SOLUCIONES MÚLTIPLES DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DE BOLTZMANN

JOSÉ DE LOS SANTOS MARRUGO PÉREZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
CARTAGENA DE INDIAS, COLOMBIA
2018

SOLUCIONES MÚLTIPLES DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DE BOLTZMANN.

JOSÉ DE LOS SANTOS MARRUGO PÉREZ

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OBTENER EL
TÍTULO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

PhD. RAFAEL GALEANO ANDRADE
DIRECTOR

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
CARTAGENA DE INDIAS, COLOMBIA
2018

Dedicado a mis familiares, por cuyo amor,
acompañamiento y apoyo, la luz del
saber se extendió por todos
los rincones de mi ser

En especial a mi hija Allison

Índice general

Agradecimientos

Quisiera desde estas lineas dejar constancias de mi agradecimiento a todas las personas que me han ayudado, de alguna manera, a que pudiera realizar este trabajo.

Gracias a mi asesor, el Dr. Rafael Galeano Andrade, por todo lo que ha hecho, sin cuya ayuda este trabajo no habría sido posible.

A todos mis compañeros de estudio durante la maestría, cuya colaboración mutua fue fundamental para avanzar en este objetivo

A mi familia y a mi amigos que me han animado en este camino.

Introducción

La teoría cinética describe un gas como un sistema de muchas partículas (Aproximadamente 10^{23} moléculas por cm^3 en condiciones normales)moviéndose a altas velocidades de acuerdo a las leyes de la mecánica clásica. Las partículas interactúan cambiando sus velocidades por choques binarios y los efectos químicos o eléctricos no son considerados. Debido a la dificultad de realizar un estudio del comportamiento individual de cada molécula, se introduce una descripción estadística del fenómeno, en particular es interesante determinar si es posible encontrar alguna función,

$$f(t,x,v) \geq 0, t \geq 0, x, v \in \mathbb{R}^3$$

La cual representa la función de densidad de la probabilidad de que una partícula se encuentre en el punto x, en el instante t , moviéndose con una velocidad v. Las bases para esta teoría estadística fueron establecidas en la segunda mitad del siglo XIX. James Clerk Maxwell (1831-1879) encontró la función de la distribución de velocidades de las moléculas de un gas en equilibrio térmico. Ludwig Boltzmann (1844-1906) estudió el problema de un gas partiendo de cualquier estado inicial derivado de la Distribución de Maxwell:

$$f_{eq}(v) = \sigma(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} Exp(\frac{-m|v-V|^2}{2kT})$$

Donde σ, V y T son la densidad (número de moléculas por unidad de volumen), la velocidad de flujo y la temperatura absoluta del gas, respectivamente. De otra parte m es la masa de una molécula y k es la constante de Boltzmann. En ausencia de colisiones, la velocidad v de cada partícula permanecerá constante a lo largo del tiempo. Una partícula con velocidad v y localizada en el punto x en el tiempo inicial $t = 0$, se moverá hasta $x + tv$, en el tiempo t. Por lo tanto $f(t, x, v) = f(0, x - tv, v)$. En este caso f proporciona una solución a la ecuación lineal del transporte:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = 0$$

La presencia de colisiones trae como consecuencia la introducción de una forma cuadrática en el lado derecho:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = Q(f,f) \tag{1}$$

Donde $Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{|w|=1} w\cdot(v-u)(f(u')f(v') - f(u)f(v))dudw$ se conoce con el nombre de Operador de Colisión y además,$u' = u - w\cdot(v-u)w$ y $v' = v + w\cdot(v-u)w$ son las velocidades pos colisión de las moléculas, ver (10).

Q proporciona una medida de la probabilidad de encontrar una partícula en una determinada región del espacio, teniendo en cuenta la variación ocasionada por los choques entre las mismas (relación ganancia-pérdida). La ecuación (1) fue establecida en 1872 por *Ludwing Boltzmann* y desde entonces ha constituido un campo de interés tanto teórico como práctico en las ecuaciones de tipo cinético.

