lógicas, conectivas, tablas de verdad de una proposición, tautología y contradicción (con tablas de verdad), algunas equivalencias, argumentos lógicos y cuantificadores; el capítulo tres comprende los naturales, los enteros, los racionales, los irracionales, una aproximación a la construcción axiomática de los números reales y operaciones binarias. En esta primera sección es desacertado incluir primero conjuntos y después lógica porque esta última queda desconectada de los demás temas, esto no ocurría en la edición anterior donde los teman estaban entremezclados y lo poco de lógica soportaba los métodos de demostración. Por otra parte, como no se exponen las reglas de inferencia los argumentos lógicos que se presentan son muy sencillos perdiéndose el poco esfuerzo dedicado a la lógica; es decir, se avanza en la presentación pedagógica pero se sacrifican contenidos matemáticos.

Álgebra y Trigonometría de Elbridge Vance es la versión en español de *Modern Algebra and Trigonometry* cuya tercera edición fue publicada en 1973 por Addison Wesley y la edición bilingüe publicada en 1974 por la misma editorial con el título *An Introduction to Modern Mathematics* (Introducción a la Matemática Moderna). El texto fue utilizado en la Universidad del Atlántico en el curso de álgebra durante los años setenta y ochenta, tanto en la Licenciatura en Matemáticas y Física como en Ingeniería. Este libro de carácter tecnológico, enmarcado en los años sesenta, adolece de contenidos de lógica, pero presenta tres aspectos importantes que contribuyen esencialmente a la fundamentación de la matemática.

El primer aspecto corresponde a la introducción de los conjuntos en el primer capítulo exponiendo las definiciones con un lenguaje claro y formal desde la lógica. Como este libro fue escrito para estudiantes de los Estados Unidos de Norte América, supone que el estudiante en el bachillerato obtuvo conocimientos elementales de lógica, por lo tanto, la presentación de los conjuntos se hace teniendo en cuenta esta situación. El segundo aspecto importante es la construcción axiomática de los números reales comenzando con la construcción de los naturales, los enteros y los racionales. El tercer aspecto importante es la exposición de los reales como campo ordenado y la presentación de todos los temas de manera formal, lamentando que la exposición se presenta inconclusa faltando el axioma de completitud, para mostrar los números reales como un campo ordenado y completo.[247] En términos generales el autor se propone, según lo asevera en el prólogo,

> *…educar al estudiante en la naturaleza de la Matemática considerada como sistema lógico, haciendo hincapié en que el alumno debe captar la importancia de las definiciones precisas, la necesidad de plantear explícitamente las hipótesis y el hecho de que todo sistema matemático consta de estas definiciones e hipótesis, junto con los resultados deducidos mediante un razonamiento lógico.*

Las palabras del autor reflejan el deseo por pretender implantar el método axiomático e inducir al alumno a la abstracción mediante la teoría y los ejercicios propuestos a lo largo del contenido de su obra, el cual distribuye en 16 capítulos con temas de álgebra y trigonometría incluyendo además vectores, matrices, análisis combinatorio, teorema del binomio e inducción matemática, los cuales podrían estar dispuestos en otro orden para lograr una exposición más rigurosa y didáctica.

El tercer libro en analizar es *Matemáticas Básicas con Vectores y Matrices* de Taylor y Wade, traducido al español en 1966 de su versión original *University Freshman Mathematics* publicada en 1963. Este libro, al igual que otros sobre el mismo tema, fue publicado en los años sesenta en los Estados Unidos de Norte América, período de muchos cambios en la enseñanza de la matemática, los cuales se dieron para pretender sobrepasar el nivel de desarrollo en matemática alcanzado por la antigua Unión Soviética, comunidad que inicia la carrera espacial en 1959.

Por otra parte, la introducción de la matemática moderna en Francia, Bélgica y otros países europeos estimuló la creación de organizaciones que enfrentaron el reto de reformar la enseñanza de la matemática; así las cosas, a finales de 1959 se creó *The School Mathematics Group* con la misión de redactar nuevos textos para la enseñanza

[247] Una presentación de los reales en este sentido se encuentra en el texto de esa época Apóstol, T (1972). Calculus Vol. I. (2ªed.). Barcelona: Reverté, S.A.

de la matemática universitaria, organización que después fue apoyada por *The University of Illinois Committee on School Mathematics* y el *Committee on the Undergraduate Program in Mathematics*. De estas organizaciones surgieron los textos para la enseñanza universitaria de la matemática en los Estados Unidos, algunos de ellos traducidos al español y utilizados como libro de texto o de consulta, tal es el caso del texto de Taylor y Wade.

Básicamente, el texto de Taylor y Wade es un texto de álgebra y trigonometría con los temas adicionales conjuntos, sistemas numéricos, construcción de los números reales, vectores, matrices e inducción matemática. De acuerdo con lo expresado en el prólogo, el texto tiene por objeto "proporcionar una transición continua entre los estudios respecto a las propiedades fundamentales y estructurales de los sistemas numéricos del álgebra que se ha efectuado en las preparatorias, y en las matemáticas abstractas modernas, de los cursos superiores"; después indica que el libro también se escribió para "proporcionar una transición entre la nueva base obtenida en preparatoria y los cursos completos de cálculo y álgebra moderna que ahora se imparten en la mayoría de los centros de enseñanza superior."

Las palabras expresadas en el prólogo son muy claras y apuntan directamente a la enseñanza de la matemática en Estados Unidos; por lo tanto, al utilizar el texto en Colombia y particularmente en el Caribe Colombiano presenta problemas porque se encuentran vacíos en la enseñanza de la matemática en el bachillerato, ya que en el bachillerato colombiano en los inicios de los años setenta los programas de estudio aún no incluían ni lógica ni las propiedades estructurales de los sistemas numéricos.

Lo anotado anteriormente se debió a que la Aritmética y el Álgebra de Baldor reinaron hasta 1975 y mucho más allá en los planteles del área rural, los textos de primaria escritos por la Misión Alemana contenían propiedades aisladas y no estructuradas de los sistemas numéricos, las reformas educativas habían introducido tímidamente el tema de conjuntos sin sinergia con el resto de los contenidos, y estos temas generalmente fueron tratados por aquellos profesores que habían obtenido su título de licenciado a finales de la década de los sesenta, cuando comenzó la introducción de la matemática moderna en las licenciaturas.

Vemos entonces que la implantación del texto de Taylor y Wade y otros de su género no fue totalmente acertada debido a la diferencia de contenidos de matemática entre el bachillerato Colombiano y el de Estados Unidos; no obstante, utilizar este texto trajo algunos beneficios, pues este texto es uno de los pocos en donde se definen los sistemas matemáticos y numéricos que serían implementados posteriormente en la enseñanza de la matemática en la educación primaria y media básica por Carlos Vasco.

El contenido del texto está dividido en 13 capítulos: Conceptos básicos; sistemas numéricos y sistema de números racionales; números reales y complejos; valor absoluto, gráficas y funciones; sistemas de ecuaciones lineales; vectores, matrices y determinantes; inducción matemática y teorema del binomio, polinomios y funciones polinomiales; exponentes, funciones exponenciales y logarítmicas; razones y funciones trigonométricas; funciones trigonométricas inversas; forma trigonométrica de un número complejo y solución de triángulos. Miremos especialmente los tres primeros capítulos que incluyen conceptos de lógica y conjuntos, ya que los otros corresponden al álgebra y la trigonometría.

