Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Maestría en Matemáticas

EL DUAL DE LA REFLEXIÓN DE UN GRUPO TOPOLÓGICO

Estudiante:
Adriana Carolina Castillo Martínez

Trabajo final presentado como requisito para optar al título de:
Magister en Matemáticas

Asesor:
Julio César Hernández Arzusa

Cartagena de Indias
2020

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio del dual de un grupo topológico a través de algunas reflexiones. El propósito es dar condiciones bajo las cuales para un grupo topológico G, $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$, siendo $\xi(G)$ una reflexión de G. Partiendo del resultado donde se toma a $\mathbb{T} \in \xi$ y considerando los casos en los que G es compacto, G es Čech completo y φ sobreyectiva y abierta, además mostramos el caso cuando G es abeliano y metrizable referido de Chacos en [6]. Por último exponemos una prueba alternativa usando reflexiones del hecho de que si G es abeliano precomacto y metrizable, $\hat{G}$ es discreto, el cual ya es un resultado conocido.
Palabras claves: Grupo topológico, reflexión, grupo dual.

Abstract

In this paper we present a study of the dual of a topological group through some reflections. The purpose is to give conditions under which for a topological group G, $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$, where $\xi(G)$ is a reflection of G. Starting from the result where $\mathbb{T} \in \xi$ is taken and considering the cases in which G is compact, G is Čech complete and φ overjective and open , we also show the case when G is abeliano and metrizable referred to by Chacos in [6]. Finally, we present an alternative test using reflections on the fact that if G is precompact and metrizable Abelian, $\hat{G}$ is discrete, which is already a known result.
Keywords: Topological group, reflection, dual group.

Introducción

La practica de dotar a un conjunto no vacío de una operación interna, cerrada, asociativa con un elemento neutro y simétrico, da lugar a los llamados grupos en el álgebra abstracta, estructura que ha sido estudiada por muchos algebristas, los cuales dentro del desarrollo de las matemáticas han logrado aplicar este concepto en diversas áreas del conocimiento, permitiendo que se sitúe en el marco de las matemáticas contemporáneas; por otro lado los topólogos toman estos conjuntos y los dotan de una topología, llamados espacios topológicos, generando una técnica con un extenso campo de aplicaciones y convirtiéndola en una herramienta para identificar propiedades de espacios.
La interacción entre el álgebra y la topología, es el área de las matemáticas que se conoce como Álgebra Topológica, que tuvo su origen en los años 20, debido a Dieudonne y Pontryagin. Al unir los conceptos de grupo y espacio topológico, se genera un grupo topológico en el cual no solo es suficiente que tenga una topología y operaciones asociada, sino que es necesaria la continuidad de las operaciones del grupo a partir de la topología, esto hace realmente atractivo este medio para muchos por su extenso campo de estudio y aplicación, lo que permite poder abarcar muchos métodos de trabajo.
Uno de los conceptos categóricos que usaremos en este trabajo es el concepto de reflexión. La reflexión actúa como un espejo en la cual la imagen de un objeto es el reflejo en una subcategoría de reflexión. En todas las categorías de las matemáticas podemos evidenciar ejemplos de gran relevancia de reflexiones. Un ejemplo muy antiguo es la Compactación de Stone - Čech establecida en 1937, esta es una reflexión de los espacios de Tychonoff en los espacios compactos. Combinando álgebra con topología podemos ver que cada grupo topológico admite una completación que también es un grupo topológico, esta completación es llamada la Completación de Raĭkov. Un ejemplo de como la estructura algebraica continua influye mucho en los resultados topológicos, es el hecho de que cada grupo topológico es un espacio

T_3 y si además, es T_0, entonces es Tychonoff. Por eso no tiene sentido estudiar en la categoría de los grupos topológicos, las reflexiones que provienen de espacios que satisfacen axiomas de separación, ya que con estudiar la reflexión sobre los espacios T_0, tendríamos todas las demás.

Otro concepto importante que se estudia aquí es el de dualidad. La dualidad de Pontryagin en los grupos abelianos localmente compactos (brevemente, grupos ALC) también actúa como un espejo pero esta refleja las propiedades de un grupo en su grupo dual, y viceversa. La idea de dualidad consiste en asociar a un grupo topológico el grupo de los caracteres continuos (homomorfismos continuos en el circulo complejo unidad) dotado de la topología compacto abierta; se obtiene así otro grupo topológico denominado el dual. El Teorema de Dualidad de Pontryagin para grupos ALC ha sido el punto de partida para muchas rutas diferentes de investigación en Matemáticas. Desde su aparición, hubo un gran interés en colocarlo en un contexto más amplio que los grupos ALC. El Teorema de Dualidad de Pontryagin - Van Kampen, para grupos ALC, que establece que todo grupo ALC es reflexivo; es la base de la teoría de dualidad para grupos topológicos abelianos. Desde el siglo pasado, la dualidad de Pontryagin ha demostrado ser una útil e importante herramienta para el análisis de la estructura y propiedades de los grupos ALC; estos grupos se encuentran en las raíces del Análisis de Fourier, a través de la medida de Haar y el Teorema de Bochner.

En este trabajo presentamos un estudio de la dualidad de un grupo vía reflexiones, exponiendo nuestro aportes inicialmente en el Teorema 14, en el cual realizamos adaptaciones con muchas variaciones de una técnica conocida, usada para demostrar la existencia de grupos libres en [2], para probar que los grupos compactos son una subcategoría reflexiva de los grupos topológicos; seguidamente en los resultados referentes a las condiciones para que el dual de un grupo sea topológicamente isomorfo al dual de la reflexión del mismo, hecho que se evidencia en el Lema 11, Teorema 15, Teorema 17 y Corolario 9, relacionando cada resultado con ejemplos relevantes, finalizamos con el Teorema 19 en donde presentamos una prueba alternativa del resultado conocido, [12, Teorema 4.1].

El trabajo consta de dos capítulos. En el primer capítulo se dan preliminares topológicos, algebraicos y categóricos, que dividimos en dos secciones. En la Sección 1. presentamos conceptos básicos de grupos topológicos; en la Sección 2. abarcamos algunos tópicos referidos a la teoría de dualidad y los resultados generales dentro de esta teoría y, para fijar ideas, especificamos algunos temas.

En el segundo capítulo empezamos exponiendo algunas reflexiones en la categoría de los grupos topológicos, particularmente tomamos la reflexión sobre espacios totalmente disconexos, libres de torsión, abelianos, precompactos, $\aleph_0$-acotados, además de considerar la completación de Raĭkov y la compactación de Bohr. Seguimos con el dual de algunas reflexiones, partiendo con la demostración de una condición necesaria para que el homomorfismo dual del homomorfismo que va del grupo a su reflexión sea una biyección continua, luego tomando los resultados sobre el dual de la reflexión sobre los precompactos y el dual de la reflexión sobre los $\aleph_0$-acotados. Siguiendo ese orden de ideas mostramos que $\hat{G} \cong \widehat{\xi(G)}$, dotando a G de propiedades variables. En el caso del dual de la reflexión de un grupo metrizable, nos apoyamos del resultado de Chasco en [6], que implica que siendo G un grupo topológico abeliano metrizable, suponiendo que H es un subgrupo denso de G, entonces los grupos duales $\hat{G}$ y $\hat{H}$ son topológicamente isomorfos, usamos este resultado para abarcar los casos de la completación de Raĭkov y la compactación de Bohr; finalmente presentamos una prueba alternativa usando la compactación de Bohr de la Proposición 11, considerando G precompacto abeliano y metrizable.

Resumen histórico

El origen de la teoría de grupos y su estudio subyace del desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Los pioneros en plantear las bases de dicha teoría fueron Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois, donde este último matemático, en sus estudios dio origen a la teoría de Galois y hace uso del término grupo. Otros matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la teoría de grupo fueron Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros, pero fue Walter Dick quien en 1882, dio la moderna definición de grupo.

En el caso de la topología sus raíces yacen en el concepto de límite y el de completitud de un espacio métrico, a través del reconocimiento de números reales no racionales. Suele fecharse su origen con la resolución por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg, en 1735, pero el término topología fue usado por primera vez por Johann Benedict Listing en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro Vorstudien zur Topologie ('Estudios previos a la topología'), publicado en 1847.

Es muy común en matemáticas definir nuevas estructuras a partir de unas ya existentes en donde siempre se involucran propiedades universales. Una vez desarrolladas la teoría de grupos y la topología, se plantea su combinación dando lugar al álgebra topológica que tuvo su origen en los años 20, debido a Dieudonne y Pontryagin, en la cual se acentúan los inicios y posterior auge de los grupos topológicos. En particular, los grupos topológicos, que aparecen por primera vez en Schreirer en 1926 y por F. Leja en su artículo Sur la notion du groupe abstrait topologique en 1927, han sido los de mayor relevancia en la categoría de las álgebras topológicas.

Dentro de este tópico en asocio con el análisis armónico, surge la teoría de dualidad de pontryagin dando explicaciones de las propiedades generales de la transformada de Fourier. Los fundamentos de la teoría de grupos

abelianos localmente compactos y de su dualidad fueron sentados por Lev Pontryagin en 1934. Su tratamiento se basó en grupos que eran segundo-contable y compactos o discretos. Esto fue mejorado para cubrir a los grupos abelianos localmente compactos en general por E.R. van Kampen en 1935 y André Weil en 1953.
Por otro lado, hacemos referencia a concepto de reflexión, en el cual la reflexión de una categoría en otra siempre viene acompañada de una propiedad universal, que es en realidad lo que la hace importante. Se evidencian ejemplos importantes de reflexiones en todas las categorías de las matemáticas. De los ejemplos mas antiguos ya anteriormente mencionados es la Compactificación de Stone - Čech establecida en 1937, ésta es una reflexión de los espacios de Tychonoff en los espacios compactos. En esta combinación algebra con topología, hacemos nuevamente mención de que cada grupo topológico admite una completación que también es un grupo topológico, esta completación se llama la Completación de Raykov. En 1939, P. Alexandroff, construyó para cada espacio topológico T_1 un espacio de Hausdorff maximal y probó que esta construcción es una reflexión Hausdorff. En este concepto Liang y Huang hacen publico en 2017, su artículo Existencia de reflexiones y sus aplicaciones, permitiendo la ampliación en la aplicación del concepto y recordando construcciones de gran relevancia de reflexiones en distintas categorías.
Nuestro trabajo se fundamenta en anteriores aplicaciones de la teoría de dualidad para definir la reflexión de un grupo, hecho que se evidencia en la compactación de Bohr. La teoría de dualidad marca el punto de encuentro entre el análisis armónico y la topología de Bohr. En este aspecto un uso de la dualidad de Pontryagin es dar una definición general de una función casi-periódica en un grupo no compacto G en ALC. Para esto, definimos la compactificación bG de Bohr de G como $\hat{H}$, donde H es como grupo $\hat{G}$, pero dándole la topología discreta. Puesto que $H \to \hat{G}$ es continuo y un homomorfismo, el morfismo dual $G \to bG$ queda definido, y realiza G como subgrupo de un grupo compacto. La restricción a G de las funciones continuas en bG da una clase de funciones casi-periódicas; se puede imaginarlas como análogas a las restricciones a una copia de $\mathbb{R}$ enroscado alrededor de un toro.

Objetivos

Objetivos generales

Estudiar el grupo dual de $\xi(G)$ a partir del grupo dual de G y recíprocamente.

Objetivos específicos

- Caracterizar el grupo dual de $\xi(G)$ a partir del grupo dual de G y recíprocamente.
- Estudiar el grupo dual de la reflexión sobre los grupos abelianos, es decir, la llamada Abelianización.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la teoría de dualidad

En esta sección presentamos los conceptos y propiedades básicas de los grupos topológicos que utilizaremos en este estudio.
Iniciamos con los grupos topológicos en el cual los resultados expuestos fueron tomados de los textos [2, 3, 9, 11, 14, 18, 24, 25, 29, 32] y [31].

1.1. Grupos topológicos

Definición 1 *[14, Definición 1.1] Un conjunto* G *con una operación binaria* $\cdot$ *y una familia* τ *de subconjuntos de* G *se llama grupo topológico si*

1. $(G, \cdot)$ *es un grupo*
2. (G, τ) *es un espacio topológico*
3. *las funciones* $g_1 \colon (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ *y* $g_2 \colon (G, \tau) \to (G, \tau)$ *dadas por* $g_1(x, y) = x \cdot y$ *y* $g_2(x) = x^{-1}$ *son continuas, donde* x^{-1} *es el inverso de* x*.*

En ocasiones prescindiremos del uso del símbolo de operación binaria $\cdot$, es decir, en vez de $x \cdot y$ escribiremos simplemente xy.

Ejemplo 1 *Mencionamos tres ejemplos importantes:*

(a) *El grupo aditivo de los números reales con la topología usual es un grupo topológico, denotado por* $\mathbb{R}$*. En efecto, es bien sabido que* $\mathbb{R}$ *con la suma* *usual es un grupo algebraico, veamos que* $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es continua en cada punto. Sea* $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *y* $(a+b-\varepsilon, a+b+\varepsilon)$ *con* $\varepsilon>0$ *una vecindad de* $a+b$. *Ahora si* $(x,y)\in(a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2})\times(b-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2})$, *entonces*

$$a+b-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<x+y<a+b+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

esto es $a+b-\varepsilon<x+y<a+b+\varepsilon$, *de donde* $(x,y)\in(a+b-\varepsilon, a+b+\varepsilon)$, *luego la suma es continua.*
Falta ver que $g_2\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $g_2(x)=-x$, *es continua. Sea* $a\in\mathbb{R}$, *y* $(-a-\varepsilon,-a+\varepsilon)$ *una vecindad de* $g_2(a)$, *con* $\varepsilon>0$. *Note que* $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ *es una vecindad de* a, *y* $g_2((a-\varepsilon,a+\varepsilon))\subseteq(-a-\varepsilon,-a+\varepsilon)$.

(*b*) *[25, Ejemplo 2.3]*
Sea $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ *los complejos no nulos con la multiplicación usual y la topología inducida de* $\mathbb{R}^2$, *es un grupo topológico.*
Desde luego, recordemos que el producto en $\mathbb{C}^*$ *se define por:*
si $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$, $z_1=(x,y)$ *y* $z_2=(a,b)$ *entonces*

$$z_1z_2=(x,y)(a,b)=(xa-yb, ya+xb).$$

Es así como la multiplicación

$$g_1\colon\mathbb{R}^{4*}\approx\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*\approx\mathbb{R}^{2*}$$

es continua, pues las funciones componentes o proyecciones

$$p_1(z_1,z_2)=xa-yb \text{ y } p_2(z_1,z_2)=ya+xb$$

son continuas, ya que el producto de reales es continuo (ver [25, Ejemplo 2.2]) y la suma también, (ver ejemplo anterior). La función inversa

$$g_2\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$$

dada por

$$g_2(z_1)=g_2(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

es continua, ya que sus funciones componentes o proyecciones están definidas para todos los valores del dominio y teniendo en cuenta el ejemplo anterior, por tanto se tiene la prueba.

(c) *Si G es cualquier grupo, al colocar la topología discreta en G obtenemos un grupo topológico. En el caso particular de que G sea el grupo de los números enteros, entonces G con la topología discreta se denota por $\mathbb{Z}$. Puesto que dado G discreto entonces $G \times G$ es discreto, por tanto cualquier función de $G \times G \to G$ es continua, en particular si esta es la operación de G. De igual forma $g_2 \colon G \to G$ dada por $g_2(x) = x^{-1}$ es continua. Luego G es un grupo topológico.*

Teorema 1 *[14, Teorema 1.3] Considere un grupo topológico G. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, $x \in G$, de G en sí mismo, son homeomorfismos. La inversión $f \colon G \to G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismo. Las funciones φ_g y σ_g se llaman traslaciones por g derecha e izquierda, respectivamente.*

Demostración. Probaremos la afirmación para φ_g, la traslación derecha por g. El caso izquierdo es similar. Por la definición de grupo topológico, φ_g es continua. Suponga que $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$, entonces $ag = bg$, es decir, $agg^{-1} = bgg^{-1}$, así que $a = b$ y φ_g es inyectiva. Sea $b \in G$, entonces $\varphi_g(bg^{-1}) = b$ y φ_g es suprayectiva. La inversa de φ_g es $\varphi_{g^{-1}}$ puesto que $\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(a)) = \varphi_{g^{-1}}(ag) = agg^{-1} = a$. Además, $\varphi_{g^{-1}}$ es continua, por lo que φ_g es un homeomorfismo.
Si $f(x) = x^{-1}$, entonces f es continua por la Definición 1. La igualdad $f(x) = f(y)$ implica $x^{-1} = y^{-1}$, de donde $x = y$ por ser G un grupo, lo que prueba que f es inyectiva. Si $a \in G$, entonces $f(a^{-1}) = a$, por lo que f es suprayectiva. La inversa de f es ella misma y, por lo tanto, f es un homeomorfismo. $\square$

Una consecuencia directa de la anterior proposición es el siguiente resultado. Recordemos que un espacio X se dice que es homogéneo si para cada x de X y cada y de X, existe un homeomorfismo f del espacio X en si mismo tal que $f(x) = y$.