Esta ecuación es importante en aplicaciones, por ejemplo, en la investigación teórica en procesos de cristalización para metales, siempre es asociado con la necesidad de describir la regulación de la transformación Fase, ver [4]. También se puede encontrar en el movimiento de Iones que se mueven a través de poros, con ecuaciones de tipo cinético estacionarios, ver [13], y en modelos cinéticos de flujos vehiculares, encontrando soluciones estacionarias, ver [11].

En este trabajo pretendemos estudiar la Ecuación Estacionaria de Boltzmann en el espacio $L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir, cuando no depende del tiempo $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Ver (7)

Especificamente se resuelve, mediante un teorema de punto fijo en cascarones cónicos ver [1], el siguiente problema: Encontrar una función $u : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$con $u(x,v) \geq 0, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$v\cdot\nabla_x u(x,v) = Q(u,u)(v) \qquad x\in\Omega,\ v\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

$$u(x,v) = e^{-|v|^2} \qquad x\in\partial\Omega,\ v\in\mathbb{R}^n$$

donde $Q(u,h)(v) = \begin{cases} Q(u,u)(v) & if \quad u = h \\ \\ 0 & if \quad u \neq h \end{cases}$

$Q(u,u)(v) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} B(n, w-v)[u(x,v')u(x,w') - u(x,v)u(x,w)]dndw$ siendo $v' = v + [(w-v).n]n$ y $w' = w - [(w-v).n]n$, n es el vector unitario en la dirección de la bisección del ángulo formado por $v-w$ y $w'-v'$ y $S^2_+ = \{n \in \mathbb{R}^n : \|n\| = 1,\ [n.(w-v)] \geq 0\}$. El operador de colisión Boltzmann Q es un operador cuadrático local en (t,x). El tiempo y posición actúan solo como parámetros en Q y por lo tanto se omiten en su descripción. Además B cumple las siguientes condiciones:

i) $B(n, w-v) \geq 0$ y B depende solo de $\|w-v\|$ y $|(w-v,n)|$.

ii) $B \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n, S^2_+)$.

iii) $B(n, w-v) \leq b_1 \frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1 + \|w-v\|^{\mathfrak{v}}]$.

v) $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} B(w-v,n) dndw < \infty$ siendo $\mathfrak{v} \in [0,1]$ y $b_i (i = 0,1)$ son constantes positivas.

iv) $Q(u,u)(v) = 0$ si u es un maxwelliano $(u(x,v) = ke^{-|v|^2},\ k = cte)$

vi) $Q(-u,-u)(v) = Q(u,u)(v)$

La ecuación de Boltzmann estacionaria ha sido estudiada en aproximación de L^1 por el método de compacidad débil, ver [2] y [3], consideraciones clásicas de la ecuación estacionaria de Boltzmann se hacen en [12] y [14], la alternativa de $Leray - Schauder$ fue estudiada en el artículo [9], donde se demuestra la existencia de soluciones, este trabajo es una continuación de [9], y demostramos existencia de soluciones múltiples de la ecuación estacionaria de Boltzmann utilizando un teorema del punto fijo en cascarones cónicos.

El resultado que se utiliza para resolver el anterior problema (2) es el siguiente, ver [1]:

Teorema 0.0.1. *Sea $E = (E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $C \subseteq E$ un cono y sea $\|.\|$, creciente con respecto a C.Además sea r, R constantes con $0 < r < R$. Suponga que $F : \overline{\Omega}_R \cap C \to C$ (aquí $\Omega_R := \{x \in E : \|x\| < R\}$),es una función continua y compacta,y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*

(B1) $x \neq F(x)$ para todo $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$

(B2) $\|F(x)\| > \|x\|$ para todo $x \in \partial_E \Omega_R \cap C$.

(B3) $\|F(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$.