El primer capítulo comienza introduciendo los conceptos de conjunto, relación de pertenencia y variable, definiendo esta última como "un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado conjunto universal de la variable o universo de la variable" (p. 19). Aquí, el concepto de conjunto universal se equipara al concepto de *universo de discurso* dado por Suppes. Después de esto introduce los símbolos → y ↔ para representar las proposiciones *Si p, entonces q* y *p si y sólo si q* respectivamente, las cuales utiliza posteriormente en el enunciado de definiciones y propiedades. Esto es lo único de lógica incluido en el texto, y lo que se pretende con el condicional y el bicondicional es sustituir el lenguaje por símbolos en vez de dar un tratamiento a estos como functores.

El segundo capítulo articula el concepto de relación de equivalencia con el de sistema numérico, para definir de manera abstracta, con base en el concepto de operación binaria, un número como un elemento de un sistema numérico; seguidamente, presenta una construcción axiomática de los números enteros y los números racionales como campo ordenado, aseverando que cada número racional corresponde a una clase de equivalencia. El tratamiento dado en este capítulo a los sistemas numéricos es excepcional, tanto en la parte fundamental como en la parte de fundamentos de la matemática, ya que el interés por el establecimiento de los fundamentos de la matemática a finales del siglo XIX, como ya se sabe, se llevó a cabo a partir de los trabajos de Weierstrass, Cantor, Dedekind y Frege entorno al concepto de número siendo este es el propósito inicial del autor a través de su obra, partir de los conceptos de sistema y número para poner un enlace entre la matemática tradicional de antes de los sesenta y la matemática moderna iniciada oficialmente en Colombia a partir de 1961.

La construcción axiomática de los números reales como campo ordenado y completo se presenta en el capítulo tercero, mostrando primero la insuficiencia de los racionales para representar raíces cuadradas no exactas; posteriormente discute la representación decimal de racionales e irracionales finalizando con la construcción también axiomática de los números complejos a partir de los números reales. En el capítulo sexto introduce la estructura de espacio vectorial tomando los vectores en el plano, y las estructuras de grupo, anillo y álgebra[248] a partir de las matrices.

El texto de Taylor y Wade no es un libro sobre fundamentos, pero presenta una iniciación al estudio de los mismos, considerando el concepto de número como teoría fundamental o de base para la enseñanza de la matemática. Se utilizó en las Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico en reemplazo del texto *Álgebra y trigonometría* de Spitbartz, y en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Popular del Cesar como texto de matemáticas fundamentales, hecho que muestra un cambio sustancial en la enseñanza de la matemática moderna y del método axiomático en sentido más estricto.

[248] Define un álgebra sobre un campo F como un espacio vectorial V con una operación adicional, llamada multiplicación , sobre el conjunto de vectores que es asociativa y distributiva a izquierda y derecha, con la propiedad adicional $\alpha(\mathbf{uv}) = (\alpha\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}(\alpha\mathbf{v})$, $\alpha \in F$; $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$

La presentación de la matemática moderna en Taylor y Wade tiene un carácter instrumental al igual que en los dos libros anteriores, el hilo conductor de las estructuras se presenta en forma discontinua, este hecho se nota en la construcción de los números enteros y racionales donde no se mencionan los grupos y anillos, sino que este concepto se reserva para las matrices; además, si se pretende enfatizar en el método axiomático para el desarrollo del álgebra y la trigonometría, su presentación debió hacerse antes de introducir los conjuntos, exponiendo los métodos de demostración con base en la lógica aristotélica. Estas apreciaciones no le restan métodos a la pretensión del autor porque el texto sin ser un elemento renovador, se erige como una nueva alternativa en la presentación de la llamada matemática básica.

En resumen, la idea presente en los libros de matemática básica es una iniciación a la matemática moderna, presentando una ruptura con los libros clásicos sobre este tema, pero continúan mostrando la matemática como una teoría elaborada donde el alumno debe memorizar definiciones y propiedades para luego aplicarla en la solución de ejercicios, generalmente poco relacionados con lo que se presenta en el diario vivir.

8. CONCLUSIONES

Atendiendo al propósito de esta investigación, centrado en determinar cuál fue el papel de la lógica y teoría de conjuntos en los primeros cursos de matemática en las universidades del Caribe colombiano durante las últimas cuatro décadas del siglo pasado, se proponen estas conclusiones, derivadas de los hallazgos obtenidos al inquirir actores e inspeccionar archivos, documentos de programas, textos escolares y otras investigaciones relacionadas con el tema.

En ningún momento estas conclusiones, algunas de las cuales fueron relacionadas a lo largo del trabajo y que aquí nuevamente se recogen con el propósito de reunirlas en un solo apartado, no pueden ser consideradas como verdades universalmente válidas, porque la educación es en cierta forma intencional y transmisora de un acervo cultural, las prácticas matemáticas hacen parte de ese acervo y los valores asociados a esas prácticas no son universales; pero estas conclusiones son válidas en el universo de discurso, considerado como una axiomática particular que no pretende generalizarse para evitar caer en una incompletitud a la manera de Gödel.

Respecto al primer objetivo propuesto en el proyecto, se resalta que la matemática enseñada en las universidades del Caribe Colombiano fue y sigue siendo clásica, con tal vez la excepción de aquellos programas dedicados al estudio de la matemática. Esta afirmación es el resultado de la revisión de diversas investigaciones sobre la enseñanza de la matemática en Colombia, revisión que también permitió traer desde los comienzos de la República en tiempos coloniales los vestigios sobre la lógica. Como se pudo observar, la enseñanza de la lógica en esa etapa estuvo influida por la escolástica, el dominio de la lógica aristotélica fue evidente a través del Organon y las obras de Tomás de Aquino, San Agustín, Wolff y otros; la lógica estuvo inmersa en los estudios de filosofía pasando por la lógica estoica, la medieval, la renacentista y la lógica como arte de pensar, hasta llegar a la lógica moderna y la lógica matemática a mediados del siglo pasado.

Fueron casi cuatrocientos años bajo el influjo de la lógica clásica en Colombia dedicados en su mayor parte al estudio del silogismo, la proposición modal, las categorías, los Primeros Analíticos y la Lógica de Port Royal difundida por José Félix de Restrepo, con ausencia de la lógica moderna cuyo desarrollo se había dado en Europa desde la aparición de la obra de Boole; así que, mientras existía una teoría incipiente sobre la lógica matemática desde los años cincuenta del siglo XVIII, en nuestro territorio esta era prácticamente desconocida hasta 1948, enseñándose una lógica orientada a la retórica, al conocimiento de la estructura del entendimiento humano y la argumentación filosófica, muy distante de los fundamentos de la matemática.

En términos más precisos, la lógica que se enseñó en Colombia como parte de la filosofía estuvo siempre subordinada a esta, por lo tanto su enseñanza ejercida en universidades y conventos se proporcionó como arte y ciencia de la argumentación casi inmediata a través del silogismo, como argumentación para hablar y escribir mejor, como ciencia de las formas del pensamiento, como arte especulativo y directivo del pensar, y como un conjunto de leyes necesarias para estructurar el pensamiento. De esta lógica y de la enseñanza de la matemática en general se vislumbran tres hechos importantes: La introducción del método axiomático con Mutis, el intento de formalización de los números reales por parte de Mimbela con los indivisibles y el concepto precursor de partición de un conjunto introducido por de Restrepo.