Corolario 1 *[14, Corolario 1.4] Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.*

Demostración. Veamos que dados dos elementos arbitrarios $g, h \in G$, existe un homeomorfismo de G en si mismo que envía g en h. Observe que si $\varphi = \varphi_{g^{-1}h}$ (véase el Teorema 1), entonces φ es un homeomorfismo y

$\varphi(g) = h$. □

Notamos que este resultado implica que para probar alguna propiedad en un grupo topológico basta con probar que se cumple en un punto, sin perder generalidad consideramos el neutro, e. Denotaremos con N_{e_G} una base local para el neutro $e \in G$; luego $V \subseteq G$ se dice simétrica si, $V^{-1} = V$, siendo $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$.

Lema 1 *[14, Lema 1.8] Si G es un grupo topológico y $U \in N_{e_G}$, entonces existe $V \in N_{e_G}$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e_G constituyen una base local para e_G.*

Demostración. Sean $U \in N_{e_G}$ y $f\colon G \to G$, la aplicación inversión $f(x) = x^{-1}$, para $x \in G$. Como f es un homeomorfismo de G sobre G, $f(U) = U^{-1}$ es abierto y $e \in U^{-1}$, así que $V = U \cap U^{-1}$ es abierto, $V^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U = U \cap U^{-1} = V$ y $e \in V \subseteq U$. □

Denotaremos con $N^*_{e_G}$ la base de vecindades abiertas y simétricas para la identidad e_G de un grupo topológico G.

Lema 2 *[14, Lema 1.9] Sean G un grupo topológico,*

1. *Si $U \in N_{e_G}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in N_{e_G}$ con $V^n \subseteq U$ ($V^n = V \cdot \cdots \cdot V$, n factores).*
2. *Si $U \in N_{e_G}$, entonces existe $V \in N_{e_G}$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados.*

Demostración.

1. Sea $U \in N_{e_G}$; utilicemos inducción sobre n.
   Para $n = 1$ hacemos $V = U \cap U^{-1}$, como en el item anterior.
   Sea $n \in \mathbb{N}^+$ fijo y supongamos que el resultado es válido para n; es decir, existe $W \in N_{e_G}$ tal que $W^n \subseteq U$ y queremos encontrar una vecindad V de e_G tal que $V^{n+1} \subseteq U$. Como la multiplicación $g_1(x, y) = xy$ es continua y $g_1(e_G, e_G) = e_G$, existen $V_1, V_2 \in N_{e_G}$ tales que $V_1V_2 \subseteq W$. Sea $V = V_1 \cap V_2$, entonces $V \in N_{e_G}$ y $V^2 \subseteq W$, ahora como $V \subseteq W$ luego por la continuidad de la multiplicación $V^{n-1} \subseteq W^{n-1}$, de donde $V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} \subseteq U$, lo que termina la inducción.

2. Sea $V \in N^*_{e_G}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $xV \cap V \neq \emptyset$; es decir, existen $v_1, v_2 \in V$ con $xv_1 = v_2$, por lo cual $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$. Así que $\overline{V} \subseteq U$. $\square$

Para más detalles de estas propiedades, revisar [25].
Ahora exponemos una caracterización propia de los grupos topológicos.

Teorema 2 *[14, Teorema 1.13] Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local $\mathcal{V}$ para e_G tal que cumple las siguientes condiciones.*

1. $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$.
2. *Si U, V son dos elementos arbitrarios de $\mathcal{V}$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.*
3. *Para cada $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$.*
4. *Para cada $U \in \mathcal{V}$ y para cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{V}$ con $xV \subseteq U$.*
5. *Para cada $U \in \mathcal{V}$ y $a \in G$ existe $W \in \mathcal{V}$ con $aWa^{-1} \subseteq U$.*

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathcal{V}$ no vacía de subconjuntos de G que contienen a e_G, tales que se satisfacen las condiciones (1) a (5) para $\mathcal{V}$, entonces cada una de las familias $\{xU : U \in \mathcal{V}, x \in G\}$ y $\{Ux : U \in \mathcal{V}, x \in G\}$ es base para una topología de grupo τ para G. Además $\mathcal{V}$ es una base local para e_G en (G, τ).

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea G un grupo topológico Hausdorff y consideremos la familia $\mathcal{V} = \{V \cap V^{-1} : V \in N_{e_G}\}$, demostremos que $\mathcal{V}$ es base local para e_G.
Sea U un abierto con $e_G \in U$, luego tomando $W = U \cap U^{-1}$ el cual pertenece a $\mathcal{V}$, tenemos que

$$e_G \in W = U \cap U^{-1} \subseteq U$$

luego $\mathcal{V}$ es base local para e_G.

1. Supongamos que $\bigcap \mathcal{V} \neq \{e_G\}$, puesto que $\{e_G\} \subseteq \bigcap \mathcal{V}$, esto implica que $\bigcap \mathcal{V} \nsubseteq \{e_G\}$. En efecto supongamos que $\bigcap \mathcal{V} \nsubseteq \{e_G\}$, luego existe $x \in \bigcap \mathcal{V}$, donde para todo $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$ y $x \neq e_G$, por ser G Hausdorff, existen vecindades V_x y $U \in \mathcal{V}$, de x y e_G, respectivamente, con $x \in V_x$ y $e_G \in U$, tales que $V_x \cap U = \emptyset$, lo cual es absurdo pues $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$

2. Sea $U, V \in \mathcal{V}$, luego existen U_1, V_1 elementos de N_{e_G} tales que

$$U = U_1 \cap U_1^{-1},\ V = V_1 \cap V_1^{-1};$$

como $U_1 \cap V_1 \in N_{e_G}$ entonces

$$W = (U_1 \cap V_1) \cap (U_1 \cap V_1)^{-1} \in \mathcal{V}$$

por tanto $W \subseteq U \cap V$.

3. Sea $U \in \mathcal{V}$. Por lema anterior existe $V \in N_{e_G}$ tal que $V^2 \subseteq U$; entonces $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$ y es simétrico, luego tenemos que $W = W^{-1}$, por lo que

$$WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U.$$

4. Sean ahora $U \in \mathcal{V}$ y $x \in U$. Como la multiplicación de grupo es continua y $xe_G = x$, tenemos que existen abiertos V_x,W que contienen a x y al elemento e_G respectivamente tales que

$$V_x W \subseteq U.$$

Ya que $W \in N(e_G)$, $V = W \cap W^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$, finalmente se tiene

$$xV = x(W \cap W^{-1}) \subseteq xW \subseteq V_x W \subseteq U$$

lo que prueba (4).

5. Sean $U \in \mathcal{V}$ y $a \in G$, por la continuidad de la multiplicación y usando el hecho de que

$$aa^{-1} = ae_G a^{-1} = e_G,$$

existen abiertos W_a, V, $W_{a^{-1}}$ de a, e_G, a^{-1} respectivamente, tales que

$$W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U.$$

Ya que $V \in N_{e_G}$ tenemos que $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$, por consiguiente

$$aWa^{-1} = a(V \cap V^{-1})a^{-1} \subseteq aVa^{-1} \subseteq W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U$$

lo que implica (5).

($\Longleftarrow$) Sean G un grupo (en el sentido algebraico) y $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G que contienen a e_G que satisfacen las condiciones $1) - 5)$ del teorema.

a) Debemos verificar que

$$\beta = \{xU : x \in G, U \in \mathcal{V}\}$$

es una base para una topología τ del grupo G. Es claro que si $x \in G$ y $U \in \mathcal{V}$, entonces $x \in xU$; ya que $xU \in \beta$, se tiene así una parte de la definición de base. Sean xU, xV dos elementos de β y $x \in xU \cap xV$, ya que $U, V \in \mathcal{V}$, por la hipótesis 2), existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$, de tal manera que $xW \in \beta$ y

$$x \in xW \subseteq x(U \cap V) = xU \cap xV$$

Así, β satisface la definición de base y por tanto es una base para una topología τ del grupo G.

b) Verifiquemos que la operación $(a, b) \to ab^{-1}$ es continua. Elijamos puntos $a, b \in G$ y un abierto U de ab^{-1}. De acuerdo a la condición 4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $ab^{-1}V \subseteq U$, y por 5) y 3) existen $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$ tales que

$$bW_1b^{-1} \subseteq V \quad \text{y} \quad W_2W_2^{-1} \subseteq W_1.$$

Entonces aW_2 y bW_2 son abiertos de los puntos a y b para los cuales se tiene

$$\begin{aligned}(aW_2)(bW_2)^{-1} &= aW_2W_2^{-1}b^{-1} \subseteq aW_1b^{-1}\\ &= ab^{-1}(bW_1b^{-1}) \subseteq ab^{-1}V \subseteq U\end{aligned}$$

de donde, la operación considerada es continua. Por tanto G es un grupo topológico.

c) Probemos que $\mathcal{V}$ es una base local para e_G.
Sea $U \in \tau$ con $e_G \in U$, puesto que β es una base para G, existen $x \in G$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que

$$e_G \in xV \subseteq U;$$

en particular $x^{-1} \in V$. Por 4) podemos encontrar $W \in \mathcal{V}$ con $x^{-1}W \subseteq V$, de donde

$$e_G \in W \subseteq xV \subseteq U,$$

por lo tanto $\mathcal{V}$ es una base local para e_G.

d) Para terminar la demostración, probemos que

$$\{Ux : x \in G, U \in \mathcal{V}\}$$

también es una base para la topología τ.
Sean $a \in G$ y $U \in \tau$ tales que $a \in U$. Por la condición 4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $aV \subseteq U$, y por la condición 5) podemos encontrar $W \in \mathcal{V}$ tal que

$$a^{-1}Wa \subseteq V;$$

entonces $a \in Wa \subseteq aV \subseteq U$. □

Definición 2 *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Al conjunto $G/H = \{aH : a \in G\}$ le introducimos una topología de la manera siguiente. Sea $\mathfrak{B}$ una base del grupo topológico G, para cada $U \in \mathfrak{B}$ definamos $U^* = \{Hx : x \in U\}$ y $\mathfrak{B}^* = \{U^* : U \in \mathfrak{B}\}$. El espacio topológico G/H así construido recibe el nombre de espacio cociente de G entre H, o grupo cociente de G entre H, si H es cerrado y algebraicamente normal.*

Se define la función canónica $\pi\colon G \to G/H$, que asigna a cada $x \in G$ la clase lateral xH.

Proposición 1 *[14, Proposición 1.31] Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica dada por $\pi(x) = Hx$ para todo $x \in G$. Entonces π es continua y abierta.*

Demostración. Sean $x \in G$ y U un abierto en G tales que $Hx = \pi(x)$ pertenece a $U^* = \{Hy : y \in U\}$. Para probar la continuidad de π debemos encontrar un abierto $V \ni x$ en G tal que $\pi(V) \subseteq U^*$. De hecho, el conjunto $V = HU$ es un abierto en G y $x \in V$; además $\pi(V) = \pi(HU) = \pi(U) = U^*$ y, por lo tanto, π es continua.
Sean U un abierto en G y $\mathfrak{B}$ una base para la topología de G; entonces $U = \cup_{j\in J} B_j$, donde $B_j \in \mathfrak{B}$. Tenemos que $\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j\in J} B_j^*$, y por tanto, $\pi(U)$ es un abierto. □

Definición 3 *Diremos que un homomorfismo entre grupos topológicos X e Y, es un homomorfismo de grupos que también es continuo, denotaremos por $Hom(X, Y)$ el conjunto de homomorfismos entre X e Y.*

Lema 3 *[14, Lema 1.20] Sea $\varphi\colon G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo φ es continuo (respectivamente abierto) si lo es en el elemento neutro e_G, es decir, si φ satisface la condición (1) (respectivamente 2) siguiente:*

1. *Para toda W vecindad de e_H en H, existe U vecindad de e_G en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$;*
2. *Para toda vecindad U de e_G en G, existe W vecindad de e_H tal que $W \subseteq \varphi(U)$.*

Demostración. Suponiendo que se cumple la condición (1), debemos probar que φ es continua en todo punto de G. Basta demostrar que si $g \in G$ y W es una vecindad de $\varphi(g)$ en H, entonces existe una vecindad U de g en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.
Sean $g \in G$ y W una vecindad de $h = \varphi(g)$ en H. Podemos expresar a W como $W = hW'$, donde W' es una vecindad de e_H, por la condición (1), existe una vecindad U' de e_G tal que $\varphi(U') \subseteq W'$; entonces gU' es una vecindad de g y $\varphi(gU') = \varphi(g)\varphi(U') = h\varphi(U') \subseteq hW'$, como se quería demostrar.
Para la segunda afirmación debemos probar que dado un abierto O en G, su imagen respecto a φ es abierta en H. Así pues, sea O abierto en G y $h \in \varphi(O)$; entonces $h = \varphi(g)$ para alguna $g \in O$; por lo anterior, $g^{-1}O$ es una vecindad de e_G y según la condición (2), existe una vecindad W de e_H que cumple con $W \subseteq \varphi(g^{-1}O) = \varphi(g)^{-1}\varphi(O)$, de donde se desprende que $\varphi(g)W \subseteq \varphi(O)$. Resta observar que $\varphi(g)W = hW$ es una vecindad de h. $\square$

Definición 4 *[14, Definición 1.5] Decimos que una función biyectiva $f\colon G \to G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un isomorfismo topológico si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama automorfismo topológico. Dos grupos topológicos son topológicamente isomorfos si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.*

Es fácil ver que un isomorfismo topológico y su inverso son homomorfismos abiertos. En el siguiente teorema podemos observar que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

Teorema 3 *Si G es un grupo topológico y $a \in G$ está fijo, entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.*

Demostración. Simplemente observe que $g(x) = \sigma_a(\varphi_{a^{-1}}(x))$, donde σ_a y $\varphi_{a^{-1}}$ se han definido en el Teorema 1. Así, g es la composición de dos homeomorfismos, y es por lo tanto un homeomorfismo. Es fácil verificar que g es un homomorfismo ya que $g(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = g(x)g(y)$. □

1.1.1. Compacidad

Ya que cada grupo topológico posee una topología y una estructura de grupo, presentamos algunos resultados en la estructura topológica tomados de los textos [2, 11, 24, 31, 32] y [5].

Definición 5 *Un espacio topológico X es localmente compacto si cada $x \in X$ tiene una vecindad compacta.*

Luego un grupo topológico es localmente compacto si y sólo si tiene una vecindad compacta del neutro.

Proposición 2 *[5, Proposición 7.15] Sea X un espacio Hausdorff. El espacio X es localmente compacto si y sólo si todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que la cerradura de U es compacta.*

Demostración. Supóngase que X es localmente compacto y sea V una vecindad compacta de $x \in X$, entonces existe U, abierto en X, tal que $x \in U \subseteq V$. Como X es T_2, el subespacio compacto V de X es cerrado en X. De este modo, $\overline{U} \subseteq \overline{V} = V$, y por ello $\overline{U}$ es compacto.
Para el reciproco, sea $x \in X$ y V una vecindad de x. Por hipótesis existe U_x vecindad abierta tal que $\overline{U_x}$ es compacta en X. Si $\overline{U_x} \subset V$ ya lo tenemos. Podemos suponer que $\overline{U_x} \not\subseteq V$. Para todo $y \in \overline{U_x} \setminus V$, existen V_x y V_y vecindades abiertas disjuntas de x e y respectivamente. Entonces, como

$$\overline{U_x} \subset \left(\bigcup_{y \in \overline{U_x} \setminus V} V_y \right) \cup V,$$

por ser compacto, existen $y_1, \cdots, y_n \in \overline{U_x} \setminus V$ tales que

$$\overline{U_x} \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} \cup V$$

Sea $C = \overline{U_x} \setminus ((V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) \cap \overline{U_x}) \subset V$. Se tiene que C es cerrado en $\overline{U_x}$ que es compacto, lo que implica que C es compacto en $\overline{U_x}$ y por tanto en X. Entonces C es una vecindad compacta de x contenido en V. $\square$

Cada uno de los grupos topológicos mencionados en el Ejemplo 1 son localmente compacto y Hausdorff. Para una vecindad compacta de la identidad en $\mathbb{R}$, podemos elegir el intervalo de unidad cerrado $[-1, 1]$. En cualquier grupo discreto, el conjunto $\{e\}$ es una vecindad compacta del elemento identidad, e. El grupo $\mathbb{T}$ es de hecho compacto, por lo que el conjunto $\mathbb{T}$ es una vecindad compacta de la identidad.