Entonces F tiene al menos dos puntos fijos x_0 y x_1 con $x_0 \in \Omega_r \cap C$ y $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \overline{\Omega}_r)$.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Consideraciones Generales

En este capítulo daremos las definiciones necesarias y algunas propiedades básicas de la teoría de análisis funcional(ver [5]) y de teoría cinética (ver [10]) para tener una base sólida sobre la cual trabajar luego en el resto de este trabajo.

1.2. Análisis Funcional

1.2.1. Espacios de Banach

En esta sección nos concentraremos en los espacios normados completos. Veremos que muchas propiedades agradables e "intuitivas" pueden deducirse cuando pedimos esta condición adicional de completitud a un espacio normado.

Definición 1.2.1 (Sucesiones de Cauchy)**.** *Diremos que una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio normado* $(E, \| \|)$ *es de Cauchy, si*

$$\forall\epsilon > 0; \exists N_0 \in \mathbb{N}/\|x_n - x_m\| < \epsilon \text{ } si \text{ } m, n \geq N_0$$

Como siempre, usando la desigualdad triangular, se demuestra fácilmente que toda sucesión convergente es de Cauchy; todo esto nos lleva a nuestro siguiente objeto de estudio.

Definición 1.2.2 (Espacio de Banach)**.** *Un Espacio de Banach es un espacio normado* $(E, \| \|)$*, completo con respecto a la metrica inducida por la norma* $\| \|$*, o sea un espacio normado tal que para toda sucesión* $\{x_n\}$ *de Cauchy existe un* $x_0 \in E$ *tal que* x_0 *es el límite de la sucesión en norma, en el sentido habitual:*

$$\forall\epsilon > 0; \exists N_0 \in \mathbb{N}/\|x_n - x_0\| < \epsilon \text{ } si \text{ } n \geq N_0$$

Ejemplo 1.2.1. $(\mathbb{R}, |\ |)$ es un espacio de Banach, donde $|\ |$ es el valor absoluto.
Ejemplo 1.2.2. $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$ es un espacio de Banach, donde

$$\|\ \|_p = (\sum_1^n |x|^p)^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

El caso particular $p = 2$ se denomina generalmente **espacio Euclídeo**.
Ejemplo 1.2.3. C[a,b] $= \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} | \varphi$ es contínua$\}$ las funciones contínuas sobre el intervalo $[a,b]$, junto con la norma

$$\|\varphi\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|\varphi(t)|$$

es un espacio de Banach.

Definición 1.2.3 (Sucesiones Absolutamente Sumables)**.** *Diremos que una sucesión de vectores* $\{x_n\}$ *en un espacio normado es* ***sumable*** *cuando* $\Sigma_{n=1}^N x_n$ *es convergente (en norma), y* ***absolutamente sumable*** *cuando* $\Sigma_{n=1}^N \|x_n\| < \infty$

Una caracterización bastante útil de los espacios normados completos nos las da la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Un espacio normado es completo si y solo si cada sucesión absolutamente sumable es sumable.*

Definición 1.2.5 (el espacio de operadores)**.** *LLamaremos* $L(E,F)$ *al conjunto de operadores lineales acotados* $A : E \to F$ *de un espacio normado en otro, que resulta un espacio normado con la suma y el producto por escalares definidos punto a punto, y la norma*

$$\|A\| = inf\{M > 0 | \|Ax\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E\}$$

Teorema 1.2.6. *Sean* E *y* F *espacios normandos con* $E \neq \boldsymbol{0}$*. Entonces el espacio* $L(E,F)$ *es un espacio de Banach si y solo si* F *es un espacio de Banach.*

Un caso Particular: *El dual como espacio de Banach.*
La primera aplicación del teorema (1.2.6) es en el caso $F = \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo sobre el que se define el espacio vectorial E. Este teorema nos dice que para cualquier espacio normado E, completo o no, E^* es un espacio normado completo.