Incursionando ahora en el significado de la expresión *fundamentos de la matemática* en el Caribe Colombiano, puede decirse que aún existe confusión alrededor de dicha expresión. Partiendo de que los primeros profesores de matemática eran ingenieros y que en los sesenta y setenta se formaron los profesores universitarios en los programas de licenciaturas, la mayoría de estos entendían los fundamentos como aquellas teorías básicas que servían de soporte a diferentes áreas de la matemática; así por ejemplo, para ellos el álgebra clásica y la trigonometría eran los fundamentos del cálculo, el cálculo era el fundamento de las ecuaciones diferenciales y los métodos de demostración servían como fundamento a la justificación de los teoremas. Esta confusión es atribuible al desconocimiento de los profesores sobre los fundamentos de la matemática, porque dicha temática no estaba incluida en los programas de los cursos de matemática o porque sencillamente no se preocuparon por indagar sobre el tema.

Si miramos la evolución de los fundamentos de la matemática en la enseñanza universitaria del Caribe Colombiano, puede decirse que esta ha transcurrido entre avances y retrocesos. En el caso de la enseñanza de los fundamentos para estudiantes de carreras no matemáticas, en el período estudiado no se enseñó fundamentos de matemática porque como se mostró en los capítulos seis y siete, el curso inicial de matemáticas comprendía temas sobre lógica y conjuntos que no estaban lo suficientemente insertados en la temática restante; se enseñó conjuntos sin rudimentos lógicos y luego los conjuntos fueron estudiados como algo cultural, pues al hablar de sistemas numéricos el término conjunto era absorbido por el de sistema y posteriormente en la enseñanza del cálculo, la lógica parece no haber estado presente en las demostraciones y la teoría de conjuntos no se visualizó en la presentación adecuada de la temática.

Las reformas hechas a los programas del primer curso de matemática universitaria se hicieron en detrimento de la lógica y los conjuntos, reduciendo estos temas a una corta introducción al comienzo del curso, pues en muchos casos los autores de estas reformas eran directivos que aprendieron la matemática sin conceptos básicos de lógica y con muy poco de conjuntos, o en cursos donde la matemática moderna y la clásica ocupan sus puestos sin clara relación entre ellas.

El análisis realizado a los textos de matemáticas básicas o universitarias permite afirmar que a partir de estos, la lógica y los conjuntos no se trataron suficientemente para dar soporte desde los fundamentos al desarrollo de la teoría matemática expuesta en ellos, el acople a dichos temas fue débil y en algunos invisible, de allí que en las carreras no matemáticas no se vio la importancia de la lógica y los conjuntos en la construcción de la matemática; de hecho, en los sesenta y parte de los setenta se enseñó matemática sin lógica y conjuntos.

Lo señalado anteriormente lleva a concluir que la lógica y los conjuntos no facilitaron la comprensión de las restantes teorías contributivas de la matemática en los cursos universitarios de matemática en el Caribe Colombiano porque los textos de álgebra, geometría analítica y cálculo utilizados en esos años carecían de temas de lógica y conjuntos, y los nuevos textos de matemática básica aparecidos en los setenta proponen la enseñanza de la lógica y los conjuntos de manera instrumental; en el caso de la lógica, primero como herramienta de formalización en el discurso ordinario, y luego como herramienta para justificar expresiones del lenguaje y los métodos de demostración, y en el caso de los conjuntos, como concepto que aclara la definición de otros conceptos y no como concepto base de la matemática en general.

Muy a pesar de que la enseñanza de la lógica tanto en el nivel primario como el secundario y el universitario no cumplió cabalmente su cometido, se concluye que tanto la lógica clásica como lógica proposicional y de predicados debe conservarse de cierta manera, para conducir con fortaleza los razonamientos en todas las disciplinas y para estimular el hábito del rigor en matemática; por eso, de conformidad con Beltrán (2003), la enseñanza de la lógica clásica se justifica porque

> *La ciencia a la que honramos en la vida universitaria, es un saber de lo mediato, es un habitus conclusionum. Ahora bien, la razón humana, puesta en el ejercicio del conocimiento científico, no puede conducirse con seguridad y firmeza sino gracias al hábito que ordena sus actos conforme a las exigencias de la verdad. No podemos esperar que los jóvenes estudiantes aprecien el valor de las justificaciones que todo saber ha de ofrecer, ni que estén en condiciones de criticar aquellas afirmaciones que les resulten inaceptables, ni que se pongan a salvo de las trampas falaces, a menos que su razón esté perfeccionada por la técnica del buen discurrir.* (p. 150)

De acuerdo con lo anterior, queda especificado que los contenidos básicos de lógica para un primer curso universitario son el cálculo proposicional y el cálculo de predicados, pero en los programas analizados para carreras no matemáticas se constató que por lo general en el cálculo proposicional no se enseñó la teoría de la argumentación, y el cálculo de predicados estuvo ausente en el currículo de matemática, pues la enseñanza de la lógica se redujo a la manipulación de tablas de verdad y el uso de ciertas equivalencias para explicar los métodos de demostración y el manejo de cuantificadores en el lenguaje ordinario.

En los programas de licenciatura en matemáticas y matemática pura se observó que los contenidos de lógica estuvieron presentes en estos programas, con más fuerza en unos que en otros, pero con una débil orientación, ya que el objetivo se dirigió a mostrar el papel que juega la lógica en la enseñanza de la prueba, papel que a la postre queda oculto porque tanto el profesor como el estudiante se guían por la técnica del buen discurrir que se adquiere con la ejercitación de la demostración.

El camino seguido en la enseñanza de la lógica fue el de la lógica clásica aristotélica con muchas imperfecciones y vacíos, omitiéndose la advertencia de que esta lógica bivalente amparada en el principio del tercio excluso no es única, ya que de hecho existen otras lógicas llamadas no clásicas. Además, no se aclaró que la presentación de los contenidos se hizo desde la llamada corriente pedagógica informal la cual se reserva los términos argumento, razonamiento e inferencia; por tanto, permaneció ausente la presentación de la misma lógica desde lo estrictamente formal, es decir, desde lo axiomático, desde la proposición, la implicación y la consecuencia. Adicionalmente, en los programas analizados no se hace mención de que lógica se trata, ni qué comprende realmente la lógica, ni hacia donde se orientan sus aplicaciones; por tal razón, estuvieron ausentes los conceptos de deducción, modelos y recursividad.

Sin duda alguna, la CIAEM de 1961 y las diferentes reformas dadas en la educación básica y en la universitaria impulsaron el estudio de los conjuntos, como teoría de sustento para la construcción de la matemática y como un lenguaje unificador para las diferentes temáticas que constituyen la matemática, pudiéndose decir que este fue el papel de la teoría de conjuntos en el currículo general de matemáticas y por ende en el currículo universitario de matemática.

El papel de la teoría de conjuntos en la enseñanza de la matemática universitaria señalado anteriormente difiere para carreras no matemáticas y carreras de matemática del Caribe Colombiano. En las Ingenierías y las Ciencias Económicas, el papel de los conjuntos fue el de proporcionar un concepto base o de partida para otras nociones o disciplinas de la matemática como los sistemas numéricos, el álgebra lineal y el cálculo; en las carreras de matemática, el papel fue el de servir como plataforma teórica para la matemática moderna y la formalización de la matemática en general presentada con base en las estructuras, papel que se pudo evidenciar en los libros analizados.