Proposición 3 *[14, Teorema 3.9] Sean G un grupo topológico y U una vecindad abierta y compacta de e_G. Entonces U contiene un subgrupo H de G, que es compacto y abierto.*

Demostración. Dado que U es compacta y abierta, podemos encontrar una vecindad simétrica V de e_G tal que $UV \subseteq U$. Entonces $V \subseteq U$, así tenemos que $VV \subseteq UV \subseteq U$ y, por lo tanto, $V^2 \subseteq UV \subseteq F$. Usando inducción para $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$V^n = V^{n-1}V \subseteq UV \subseteq U.$$

Entonces $H = \bigcup\{V^n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subgrupo abierto de G y $H \subseteq U$. El conjunto H también es cerrado en G, ya que cada subgrupo abierto de un grupo topológico es cerrado. Por lo tanto, H es compacto. $\square$

1.1.2. Conexidad

Dentro de la conexidad veamos algunas propiedades en los grupos topológicos.

Definición 6 *Dado un espacio topológico (X, τ) se llama componente conexa, a cada uno de los conjuntos conexos maximales.*

Ahora definimos para un grupo topológico la componente conexa.

Definición 7 *Sea G un grupo topológico con elemento neutro e. La componente conexa de G es la unión de todos los subconjuntos conexos de G que contienen a e.*

Dado que la unión de cualquier familia de subespacios conexos que contengan un punto dado es conexa, la componente conexa de G puede describirse como el mayor subespacio conexo de G que contiene a e.
En la componente conexa, tenemos el siguiente resultado debido a que el producto es una aplicación continua en un grupo topológico G y que la operación $x \to x^{-1}$ también es continua.

Proposición 4 *[14, Proposición 3.1] Sean G un grupo topológico y N la componente de e_G. Entonces N es un subgrupo normal y cerrado de G.*

Demostración. El conjunto N es cerrado en G por ser una componente conexa. Sea $a \in N$. Como N es conexo, también lo es aN. Note que N^{-1} también es conexo y contiene la identidad, por lo que $N^{-1} \subseteq N$. Así, $a^{-1} \in N$. Por lo tanto, aN contiene a la identidad y entonces $aN \subseteq N$. Al ser a un punto arbitrario de N, deducimos que $N^2 \subseteq N$, así que N es un subgrupo de G. Si $a \in G$, entonces aNa^{-1} es un subgrupo conexo de G, de donde $aNa^{-1} \subseteq N$ y, por lo tanto, N es un subgrupo normal de G (recuerde que $\psi_a(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo continuo de G, ver 3). □

Corolario 2 *[14, Corolario 3.2] Si G es un grupo topológico y N es la componente de e_G, entonces para toda $g \in G$, $gN = Ng$ es la componente de g en G.*

Para probar que $gN = Ng$ es la componente conexa de g basta recordar que las aplicaciones $x \to gx$ y $x \to xg$ son homeomorfismos.

Veamos algunos resultados de los grupos topológicos y los espacios totalmente disconexos.

Definición 8 *Un espacio es totalmente disconexo si los únicos subconjuntos conexos están formados por conjuntos unitarios.*

Tal espacio es evidentemente Hausdorff, y si tiene más de un punto es disconexo; notemos que un espacio de un punto es a la vez totalmente disconexo y conexo. Los espacios discretos son los espacios totalmente disconexos más simples.

Para los grupos topológicos se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4 *[14, Teorema 3.19] Sea G un grupo topológico localmente compacto totalmente disconexo. Si U es una vecindad de e_G, entonces existe un subgrupo H de G abierto y compacto tal que $H \subseteq U$.*

Demostración. Primero observe que $\{e_G\}$ es una componente de G, luego existe un subconjunto abierto y compacto P tal que $e_G \in P \subseteq U$ [14, Proposición 3.18]. Sea Q el conjunto de todos los elementos $q \in G$ para los cuales $Pq \subseteq P$. Mostraremos que $H = Q \cap Q^{-1}$ es un subgrupo compacto abierto de G y contenido en U. Observe que $e_G \in Q$ por la definición de Q, esto es, $Q \neq \emptyset$.
Primero probaremos que Q es abierto. Sea q un punto arbitrario pero fijo de Q y x un punto arbitrario de P. Como $xq \in P$ y P es un abierto, existen vecindades W_x y V_q de los puntos x y q, respectivamente, tales que $W_x V_q \subseteq P$. Las vecindades W_x constituyen una cubierta de P. Dado que P es compacto, existe una subcubierta finita $W_{x_1}, \cdots, W_{x_k}$ de P. Definimos $V = V_{q_1} \cap V_{q_2} \cap \cdots \cap V_{q_k}$; entonces $PV \subseteq P$ y por lo tanto $V \subseteq Q$. Además de contener a q, el conjunto Q contiene toda la vecindad V de q. De esto se deduce que Q es abierto.
Ahora probaremos que H es un subgrupo de G. Sabemos que $e_G \in P$, por lo que $y = e_G y \in P$ para todo $y \in Q$ y por lo tanto $Q \subseteq P$. Dado que $e_G \in Q$, tenemos que $e_G \in Q \cap Q^{-1} = H$.
Considere $h_1, h_2 \in H$; entonces $h_1 \in Q$ y $h_2^{-1} \in Q$, y tenemos $P(h_1 h_2^{-1}) = (Ph_1)h_2^{-1} \subseteq Ph_2^{-1} \subseteq P$, es decir, $h_1 h_2^{-1} \in Q$. De la misma manera se prueba que $h_1 h_2^{-1} \in Q^{-1}$ y, en consecuencia, $h_1 h_2^{-1} \in H$ y H resulta ser un subgrupo de G. Por definición, H es la intersección de dos conjuntos abiertos Q y Q^{-1} de G y un subgrupo abierto siempre es cerrado [14, Proposición 1.25]. Puesto que $H \subseteq P$, el grupo H es cerrado en P y por lo tanto es compacto. $\square$

Ahora miremos algunas propiedades en conexidad para grupos topológicos.

Teorema 5 *[14, Teorema 3.4] Sea G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Si el grupo H y el espacio cociente G/H son conexos, entonces G es conexo.*

Demostración. Suponga que $G = U \cup V$ donde U, V son abiertos ajenos no vacíos en G. Como H es conexo, cada clase lateral izquierda de H es un subconjunto de U o de V. Sea $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica. De lo anterior obtenemos la igualdad $G/H = \pi(G) = \pi(U) \cup \pi(V)$, que expresa a

G/H como la unión ajena de conjuntos abiertos no vacíos. Esto contradice la hipótesis de que G/H es conexo. $\square$

El caso donde se consideran H y G/H totalmente disconexos, se supone que si C es un conjunto conexo en G, entonces $\pi(C)$ es un conjunto conexo de G/H, luego según nuestra hipótesis, $\pi(C)$ es un singulete. Esto significa que C está contenido en alguna clase xH. Como xH también es totalmente disconexo, concluimos que C es un singulete. Esto prueba que G es totalmente disconexo. $\square$

Ahora exponemos un resultado en los grupos topológicos acerca del concepto de espacio cero-dimensional o de dimensión cero. El siguiente resultado revela una propiedad fundamental de espacios localmente compactos totalmente disconexos Hausdorff. Recuerde que un espacio X se dice que es cero-dimensional (notación: ind $X = 0$) si tiene una base $\mathfrak{B}$ que consiste de conjuntos que son tanto abiertos como cerrados en X.

Proposición 5 *Cada espacio X Hausdorff compacto totalmente disconexo es cero-dimensional.*

Demostración. Como X es regular, podemos suponer que X es compacto. Fijemos un punto $x \in X$, y sea $\mathfrak{P}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x. Sea $\mathbf{P} = \bigcap \mathfrak{P}$. Claramente, $\mathbf{P}$ es cerrado en X y $x \in \mathbf{P}$. Observe también que la familia $\mathfrak{P}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Afirmación Para cada subconjunto cerrado F de X disjunto de $\mathbf{P}$, existe $W \in \mathfrak{P}$ tal que $W \cap F = \emptyset$.

De hecho, de lo contrario $\eta = \{U \cap F : U \in \mathfrak{P}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados no vacíos de F. Como F es compacto, tenemos $\bigcap \eta \neq \emptyset$, lo que implica que $\mathbf{P} \cap F \neq \emptyset$, una contradicción.

Ahora mostraremos que $\mathbf{P} = \{x\}$. Asumamos lo contrario, entonces $\mathbf{P}$ es disconexo, ya que X es totalmente disconexo, por lo tanto, existen subconjuntos cerrados no vacíos disjuntos A y B de $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P} = A \cup B$ y $x \in A$. Como X es normal, podemos encontrar conjuntos abiertos disjuntos U y V en X tal que $A \subset U$ y $B \subset V$. Entonces $F = X - (U \cup V)$ es cerrado en X, y $P \cap F = \emptyset$.

Según nuestro afirmación, existe $W \in \mathfrak{P}$ tal que $W \cap F = \emptyset$. El conjunto abierto $G = U \cap W$ también es cerrado en X. De hecho, $\overline{G} \subset \overline{U} \cap W \subset$

$X-(F\cup V)\subset U$; por lo tanto, $G\subset \overline{U}\cap W=G$, que implica que $\overline{G}=G$. Dado que $x\in G$, tenemos $G\in\mathfrak{P}$. Sin embargo, $G\cap B=\emptyset$. Luego, G no contiene a $\mathbf{P}$, una contradicción. Por lo tanto, $\mathbf{P}=\{x\}$.
Ahora se sigue de la afirmación anterior que cada vecindad abierta O de x contiene algunos $V\in\mathfrak{P}$, ya que el conjunto $X-O$ es compacto y disjunto de $\mathbf{P}=\{x\}$. $\square$

El siguiente resultado amplía la relación entre los espacios totalmente disconexos y los cero-dimensional.

Teorema 6 *[14, Teorema 3.21] Sean G un grupo localmente compacto de dimensión cero y H un subgrupo cerrado de G. Entonces el espacio cociente G/H es de dimensión cero.*

Demostración. Sea V una vecindad del punto $\{H\}$ en G/H. Podemos encontrar una vecindad U de e_G tal que $\pi(U)\subseteq V$, donde π es la función canónica de G a G/H. Esta vecindad U contiene un subgrupo abierto y compacto L de G (Teorema 4). El conjunto $\pi(L)$ es abierto en G/H y $\pi(L)$ es cerrado pues es un subconjunto compacto del espacio cociente Hausdorff G/H. De aquí se deduce que el punto $\pi(e_G)$ tiene vecindades abiertas y cerradas arbitrariamente pequeñas. Como G/H es homogéneo, la afirmación del teorema resulta cierta. $\square$

Lema 4 *[14, Teorema 3.13] Si G es un grupo topológico y N la componente de la identidad e_G. Entonces G/N es un grupo totalmente disconexo.*

Demostración. Sea $\pi\colon G\to G/N$ el homomorfismo canónico. Sabemos que π es abierto. Sea Y algún subconjunto de G/N que contiene propiamente a $\{N\}$ y sea $X\subseteq G$ tal que $\pi(X)=Y$. Mostraremos que Y es un subespacio disconexo de G/N. En efecto, sea A cualquier subconjunto de G. Observe que $\pi(A\cap(XN))=\pi(A)\cap Y$. Como el conjunto XN contiene propiamente a N, es disconexo; en efecto, por ser N conexo se tiene que es abierto y cerrado, ademas N^c es no vacío, abierto y cerrado, ahora como $XN\subseteq N\cup N^c$, ya que $N\cap XN=N$ y $N^c\cap XN=N^c$, luego XN es disconexo. Por lo tanto, existen conjuntos abiertos U y V en G tales que $XN=(U\cap(XN))\cup(V\cap(XN))$, donde $(U\cap(XN))\cap(V\cap(XN))=\emptyset$, y ninguna de las partes es vacía. Así que

$$Y=\pi(X)=\pi(XN)=(\pi(U)\cap Y)\cup(\pi(V)\cap Y),$$

donde $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos en G/N. Para $x \in X$, tenemos $xN = (U \cap (xN)) \cup (V \cap (xN))$. Dado que xN es conexo, se tiene que $xN \subseteq U$ o bien $xN \subseteq V$. En consecuencia, $U \cap (XN)$ y $V \cap (XN)$ son uniones de clases laterales de N y por lo tanto tienen imágenes disjuntas respecto a π. Así, los conjuntos $\pi(U) \cap Y$ y $\pi(U) \cap Y$, abiertos en Y, son disjuntos no vacíos y Y resulta disconexo. $\square$

1.2. El dual de un grupo topológico

Continuamos con el estudio de la estructura del dual de un grupo topológico y se exponen algunos resultados los cuales pueden ampliarse en [8,13,21,23, 26] y [10].

Definición 9 *Sean X e Y espacios topológicos, definimos*

$$C(X,Y) = \{f\colon X \to Y :\ f \text{ es continua}\}$$

como el conjunto de las funciones continuas entre X e Y.

Dado un subconjunto K compacto en X y U abierto en Y, notemos con (K,U), el conjunto de todas las $f \in C(X,Y)$, tales que $f(K) \subseteq U$, esto es,

$$(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}.$$

La familia de los (K,U) constituye una subbase para una topología en $C(X,Y)$, llamada topología compacto abierta. Denotemos por $C_c(X,Y)$ a $C(X,Y)$ dotado con esta topología. Si G y H son grupos topológicos, el subespacio de todos los homomorfismos continuos de G, en H, con la topología heredada de la topología compacto abierta de $C_c(G,H)$, lo notaremos por $Hom_c(G,H)$.

Teniendo Y estructura de grupo, podemos dotar a $C(X,Y)$ de estructura de grupo, con la operación, $fg(x) = f(x)g(x)$ para cada $x \in X$. Vemos que la inversa de $f \in C(X,Y)$ es la función $x \to (f(x))^{-1}$, la cual notaremos por f^{-1}. El neutro sería la función constante $x \to e_Y$. Si Y es abeliano, $Hom(X,Y)$, que nota el conjunto de los homomorfismos continuos de X en Y, es un subgrupo de $C(X,Y)$.

Dados dos espacios topológicos X e Y y $x \in X$ podemos definir una aplicación $\hat{x} : C_c(X,Y) \to Y$, dada por $\hat{x}(f) = f(x)$.

Proposición 6 *$\hat{x}$ es continua para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea $V_{f(x)}$ una vecindad de $f(x) = \hat{x}(f)$. Note que $U = (x, V_{f(x)}) = \{g \in C(X,Y) : g(x) \in V_{f(x)}\}$ es una vecindad de f y $\hat{x}(U) \subseteq V_{f(x)}$, luego $\hat{x}$ es continua. □

El siguiente resultado se encuentra propuesto en [2, Ejercicio 1.9.d, inciso (iii)], aquí presentamos una solución a dicho ejercicio.

Lema 5 *Sea X un espacio e Y un grupo topológico, entonces $C_c(X,Y)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Probaremos las propiedades 1) a 5) de Teorema 2.

1. Sea A un subconjunto compacto de X y $\mathcal{V}$ el conjunto de vecindades del neutro en Y, e_Y, tomemos las vecindades subbásicas (A,V) con $V \in \mathcal{V}$. Iniciemos verificando que $\bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A,V) = \{(A,e_Y)\}$, notemos que $\{(A,e_Y)\} \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A,V)$, por lo que debemos ver que $\bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A,V) \subseteq \{(A,e_Y)\}$, notemos que para cada (A,V) vecindad del neutro en $C_c(X,Y)$, V es una vecindad de e_Y, dado que Y es un grupo topológico, se tiene $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \{e_Y\}$, de donde
$$\bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A,V) \subseteq \left(A, \bigcap_{V\in\mathcal{V}} V\right) \subseteq \{(A,e_Y)\}$$
Luego, $\bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A,V) = \{(A,e_Y)\}$.
2. Sean (A_1,V_1) y (A_2,V_2) vecindades subbásicas del neutro en $C_c(X,Y)$. Note que $(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2)$ es un vecindad del neutro en $C_c(X,Y)$ y además $(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) \subseteq (A_1,V_1) \cap (A_2,V_2)$.
3. Sea (A,V) una vecindad del neutro en $C_c(X,Y)$, luego V es una vecindad de e_Y, dado que Y es un grupo topológico, podemos encontrar una vecindad U de e_Y, tal que $UU^{-1} \subseteq V$, así $(A,U)((A,U))^{-1} \subseteq (A,V)$.
4. Sea (A,V) una vecindad del neutro en $C_c(X,Y)$ y $f \in (A,V)$. Dado $a \in A$, como $f(a)e_Y = f(a) \in V$ y Y es un grupo topológico, podemos hallar una vecindad del neutro, e_Y, $V^a_{e_Y}$, y una vecindad de $f(a)$, $V_{f(a)}$, tal que $V_{f(a)}V^a_{e_Y} \subseteq V$. La continuidad de f, permite encontrar una vecindad de a, V_a, tal que $f(V_a) \subseteq V_{f(a)}$. Note que $\{V_a\}_{a\in A}$, es un cubrimiento para A, dada la compacidad de A, podemos hallar una

cantidad finita de puntos de A, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n V_{e_Y}^{a_i}$. Obviamente (A, W) es una vecindad del neutro en $C_c(X, Y)$, veamos que $f(A, W) \subset (A, V)$, esto probaría iv). En efecto sea $g \in (A, W)$, si $a \in A$, existe a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tal que $a \in V_{a_i}$, así $g(a) \in W \subseteq V_{e_Y}^{a_i}$, por tanto $(fg)(a) = f(a)g(a) \in V_{f(a_i)}V_{e_Y}^{a_i} \subseteq V$, es decir $fg \in (A, V)$, luego $f(A, W) \subseteq (A, V)$.