1.2.2. Espacio Cociente

Tenemos un espacio vectorial cualquiera E, con una seminorma $\| \|_E$, y dentro de él un subespacio propio S, que sea cerrado en el sentido :
• Dado $x \in E$, si existe $\{s_n\}$ en S tal que:

$$\|s_n - x\|_E \to_n 0$$

entonces $x \in S$. Está bastante claro que si $\| \|_E$ es realmente una norma, $(E, \| \|_E)$ es un espacio normado y lo que debemos tomar es un subespacio cerrado en el sentido usual, es "métrico" o "topológico".
Otro caso sencillo (pero muy importante) es aque de los elementos que tienen seminorma nula, es decir

$$S = (\| \|_E)^{-1}(0) = \{y \in E : \|y\|_E = 0\}$$

(la verificación de que se trata realmente de un espacio es trivial). En ese caso

$$\|x\|_E \leq \|x - x_n\|_E + \|x_n\|_E = \|x - x_n\|_E \to_n 0$$

y entonces $\|x\|_E = 0$ (o sea $x \in S$)

Ahora se toma la proyección al cociente $Q : E \to E/S$, y se define en el cociente

$$\|Q(x)\|_{E/S} = \|[x]\|_{E/S} = \|x + S\|_{E/S} = inf\{\|x - s\|_E : s \in S\}$$

que resulta ser una seminorma.
Obsérvese que si $\| \|_{E/S}$ es una norma, entonces $\|[x]\|_{E/S} = dist(x, S)$ y como S es un cerrado, $\|[x]\|_{E/S} = 0$ nos dice que $dist(x, S) = 0$, y por ende $\overline{S} = S$ (osea $[x] = [0]$). En otras palabras , el espacio cociente $(E/S, \| \|_{E/S})$ sigue siendo un espacio normado.

Proposición 1.2.7. *Propiedades de $Q : E \to E/S$*

1. *Si toda sucesión de Cauchy es convergente para $\| \|_E$ (en particular si E es un espacio de Banach, o sea si $\| \|_E$ es una norma), entonces E/S es un espacio de Banach.*

2. *$\|Q(x)\|_{E/S} \leq \|x\|_E$ (si $\| \|_E$ es una norma, esto dice que Q es continua, y en este caso vale $\|Q\| = 1$); y si $S = \{y \in E : \|y\|_E = 0\}$, entonces vale la igualdad.*

3. *E es separable si y solo si S y E/S lo son.*

4. *Si $\| \|_E$ es una norma (y en consecuencia , E métrico), entonces: U abierto en E implica $Q(U)$ abierto en E/S. (o sea Q es abierta).*

1.2.3. Los Espacios L^p

Consideremos el espacio de funciones $\varphi : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) medibles, tales que la p-ésima potencia de su módulo es una función integrable, con la seminorma

$$\|\varphi\|_p = (\int_X |\varphi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Como mencionamos allí, está claro que se trata en realidad de una seminorma. Tomemos el subespacio de las funciones con seminorma nula

$$Z = \{\varphi \in L^p : \int_X |\varphi|^p d\mu = 0\}$$

y tenemos que

$$Z = \{\varphi \in L^p : \int_X |\varphi|^p d\mu = 0\} = \{\varphi \in L^p : \varphi = 0 \quad c.t.p(\mu)\}$$

Proposición 1.2.8. *El espacio cociente L^p/Z es un espacio normado completo con la norma $(\| \|_p)_{L^p/Z}$, y vale*

$$(\|\varphi\|_p)_{L^p/Z} = \|\varphi\|_p$$

Este espacio de Banach se denomina espacio de **clases de funciones** L^p y generalmente se denota simplemente $(L^p, \| \|_p)$

1.3. Teoría Cinética

La teoría cinética es un modelo matemático en el que un gas es representado como una colección de moléculas cuyo movimiento en "estacio de fase" es analizado. El espacio de fase es el producto cartesiano del espacio de posición tridimensional y el espacio de velocidad tridimensional. Utilizamos una aproximación estadística y planteamos la existencia de una función de distribución de velocidad $f = f(t, x, v)$ donde $t > 0; x, v \in \mathbb{R}^3$. Aquí $f \to 0, |v| \to \infty$ y el número probable de moléculas que en el tiempo t están ubicadas en un elemento de volumen $x, x + dx$ teniendo velocidades en $v, v + dv$, es $f(t, x, v)dxdv$. La función de distribucción f contienen una cantidad inmensa de información, por lo que se puede utilizar f para calcular propiedades macroscópicas. El área que estudiaremos incluye:

1. Gases rarificados

Las suposiciones son:

(i) El gas es electricamente neutro.