En cuanto a la enseñanza de la lógica, los conjuntos y la matemática universitaria en general en las Universidades del Caribe Colombiano en el lapso 1961-2000 puede decirse que:

- Las concepciones matemáticas de los profesores se situaron muy próximas al formalismo con una idea platónica de los objetos matemáticos, donde los contenidos teóricos son una parte imprescindible del desarrollo de las nociones matemáticas. La enseñanza de la matemática se orientó más por los contenidos que por los objetivos.

- El dominio de la enseñanza de la matemática clásica permitió prescindir de la lógica y la teoría de conjuntos para desarrollar los demás componentes de la matemática. Antes de 1961 e inclusive hasta mediados de los setenta no fue necesario, al menos de manera explícita, la lógica ni los conjuntos en la enseñanza del álgebra, la trigonometría, la geometría analítica, el cálculo y las ecuaciones diferenciales. Esto se evidencia en el contenido de los textos utilizados en esos años.

- Los objetivos de los programas de estudio en el primer curso universitario de matemática no quedan claros, reduciéndose la enseñanza a un conglomerado de contenidos conceptuales y tareas de ejercitación; excesivamente idealizados.

- La resistencia al cambio para enseñar lógica y conjuntos por parte de los profesores en los cursos universitarios fue notable, al principio estuvo directamente relacionada tanto con la consistencia o no de las creencias particulares de los profesores sobre la matemática y sus fundamentos como con la preparación académica del docente en lógica y conjuntos. A partir de la aparición de la matemática moderna en el ámbito universitario la situación cambió para los programas de matemáticas, pero muy poco cambió en otros programas donde la tendencia hacia la matemática tradicional estuvo presente.

- El currículo universitario de matemática y de los fundamentos de la matemática en el Caribe Colombiano estuvo fuertemente determinado por los textos escolares, muchos de ellos presentando un contenido en discordancia con las necesidades de los estudiantes. Los textos utilizados fueron escritos para satisfacer las necesidades educativas de los países de origen y no las de nuestros estudiantes.

- Respecto a la enseñanza de los fundamentos de la matemática puede decirse que los siguiente primeros cursos de matemáticas se caracterizaron por la diversidad de contenidos, unas veces como álgebra y trigonometría, otras veces con una mezcla en la que se intercalaban rudimentos de lógica y conjuntos, álgebra clásica y trigonometría y otras en las que los fundamentos quedaban divididos en los cursos de lógica y teoría de conjuntos. Los contenidos estuvieron siempre atados a los libros de texto utilizados.

- La organización y estructura de las universidades, así como la cultura de la enseñanza, promueven y perpetúan prácticas tradicionales de enseñanza, en cuya reproducción participan activamente profesores, estudiantes y administrativos. Siempre ha existido cierto rechazo a la lógica y los conjuntos en los currículos de Ingeniería y Ciencias Económicas porque los profesionales de estas carreras han tenido la creencia de que la matemática es simplemente instrumental.

- Como conclusión general podemos decir que la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos en las universidades del Caribe Colombiano fue insuficiente para fundamentar la matemática, los temas enseñados no guardaron mucha relación con los contenidos de la matemática en general, quedando débilmente acoplados y en algunos casos como piezas sueltas. La enseñanza de la matemática se caracterizó por el dogmatismo amparado en el método tradicional expositivo, dirigido a la consecución de la ejercitación y el dominio algorítmico, negándole toda oportunidad a la lógica para actuar como elemento organizador del pensamiento.

Completando los objetivos propuestos se sugiere que un curso de fundamentos para aquellos programas en donde el estudio de la matemática contemple el cálculo y el álgebra lineal debe contener los siguientes temas: Cálculo proposicional, teoría general de la inferencia, cálculo de predicados, la definición de axiomática, ejemplo de una axiomática para el cálculo proposicional y de predicados, operaciones con conjuntos, producto cartesiano, relaciones, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, funciones, concepto de operación, concepto de sistema numérico y construcción de los sistemas numéricos a partir de las relaciones de equivalencia. Alternativamente se puede hacer la construcción de los números reales axiomáticamente.

De esta investigación se derivan algunas tareas futuras. La investigación puede ampliarse incluyendo un análisis más profundo de la enseñanza de la matemática moderna en primaria y bachillerato en Colombia, con el objeto de diseñar un currículo coherente incluyendo la lógica, los conjuntos y las estructuras algebraicas. Esta tarea no es fácil y no es obra de una sola persona, Francia lo hizo en 1999 y otros países después del año 2000, pero lo importante es que permitirá renovar el actual currículo que aún conserva en gran parte la estructura establecida en los Decretos 1710 de 1963 y 045 de 1962.

Después de analizar la bibliografía relacionada con los fundamentos de la matemática utilizada en el primer curso universitario de matemática, se encontró que hay diversidad de criterios con respecto al significado de los fundamentos; por lo tanto, un problema abierto es la elaboración de un texto universitario de fundamentos que satisfaga las necesidades de nuestros educandos.

A partir de las investigaciones nacionales examinadas sobre este tema, hace falta un estudio para determinar cómo y qué matemática se enseñó en Colombia y en particular en el Caribe Colombiano en los niveles educativos de primaria y secundaria en los siglos XIX y XX, ya que la investigación toma apenas lo necesario de la enseñanza de la matemática en dichos niveles a partir de 1961. Este estudio debe incluir la evolución de los textos de matemática analizando su contenido, su estructura, la extensión de los temas, la relación entre ellos, la relación que guardan con otros temas, etc. y hacer comparaciones con lo que ocurría sobre ese mismo aspecto en otros países de América Latina.

Finalmente, debe estudiarse también la importancia de la obra matemática de Rodrigo Barreneche en la Universidad del Atlántico, y el aporte que éste pudo dar al desarrollo de la matemática en Colombia.

BIBLIOGRAFIA

Abrate, R; Gabetta, I. y Pochulu, M (2007). La enseñanza de la Matemática en Ciencias Económicas ¿en contexto o fuera de contexto? *Unión*, (12), 53-62.

Abu Abara, J., Bermúdez, I., Ferreira, U. (1981). *Historia de la educación matemática en Colombia durante el período 1820 a 1886*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Ahern, E (1989). El desarrollo de la educación en Colombia 1820-1850. *Revista Colombiana de Educación,* 20(2), 141-156.

Alfonso, Z (2005). La enseñanza efectiva y el docente de matemática. *Equisángulo,* 2(1), 13-25.

Allendoerfer, C y Oakley, C (1973). *Fundamentos de Matemáticas Universitarias* (3ª ed.). México: McGraw-Hill.

Anacona, M., Arbeláez, G., Arboleda, L., Martínez-Chavanz, R y Paty, Michael (2004). *Formación de una cultura científica en Colombia. Ensayos sobre matemáticas y física*. Cali: Artes gráficas del Valle

Antúnez, N (2003). La efectividad de la enseñanza constructivista de la aritmética y el álgebra en bachillerato. Tesis de maestría no publicada, Centro Interdisciplinario de Investigación en Educación Técnica, Cilpancingo, México.