5. Sea (A, V) una vecindad subbásica del neutro en $C_c(X, Y)$ y $f \in C_c(X, Y)$. Dado que la aplicación inversión en Y es un homeomorfismo, luego para $a \in A$, como $f(a)e_Y(f(a))^{-1} = e_Y \in V$, la continuidad de la operación en Y, nos permite encontrar una vecindad de $f(a)$, $V_{f(a)}$ y una vecindad de e_Y, $V_{e_Y}^a$, tal que $V_{f(a)}V_{e_Y}^a(V_{f(a)})^{-1} \subseteq V$. Por la continuidad de f, podemos hallar una vecindad de a, V_a, tal que $f(V_a) \subseteq V_{f(a)}$. Ahora el conjunto $\{V_a\}_{a \in A}$, es un cubrimiento para A, por la compacidad de A, podemos hallar una cantidad finita de puntos de A, $a_1, a_2, \cdots, a_n$, tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n V_{e_Y}^{a_i}$. Considere $g \in (A, W)$, si $a \in A$, existe a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tal que $a \in V_{a_i}$, así $g(a) \in W \subseteq V_{e_Y}^{a_i}$, por tanto $(fgf^{-1})(a) = f(a)g(a)(f(a))^{-1} \in V_{f(a_i)}V_{e_Y}^{a_i}V_{f(a_i)} \subseteq V$, es decir $fgf^{-1} \in (A, V)$, luego $f(A, W)f^{-1} \subseteq (A, V)$. Ahora probemos que $f(A, W)f^{-1} \subset (A, V)$; sea $g \in (A, W)$, si $a \in A$, existe a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tal que $a \in V_{a_i}$, así $g(a) \in W \subseteq V_{e_Y}^{a_i}$, por tanto $(fgf^{-1})(a) = f(a)g(a)(f(a))^{-1} \in V_{f(a_i)}V_{e_Y}^{a_i}V_{(f(a_i))^{-1}} \subseteq V$, es decir $fgf^{-1} \in (A, V)$, luego $f(A, W)f^{-1} \subseteq (A, V)$. $\square$

Continuamos con el siguiente lema que se encuentra propuesto en [2, Ejercicio 1.9.d, inciso (ii)] del cual se presenta una solución.

Lema 6 *Si G y H son grupos topológicos, entonces $Hom_c(G, H)$ es cerrado en $C_c(G, H)$.*

Demostración. Por brevedad, denotemos la operación de H y G por $+$ y sus elementos neutro por 0, sin que signifique que H y G sean abelianos. Una función f de G en H es un homomorfismo si y solo si $f(x-y)-f(x)-f(y) = 0$. Definamos $S_{xy} = \{f \in C_c(G, H) : f(x-y) - f(x) - f(y) = 0\}$. Sea $r_{xy}(f) = (x \hat{-} y)(f) - \hat{x}(f) - \hat{y}(f)$. La Proposición 6 y el Lema 5 garantizan que r_{xy} es continua, dado que $S_{xy} = r_{xy}^{-1}(\{0\})$ tenemos que S_{xy} es cerrado. Como $Hom_c(G, H) = \bigcap\{S_{xy} : x, y \in G\}$, entonces $Hom_c(G, H)$ es cerrado en $C_c(G, H)$. Note que si Y es un grupo abeliano entonces $Hom_c(X, Y)$ es un subgrupo cerrado de $C_c(X, Y)$. $\square$

Denotemos por $Hom(G,\mathbb{T})$ el conjunto de todos los homomorfismos continuos de un grupo topológico abeliano G en el grupo del circulo $\mathbb{T}$. Los elementos de $Hom(G,\mathbb{T})$ son llamados caracteres de G.
Expondremos algunos resultados elementales sobre el grupo topológico $\mathbb{T}$. Note que geométricamente, $\mathbb{T}$ es la circunferencia de la unidad en el plano complejo, con el centro en 0, y la multiplicación en $\mathbb{T}$ por un arbitrario $\alpha \in \mathbb{T}$ se puede interpretar como la rotación de $\mathbb{T}$ por un ángulo representado por α.
Por otro lado, algebraicamente $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo al grupo de cocientes del grupo topológico $\mathbb{R}$ de números reales con respecto al subgrupo discreto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros en $\mathbb{R}$, que es, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Denotamos p la aplicación cociente natural de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{T}$. Considerando estas dos interpretaciones de $\mathbb{T}$, podemos establecer fácilmente algunas propiedades básicas de los subgrupos de $\mathbb{T}$.

Proposición 7 *[2, Proposición 9.5.1] Cada subgrupo cerrado H de $\mathbb{T}$ coincide con $\mathbb{T}$.*

Demostración. Claramente, H es compacto. Como H es infinito y compacto, H no puede ser discreto. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $h_n \in H - \{1\}$ tal que $|h_n - 1| \leq 1/n$, donde $|z|$ denota el módulo de $z \in \mathbb{C}$, es decir, la distancia entre el origen y z en el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea $H_n = \{(h_n)^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $H_n \subset H$, y es inmediato de la descripción geométrica de $\mathbb{T}$ que, para cada $z \in \mathbb{T}$, existe $h \in H_n$ tal que $|z - h| \leq 1/n$. Por lo tanto, el conjunto $A = \bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{T}$. Como $A \subset H$ y H son cerrados en $\mathbb{T}$, se deduce que $H = \mathbb{T}$. $\square$

Proposición 8 *[2, Proposición 9.5.2] Cada subgrupo propio cerrado H de $\mathbb{T}$ es un grupo cíclico finito.*

Demostración. Por la Proposición anterior, H es finito. Sea h el elemento de $H - \{1\}$ más cercano a 1 con respecto a la métrica habitual del plano complejo $\mathbb{C}$, y sea $M = \{h^n : n \in \mathbb{Z}\}$. A partir de la descripción geométrica de $\mathbb{T}$, queda claro que, por cada $z \in \mathbb{T}$, existe $y \in M$ tal que $|z-y| < |h-1|$. Por otro lado, $M \subset H$, y, como H es un subgrupo de $\mathbb{T}$, la distancia entre dos elementos distintos de H no es menor que $|h-1|$. Se deduce que $H = M$. Por lo tanto, H es un subgrupo cíclico finito de $\mathbb{T}$, con elemento generador h. $\square$

Proposición 9 *[2, Proposición 9.6.9] Los únicos subgrupos conexos cerrados del grupo topológico* $\mathbb{T}$ *son* $\{1\}$ *y* $\mathbb{T}$ *mismo.*

Demostración. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 8. □

Lema 7 *[2, Lema 9.6.10] Supongamos que* f *es un carácter continuo no trivial en un grupo abeliano compacto* G*. Entonces* f *es de orden infinito en* G *si y sólo si* $f(G)$ *es un subespacio conexo de* $\mathbb{T}$*.*

Demostración. Supongamos que $f(G)$ es conexo. Dado que $f(G)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$ (por ser G es compacto), se deduce de la Proposición 9 que $f(G) = \mathbb{T}$. Por lo tanto, $f^n(G) = \mathbb{T}$, para cada entero positivo n, ya que $\{z^n : z \in \mathbb{T}\} = \mathbb{T}$ para cada uno de tales n. Se deduce que el homomorfismo f^n no es trivial. Por lo tanto, f es de orden infinito.
Supongamos ahora que $f \in Hom(G, \mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{N}$ satisfacen la condición de que $f^n(x) = 1$, para cada $x \in G$, y que f es distinto del elemento neutro de $Hom(G, \mathbb{T})$. Sea $K_n = \{z \in \mathbb{T} : z^n = 1\}$ y $H = f(G)$. Claramente, $H \subset K_n$ y H contiene a 1 y al menos un elemento más de $\mathbb{T}$. Como K_n contiene exactamente n elementos, concluimos que H es un espacio finito que contiene más de un elemento Se deduce que $H = f(G)$ es disconexo. □

Definición 10 *El grupo dual de un grupo topológico abeliano* G*, denotado por* $\hat{G}$*, es* $Hom_c(G, \mathbb{T})$*.*

Ejemplo 2 *Observemos los siguientes ejemplos:*

1. *Si* $G = \mathbb{R}$*, tenemos que* $\hat{G} \cong \mathbb{R}$*.*
   En efecto, considere la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ *definida por* $\varphi(x) = \varphi_x$*, donde* φ_x *es el carácter de* $\mathbb{R}$ *dado por* $\varphi_x(t) = e^{2\pi ixt}$*, para cada* $t \in \mathbb{R}$*. Veamos que* φ *es un isomorfismo topológico*

   i) φ *es un homomorfismo.* $\varphi(x + y) = \varphi_{x+y}$*, luego para todo* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\varphi_{x+y}(t) = e^{(x+y)2\pi it} = e^{(2\pi ixt)+(2\pi iyt)} = e^{(2\pi ixt)} \cdot e^{(2\pi iyt)}$$

$$= \varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t) = (\varphi_x \cdot \varphi_y)(t)$$

   Luego $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ *demuestra que* φ *es un homomorfismo.*

ii) *φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$, así $\varphi_x = \varphi_y$, así para todo $r \in \mathbb{R}$, tenemos que $\varphi_x(t) = \varphi_y(t)$, es decir,*

$$e^{2\pi ixt} = e^{2\pi iyt} \;\rightarrow\; 2\pi ixt = 2\pi iyt \;\rightarrow\; x = y$$

Por tanto φ es inyectiva.

iii) *φ es sobreyectiva. Sea $\varphi_x \in \hat{\mathbb{R}}$. Entonces existe $y = -x \in \mathbb{R}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, sea $d = -t \in \mathbb{R}$, luego $\varphi(y) = \varphi_y$ y se sigue que*

$$\varphi_y(d) = \varphi_{-x}(-t) = e^{2\pi i(-x)(-t)} = e^{2\pi ixt} = \varphi_x(t)$$

Así φ es sobreyectiva.

iv) *φ es continua con inversa continua. Para ver que φ es continua, sea x_n una sucesión en $\mathbb{R}$, convergente a, digamos, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $y \in \mathbb{R}$, tenemos*

$$|\varphi_{x_n}(y) - \varphi_x(y)| = \left|e^{2\pi ix_n y} - e^{2\pi ixy}\right|$$

$$= \left|\int_x^{x_n} 2\pi iye^{2\pi ity}dt\right| \leq 2\pi y|x_n - x|.$$

Esto implica que en cada intervalo acotado la sucesión de funciones φ_{x_n} convergerá uniformemente a la función φ_x; por lo tanto, tenemos que φ_{x_n} converge a φ_x localmente de manera uniforme en $\mathbb{R}$. Concluimos que φ es continua.

A continuación, demostramos que la inverso φ^{-1} es continua. Para esto sea x_n una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que φ_{x_n} es convergente en $\mathbb{R}$ a, digamos, φ_x. Veamos que x_n converge a x en $\mathbb{R}$. Sea $y \in \mathbb{R}$, $|y| \leq 1$. Entonces $\varphi_{x_n}(y) = e^{2\pi ix_n y}$ converge a $e^{2\pi ixy}$ uniformemente en y. Esto implica que existen $k_n \in \mathbb{Z}$ tal que $(x_n - x)y = k_n + \epsilon_n$, donde la sucesión ϵ_n tiende a cero en $\mathbb{R}$. Como esto es cierto para cada $y \neq 0$, la sucesión x_n debe estar acotada. Por lo tanto, hay una subsucesión convergente x_{n_k}. Sea x' su límite. Luego, en la primera parte, sabemos que $\varphi_{x_{n_k}}$ tiende a $\varphi_{x'}$, lo que implica que $x' = x$. Dado que esto es válido para todos las subsucesiones convergentes, se deduce que x_n converge a x como se afirmaba.

2. *$\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ [13, Ejemplo 2.7].*

Consideremos el grupo $\mathbb{T}$. Entonces todo carácter χ de $\mathbb{T}$ puede expresarse de la forma $\chi(x) = mx$, donde m es un entero que caracteriza al homomorfismo χ y, por lo tanto, $\hat{\mathbb{T}}$ es algebraicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.

En efecto, sea χ *un carácter de* $\mathbb{T}$ *y denotemos con* K *al núcleo de* χ. *Entonces* K *es un subgrupo cerrado de* $\mathbb{T}$, *lo cual implica que* $K = \mathbb{T}$ *o* K *es un grupo cíclico finito.*
Si $K = \mathbb{T}$, *entonces para todo* $x \in \mathbb{T}$, $\chi(x) = 0$, *así* $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *se define trivialmente por* $\chi(x) = 0 \cdot x$ *para todo* $x \in \mathbb{T}$. *Y, en este caso, el isomorfismo* Γ *entre* $\mathbb{Z}$ *y* $\hat{\mathbb{T}}$ *está definido por* $\Gamma(m) = \chi_0(m)$, *para todo* $m \in \mathbb{Z}$, *donde* $\chi_0(x) = 0 \cdot x$, *para todo* $x \in \mathbb{T}$.
Si K *es un grupo cíclico finito de* $\mathbb{T}$, *entonces* $\chi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ *pues si* $\chi(T) = \{0\}$, *entonces* $K = \mathbb{T}$ *lo cual contradice el hecho que* K *es un grupo cíclico finito de* $\mathbb{T}$.
Ahora, consideremos la aplicación $\chi_r : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *dada por* $\chi_r(x) = rx$, *para cada* $r \in \mathbb{Z}$. *Veamos que* χ_r *es un homomorfismo continuo y sobreyectivo. En efecto,*

i) χ_r *es un homomorfismo: Sean* $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$. *Entonces*

$$\chi_r(x_1 + x_2) = r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 = \chi_r(x_1) + \chi_r(x_2).$$

ii) χ_r *es continua en* $\mathbb{T}$*: Por tratarse de un espacio homogéneo, basta ver que* χ_r *es continua en cero. Sea* U *una vecindad del cero. Queremos hallar una vecindad* V *del cero tal que* $\chi_r(V) \subseteq U$. *Como* U *es una vecindad del cero, sin pérdida de generalidad, podemos considerar* $U = (-\epsilon, \epsilon)$, *para* $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$. *Entonces existe* $V = \left(\frac{-\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r}\right)$ *tal que* $\chi_r(V) \subseteq U$. *En efecto, si* $x \in V$, *entonces* $\frac{-\epsilon}{r} < x < \frac{\epsilon}{r}$, *además,* $\chi_r(x) = rx$; *así,* $-\epsilon < rx < \epsilon$, *lo cual implica que* $\chi_r(x) = rx \in (-\epsilon, \epsilon) = U$.
En resumen, para todo $x \in V$, $\chi_r(x) \in U$. *Por lo tanto,* $\chi_r(V) \subseteq U$.

iii) χ_r *es sobreyectiva: Sea* $y \in \mathbb{T}$. *Entonces* $y = a + \mathbb{Z}$, *para algún* $a \in \mathbb{R}$, *luego, existe* $x = \frac{a}{r} + \mathbb{Z} \in \mathbb{T}$ *tal que*

$$\chi_r(x) = rx = r\left(\frac{a}{r} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = y.$$

Finalmente, $ker\chi_r = ker\chi$. *Sabemos que* $ker\chi_r = \{0, \frac{1}{r}, \cdots, \frac{r-1}{r}\}$, *además,* $ker\chi = \{0, a, 2a, \cdots, (r-1)a\}$, *para algún* $a \in \mathbb{T}$. *Si hacemos* $a = \frac{1}{r}$, *tenemos que* $ker\chi_r = ker\chi$.
En conclusión, χ_r *y* χ *son homomorfismos continuos y sobreyectivos*

tales que $ker\chi_r = ker\chi$*, entonces existe un automorfismo continuo* α *de* $\mathbb{T}$ *tal que* $\alpha\circ\chi_r = \chi$*; y, por ser* α *un automorfismo de* $\mathbb{T}$*, tenemos que* $\alpha = 1_{\mathbb{T}}$ *o* $\alpha = -1_{\mathbb{T}}$*. De aquí,* $\chi(x) = (\alpha\circ\chi_r)(x) = \alpha(\chi_r(x)) = \alpha(rx)$*.*
En consecuencia, $\chi(x) = rx$ *o* $\chi(x) = -rx$ *para cada* $x \in \mathbb{T}$*.*
Por lo tanto, cada carácter χ *de* $\mathbb{T}$ *es de la forma* $\chi = \chi_m$*, para algún* $m \in \mathbb{Z}$*, donde* $\chi_m(x) = mx$*, para todo* $x \in \mathbb{T}$*. Además,* $\chi_m+\chi_n = \chi_{m+n}$*, pues si* $x \in \mathbb{T}$*, entonces*

$$(\chi_m + \chi_n)(x) = \chi_m(x) + \chi_n(x) = mx + nx = (m + n)x = \chi_{m+n}(x).$$

Así, existe un isomorfismo $\Gamma : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{T}}$*, dado por* $\Gamma(m) = \chi_m$*, para cada* $m \in \mathbb{Z}$*.*
Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ *es algebraicamente isomorfo a* $\hat{\mathbb{T}}$*.*

En este capítulo por brevedad utilizaremos la siguiente notación:
Grupo ALC : Grupo topológico abeliano localmente compacto Hausdorff.