(ii) La distancia promedio entre las moléculas es grande en comparación con su tamaño; esto es, en comparación con la gama de fuerzas intermoleculares.

(iii) Los encuentros con otras moléculas forman una parte muy pequeña de la vida de una molécula; por lo tanto, sólo las colisiones binarias son importantes.

iv) Las colisiones preservan masa, el momentum y la energía.

2. Plasmas(gases completamente ionizados)

Existen esencialmente dos teorías: Vlasov(sin colisión) y MHD (magnetohidrodinámica). Sus propiedades pueden resumirse en el siguiente cuadro.

Cuadro 1.1: **Caracteristicas físicas de Plasmas Vlasov vs MHD**

	Vlasov	**MHD**
Escala de Tiempo	Rápido	Lenta
Temperatura	Alta	Baja
Densidad	Baja	Alta
Colisiones	Ignoradas	Muy Importantes

Aquí *lenta* significa que el movimiento del fluido es lento con respecto al movimiento térmico de la molécula; *temperatura alta* significa $T \gg \dfrac{e^2}{\overline{r}}$ donde
$-e$ = carga de un elecetrón.
T = temperatura.
$\overline{r}$ = distancia promedio entre moléculas,etc.

Todas las ecuaciones provienen de la ecuación de Liouville:
$\dfrac{Df}{Dt}$ = "material derivado"

= velocidad de cambio a lo largo de las trayectorias de partículas en el espacio de fase $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\frac{Df}{Dt} = \text{velocidad de cambio debido a las colisiones} \equiv C(f)$$

Si llamamos $(\dot{\mathrm{x}},\dot{\mathrm{v}})$ la velocidad en el espacio fase, entonces por las ecuaciones del movimiento de Newton

$$\dot{\mathrm{x}} = velocidad = v$$

$$\dot{\mathrm{v}} = fuerza = F$$

y la ecuación de Liouville puede ser reescrita así

$$\partial_t f + \bigtriangledown_x f \cdot \dot{\mathrm{x}} + \bigtriangledown_v f \cdot \dot{\mathrm{v}} = C(f)$$

ó

$$\partial_t f + \bigtriangledown_x f \cdot x + \bigtriangledown_v f \cdot v = C(f)$$

1.3.1. Una Derivación Formal de la Ecuación de Boltzmann

Sea la masa normalizada a la unidad. Considere una colisión de dos partículas, con una partícula con valores de velocidades en un rango dv, la otra con valores de velocidades en un rango du.En una colisión, éstos adquieren valores de velocidades en el rango dv' y du' respectivamente.
Las colisiones conservan el momentum

$$u' + v' = u + v$$

y la energía

$$|u'|^2 + |v'|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

Ahora se considera que el número total de colisiones por unidad de tiempo por unidad de volumen es

$$\{\frac{\text{El número de partículas}}{\text{unidad de volumen}}\} \times \{\text{Probabilidad de que alguno de ellos sufre una colisión}\}$$

Estos es,

$$f(t, x, v)dv \times p$$

Se toma p proporcional a

$$f(t, x, v)dv \times \{du' \times dv'\}$$

Así

$$\{\frac{\text{El número total de colisiones}}{\text{(unidad de volumen)(unidad de tiempo)}}\} = w(u', v'; u, v)f(u)f(v)dudvdu'dv'$$

Aquí w se determina a partir de la mecánica analítica resolviendo el problema de colisión asumiendo una fuerza intermolecular dada.También es convencional abreviar $f(t, x, u)$ por $f(u)$. De [31] afirmamos que el mismo Maxwell asumió que la densidad de probabilidad para un par de moléculas con velocidades v, u en (t, x) es proporcional al producto $f(t, x, u)f(t, x, v)$. Esta hipótesis se llama "caos molecular" y se reconoce que es de independencia estocástica.