Arbib, M (1976). *Cerebros, máquinas y matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Arboleda, Luis., Arias, J y Espinoza, A (1993). *Matemáticas, astronomía y geología. Historia social de la ciencia en Colombia Tomo II*. Bogotá, Colombia: Tercer mundo editores.

Arias, J y Sánchez, C (2006). Antecedentes de la Facultad de Ciencias. En G Cubillos (Ed.). *Facultad de Ciencias: Fundación y consolidación de comunidades científicas* (pp. 15-58). Bogotá: Universidad Nacional.

Aristóteles (1981). *Tratados de lógica (Organon)*. México: Editorial Porrúa S.A.

Arrieche, M (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.

Artigue, M (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel universitario? *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, 10(2), 117-134.

Babini, J (1980). *Historia de las ideas modernas en matemática* (3ª ed.). Washington: OEA.

Barrow, J (1996). *La trama oculta del universo*. Barcelona: Grijalbo Mondadori, S.A.

Barrow, J (1997). ¿Porqué el mundo es matemático? Barcelona: Grijalbo Mondadori, S.A.

Bell, J (1981). Category Theory and the Foundations of mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 32(4), 349-358.

Beltrán, O (2003). Ars Artium: Vigencia de la lógica clásica. *Revista Teología*, 40(82), 149-162.

Boada, H y García, M (1983). *Historia de la educación matemática en Colombia durante el período 1986-1954*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Bourbaki, N (1950). The architecture of mathematics. The American Mathematical Monthly, 57(4), 221-232.

Bourbaki, N (1962). La arquitectura de las matemáticas. En F. Lionnais (Ed.), "*Las grandes corrientes del Pensamiento matemático*" (pp. 36-49). Buenos Aires: Eudeba.

Campos, J (2006). La lógica medieval y la enseñanza de la lógica. La lámpara de Diógenes, revista de filosofía, (12-13), 207-217.

Collantes, C (2004). La lógica de Port Royal. [Versión electrónica], *Los orígenes de la ciencia moderna actas años XI y XII. Fundación Canaria Orotava de historia de la ciencia*, 497-522. Recuperado el 19 de diciembre de 2008, de /http://www.gobiernocanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/web_fcohc/ 005_publicaciones/ seminario/cienciamoderna.htm

Collantes, C y Expósito, M (1994). El comienzo de la lógica matemática. [Versión electrónica], De la ciencia triunfante a la pérdida de la certidumbre (1700-1900), paginas? Recuperado el 8 de febrero de 2009, de http://www.gobiernocanarias.org/ educacion/ 3/Usrn/fundoro /web_fcohc /005_publicaciones/seminario/certidumbre.htm

Comisión colombiana del océano (2002). El océano en las ciencias naturales y sociales. Bogotá: Imprenta y publicaciones de las fuerzas militares.

Chaitin, G (2000). Un siglo de controversia sobre los fundamentos de la matemática. Recuperado el 12 de marzo de 2007 del sitio Web de la Universidad de Auckland: http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/cmu2.pdf

Chance, P (1986). *Thinking in the classroom: A survey of programs.* New York: Teachers College, Columbia University.

Chavellard, I (2000). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado* (3ª ed.). Buenos Aires, Argentina: Aique.

De Faria, E (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* 3(4), 9-27.

De Guzmán, M (1998). Matemáticas y estructura de la naturaleza. En F Mora (Presidente), *Memorias del ciclo de conferencias Ciencia y sociedad: desafíos del conocimiento ante el tercer milenio.* (pp. 327-358). Oviedo: Fundación Central Hispano

Díaz, G (1995). Zubiri y la matemática: un nuevo constructivismo. Tesis doctoral: Universidad Autónoma de Madrid.

Díaz, G (1999). Zubiri, Lakatos y la crisis godeliana del fundamento matemático. *The Xavier Zubiri review*, 2(1), 5-26.

Dorier, J y otros (2006). Panorama de las matemáticas en la educación francesa desde parvulario hasta la universidad. París: IREM.

Dou, A (1970). *Los fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.
Ferreirós, José (1992). El nacimiento de la teoría de conjuntos. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Epp, S (2003). The role of logic on teaching proof. The *American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-899.

Feferman, S (1978). The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics. *The University of Chicago press proceedings of the biennal meeting of the philosophy of science association*, 2, 309-327.

Ferreirós, J (1993). *El Nacimiento De La Teoría De **C**onjuntos, 1854-1908*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Ferreirós, J (1998). El enfoque conjuntista en matemática. *La Gaceta de la Real Sociedad matemática Española*, 1(3), 399-412.

Ferro, J y Amarís, M (1991). Orígenes y fundaciones de universidades costeñas. *Revista Huellas*. (32), 5-21.

Flórez, F (1996). *Siete ensayos sobre la libertad*. Universidad de Lund. Suecia

García, Y (1999). *Análisis del contenido del texto escolar de matemáticas según las exigencias educativas del nuevo milenio*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Rafael Belloso Chacín. Maracaibo, Venezuela.

Gascón, J (1994). La resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. *Educación matemática,* 6(3), 37-51. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

George, K (2005). Didáctica de la lógica. En G García (Presidente), *Memorias del 7º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* (pp. 73-74). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Gómez, A (2006). La enseñanza de los fundamentos de la matemática. Manuscrito no publicado. Programa de matemáticas, Universidad de Cartagena, Cartagena.

Gómez-Chacón, I. (2003). La tarea intelectual en matemáticas: afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 225-247.

González, F (1994). Paradigmas en la enseñanza de la matemática. Maracay: Copiher.

González, M (1950). La crisis actual de los fundamentos de la matemática. *Revista cubana de filosofía*, 1(6), 25-50.

González, M y Sierra, M (2004). Metodología del análisis de textos de Matemáticas. La enseñanza de los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

González, M (2006). La matemática moderna en España. *Unión*, (6), 63-71.

Guevara, G (2006). Lógica: Una propuesta de su enseñanza desde la epistemología. Recuperado el 18 de abril de 2006 del sitio Web de la Universidad Nacional Autónoma de México: www.filosoficas.unam.mx/~Tdl/06-1/ 0323Guevara.doc

Gutiérrez, L (1994). *La matemática escolarizada: ¿La ciencia transformada en dogma? Un estudio etnográfico realizado en las aulas universitarias*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez, Caracas.

Henkin, L (1971). Mathematical foundations for mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 78(5), 463-487.

Hernández de Alba, G (1935). *Vida y escritos del Dr. José Félix de Restrepo*. Bogotá: Imprenta Nacional.

Hernández de Alba, G (1983). *Escritos científicos de Don José Celestino Mutis. Tomo II. Matemáticas, astronomía y ciencias naturales*. Bogotá, Colombia: Editorial Kelly.

Izquierdo, J (1982). Lógica escolástica postsumalista. *Boletín Millares Carlo*. 6(1), 337-458.

Herrera, D (s.f.). Significado histórico de José Félix de Restrepo. Recuperado el 17 de febrero de 2008, de http://danielherrerarestrepo.googlepages.com/felixderestrepo

Jaramillo, J (2003). Etapas de la filosofía en la historia intelectual colombiana. En J Jaramillo Escobar (Ed.). *El ensayo en Antioquia* (pp. 304-324). Medellín: L Vieco e Hijas Ltda.

Jubien, M (1981). Intensional Foundations of Mathematics. *Special Issue on Philosophy of mathematics*, 15(4), 513-527.