Teorema 7 *[13, Teorema 3.4] Si* $G_1, G_2, \cdots, G_n$ *son grupos ALC, entonces* $\hat{G} = \prod_{i=1}^{n} \hat{G}_i$*, donde* $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$*.*

Demostración. Es suficiente probarlo para el caso $n = 2$. En efecto, sean G_1 y G_2 grupos ALC. Supongamos que $G = G_1 \times G_2$. Veamos que $\hat{G} \cong \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.
Primero, veamos que $\hat{G}$ es topológicamente isomorfo a $\hat{G}_1\times\hat{G}_2$. Sea $\theta\colon \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 \to G_1 \hat{\times} G_2$ dada por $\theta((\chi_1, \chi_2)) = [\chi_1, \chi_2]$, donde $[\chi_1, \chi_2]\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{T}$ es la aplicación definida por $[\chi_1, \chi_2](g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$.

i. θ está bien definida, puesto que $[\chi_1, \chi_2]$ es un homomorfismo, por ser χ_1 y χ_2 homomorfismos; además, es continuo, puesto que el producto de aplicaciones continuas es una aplicación continua. Y usando ésto, se prueba que θ es un homomorfismo.

ii. θ es inyectiva: Sean (χ_1, χ_2) y (χ_1', χ_2') elementos de $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tales que $\theta(\chi_1, \chi_2) = \theta(\chi_1', \chi_2')$. Veamos que $(\chi_1, \chi_2) = (\chi_1', \chi_2')$. Como $[\chi_1, \chi_2] = [\chi_1', \chi_2']$, entonces $[\chi_1, \chi_2](g_1, g_2) = [\chi_1', \chi_2'](g_1, g_2)$ para todo $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, en particular, para (g_1, e_{G_2}) y (e_{G_1}, g_2); lo cual implica que $\chi_1(g_1) = \chi_1'(g_1)$ y $\chi_2(g_2) = \chi_2'(g_2)$ para todo $g_1 \in G_1$ y $g_2 \in G_2$. Por lo tanto, $\chi_1 = \chi_1'$ y $\chi_2 = \chi_2'$, como se quería demostrar.

iii. θ es sobreyectiva: Sea $\varphi \in G_1 \hat{\times} G_2$. Entonces $\varphi\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo continuo, además, para todo $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$,

$\varphi(g_1, g_2) = \varphi((g_1, e_{G_2}) + (e_{G_1}, g_2)) = \varphi(g_1, e_{G_2})\varphi(e_{G_1}, g_2)$. Definamos $\chi_1 \colon G_1 \to \mathbb{T}$ por $\chi_1(g_1) = \varphi(g_1, e_{G_2})$ y $\chi_2 \colon G_2 \to \mathbb{T}$ por $\chi_2(g_2) = \varphi(e_{G_1}, g_2)$. Entonces $\chi_1 \in \hat{G}_1$ y $\chi_2 \in \hat{G}_2$, además, $\varphi = [\chi_1, \chi_2]$. Por lo tanto, existe $(\chi_1, \chi_2) \in \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tal que $\theta((\chi_1, \chi_2)) = [\chi_1, \chi_2] = \varphi$, con lo que tenemos la sobreyectividad.

iv. θ es continua: Es suficiente mostrar la continuidad de θ en la identidad $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ de $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$. En efecto, sea (K, V_ε) una vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$, donde $K \subset G_1 \times G_2$ es compacto. Veamos que existe una vecindad W de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ en $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tal que $\theta(W) \subset (K, V_\varepsilon)$. Si hacemos $K_1 = p_1(K)$ y $K_2 = p_2(K)$, donde p_1 y p_2 son las proyecciones de $G_1 \times G_2$ sobre G_1 y G_2, respectivamente, entonces $W = (K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}) \times (K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$ es una vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ tal que $\theta((K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}) \times (K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}})) \subset (K, V_\varepsilon)$. Sean $\chi \in \theta((K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}) \times (K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}))$ y $k \in K$. Por demostrar, que $\chi(k) \in V_\varepsilon$. Sean $\chi_1 \in (K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$ y $\chi_2 \in (K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$ tales que $\chi = \theta((\chi_1, \chi_2)) = [\chi_1, \chi_2]$, $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que $k = (k_1, k_2)$. Entonces $\chi(k) = [\chi_1, \chi_2](k_1, k_2) = \chi_1(k_1)\chi_2(k_2) \subset V_{\frac{\varepsilon}{2}} V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_\varepsilon$. Por lo que $\chi(k) \in V_\varepsilon$, para todo $k \in K$, lo cual implica que $\chi(K) \subset V_\varepsilon$, esto es, $\chi \in (K, V_\varepsilon)$, y ésto, para todo χ, con lo que queda demostrada la afirmación.

v. θ^{-1} es continua en $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$: Sea W una vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$. Veamos que existe W' vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$ tal que $\theta^{-1}(W') \subset W$ o, equivalentemente, $W' \subset \theta(W)$.
Sin pérdida de generalidad, tomemos $W = (K_1, V_\varepsilon) \times (K_2, V_\varepsilon)$, vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$. Entonces $W' = ((K_1 \cup \{e_{G_1}\}) \times (K_2 \cup \{e_{G_2}\}), V_\varepsilon)$ es una vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$ tal que $W' \subset \theta(W)$. En efecto, sea $\chi \in W'$ y definamos: $\chi_1 \colon G_1 \to \mathbb{T}$ y $\chi_2 \colon G_2 \to \mathbb{T}$ por $\chi_1(g_1) = \chi(g_1, e_{G_2})$ y $\chi_2(g_2) = \chi(e_{G_1}, g_2)$. Entonces $\chi_1 \in \hat{G}_1$ y $\chi_2 \in \hat{G}_2$, además, $\chi_1 \in (K_1, V_\varepsilon)$ y $\chi_2 \in (K_2, V_\varepsilon)$. Finalmente, $\chi = [\chi_1, \chi_2]$, pues $\chi((g_1, g_2)) = \chi((g_1, e_{G_2}))\chi((e_{G_1}, g_2)) = [\chi_1, \chi_2](g_1, g_2)$. Así, existe $(\chi_1, \chi_2) \in (K_1, V_\varepsilon) \times (K_2, V_\varepsilon) = W$ tal que $\chi = \theta((\chi_1, \chi_2))$, por lo que $\chi \in \theta(W)$.

De i, ii, iii, iv y v, concluimos que θ es un isomorfismo topológico. Por lo tanto, el dual del producto de un número finito de grupos topológicos es el producto de sus respectivos duales. $\square$

Proposición 10 *[23, Proposición 1] Sea G un grupo ALC, $\hat{G}$ su grupo dual y K cualquier vecindad compacta de e en G. Si U es una vecindad "pequeña"de 0 en $\mathbb{T}$ más precisamente si $U \subseteq \{exp(2\pi ix) : -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\}$, entonces $\overline{(K, U)}$, la clausura del conjunto (K, U), es un vecindad compacto de 0 en $\hat{G}$.*

Corolario 3 *Si G es un grupo ALC, entonces $\hat{G}$ es un grupo ALC.*

Demostración. Puesto que $\hat{G}$ es un grupo topológico abeliano Hausdorff, ya que sus imágenes se encuentran en $\mathbb{T}$. La Proposición anterior dice que $\hat{G}$ tiene una vecindad compacta de e y por lo tanto también es localmente compacto. □

Corolario 4 *[23, Corolario 2] Si G es un grupo topológico abeliano discreto, entonces $\hat{G}$ es un grupo compacto.*

Demostración. Como G es discreto, el conjunto $K = \{0\}$ es un vecindad de 0. Desde luego K también es compacto, ya que es finito. Sea U una vecindad "pequeña"de 0 en $\mathbb{T}$. Luego, por la Proposición 10, el conjunto $\overline{(K,U)}$ es compacto en $\hat{G}$. Pero cada homomorfismo de G a $\mathbb{T}$ aplica $K = \{0\}$ en U. Por lo tanto, $(K,U) = \hat{G}$, de ahí $\hat{G} = \overline{(K,U)}$, y así $\hat{G}$ es compacto. □

Proposición 11 *[23, Proposición 2] Si G es un grupo topológico abeliano compacto Hausdorff, entonces $\hat{G}$ es discreto.*

Demostración. Como G es compacto, la definición de la topología de $\hat{G}$ nos dice que (G,U) es un vecindad abierta de 0 en $\hat{G}$, para cualquier vecindad U de 0 en $\mathbb{T}$. Si elegimos U para ser una vecindad "pequeña"de 0 en $\mathbb{T}$, entonces $(G,U) = \{0\}$; ya que si existe $f \in (G,U)$ con $f \neq 0$, se tendrá que existe $x \in G$ tal que $f(x) \neq 0$, luego existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(f(x))^n \notin U$, es decir, $f(x^n) \notin U$, como $x^n \in G$, contradice el hecho de que $f \in (G,U)$. Por consiguiente, cualquier homomorfismo que asocie todo G a U, debe asignar G a 0. Por supuesto, el único homomorfismo que asigna G a 0 es el homomorfismo trivial, así $(G,U) = \{0\}$. Entonces $\{0\}$ es un subconjunto abierto de $\hat{G}$. Por lo tanto, $\hat{G}$ es discreto. □

Recordemos que un elemento g de G es un elemento de orden finito o, de forma equivalente, un elemento de torsión si $g^n = e$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces el menor $n \in \mathbb{N}$ para el cual $g^n = e$ se llama el orden de g y se denota por $o(g)$.

Definición 11 *Sea G un grupo abeliano. El subgrupo de elementos de torsión de G es $t(G)$ y para $n \in \mathbb{N}$*

$$t(G) = \{g \in G : g^n = e\}.$$

Luego

- *Si* $t(G) = G$*, es decir, si todos los elementos de* G *tienen orden finito, decimos que* G *es un grupo de torsión.*
- *Si* $t(G) = \{e\}$*, es decir, si el grupo* G *no tiene elementos de orden finito, excepto* e*, entonces se llama libre de torsión.*

Teorema 8 *[2, Teorema 9.6.11] [**L. S. Pontryagin**] Un grupo abeliano compacto* G *es conexo si y sólo si el grupo dual* $\hat{G}$ *es libre de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es conexo y toma cualquier carácter continuo no trivial f en G. Entonces $f(G)$ es conexo y, por lo tanto, f es de orden infinito en G, por el Lema 7. Recíprocamente, supongamos ahora que G no es conexo, entonces, existe un subconjunto propio abierto y cerrado U de G que contiene el elemento neutro e de G. Por la Proposición 3, existe un subgrupo abierto y cerrado H de G tal que $H \subset U$. El grupo cociente G/H es discreto, compacto y contiene más de un elemento. Por lo tanto, existe un carácter continuo no trivial ϕ en G/H. Pongamos $f = \phi \circ \pi$, donde $\pi \colon G \to G/H$ es el homomorfismo cociente natural; luego f es un carácter continuo no trivial en G, y $f(G) = \phi(G/H)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{T}$, que contiene más de un elemento. Por lo tanto, $f(G)$ es disconexo. Del Lema 7 se sigue que f es de orden finito en G. $\square$

Teorema 9 *[2, Teorema 9.6.12] Un grupo abeliano compacto* G *es totalmente disconexo si y solo si* $\hat{G}$ *es un grupo de torsión.*

Demostración. Supongamos que G es totalmente disconexo, luego por la Proposición 5, G es cero-dimensional. Tomemos cualquiera carácter continuo no trivial f en $\hat{G}$, y sean $F = f(G)$ y $H = \ker f$. La aplicación f es cerrada, ya que G es compacto. Por lo tanto, el subgrupo F de $\mathbb{T}$ es topológicamente isomorfo al grupo cociente G/H, y la aplicación f de G sobre el subespacio F de $\mathbb{T}$ es abierta. Dado que, según el Teorema 6, el grupo cociente de cualquier grupo compacto totalmente disconexo es siempre de dimensión cero, se deduce que F es cero-dimensional y, por lo tanto, $F \neq \mathbb{T}$. Como f no es trivial, se tiene que $|F| > 1$. Por lo tanto, F es disconexo y, según el Lema 7, f es de orden finito.
Supongamos ahora que G no es totalmente disconexo, entonces existe un subconjunto conexo A de G tal que $|A| > 1$. Claramente, podemos suponer

que el elemento neutro e de G está en A. Fijemos $a \in A$ distinto de e, y sea f un carácter continuo en $\hat{G}$ tal que $f(a) \neq 0$. Luego $B = f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{T}$ que contiene más de un elemento. Además, $f(G)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$ y $B \subset f(G)$. Por lo tanto, $f(G)$ es un subgrupo cerrado finito de $\mathbb{T}$, y según la Proposición 9, $f(G) = \mathbb{T}$, es decir, $f(G)$ es conexo. Por lo tanto, por el Lema 7, f es de orden infinito en G. $\square$

Veamos un resultado sobre los grupos metrizables, primero recordemos el concepto de k-espacio.

Definición 12 *Un espacio topológico X es un k-espacio si tiene la siguiente propiedad: Un conjunto F es cerrado en X si y sólo si, para cada subconjunto compacto K de X, el conjunto $F \cap K$ es cerrado [11, Teorema 3.3.18].*

Una propiedad que caracteriza las funciones continuas en los k-espacios es que, una función f de un k-espacio X, a un espacio topológico, es continua si y solo si, su restricción a cada subconjunto compacto de X es continua [11, Teorema 3.3.21].

Teorema 10 *[6, Teorema 1] Si G es un grupo topológico abeliano metrizable, entonces $\hat{G}$ es un k-espacio.*

Demostración. Sea F un subconjunto de $\hat{G}$ tal que $F \cap K$ sea cerrado para cada subconjunto compacto K de $\hat{G}$. Supóngase que $\chi \in F$. Se mostrará que existe una vecindad de χ disjunta con F. Se puede asumir que χ es el carácter nulo, es decir, $\chi = 1$. Es suficiente encontrar un subconjunto compacto S de G tal que $(S, V) \cap F = \emptyset$, siendo V un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$.

Dado que G es un grupo metrizable, podemos tomar una secuencia fundamental decreciente $(U_n)_{n \geq 0}$ de vecindades de cero en G, de modo que $U_0 = G$. Usando inducción, es posible encontrar otra secuencia $(X_n)_{n \geq 0}$ de conjuntos finitos tales que se cumplan las dos condiciones siguientes

1. $X_n \subset U_n$, para todo $n \geq 0$,
2. $M \left(\bigcup_{0 \leq p \leq n} X_p, V \right) \cap (U_{n+1}, V) \cap F = \emptyset$.

Primero determinaremos X_0.