La simetría para w se logra mediante el "Principio de equilibrio detallado"que afirma que

$$w(u', v'; u, v) = w(u, v; u', v')$$

Esto se discute formalmente en los libros de física. Basta con decir lo siguiente. En equilibrio, el número de colisiones $(u, v) \to (u', v')$ es igual al número de colisiones $(-u', -v') \to (-u, -v)$. Esto se sigue de simetría de las ecuaciones de la mecánica clásica en la reversión del tiempo, y es adoptado en configuraciones no desequilibradas también. Por lo tanto, bajo tal mapeo esperamos llegar

$$w(u', v'; u, v) = w(-u, -v; -u', -v')$$

y luego el resultado declarado

1.3.2. La Forma del Operador Collisión

Supongamos que dos moleculas colisionan. Cada colisión lo transfiere fuera de un rango particular dv (pérdidas). Dado dv, el número total de colisiones $(u, v) \to (u', v')$ con todos los valores posibles de u, u', v' que ocurren en el volumen dx por unidad de tiempo es

$$dxdv \cdot \int w(u', v'; u, v) f(u) f(v) du du' dv'$$

También hay ganancias: las colisiones que traen al rango dv moléculas que originalmente tenía valores fuera de ese rango. Dado v, estas son colisiones $(u', v') \to (u, v)$ con todos los posibles u, u', v', y

$$\frac{\text{el número total de tales colisiones en el volumen } dx}{\text{unidad de tiempo}} = dxdv \int w(u, v; u', v') f(u') f(v') du du' dv'$$

Por lo tanto

$$C(f) = \int w(u', v'; u, v)[f(u')f(v') - f(u)f(v)] du du' dv'$$

Tenga en cuenta que x no se modifica en $C(f)$
Para un gas monoatómico, escribimos

$$\frac{udu'dv'}{|v-u|} = d\sigma$$

que se llama la sección transversal de colisión diferencial, $d\sigma$ contiene δ funciones

$$\delta(u' + v' - u - v) \cdot \delta(\frac{|u'|^2 + |v'|^2 - |u|^2 - |v|^2}{2})$$

expresando la conservación del momentum y la energía. Supongamos que estos han sido eliminados. Entonces $d\sigma =$ *dispersión de la sección transversal*. Uno generalmente escribe esto como $d\sigma = q(w, |u - v|)dw \ \ (w \in S^2)$, así que

$$C(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|w|=1} q(w, |u - v|)[f(u')f(v') - f(u)f(v)]dwdu$$

Ahora obtenemos la forma explícita de u', v'. Las leyes de conservación imponen cuatro restricciones en las seis variables u', v'. Por lo tanto, hay dos grados de libertad. Nosotros escribimos

$$u' = u + a(u, v, w)w$$
$$v' = v - a(u, v, w)w$$

donde a es una función escalar y $|w| = 1$. Entonces el momentum es automáticamente conservado. A continuación forzamos la conservación de energía

$$|u'|^2 + |v'|^2 = |u|^2 + a^2 + 2aw \cdot u + |v|^2 + a^2 - 2aw \cdot v = |u|^2 + |v|^2$$

Por lo tanto

$$a^2 = a(w \cdot v - w \cdot u)$$

y por lo tanto, siempre que $a \neq 0$,

$$a(u, v, w) = w \cdot (v - u)$$

Capítulo 2

Desarrollo

En este capitulo el objetivo es resolver el problema (2), para ello se definen algunos espacios, un operador y se demuestra que se cumplen la condiciones del Teorema (0.0.1). Consideremos la siguiente definición.