Kattsoff, L (1934). Concerning the validity of aristotelian logic. *Logic philosophy of science*. 1(2), pp. 149-162.

Kilpatrick, J (1987). What constructivism might be in mathematics education? Proc. 11th Conference PME. Montreal, p. 3-23.

Kline, M (1970). Logic versus pedagogy. *The American Mathematical monthly*. 77(3), pp 264-282.

Kline, M (2000). *Matemáticas la pérdida de la certidumbre* (5ª ed.). México: Siglo XXI editores.

Körner, S (1974). *Introducción a la filosofía de la matemática* (3ª ed.). México: Siglo XXI editores.

Ley 115 de 1994. Ley General de la Educación. Diario Oficial, 41.214, febrero 8, 1994.

Lértora, C (2000). Notas sobre la filosofía académica pre ilustrada en la Nueva Granada. En Olmedo Vargas (Ed.), Archivos y documentos para la historia de la educación colombiana. (pp. 13-27). Tunja: UPTC.

Lipman**,** M **(**1988**).** *Philosophy goes to School. Philadelphia*: Temple University Press

Lipman, M (1998). *Pensamiento complejo y educación* (2ª ed.). Madrid, España: Ediciones De la Torre.

López, A (2008). Kant y el intuicionismo matemático. Recuperado el 17 de agosto de 2008 del sitio web de Angel “Java” López http://www.ajlopez.com/

López, J (1980). Mis concepciones de las concepciones de la lógica de Alfredo Deaño. *El Basilisco*, 11, 57-72.

Manzano, María (2004). *Summa logicae en el siglo XXI*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Mariño, R (1978). *Teoría de conjuntos*. Bogotá: Universidad Nacional.

Martín, M (1998). Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas. Tesis doctoral Universidad de La Laguna.

Martínez-Chavanz, R., Cubillos, G., Poveda, Gabriel., y Villaveces, J. (1993). *Historia social de la ciencia en Colombia. Tomo IV. Física y química*. Bogotá, Colombia: Tercer mundo editores.

Mathias, A (1992). The ignorance of Bourbaki. *Math. Intelligencer*, (14), 4-13.

Maz, A., Rico, L y Torralbo, M (2006). José Mariano Vallejo y Ortega: Matemático y político. En Maz, Alexander., Torralbo, Manuel. y Rico, Luis. (Eds.), José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática (pp. 11-25). Córdoba: Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Mertes, L. (1991). Thinking and writing. *Middle School Journal*, (22), 24-25.

Milne, P (2004). Notes on teaching logic. *Discourse: Learning and teaching in philosophical and religious studies*, 4(1), 137-158.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas.

Muñoz, J (1994). *Introducción a la Teoría de Conjuntos* (3ª ed.). Bogotá: Sección de Publicaciones-Facultad de Ciencias-Universidad Nacional.

Nadal, Andrés (2005). El programa universitario como herramienta de evaluación. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Las Islas Baleares, España.

Noguera, R (1957). Históricamente, primera demostración, inconcusa, completa y universal, del gran teorema de Fermat, con el álgebra davídica del "príncipe de los aficionados" a la investigación matemática. *Studia.* 2 (13-14), 199-209.

Nevalina, R (1966). Reform in teaching mathematics. The American mathematical Monthly. 73(5), 451-464.

Ortiz, J (1994). El concepto de infinito. *Boletín Asociación Matemática Venezolana*, 1(2), 59-81.

O`Toole, A (1939). The Nature of Mathematics. *National Mathematics Magazine*, 13(7), 323-338.

Oubiña, L (1976). Introducción a la teoría de conjuntos (8ª ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Pacheco, I (2002). Evolución legislativa de la educación superior en Colombia. Educación culpable, educación redentora. Caracas, Venezuela: IESALC-UNESCO.

Parra, L (2004). Los orígenes de la Universidad Pedagógica de Colombia-Tunja. *Revista historia de la educación latinoamericana*. 6(1), 165-178.

Peckhaus, V (1999). 19th Century logic between Philosophy and Mathematics. *The Bulletin of Simbolic Logic*, 5(4), 433-450.

Pestaña, M (s.f). ¿Cómo comentar un texto histórico? Recuperado el 22 de julio de 2008 de, www.mjpc.iestorreolvidada.es/iestorreolvidada/mjpc/recursos/hist/comentario_texto.pdf

Pinter, C (1971). *Set theory*. Menio Park: Addison Wesley Publishing Company.

Piñeres, D (2001). Recuperación de la memoria histórica de la Universidad de Cartagena desde las reformas de educación superior en Colombia: Nacionalismo, modernización y crisis. En D. Piñeres (Ed.). *La cátedra historia de la Universidad de Cartagena* (Vol. 1, pp. 11-56). Cartagena: Editorial Antillas.

Polya, G (1998). Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas.
Poveda, Gabriel (1993). Ingeniería e historia de las técnicas. *Historia social de la ciencia en Colombia Tomo IV*. Bogotá, Colombia: Tercer mundo editores.

Putman, H (1967). Mathematics without foundations. *Journal of Philosophy*, (64), 5-22.

Ramos, A (2005). Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, España.

Restrepo, J (2002). Elementos de la lógica. En R. Pinzón y D. Herrera (Eds.). *Obras completas* (pp. 25-62). Bogotá: USTA.

Rincón, A (2008). *Las ideas educativas en Colombia (1760-1830)*. La Habana: Editorial Universitaria.

Ríos, P (2002). El libro de texto como recurso para el aprendizaje estratégico. *Informe de investigaciones educativas*, 16(2), 1-25.

Román, E (1985). *Vicisitudes de la Escuela Naval Colombiana 1935-1985*. Barranquilla: Gráficas Lourdes Ltda.

Rondón, P y Ligardo, R (2003). La Facultad de Ingeniería Civil como expresión de modernización de la Universidad de Cartagena. En Dora Piñeres (Ed.). La cátedra de la Universidad de Cartagena Vol. II (pp. 105-135). Cartagena: Editorial Universitaria.

Ruiz, A y Barrantes, H (1998). *La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Russell, B (1977). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe.

Sánchez, C (1984). *Antecedentes trigonométricos de la teoría de conjuntos. Lecturas Matemáticas*, 5(1).

Sánchez, C (1986). O surgimento da teoria dos conjuntos-Antecedentes trigonométricos (1870-1872*). Cadernos de Historia e Filosofia da Ciencia*, 10, 61-69.

Sánchez, C (1993a). Las matemáticas en los Anales de Ingeniería. *Mathesis.* 9(1), 105-124.

Sánchez, C (1993b). Forjadores del desarrollo de la matemática en Colombia. *Lecturas Matemáticas*, 14(1), 53-61.

Sánchez, C (1994). Algunos aspectos del patrimonio matemático colombiano. La revista de Matemáticas Elementales. 1952-1967. *Mathesis*, 10(1), 313 – 330.

Sánchez, C (1995). La Sociedad Colombiana de Matemáticas. Homenaje en los cuarenta años de su fundación. *Lecturas Matemáticas*, 16(2), 231 – 246.

Sánchez, C (1996). *El surgimiento de la teoría de conjuntos*. En XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Distrital de Bogotá. Bogotá: Universidad Nacional.

Sánchez, C (1997). La creación del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional. *Boletín de matemáticas*. 4(1), 57-71.