Por el supuesto, el conjunto $F \cap (U_1, V)$ es cerrado en $\hat{G}$. Note que $\hat{G}$ induce en el conjunto compacto (U_1, V) la topología de convergencia puntual, que

se denotará por $\sigma(\hat{G}, G)$. Entonces se tiene que $F \cap (U_1, V)$ es cerrado en $\sigma(\hat{G}, G)$ y $1 \in (U_1, V) \setminus (F \cap (U_1, V))$. Luego, como los $(U_n, V)_{n \geq 0}$ describen una base de vecindades de 1 en la topología $\sigma(\hat{G}, G)$, existe un conjunto finito X_0 en G tal que $(X_0, V) \cap (U_1, V) \cap F = \emptyset$.
Supóngase que los conjuntos finitos $X_0, \cdots, X_{m-1}$, $m \geq 1$ se han construido de manera que 1) y 2) se satisfacen. Sea $x \in U_m$, y

$$F_x = \left(\bigcap_{0 \leq p < m} X_p, V \right) \bigcap (\{x\}, V) \bigcap (U_{m+1}, V) \bigcap F$$

entonces se tiene

$$\bigcap_{x \in U_m} F_x = \left(\bigcap_{0 \leq p < m} X_p, V \right) \bigcap (U_m, V) \bigcap F = \emptyset.$$

Dado que cada F_x es un subconjunto cerrado del conjunto compacto (U_{m+1}, V), es compacto en $\hat{G}$. Sea $X_m \subset U_m$ un conjunto finito, tal que $\bigcap_{x \in X_m} F_x = \emptyset$. Es fácil comprobar que X_m satisface las condiciones requeridas.
Sea $S = \bigcup_m X_m$. Para cada p fija, $X_n \subset U_p$ para toda $n \geq p$; por lo tanto, S es el conjunto de puntos de una secuencia que converge a cero. Pero $(S, V) \bigcap (U_{n+1}, V) \bigcap F = \emptyset$ y $\bigcup_n (U_{n+1}, V) = \hat{G}$. En consecuencia, se obtiene que $(S, V) \bigcap F = \emptyset$. $\square$

A continuación se definirá el homomorfismo dual.

Definición 13 *Sean G y H grupos topológicos y $\varphi \colon G \to H$ un homomorfismo continuo. El homomorfismo dual $\hat{\varphi} \colon \hat{H} \to \hat{G}$, definido por $\hat{\varphi}(\chi)(g) = \chi(\varphi(g))$ para todo $\chi \in \hat{H}$ y $g \in G$, es continuo. Además existe un homomorfismo canónico*

$$\alpha \colon G \to \hat{\hat{G}}$$

Dado por

$$\alpha(g) = \hat{g}$$

Donde $\hat{g} \colon \hat{G} \to \mathbb{T}$ está dada por $\hat{g}(\chi) = \chi(g)$. Si α es un isomorfismo topológico, se dice que G es reflexivo y α es la llamada evaluación canónica.

Proposición 12 *[13, Proposición 3.11] Sean G y H grupos ALC y $f : G \to H$ un homomorfismo continuo. Si $\hat{f} \colon \hat{H} \to \hat{G}$ es la aplicación dada por $\hat{f}(\chi)(g) = (\chi \circ f)(g)$, para todo $\chi \in \hat{H}$ y $g \in G$, entonces $\hat{f}$ es un homo-*

morfismo continuo. Además, si f es suprayectiva, entonces $\hat{f}$ es inyectiva; y si f es abierta e inyectiva, entonces $\hat{f}$ es suprayectiva.

Demostración. Supóngase que $\hat{f}\colon \hat{H} \to \hat{G}$ es la aplicación definida por $\hat{f}(\chi)(g) = (\chi \circ f)(g)$, para todo $\chi \in \hat{H}$ y $g \in G$. Veamos que $\hat{f}$ es un homomorfismo continuo. Sean $\chi_1, \chi_2 \in \hat{H}$ y $g \in G$. Entonces $\hat{f}(\chi_1 + \chi_2)(g) = (\chi_1 +_{\hat{H}} \chi_2)(f(g)) = [\chi_1(f(g))][\chi_2(f(g))] = [\hat{f}(\chi_1)(g)][\hat{f}(\chi_2)(g)] = [\hat{f}(\chi_1) +_{\hat{G}} \hat{f}(\chi_2)](g)$. Por lo que $\hat{f}(\chi_1 +_{\hat{H}} \chi_2) = \hat{f}(\chi_1) +_{\hat{G}} \hat{f}(\chi_2)$.
Para ver la continuidad de $\hat{f}$ consideremos (K, U) un abierto subbásico de $\hat{G}$. Entonces $(\hat{f})^{-1}((K, U)) = (f(K), U)$ es un abierto subbásico de $\hat{H}$. En efecto, sea $\chi \in (\hat{f})^{-1}((K, U))$. Entonces $\hat{f}(\chi) \in (K, U)$, lo cual implica que $\hat{f}(\chi)(K) \subset U$, esto es, $\hat{f}(k) \in U$, para todo $k \in K$; por lo que $\chi(f(k)) \in U$, para todo $k \in K$. Así, $\chi(f(K)) \subset U$, por lo tanto, $\chi \in (f(K), U)$, lo cual demuestra que $(\hat{f})^{-1}((K, U)) \subseteq (f(K), U)$. En forma análoga se demuestra que $(f(K), U) \subseteq (\hat{f})^{-1}((K, U))$, con lo que se completa la igualdad.
Ahora, supongamos que f es suprayectiva. Por demostrar que $\hat{f}$ es inyectiva. Sean χ_1, y χ_2 en $\hat{H}$ tales que $\hat{f}(\chi_1) = \hat{f}(\chi_2)$. Entonces $\hat{f}(\chi_1)(g) = \hat{f}(\chi_2)(g)$, para todo $g \in G$. Así $\chi_1(f(g)) = \chi_2(f(g))$, para todo $g \in G$ y, por la suprayectividad de f, $\chi_1(h) = \chi_2(h)$, para todo $h \in H$. Por lo tanto, $\chi_1 = \chi_2$, con lo que tenemos la inyectividad de $\hat{f}$.
Finalmente, supóngase que f es abierta e inyectiva, se probará que $\hat{f}$ es suprayectiva. Sea $\chi \in \hat{G}$. Queremos ver que existe $\varphi \in \hat{H}$ tal que $\hat{f}(\varphi) = \chi$, esto es, $\varphi \circ f = \chi$. Como f es una aplicación inyectiva, existe una aplicación $\gamma\colon H \to G$ tal que $\gamma \circ f = e_G$. Si hacemos $\psi = \gamma \restriction_{\mathrm{Im} f}$, entonces ψ es un homomorfismo, por lo que $\sigma = \chi \circ \psi\colon \mathrm{Im} f \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo. Así, existe un homomorfismo $\varphi\colon H \to \mathbb{T}$ que extiende a σ, tal que $\varphi \circ f = \chi$ y φ es continuo. En efecto, si $g \in H$, entonces $(\varphi \circ f)(g) = \varphi(f(g)) = \sigma(f(g)) = (\chi \circ \psi)(f(g)) = \chi(\psi(f(g))) = \chi(\gamma(f(g))) = \chi(g)$, con lo que tenemos la igualdad entre $\varphi \circ f$ y χ. Para ver la continuidad de φ en H, basta probar dicha continuidad en e_H. Sea $U \in \mathbb{T}$ una vecindad de $e_{\mathbb{T}}$. Veamos que existe V vecindad de e_H tal que $\varphi(V) \subset U$. Como χ es continua, en particular, en e_H existe W vecindad de e_G tal que $\chi(W) \subset U$, esto es, $(\varphi \circ f)(W) \subset U$; de donde, $\varphi(f(W)) \subset U$. Como f es un homomorfismo y W es una vecindad de e_G, entonces $f(W)$ es una vecindad de e_H, si tomamos $V = f(W)$, completamos lo que queríamos ver. Por lo tanto, $\varphi \in \hat{H}$ y $\hat{f}(\varphi) = \varphi \circ f = \chi$, lo cual demuestra la suprayectividad de $\hat{f}$. $\square$

Es un hecho esencial en la teoría de los grupos ALC que α es inyectiva.

Por lo tanto α es una inyección continua para cada grupo ALC. Además, según el teorema de la dualidad de Pontryagin-van Kampen, α es un isomorfismo topológico para cada grupo ALC G [23]. Este teorema nos permite identificar un grupo ALC G con $\hat{\hat{G}}$. Para la significación de la dualidad de Pontryagin en otra parte de las matemáticas, se debe consultar a [20]. Parte de la historia del teorema de la dualidad Pontryagin-van Kampen: la dualidad discreta compacta para grupos compacto metrizable se debe a Pontryagin, mientras que van Kampen demostró el caso general.

Capítulo 2

El dual de la reflexión

En este capítulo iniciamos con la definición de algunas reflexiones y sus caracterizaciones; luego se presentan resultados y casos puntuales de gran relevancia en la temática del dual de la reflexión de un grupo topológico.

2.1. Algunas reflexiones

Iniciamos con el concepto categórico de reflexión.

Definición 14 *Sea D una categoría, C una subcategoría de D y X un objeto de D. Una reflexión para X en C es un objeto $\xi(X)$ de C junto con un morfismo $\eta_X\colon X \to \xi(X)$ de D, que satisface la siguiente propiedad universal: dado un objeto Y de C y un morfismo $\varphi\colon X \to Y$ de D, existe un único morfismo $\lambda\colon \xi(X) \to Y$ de C tal que $\lambda \circ \eta_X = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & \xi(X) \arrow[dl, "\lambda"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de λ, cualquier dos reflexiones para X son isomorfas en C; así denotaremos la reflexión por $(\xi(X), \eta_X)$ (o $\xi(X)$ para abreviar).
Si existe la reflexión para cada X en D, se dice que C es una subcategoría reflexiva de D; en caso de que η_X sea un epimorfismo, se dice que existe una epireflexión para cada X en D y C es una subcategoría epireflexiva de D.

Presentaremos algunos ejemplos de reflexiones de grupos topológicos como son la reflexión sobre los espacios totalmente disconexos, la reflexión sobre los espacios libres de torsión, la reflexión sobre los grupos abelianos, la reflexión sobre los grupos precompactos o totalmente acotados, la reflexión sobre los grupos $\aleph_0$-acotados, la completación de Raĭkov y sobre los compactos, la compactación de Bohr. Para luego observar como es su comportamiento con el dual.

Proposición 13 *Sea G un grupo abeliano y $c(G)$ la componente conexa de G. Dado cualquier grupo totalmente disconexo K y un homomorfismo $f\colon G \to K$, existe un homomorfismo $g\colon G/c(G) \to K$ tal que $g \circ \pi = f$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G/c(G) \arrow[dl, "g"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Donde π es el homomorfismo canónico.

Demostración. Notemos que g está definida como,

$$g(\pi(x)) = f(x)$$

Veamos que g está bien definida. En efecto.

$$\text{Si } \pi(x) = \pi(y), \text{ entonces, } xc(G) = yc(G).$$

Así $xy^{-1} \in c(G)$, luego $f(xy^{-1}) \in f(c(G))$, como $e \in f(c(G))$ y K es totalmente disconexo, entonces $f(c(G))$ es un conjunto unitario, por tanto $f(xy^{-1}) = e$, de donde $f(x) = f(y)$, así $g(\pi(x)) = g(\pi(y))$. □

Ahora consideremos la reflexión sobre los espacios libres de torsión. Sobre la torsión de un grupo topológico, veamos antes los siguientes resultados.

Proposición 14 *Sea G un grupo abeliano y $t(G)$ el subgrupo de torsión de G. Entonces $G/t(G)$ es libre de torsión.*

Demostración. Se $\pi : G \to G/t(G)$ el homomorfismo canónico. Supongamos que $(\pi(x))^n = e$, luego $\pi(x^n) = \pi(e)$, esto es equivalente a que $x^n \in t(G)$, luego existe k tal que $x^{nk} = e$, así $x \in t(G)$, por tanto $\pi(x) = \pi(e)$. $\square$

Proposición 15 *Sea G un grupo abeliano y $t(G)$ el subgrupo de torsión de G. Dado cualquier grupo libre de torsión K y un homomorfismo $f\colon G \to K$, existe un homomorfismo $g\colon G/t(G) \to K$ tal que $g \circ \pi = f$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & G/t(G) \arrow[dl, "g"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Donde π es el homomorfismo canónico.

Demostración. Notemos que g está definida como,

$$g(\pi(x)) = f(x)$$

Veamos que g está bien definida. En efecto.

$$\text{Si } \pi(x) = \pi(y), \text{ entonces, } xt(G) = yt(G).$$

Así $xy^{-1} \in t(G)$, luego existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $(xy^{-1})^n = e$, por tanto

$$f((xy^{-1})^n) = (f(xy^{-1}))^n = f(e) = e.$$

Como K es libre de torsión, debe ser $f(xy^{-1}) = e$, de donde $f(x) = f(y)$, así $g(\pi(x)) = g(\pi(y))$. $\square$

Ahora para la reflexión sobre los grupos abelianos, recordemos antes a que le llamamos el subgrupo conmutador de un grupo G.

Definición 15 *El subgrupo conmutador de un grupo G, denotado como $[G, G]$ se define de la siguiente manera:*

- *Es el subgrupo generado por todos los conmutadores, o elementos de la forma $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ donde $x, y \in G$.*

Luego se sigue la reflexión sobre los grupos abelianos o comunmente llamada la abelianización de un grupo.

Definición 16 *La abelianización de un grupo G se define de la siguiente manera:*

- *Es el cociente del grupo por la clausura de su subgrupo conmutador: en otras palabras, es el grupo G/C, donde C es la clausura de $[G, G]$.*

Proposición 16 *Sea G un grupo y C la clausura de $[G, G]$, siendo $[G, G]$ el subgrupo conmutador de G. Existe un homomorfismo sobreyectivo $f\colon G \to G/C$ con la siguiente propiedad; siempre que $\varphi\colon G \to H$ sea un homomorfismo y H sea un grupo abeliano, hay un homomorfismo único $\psi\colon G/C \to H$ tal que $\varphi = \psi \circ f$.*
Se observa de la siguiente manera,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G/C \arrow[dl, "\psi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Denotamos la abelianización de un grupo G, por $\mathcal{A}(G)$.

Demostración. Notemos que ψ está definida como,

$$\psi(f(x)) = \varphi(x)$$

Veamos que ψ está bien definida. En efecto.

$$\text{Si } f(x) = f(y), \text{ entonces, } xC = yC.$$

Así $xy^{-1} \in C$, luego existe $a, b \in G$, tal que $xy^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$, por tanto teniendo en cuenta que H es abeliano y φ es un homomorfismo, se sigue que,

$$\varphi(xy^{-1}) = \varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} = \varphi(e) = e.$$

Por consiguiente $\varphi(xy^{-1}) = e$, y así $\varphi(x) = \varphi(y)$, en conclusión $\psi(f(x)) = \psi(f(y))$. $\square$

Continuemos con la reflexión sobre una clase más amplia que los grupos compactos, hacemos referencia a la constituida por los grupos precompactos o totalmente acotados.

Definición 17 *Se dirá que un grupo topológico G es precompacto si para cada vecindad abierta V de e_G, existe un subconjunto finito F de G tal que $G = FV$.*

En los grupos precompactos la propiedad se preserva en subgrupos, bajo homomorfismos continuos y en productos. Dentro de esta particular definición encontramos los grupos $\aleph_0$-acotados o ω-estrechos.

Definición 18 *Un grupo topológico G es $\aleph_0$-acotado si para toda vecindad U de la identidad de G existe un conjunto numerable $K \subseteq G$ tal que $G = KU$.*

La clase de grupos $\aleph_0$-acotados es cerrada al tomar subgrupos o productos cartesianos.

Teorema 11 *La clase de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados, es una categoría epireflexiva de los grupos topológicos.*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo topológico y sea Γ la familia de todas las topologías de grupos topológicos $\aleph_0$-acotado contenidas en τ. $\Gamma \neq \emptyset$, ya que la topología indiscreta está en Γ. Sea ρ la topología en G generada por $\bigcup \Gamma$, [14, Lema 1.2 y Proposición 5.5] garantizan que (G, ρ) es un grupo topológico $\aleph_0$-acotado, además dado que τ es más fina que ρ, tenemos que $id\colon (G, \tau) \to (G, \rho)$ es continua. Veremos que $((G, \rho), id)$ es la reflexión de (G, τ) sobre la clase de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados. Probaremos la propiedad universal, consideremos un homomorfismo continuo de grupos, $f : G \to H$, siendo H un grupo topológico $\aleph_0$-acotado. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es sobreyectiva. Podemos probar que la topología inicial generada por f, τ^f, es una topología de grupo para G [14, Ejercicio 1.32]. Veamos que (G, τ^f) es $\aleph_0$-acotado, en efecto, sea U una vecindad del neutro en H, luego existe $K \subseteq G$, siendo K numerable, tal que $KU = H$, para cada $k \in K$, elijamos x_k en G, tal que $f(x_k) = k$. Sea $L = \{x_k : k \in K\}$, vemos que $G = Lf^{-1}(U)$, dado que L es numerable, tenemos que (G, τ^f) es $\aleph_0$-acotado. Por la forma como se eligió ρ, tenemos que $\tau^f \subseteq \rho$ y por ende $f\colon (G, \rho) \to H$, sigue siendo continua. Por tanto (G, id) es la reflexión deseada. $\square$

La construcción de la reflexión sobre los grupos precompactos, se realiza de forma análoga a la anterior.

Dentro del estudio de los grupos topológicos, en su estructura de espacio se evidencia que existen espacios métricos en los cuales las sucesiones de Cauchy no necesariamente son convergentes y para ello se desarrolla el concepto de compleción de un espacio y se demuestra que dicha estructura contiene de manera densa a un subespacio homeomorfo al espacio original y, además, dicha compleción es única salvo homeomorfismo. Ahora hacemos una introducción en los espacios completos, particularmente en la llamada completación de Raĭkov.