Sánchez, C (1998). Forjadores del desarrollo de la matemática en Colombia. Una charla con Pablo Laserna. *Lecturas matemáticas*, 19(1), 53-61.

Sánchez, C (1999). Matemáticas en Colombia en el siglo XIX. *Llull* Zaragoza España, 22(45), 687-705.

Sánchez, C (2001). 50 años de matemáticas modernas en Colombia. *Boletín de Matemáticas Universidad Nacional*, 7(2), 3-28.

Sánchez, C (2002a). Cien años de historia de la matemática en Colombia 1848-1948. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y naturales.* 26(99), 239-260.

Sánchez, C (2002b). Matemáticas e Ingeniería en la República Conservadora. En Rubén. Sierra (Ed.). Miguel Antonio Caro y la cultura de su época (pp. 345-367). Bogotá: Universidad Nacional.

Sánchez, C (2004). Escuela de Ingeniería y matemáticas en el siglo XIX **In:** La Universidad Nacional en el siglo XIX. Documentos para su historia Escuela de Ingeniería de Bogotá: Facultad de Ciencias Humanas UN Colección CES.

Sánchez, C (2005). Anotaciones para la historia de las matemáticas en Antioquia. *Lecturas matemáticas*, 26(1), 91-105.

Sánchez, C (2007). Los ingeniero-matemáticos colombianos del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Bogotá: Universidad Nacional.

Safford, F (1989). *El ideal de lo práctico*. Bogotá: El áncora editores.

Scriven, M., y Paul, R. (1992, November). Critical thinking defined. Handout given at Critical Thinking Conference, Atlanta, GA

Schubring, G (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), pp. 41-51.

Schubring, G (2003). Análise histórica de livros de Matemática. Campinas: Editora Autores Associados.

Shapiro, S (2004). Foundations of mathematics: Metaphysics, epistemology, and structure. *The Philosophical Quarterly*, 54(214), 16-37.

Sharp, A (1989). Critical thinking and comunities of inquiry. *Inquiry: Critical thinking across de disciplines* 1(3), 1-12.

Sociedad Colombiana de Matemáticas (1981). La matemática en la enseñanza secundaria. Lecturas Matemáticas, 2(3), 225-278.

Soto, D (2003). Aproximación histórica a la Universidad Colombiana siglo XIX. *Revista Historia de la Educación Colombiana.* 5(1), 307-334.

Soto, D (2004). La primera universidad del Caribe Colombiano, un modelo ilustrado para América Colonial. *Estudios Humanísticos. Hist*oria. 3(1), 9-43.

Soto, D (2005). Aproximación histórica a la Universidad Colombiana. *Revista Historia de la Educación Colombiana.* 7(1), 99-136.

Suppes, P (1979). *Introducción a la Lógica Simbólica*. México: Compañía Editorial Continental, S.A.

Takahashi, A (1976). Lógica y conjuntos en los programas de secundaria. *Notas de matemática*, 5(1), 3-16.

Takahashi, A (1990). Estudio sobre el estado de desarrollo y de inserción social de las disciplinas y áreas del conocimiento. *Lecturas matemáticas*, 11(5), 3-27.

Thom, R (1981). Matemática Moderna: ¿Error educacional y filosófico? *Lecturas matemáticas*, 2(3), 279-298.

Torres, C (2003). La matemática, ¿requiere fundamentos? *Iztapalapa Revista de ciencias sociales y humanidades*, 18(54), 167-182.

UNESCO (1962). *The modernization of mathematics teaching: Aspects and problems*. Budapest: Walusinski, G.

Uribe, J (2005). La universidad colombiana neogranadina y la Ilustración 1774-1810. *Revista historia de la educación latinoamericana*. 7(1), 295-326.

Vallejo, J (1821). *Tratado elemental de matemáticas*. *Tomo I* (3ª ed.). Barcelona, España: Imprenta del Gobierno político superior.

Vance, E (1978). *Álgebra y Trigonometría*. México: Addison Wesley Iberoamericana.

Vasco, C (1975). La matemática en el bachillerato. Lógica, conjuntos y estructuras. *Notas de matemática*, 4(1), 5-30.

Vasco, C (1980). El concepto de sistema como clave del currículo de matemáticas. *Notas de matemática*, 10(1), 1-14.

Zúñiga, M (1994). *Del Constructivismo al Construccionismo*. Recuperado el 18 de marzo de 2004 de http://ww1w.mep.go.cr/educacion/constructivismo.asp

ANEXO A. PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS EDUCACIÓN PRIMARIA 1979

GRADO **TEMA**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Sistemas numéricos	Números naturales del 0 al 100. Adición y sustracción. Orden aditivo mayor que y menor que. Ordinales. Operadores -1, -2, etc.	Números naturales del 0 al 1000. Adición, sustracción, multiplicación y división. Números pares e impares. Orden multiplicativo: es múltiplo de, es divisor de.	Naturales mayores que 100. Adición, sustracción, multiplicación y división con algoritmos generalizados. Números primos. Operadores naturales. Introducción a los operadores fraccionarios.	Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. Numeración romana. Fracciones con adición, sustracción, multiplicación y división. Decimales con adición y sustracción. Algoritmos con aplicaciones. Orden multiplicativo.	Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación Fracciones con adición, sustracción, multiplicación y división. Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. MCD y MCM. Razones y proporciones. Proporcionalidad directa e inversa.
Sistemas geométricos	Relaciones espaciales. Algunos sólidos geométricos. Figuras planas de bordes rectos y curvos. Introducción a la simetría. Líneas abiertas y cerradas.	Rectas paralelas y perpendiculares. Rotaciones, giros y ángulos. Formas geométricas regulares cuadradas, triangulares y rectangulares. Noción de perímetro.	Superficies (fronteras de sólidos**).** Superficies planas. Líneas (fronteras de superficies). Puntos (fronteras de líneas). Caracterización de triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo)	Modelos de sólidos. Cuadriláteros trapecios. Perímetro generalizado. Radios, diámetro. Áreas trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. Cuadrícula.	Construcciones con regla y compás. Polígonos regulares. Construcción de algunos sólidos. Área del círculo. Área y volumen de algunos sólidos.
Sistemas métricos	Introducción a la medición de longitudes patrones arbitrarios. El dm y el m.	Longitud: m, dm y cm. Superficie unidades arbitrarias, dm^3. Unidades en	Longitud m múltiplos y submúltiplos. Yarda y vara. Superficie, área. Patrones	Área. Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias. Volumen m^3,	Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. Otras unidades de peso.

	Medición del tiempo.	duración horas y minutos.	estandarizados, m^2, cm^2 y mm^2. Volumen. Patrones arbitrarios. Capacidad. Patrones arbitrarios. Litro.	dm^3, cm^3. Peso gramo y kilogramo	Unidades de tiempo. Conversiones.
Sistemas de datos	Iniciación a gráficos de barras.	Gráficos de barras.	Recolección de datos. Tabulación y representación de datos.	Recolección de datos. Tabulación y representación de datos. Iniciación al análisis de datos.	Nociones de frecuencia, promedio y moda en un conjunto pequeño de datos.
Sistemas lógicos		Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. Expresiones "Todos", "Algunos" y "Ninguno".	Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario. Diversas maneras de cuantificar expresiones.	Proposiciones. Significado valor de verdad. Negación, conjunción, disyunción exclusiva. Negación de expresiones cuantificadas.	Disyunción fuerte y débil (exclusiva e inclusiva). Conjunción.
Conjuntos	Clasificaciones. Noción de conjunto elemento. Conjuntos equinumerosos. Noción de unión de conjuntos disjuntos. Representación gráfica. Arreglos sencillos.	Pertenencia. Noción de subconjunto. Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. Cardinal de un conjunto. Cardinal de la unión. Parejas con y sin orden.	Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. Unión e intersección. Algunos arreglos con y sin orden.	Relaciones de contenencia. Igualdad de conjuntos. Conjunto referencial. Complemento de un conjunto simbolización y representación. Algunos tipos de arreglos.	Extensión y comprensión. Conjuntos infinitos (N), unitario y vacío. Unión e intersección. Producto cartesiano (introducción). Otros tipos de arreglos.
Relaciones y operaciones	Iniciación a la representación de relaciones. Diversas maneras de efectuar operaciones.	Propiedades conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones.	Relaciones de orden. Representación sagital. Propiedades antisimétrica y transitiva. Propiedades conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones.	Relación inversa. Diagramas sagitales. Propiedades antisimétrica y transitiva.	Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. Igualdades

ANEXO B. PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN BASICA SECUNDARIA. PROPUESTA 1981

PROGRAMA DE MATEMATICAS
PARA LA EDUCACION BASICA SECUNDARIA
(PROYECTO)

GRADOS	SISTEMA NUMERICO	OBJETOS – OPERACIONES RELACIONES SISTEMAS GENERALES	LOGICA – CONJUNTOS	TOPOLOGIA – GEOMETRIA	ANALISIS REAL	SISTEMAS METRICOS	COMBINATORIA PROBABILIDAD ESTADISTICA
6o. Grado (1o. Bto.)	Sistema de numeración: – Historia – Números romanos – Bases (sin operaciones): 2, 5, 10, 12 $(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, <, >)$ $\mathbb{Z}$: Inversos aditivos $\mathbb{Q}^+$: inversos multiplicativos.	– Relaciones binarias – Operaciones unarias y binarias – Sistemas – Simbolización.	Conectivas Constantes y variables Términos y predicados Proposiciones abiertas y cerradas. Sustitución Cardinalidad Conjuntos finitos e infinitos (biyección intuitiva) Pertenencia y contenencia en familias de conjuntos Conjunto de partes.	Traslaciones (vecciones) Paralelismo Rotación Angulos Perpendicularidad Triángulos y Cuadriláteros Función distancia Teorema de Pitágoras.	Recta numérica $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ (no "recta real") Relaciones: $\leq, <, \geq, >$ Funciones numéricas.	Unidades de longitud (Sist. métrico decimal) Repaso de unidades de área y volumen Unidades de amplitud de ángulos de giro (vueltas y grados)	Diagramas arbolares Familias de conjuntos Conjunto de partes Cardinal del conjunto de partes Otros subconjuntos del conjunto de partes.
7o. Grado (2o. Bto.)	$\mathbb{Q}^+$ Decimales Algoritmos con aplicaciones: o/o, descuento, interés, cambio de monedas. Algunos reales: $\pi, \sqrt{2}$	Operaciones binarias – Propiedades – Distributividad – Linealidad.	Cuantificadores Proposiciones abiertas y cerradas. Cuantificación Expresiones con variables y paréntesis Igualdades.	Congruencias y semejanzas. – Polígonos – Círculo – Perímetros – π Simetrías activas. Grupos de simetrías.	Funciones crecientes y decrecientes. Correlación Funciones lineales Razones Proporciones Representación gráfica de funciones lineales y de gráfica lineal Inclinación; pendiente Ejes, cortes, intercepto y Ecuaciones lineales Solución de ecuaciones lineales. Inecuaciones lineales.	Otros sistemas de Unidades de longitud y amplitud de ángulos Unidades de duración Conversiones ("complejos").	Frecuencias absolutas Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias) Diagramas de barra y circular Distribución de frecuencia Distribución de frecuencia acumulativa.
8o. Grado (3o. Bto.)	$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$	Propiedades de las relaciones: – Relación totalmente definida – Relación sobreyectiva – Relación funcional – Relación inyectiva – Representación gráfica de relaciones – Reflexividad, simetría, transitividad Clasificaciones. Particiones. Seriaciones Composición de relaciones. Relación idéntica Inversión de relaciones.	Producto cartesiano Colecciones finitas de conjuntos $\cup c$, $\cap c$ Colecciones disyuntas 2 a 2, exhaustivas Predicados de uno y dos puestos Negación de cuantificadores.	Rotaciones, traslaciones y reflexiones (Grupo de movimientos rígidos) Homotecias (Grupo) Areas de figuras planas.	Función cuadrática. Ecuaciones cuadráticas, cúbicas, exponenciales, logarítmicas Raíces: $\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }$ Gráficas Inversas Restricción de dominio y de recorrido.	Unidades de área en varios sistemas Conversiones.	Medición Recolección de datos Muestreo Disposición y representación de datos. Histogramas Escalas Promedio (media), mediana, moda.
9o. Grado (4o. Bto.)	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$	Ordenes y equivalencias Funciones Composición de funciones Función idéntica Inversión de funciones Funciones de varias variables.	Demostración: directa, indirecta, refutación, contraejemplos.	Proyecciones Dibujo técnico (planos, cortes, escalas y perspectivas) Cónicas Volumen de sólidos. Areas de sólidos.	Polinomios Factorización, división Sistemas de ecuaciones Funciones de 2 y 3 variables Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ Matrices y determinantes Sucesiones; progresiones aritméticas y geométricas Decimales infinitos Interés compuesto.	Unidades de volumen y capacidad en varios sistemas Unidades de peso y masa en varios sistemas (densidad y peso específico).	Azar y necesidad: Vocab probabilidad. Eventos, espacios muestrales Medidas normalizadas Medidas de dispersión y tendencia central.

ANEXO C. RESOLUCIÓN 277 DE 1975

FROM : DIR GENERAL INVESTIGACION Y DE PHONE NO. : 2222800 DEC. 21 2007 04:01AM P1

REPUBLICA DE COLOMBIA

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

RESOLUCION NUMERO 277 DE 1975

(Febrero 4)

Por la cual se adoptan unos programas de estudio para la Educación Media.

EL MINISTRO DE EDUCACION NACIONAL
en uso de sus facultades legales,

RESUELVE:

ARTICULO UNICO. - Adóptanse los programas de estudio elaborados en 1974, en desarrollo del Decreto No. 080 de enero del mismo año y de las Resoluciones reglamentarias correspondientes a las modalidades de Bachillerato académico, industrial, agropecuario, comercial, normalista y promoción social, para las áreas de matemáticas, estudios sociales, idiomas, ciencias, educación estética y educación física.

PARAGRAFO. - Estos programas serán suceptibles de revisiones y ajustes según lo indique la experiencia en la aplicación de los mismos de acuerdo con el desarrollo de cada área.

COMUNIQUESE, PUBLIQUESE Y CUMPLASE:

Dada en Bogotá D.E., a 4 de febrero de 1975.

EL MINISTRO DE EDUCACION NACIONAL,

HERNANDO DURAN DUSSAN

EL SECRETARIO GENERAL,

NORBERTO SOLANO LOZANO

Ministerio de Educación Nacional SECRETARIA GENERAL

Dupli Mineducación.