Definición 19 *Sea A un conjunto y $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. La familia $\mathfrak{F}$ es un filtro cuando:*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. *Si* $A_1, A_2 \in \mathfrak{F}$, *entonces* $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{F}$.
3. *Si* $A \in \mathfrak{F}$ *y* $A \subseteq B$, *entonces* $B \in \mathfrak{F}$.

Un filtro $\mathfrak{F}$ en A es un filtro maximal o un ultrafiltro si para todo filtro $\mathfrak{F}'$ en A tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ se cumple $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

Definición 20 *Sea G un grupo topológico; un filtro $\mathfrak{F}$ de subconjuntos no vacíos de G es un filtro de Cauchy si para cada vecindad abierta U del neutro en G existe un elemento $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F^{-1} \cdot F \subseteq U$ y $F \cdot F^{-1} \subseteq U$.*

Definición 21 *Un grupo topológico G se dice completo Raĭkov, si todo filtro de Cauchy en G, converge.*

En el siguiente teorema presentamos una de las mas importantes propiedades de grupos topológicos completos Raĭkov, no presentamos la prueba porque consideramos que es una prueba bastante extensa y técnica.

Teorema 12 (D. A. Raĭkov) *Para cada grupo topológico Hausdorff G, existe un grupo topológico completo Raĭkov ϱG y un isomorfismo topológico canónico i de G en un subgrupo denso $i(G)$ de ϱG, con la siguiente propiedad; siempre que $f\colon G \to H$ sea un homomorfismo y H sea un grupo completo Raĭkov, f admite una extensión a un homomorfismo continuo $f^*\colon \varrho G \to H$.*

Para la lectura y estudio de la demostración de este Teorema ver [2, Proposición 3.6.12].
Ahora el resultado a considerar es aquel que implica que un grupo topológico ϱG como en el Teorema 12 es, en un sentido natural, único y una ampliación de este tópico podemos consultarlo en [2] y [3], entre otros.

Recordemos unos conceptos antes de finalizar esta sección.

Definición 22 *Siendo G un grupo topológico. $U \in N_{e_G}$, se dice invariante si $xUx^{-1} = U$, para todo $x \in G$.*
G se dice balanceado, si G tiene una base local en e_g, formada por vecindades invariantes.

[2, Corolario 3.7.8] garantiza que todo grupo topológico precompacto es balanceado.
Veamos el siguiente resultado.

Lema 8 *Sea G un grupo topológico balanceado y $\mathfrak{F}$ un filtro en G. Si dado $U \in N_e$, existe $a \in G$, tal que $aU \in \mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F}$ es de Cauchy en G.*

Demostración. Sea $V \in N_e^*$, luego existe $U \in N_e$, invariante, tal que $UU^{-1} \subseteq V$. Por hipótesis, existe $a \in G$ tal que $aU \in \mathfrak{F}$. Sea $F = aU$, luego

$$FF^{-1} = (aU)(aU)^{-1} = aUU^{-1}a^{-1} = (aUa^{-1})(aU^{-1}a^{-1})$$

$$= (aUa^{-1})(aUa^{-1})^{-1} = UU^{-1} \subseteq V.$$

Por otro lado,

$$F^{-1}F = (aU)^{-1}(aU) = U^{-1}a^{-1}aU = U^{-1}U \subseteq V^{-1} = V$$

□

Lema 9 *En cada grupo precompacto, todo ultrafiltro es de Cauchy.*

Demostración. Sea G un grupo precompacto y $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro en G. Sea $U \in N_{e_G}$, luego existen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que $G = \cup_{i=1}^{n} a_iU \in \mathfrak{F}$. Dado que $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro, existe $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $a_iU \in \mathfrak{F}$; por ser G precompacto, G es balanceado, siguiendo el Lema 8, tenemos que $\mathfrak{F}$ es de Cauchy. □

El siguiente corolario nos ofrece una caracterización de los grupos compactos.

Corolario 5 *Todo grupo Hausdorff precompacto y completo es compacto.*

Demostración. Sea G un grupo Hausdorff precompacto y completo, tomemos $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro en G, por el Lema 9, $\mathfrak{F}$ es de Cauchy y por ser G completo, $\mathfrak{F}$ converge en G. □

La precompacidad se preserva sobre el operador clausura.

Lema 10 *Sea H un subgrupo de un grupo topológico Hausdorff G. Si H es precompacto, $\overline{H}$ también es precompacto.*

Demostración. Sea H precompacto en G. Dado $U \in N_e$, tomemos una vecindad simétrica V tal que $V^2 \subseteq U$. Por ser H precompacto, existe un subconjunto finito F de H y por consiguiente de $\overline{H}$ tal que $H = FV$. Afirmamos que $\overline{H} = FU$, en efecto, tenemos que $FU \subseteq \overline{H}$, puesto que para todo $x \in FU$, y $V_x \in N_x$, se tiene que $V_x \cap FU \neq \emptyset$ y en consecuencia $V_x \cap FV \neq \emptyset$, luego $x \in \overline{FV} = \overline{H}$. Ahora si $x \in \overline{H}$, entonces para la vecindad de x, xV, se cumple que $xV \cap H \neq \emptyset$, luego si $y \in xV \cap H$, entonces $y \in xV \cap FV$, esto implica que $y \in xV$ e $y \in FV$, por tanto existen $v_1, v_2 \in V$ y $z \in F$, tal que $y = xv_1$ e $y = zv_2$, así $xv_1 = zv_2$, se sigue que

$$x = zv_2v_1^{-1} \in FVV^{-1} = FVV = FV^2 \subseteq FU.$$

Por lo tanto, $\overline{H} = FU$, es decir, $\overline{H}$ es precompacto. □

Teorema 13 *Si G es precompacto y Hausdorff, ϱG es compacto.*

Demostración. Como $\overline{G} = \varrho G$, el Lema 10 nos dice que ϱG es precompacto y por el Corolario 5 se tiene que ϱG es compacto. □

Ahora dentro de los espacios compactos, también se define una reflexión, llamada la compactación de Bohr; este reflexión lleva el nombre de H. Bohr, quien fue un precursor en el estudio de funciones casi periódicas. Por medio de la introducción de la compactación de Bohr, la teoría de funciones casi periódicas en grupos se puede reducir al estudio de funciones continuas en grupos compactos.

Teorema 14 *La categoría de los grupos topológicos compactos y Hausdorff es una subcategoría reflexiva de los grupos topológicos.*

Demostración. Sean $\kappa = 2^{2^{|G|}}$ y $\mathcal{F}$ la clase de todos los homomorfismos continuos $f\colon G \to H_f$, tal que $|H_f| \leq \kappa$, y H_f es compacto.
Definamos en $\mathcal{F}$ la siguiente relación, dados $f, g \in \mathcal{F}$, decimos que $f \sim g$, si existe un isomorfismo $\psi\colon H_f \to H_g$ tal que $g = \psi \circ f$; de esta forma tenemos que $|\mathcal{F}/\sim| \leq 2^{2^{\kappa}} = \lambda$, luego podemos obtener una familia de representantes $\{f_i\}_{i\in I}$, con $|I| \leq \lambda$. Sean $L = \prod_{i\in I} H_{f_i}$, definamos $b\colon G \to L$ por $b(g) = (f_i(g))_{i\in I}$ para cada $g \in G$. Sea $bG = \overline{b(G)}$.
Sea $f\colon G \to K$ un homomorfismo continuo, con K compacto y $H_f = \overline{f(G)}$, luego $|H_f| \leq \kappa$, en efecto, por ser $H_f = \overline{f(G)}$ cerrado en K compacto, se tiene que $H_f = \overline{f(G)}$ es compacto, luego por el inciso a. de [2, Corolario 5.2.7] tenemos que

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})}$$

se sigue por el inciso b. que,

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})}$$

por ser $f(G)$ denso en $\overline{f(G)}$, [2, Lema 1.4.15] implica que $\chi(\overline{f(G)}) = \chi(f(G))$, de esta manera queda

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(f(G))}$$

luego aplicando [11, Teorema 1.4.16],

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(f(G))} \leq 2^{\chi(G)}$$

por [2, Teorema 5.2.5] obtenemos que $w(X) \geq \chi(X)$, así nos queda

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(f(G))} \leq 2^{\chi(G)} \leq 2^{w(G)}$$

y como $w(G) \leq 2^{|G|}$, concluimos que

$$|\overline{f(G)}| = 2^{w(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(\overline{f(G)})} = 2^{\chi(f(G))} \leq 2^{\chi(G)} \leq 2^{w(G)} \leq 2^{2^{|G|}};$$

ya probado esto, se tiene que $f\colon G \to H_f \in \mathcal{F}$, luego existe i tal que $f \sim f_i$, es decir que existe un isomorfismo $\psi\colon H_f \to H_{f_i}$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, "f_i"] & H_f \arrow[d, "\psi"] \\ L \arrow[r, "\pi_{H_{f_i}}"'] & H_{f_i} \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $f^* = \psi^{-1} \circ \pi_{H_{f_i}}$, ahora

$$f^* \circ b = \psi^{-1} \circ \pi_{H_{f_i}} \circ b = \psi^{-1} \circ f_i = f.$$

Por lo que consideramos la función $\tilde{f} = f^*|_{bG}$, la cual satisface la propiedad universal de las reflexiones, esto es, $f = \tilde{f} \circ b$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f"'] & bG \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 17 *Si G es precompacto y Hausdorff, $\varrho G = bG$.*

Demostración. Por el Teorema 13, ϱG es compacto; falta ver que ϱG cumple la propiedad universal. En efecto, sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo continuo, siendo H un grupo topológico completo Hausdorff. Existe una extensión continua de f, $\tilde{f}\colon \varrho G \to \varrho H$, por ser H compacto en ϱH que es Hausdorff, tenemos que $H = \overline{H} = \varrho H$, así $\tilde{f}\colon \varrho G \to H$. La unicidad de bG nos dice que $\varrho G = bG$. $\square$

Corolario 6 *Si G es precompacto y Hausdorff, $b\colon G \to bG$ es un embebimiento, y $b(G)$ es denso en bG.*

Para la desmostración del anterior corolario y amplificar este tema nos podemos dirigir a los textos [2, 10, 16, 17] y [7].

2.2. El dual de algunas reflexiones

Veamos el dual de algunas reflexiones y su comportamiento.

Ejemplo 3 *Consideremos la reflexión sobre los espacios totalmente disconexos demostrada en la Proposición 13, en efecto sea G un grupo topológico y $c(G)$ su componente conexa, por el Lema 4, $G/c(G)$ es totalmente disconexo; ahora tomando el grupo dual de $G/c(G)$, $\widehat{G/c(G)}$, por el Teorema 9, $\widehat{G/c(G)}$ es de torsión.*
Por otro lado tenemos el dual de G, $\hat{G}$ y su componente conexa $c(\hat{G})$, aplicando nuevamente el Lema 4, $\hat{G}/c(\hat{G})$ es totalmente disconexo; notamos que en los grupos $\widehat{G/c(G)}$ y $\hat{G}/c(\hat{G})$ no se evidencia relación entre sus propiedades.
Tomemos a $G = \mathbb{T}$, luego $c(G) = c(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, así

$$\xi(G) = G/c(G) = \mathbb{T}/\mathbb{T} = \{1\}$$

y $\widehat{\xi(G)} = \widehat{\{1\}} = \{1\}$.
Ahora $\hat{G} = \hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$, de inmediato se observa que $\hat{G} = \hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z} \neq \{1\} = \widehat{\xi(G)}$.
Sin embargo, consideremos $\xi(\hat{G}) = \xi(\hat{\mathbb{T}}) = \xi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\{1\} = \mathbb{Z}$, luego se sigue $\xi(\hat{G}) = \xi(\hat{\mathbb{T}}) = \mathbb{Z} \neq \{1\} = \widehat{\xi(G)}$.

Ejemplo 4 *En la reflexión sobre los grupos libres de torsión, se sigue que siendo G un grupo topológico y $t(G)$ su subgrupo de torsión, por la Proposición 15, $G/t(G)$ es libre de torsión, de donde su grupo dual $\widehat{G/t(G)}$ es divisible.*
Tomando el grupo dual de G, $\hat{G}$, y su subgrupo de torsión $t(\hat{G})$, tenemos por la Proposición 15 que $\hat{G}/t(\hat{G})$ es libre de torsión; luego los grupos resultantes no reflejan relación entre sus propiedades.
En este caso sea $G = \mathbb{Z}$, de donde $\xi(G) = \xi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $\widehat{\xi(G)} = \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.
Luego $\hat{G} = \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, se sigue de [14, Definición 1.38] que $\xi(\hat{G}) = \xi(\hat{\mathbb{Z}}) = \xi(\mathbb{T}) = \xi(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, luego se sigue $\xi(\hat{G}) = \mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \mathbb{T} = \widehat{\xi(G)}$.

El siguiente Lema nos dice que si $T \in \xi$, entonces los grupos $\hat{G}$ y $\widehat{\xi(G)}$ son algebraicamente isomorfos.

Lema 11 *Sea ξ una categoría y G un grupo topológico. Si $\mathbb{T} \in \xi$ entonces $\hat{\varphi}\colon \widehat{\xi(G)} \to \hat{G}$ es un isomorfismo continuo, siendo $\varphi\colon G \to \xi(G)$ la reflexión de G en $\xi(G)$.*

Demostración. De la Proposición 12, $\hat{\varphi}$ es un homomorfismo continuo, veamos que es biyectivo. En efecto, denotemos por $\xi(G)$ una reflexión de G

en ξ, y el morfismo $\varphi\colon G \to \xi(G)$; ahora si $\mathbb{T} \in \xi$, por la propiedad universal de reflexión, tenemos que dado un morfismo $\chi\colon G \to \mathbb{T}$, existe un único morfismo $\varphi_\chi\colon \xi(G) \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi_\chi \circ \varphi = \chi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi"'] & \xi(G) \arrow[dl, "\varphi_\chi"] \\ \mathbb{T} & \end{tikzcd}$$

Tomemos el homomorfismo dual de φ, $\hat{\varphi}\colon \xi(\hat{G}) \to \hat{G}$, definido como sigue, para cada $\lambda\colon \xi(G) \to \mathbb{T}$, $\hat{\varphi}(\lambda) = \lambda \circ \varphi$; el cual es continuo.
Definamos ahora el homomorfismo $\gamma\colon \hat{G} \to \xi(\hat{G})$ donde para cada elemento $\chi \in \hat{G}$, $\gamma(\chi) = \varphi_\chi$, es decir, que γ envía cada elemento de $\hat{G}$, χ, en un único φ_χ que hace que el diagrama anterior conmute. Veamos que $\hat{\varphi}$ y γ son aplicaciones inversas, en efecto, para $\lambda \in \xi(\hat{G})$, $\gamma \circ \hat{\varphi}(\lambda) = \gamma(\hat{\varphi}(\lambda)) = \gamma(\lambda \circ \varphi) = \gamma_{\lambda\circ\varphi}$, así $\gamma_{\lambda\circ\varphi}$ hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda\circ\varphi"'] & \xi(G) \arrow[dl, "\gamma_{\lambda\circ\varphi}"] \\ \mathbb{T} & \end{tikzcd}$$

Puesto que λ también hace que el diagrama conmute y $\gamma_{\lambda\circ\varphi}$ es único, se debe tener que $\gamma_{\lambda\circ\varphi} = \lambda$, por tanto $\gamma \circ \hat{\varphi}(\lambda) = \lambda$. Se sigue que para $\chi \in \hat{G}$, $\hat{\varphi} \circ \gamma(\chi) = \hat{\varphi}(\gamma(\chi)) = \hat{\varphi}(\varphi_\chi) = \varphi_\chi \circ \varphi = \chi$, por la propiedad universal de reflexión. $\square$

Los ejemplos 3 y 4 evidencian que la hipotesis de que $\mathbb{T} \in \xi$ es necesaria en el Lema 11.
Entonces siempre que $\mathbb{T} \in \xi$, tenemos que el homomorfismo dual de la aplicación del grupo a la reflexión, $\hat{\varphi}\colon \xi(\hat{G}) \to \hat{G}$, es un isomorfismo y por tanto $\gamma\colon \hat{G} \to \xi(\hat{G})$ también es un isomorfismo. Puesto que, para que $\hat{\varphi}$ sea un isomorfismo topológico, basta demostrar que tiene inversa continua; por lo que nos proponemos estudiar bajo que condiciones la aplicación γ es continua.

Corolario 7 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{C}$ la categoría de grupos precompactos, entonces $\hat{G}$ es continuamente isomorfo a $\mathcal{C}(\hat{G})$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{T}$ es compacto y por tanto precompacto, luego $\mathbb{T} \in \mathcal{C}$ y por el Lema 11 se tiene que siendo $id\colon G \to \mathcal{C}(G)$, $\hat{id}\colon \mathcal{C}(\hat{G}) \to \hat{G}$ es un isomorfismo continuo. $\square$

Corolario 8 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{C}_\omega$ la categoría de grupos $\aleph_0$-acotados, entonces $\hat{G}$ es continuamente isomorfo a $\mathcal{C}_\omega(\hat{G})$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{T}$ es compacto y por tanto $\aleph_0$-acotado, luego $\mathbb{T} \in \mathcal{C}_\omega$ y por el Lema 11 se tiene que $id\colon G \to \mathcal{C}_\omega(G)$ es un isomorfismo continuo. $\square$

Teorema 15 *Si G es un grupo compacto y $\mathbb{T} \in \xi$, entonces $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$.*

Demostración. Dado que $\mathbb{T} \in \xi$, entonces $\hat{\varphi}$ es una biyección. Notemos que, como G es compacto entonces $\hat{G}$ es discreto por la Proposición 11, por consiguiente la aplicación $\gamma\colon \hat{G} \to \xi(\hat{G})$, es continua. Como el homomorfismo $\hat{\varphi}$ es biyectivo y continuo con inversa continua, tenemos que $\hat{\varphi}$ es un homeomorfismo y por tanto un isomorfismo topológico. $\square$

Un resultado relevante se obtiene en los espacios Cěch completo.

Definición 23 *Un espacio Tychonoff X, se dice Čech completo si existe una compactación de X, cX, tal que $cX - X = \cap_{i=1}^{\infty} F_i$, donde los F_i son cerrados en cX, $i < \omega$.*

De la compactación de Alexandroff, tenemos que si X es localmente compacto y T_2, entonces X es Čech completo.

Teorema 16 *Si $f\colon X \to Y$ es una función continua abierta y sobreyectiva, de un espacio Čech completo X en un espacio Hausdorff Y, entonces para K compacto en Y, existe W compacto en X, tal que $f(W) = K$.*

Demostración. Para la demostración, ver [4, Teorema 1.31]. $\square$

Teorema 17 *Sea G un grupo topológico Čech completo. Si $\mathbb{T} \in \xi$ y $\varphi\colon G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta, entonces $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$.*

Demostración. Como $\mathbb{T} \in \xi$, concluimos que $\hat{\varphi}\colon \xi(\hat{G}) \to \hat{G}$ es una biyección, teniendo a $\gamma\colon \hat{G} \to \xi(\hat{G})$ como función inversa, Veamos que γ es continua. Para ello, sea (K,U) una vecindad de $e_{\xi(\hat{G})}$ en $\xi(\hat{G})$, siendo K compacto en $\xi(G)$ y U abierto en $\mathbb{T}$. Por el teorema 16 existe W compacto en G, tal que $\varphi(W) = K$, veamos que $\gamma((W,U)) \subseteq (K,U)$. En efecto, sea $\chi \in \hat{G}$, tal que $\chi(W) \subseteq U$ y probemos que $\gamma(\chi) \in (K,U)$, es decir que $\gamma(\chi)(K) \subseteq U$. Si $y \in K$, luego $y = \varphi(t)$, con $t \in W$, por tanto $\gamma(\chi)(y) = \gamma(\chi)(\varphi(t)) = \chi(t) \in U$, es decir $\gamma(\chi)(K) \subseteq U$. $\square$

Corolario 9 *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si $\mathbb{T} \in \xi$ y $\varphi\colon G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta, entonces $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$.*

Demostración. Dado que cada espacio localmente compacto es Čech completo, aplicando el Teorema 17, se obtiene el resultado. $\square$

Con este resultado se sigue el corolario.

Corolario 10 *Sea G un grupo topológico Čech completo y $\mathcal{A}$ la categoría de grupos abelianos, entonces $\hat{G} \cong \mathcal{A}(\hat{G})$.*

Demostración. Puesto que $\mathbb{T}$ es abeliano, luego $\mathbb{T} \in \mathcal{A}$ y por la Proposición 1 se tiene que $\varphi\colon G \to \mathcal{A}(G)$ es sobreyectiva y abierta, ya que por la Proposición 16 es una aplicación cociente; entonces aplicando el Teorema 17, $\hat{G} \cong \mathcal{A}(\hat{G})$. $\square$

Para grupos metrizables consideremos el siguiente teorema extraído de los texto [6] y [4].

Teorema 18 *[6, Teorema 2] Sea G un grupo topológico abeliano metrizable. Supongamos que H es un subgrupo denso de G. Entonces los grupos duales $\hat{G}$ y $\hat{H}$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Está claro que $\hat{H}$ y $\hat{G}$ son algebraicamente isomorfos. Para ver que ellos son topológicamente isomorfos, primero probamos que los dos grupos duales $\hat{H}$ y $\hat{G}$ tienen los mismos conjuntos compactos.
Toma un subconjunto compacto K de $\hat{H}$. Evidentemente K es cerrado en $\hat{G}$. Como H es metrizable, K es equicontinuo. Por lo tanto, existe una vecindad U de $e \in G$ tal que $K \subset (U \cap H, V)$, siendo V un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$.

Sea W una vecindad de $e \in G$ tal que $W+W \subset U$. Observe que $W \subset \overline{U \cap H}$. (Si $x \in W$, podemos tomar una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset H$ tal que $x_\alpha \in x + W \subset U$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$; por lo tanto, $x \in \overline{U \cap H}$.) Observe que $(U \cap H, V) = (\overline{U \cap H}, V) \subset (W, V)$; lo que a su vez implica que $K \subset (W, V)$ y por lo tanto K es compacta en $\hat{G}$. Esto muestra que $\hat{H}$ y $\hat{G}$ tienen los mismos conjuntos compactos. Ahora, por el Teorema 10, $\hat{H}$ y $\hat{G}$ son k-espacios, así concluimos que tienen los mismos conjuntos cerrados y en consecuencia son topológicamente isomorfos. $\square$

Caso conocido de este hecho, es la completación de Raĭkov.

Corolario 11 *Sea G un grupo topológico abeliano metrizable y ϱ la subcategoría de los grupos completos, entonces $\hat{G} \cong \hat{\varrho G}$, donde ϱG es la completación de Raĭkov de G.*

Demostración. Debido a que ϱG es la completación de Raĭkov de G, tenemos que G es denso en ϱG, esto es $\overline{G} = \varrho G$, por ser G metrizable, [2, Proposición 3.6.20] nos garantiza que $\overline{G} = \varrho G$ también es metrizable y aplicando nuevamente el Teorema 18, $\hat{G}$ y $\hat{\varrho G}$ son topológicamente isomorfos, es decir, $\hat{G} \cong \hat{\varrho G}$. $\square$

Corolario 12 *Sea G un grupo topológico abeliano precompacto metrizable, entonces $\hat{G} \cong \hat{bG}$, donde bG es la compactación de Bohr de G.*

Demostración. Dado que bG es la compactación de Bohr de G, se sigue que G es denso en bG, es decir $\overline{G} = bG$; como G metrizable, [2, Proposición 3.6.20] implica que $\overline{G} = bG$ es metrizable y aplicando el Teorema 18, $\hat{G}$ y $\hat{bG}$ son topológicamente isomorfos, es decir, $\hat{G} \cong \hat{bG}$. $\square$

El siguiente resultado ya es conocido (ver Proposición 11), que es una generalización del hecho de que todo grupo abeliano compacto y Hausdorff, tiene dual discreto, sin embargo esta es una prueba alternativa usando la compactación de Bohr.

Teorema 19 *Si G es precompacto abeliano y metrizable, $\hat{G}$ es discreto.*

Demostración. Por el Corolario 12, $\hat{bG} \cong \hat{G}$, pero por ser bG compacto, la Proposición 11 nos dice que $\hat{bG}$ es discreto, luego así mismo es $\hat{G}$. $\square$

Conclusiones

La teoría de dualidad en el rol de ser una herramienta de gran ayuda para el analisis y estudio de la estructura de los grupos, en su extenso listado de aplicaciones en este trabajo se reduce al dual de la reflexión de un grupo topológico; verificando en primera instancia, la importancia que tiene en la caracterización del mismo el hecho de que $\mathbb{T} \in \xi$, esto es, que $\mathbb{T}$ este en la subcategoría de reflexión ξ a considerar, debido a que cuando esto no se da no se evidencian relaciones entre el dual y la reflexión del dual, como es el caso de la reflexión sobre los espacios totalmente disconexos y la reflexión sobre los espacios libres de torsión.
Los resultados obtenidos en esta teoría para grupos topológicos, ayudan a darle forma al proceso de caracterización debido al comportamiento particular que los grupos topológicos presentan, en general notamos que el teorema de Pontryagin sobre dualidad de grupos abelianos permite identificar un grupo G con $\hat{G}$, hecho que en el caso de la reflexión de un grupo topológico se ha verificado que $\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$, donde $\cong$ denota un isomorfismo continuo y $\xi(G)$ es la reflexión de G en ξ con la condición de que $\mathbb{T} \in \xi$; ahora para que esto se consolide como un isomorfismo topológico consideramos en los resultados las siguientes condiciones:

1. G un grupo topológico compacto y $\mathbb{T}$ en la subcategoría de reflexión ξ.
2. G un grupo topológico Čech completo, $\mathbb{T} \in \xi$ y $\varphi\colon G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta.
3. G un grupo topológico localmente compacto, $\mathbb{T} \in \xi$ y $\varphi\colon G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta.
4. G es abeliano metrizable y un subgrupo denso de $\xi(G)$.

En cada unos de estos resultados se presentan casos conocidos y de relevancia como son la abelianización, la compactación de Bohr y la completación de Raĭkov, citando este trabajo como antecedente a futuras investigaciones sobre esta temática para caracterizar el dual de otras reflexiones.

Preguntas abiertas

1. Sea G un grupo topológico. Si G es un k-espacio, $\mathbb{T} \in \xi$ y $\varphi\colon G \to \xi(G)$ es sobreyectiva y abierta, entonces ¿$\hat{G} \cong \xi(\hat{G})$?
2. Sea G un grupo topológico abeliano pseudometrizable. Supongamos que H es un subgrupo denso de G. ¿Son los grupos duales $\hat{G}$ y $\hat{H}$ topológicamente isomorfos?

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii y E. A. Reznichenko, *Paratopological and semitopological groups versus topological groups*, Topol. Appl. 151, págs. 107-119, 2005.

[2] A. V. Arhangel'skii y M. G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Series in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press and World Scientic, Paris-Amsterdam 2008.

[3] A. V. Arhangel'skii y V. I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, (Reidel, translated from Russian), 1984.

[4] L. Aussenhofer, *Contributions to the Duality Theory of Abelian Topological Groups and to the Theory of Nuclear Groups*, Dissertationes Math., Warszawa, CCCLXXXIV, 1998.

[5] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México 2012.

[6] M. J. Chasco, *Pontryagin duality for metrizable groups*, Archiv der Math. 70, 22–28, 1998.

[7] W. W. Comfort, F. Javier Trigos-Arrieta y Ta-Sun Wu, *The Bohr compactification, modulo a metrizable subgroup*, Fund. Math. 143 (1993), 119-136, Correction: 152 (1997), 97-98.

[8] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, 2nd ed. (Universitext), Springer-Verlag, New York, Inc, 2005.

[9] D. Dikranjan, *Introduction to Topological Groups*, Topología 2, Topological Groups, Version 7.11.2013, 2012/13.

[10] D. Dikranjan, M. V. Ferrer y S. Hernandez, *Dualities in topological groups*, España, March 20, 2010.

[11] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[12] M. Ferrer, S. Hernández y V. Uspenskij, *Precompact groups and property (T)*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 404. 10.1016/j.jmaa.2013.03.004.(2011).

[13] M. Gary, *Teoría Clásica de Dualidad*, Universidad Autónoma Metropolitana, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Noviembre de 2011.

[14] C. Hernández, M. Tkachenko, L. Villegas y O. Rendón, *Grupos Topológicos*, Universidad Autonoma Metropolitana unidad Iztapalapa, 1997.

[15] E. Hewitt y K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 115, Springer Verlag, Berlin – Gottingen – Heidelberg, 1963.

[16] P. Holm, *On the Bohr Compactification*, Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo, Nro 6, Mars 1963.

[17] P. Holm, *On the Bohr Compactification*, Math. Annalen 156, 34-46, Berkeley, Calif, 1964.

[18] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1966.

[19] H. Liang y S. Huang, *Existence of reflections and its applications*, Topology and its Applications 218, 30–41, 2017.

[20] G. W. Mackey, *Harmonic analysis as the exploitation of symmetry - a historical survey*, no. 1, part 1, 543-698, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1980.

[21] E. J. Martínez, *El dual en grupos abelianos finitos - Teorema de Pontryagin*, Universidad distrital francisco josé de caldas, Facultad de ciencias y educación, Bogotá, 2015.

[22] G. McCarty, *An Introduction with Application to Topological Groups*, University of California, 1988.

[23] S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian groups*, Cambridge University Press, 1977.

[24] J.R. Munkres, *Topología*, Madrid: Prentice Hall, p. 35-260, 2002.

[25] D. A. Padilla, *Introducción A Los Grupos Topológicos*, [Proyecto Curricular de Matemáticas]. Bogotá, Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas; 2015.

[26] M. Padró, *Grupos topológicos y Grupos de convergencia: estudio de la dualidad de Pontryagin*, C/Sicilia 208, Universidad de Barcelona, 1999.

[27] L. Pontryagin, *Grupos Continuos*, Editorial Mir, Moscu, 1978.

[28] O. Ravsky, *Paratopological Groups II*, Matematichny studii 17, 93-101, 2002.

[29] J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, (Second Edition), Graduate Texts in Mathematics 80, QA171.R73, Springer–Verlag, New York, 1996.

[30] D. W. Roeder, *Category theory applied to Pontryagin duality*, Pacific J. Math. 52 (1974) 519-527.

[31] G. N. Rubiano, *Topología General*, 3a. edición Universidad Nacional de Colombia, vi, 284 p. : 3 il. 00, ISBN 978-958-719-442-5, 2010.

[32] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and modern Analysis*, Colorado College, 1963.

FECHA		
DD	MM	AAAA
28	05	2020

1. Presentación del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Código	Documento de Identidad		Apellidos	Nombres	Correo electrónico
	Tipo	número			
1711710005	CC	1.007.402.130	CASTILLO MARTINEZ	ADRIANA CAROLINA	adrianacarolinac35@gmail.com

Programa	MAESTRIA EN MATEMATICAS
Facultad	CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Título al que opta	MAGISTER EN MATEMATICAS
Asesor	JULIO HERNANDEZ ARZUSA

Título de la obra: EL DUAL DE LA REFLEXION DE UN GRUPO TOPOLOGICO

Palabras claves (materias): GRUPOS TOPOLOGICOS, REFLEXION, GRUPO DUAL.

2. Autorización de publicación de versión electronica del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Con esta autorización hago entrega del trabajo de grado (investigación o tesis) y de sus anexos (si existen), de forma gratuita en forma digital o electrónica (CD-ROM, DVD) y doy plena autorización a la Universidad de Cartagena, de forma indefinida, para que en los terminos establecidos en la ley 23 de 1982, la Ley 44 de 1993, leyes y jurisprudencia vigente al respecto, haga la publicación de éste, con fines educativos. Esta autorización, es válida sobre la obra en formato o soporte material, digital, electrónico o virtual, para usos en red, internet, intranet, biblioteca digital o cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR, expresa que el trabajo de grado (investigación o tesis) objeto de la presente autorización, es original y la elaboró sin quebrantar ni suplantar los derechos de autor de terceros, de tal forma que el Trabajo es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre éste. En caso de queja o acción por parte de un tercero referente a los derechos de autor sobre el trabajo de grado en cuestiónEL AUTOR, asumirá la responsabilidad total, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos, laUniversidad de Cartagena actúa como un tercero de buena fe.

Toda persona que consulte ya sea la biblioteca o en medio electrónico podrá copiar apartes del texto **citando** siempre la fuentes, es decir el título del trabajo,autor y año.

Esta autorización no implica renunciar a la facultad que tengo de publicar total o parcialmente la obra.La autorización debe estar respaldada por las firmas de todos los autores del trabajo de grado.

Si autorizo

3. Firma

1827 *¡Siempre a la altura de los tiempos!*	**UNIVERSIDAD DE CARTAGENA**	**CÓDIGO:**FO-GR-011
	RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN	**VERSIÓN:**00
	CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	**PAGINA:** 2

Firma Autor 1 ADRIANA C. CASTILLO M.	Firma Autor 2
Firma Autor 3 _______________________	Firma Autor 4 _______________________