Definición 2.0.1. *Sea* $E = \{u \in L^1(\overline{\Omega}) : v_i \frac{\mathfrak{d}u}{\mathfrak{d}x_i} \in L^1(\overline{\Omega})\}$
$\|u\|_E = \text{máx}\{\ \|u\|_{L^1(\bar{\Omega})},\ \|v_i \frac{\mathfrak{d}u}{\mathfrak{d}x_i}\|_{L^1(\overline{\Omega})}\}$; *siendo* $\|u\|_{L^1(\overline{\Omega})} = \int_{\overline{\Omega}} |u(x,v)|dx$ *para todo* $v \in \mathbb{R}^n$.

Observation: $(E, \|.\|)$ es un Espacio de Banach.

Definición 2.0.2. $C = \{u \in E : v.\nabla_x u(x,v) \geq u(x,v) \geq Q(u,u)(v) > 0\}$.

Proposición 2.0.3. *Q es contínuo en $B_E(0,R)$ si existe $k \geq 0$, $R \geq 0$ tal que* $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} b_1 \frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1 + \|w-v\|^{\mathfrak{v}}]dndw \leq \frac{k}{4R}$, *con* $m(\Omega) < \infty$.

Demostración. En efecto,

$$
\begin{aligned}
&|Q(u_n,u_n)(v) - Q(u,u)(v)| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u_n(x,v')u_n(x,w') - u_n(x,v)u_n(x,w)]dndw \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u(x,v')u(x,w') - u(x,v)u(x,w)]dndw| \\
&\leq |\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u_n(x,v')u_n(x,w') - u(x,v')u(x,w')]dndw| \\
&+|\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u(x,v)u(x,w) - u_n(x,v)u_n(x,w)]dndw| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u_n(x,v')u_n(x,w') - u_n(x,v')u(x,w') \\
&+ u_n(x,v')u(x,w') - u(x,v')u(x,w')]dndw| \\
&+|\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)[u(x,v)u(x,w) - u(x,v)u_n(x,w) \\
&+ u(x,v)u_n(x,w) - u_n(x,v)u_n(x,w)]dndw| \\
&\leq |\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)u_n(x,v')[u_n(x,w') - u(x,w')]dndw| \\
&+|\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)u(x,w')[u_n(x,v') - u(x,v')]dndw| \\
&+|\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)u(x,v)[u(x,w) - u_n(x,w)]dndw| \\
&+|\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^2_+} B(n,w-v)u_n(x,w)[u(x,v) - u_n(x,v)]dndw|
\end{aligned}
$$

aplicando las hipótesis ii), iii) sobre B obtenemos :

$|Q(u_n,u_n)(v) - Q(u,u)(v)| \leq$
$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1\frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1+\|w-v\|^{\mathfrak{v}}]u_n(x,v')[u_n(x,w') - u(x,w')]dndw| \ +$
$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1\frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1+\|w-v\|^{\mathfrak{v}}]u(x,w')[u_n(x,v') - u(x,v')]dndw| \ +$
$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1\frac{|(w-v,n)|}{||w-v||}\,[1+||w-v||^{\mathfrak{v}}]\,u(x,v)\,[u(x,w) - u_n(x,w)]\,dndw| \ +$
$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1\frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1+\|w-v\|^{\mathfrak{v}}]u_n(x,w)[u(x,v) - u_n(x,v)]dndw|$

así $\int_{\mathbb{R}^n}|Q(u_n,u_n)(v) - Q(u,u)(v)|dv \leq k\|u_n - u\|_E$, siendo $k \geq 4R\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1\frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1+\|w-v\|^{\mathfrak{v}}]dndw$ □

A continuación se demuestra algunas propiedades de C que garantizan que es un cono.

Proposición 2.0.4. *Propiedades de C*

i) $C \neq \emptyset$.

ii) *Si* $u \in C$ *y* $-u \in C$ *entonces* $u = 0 \in C$.

iii) C *es cerrado.*

iv) C *es convexo:*

Demostración. i) Consideremos $u(x,v) = x.\langle e^{-|v|^2}, e^{-|v|^2}, ..., e^{-|v|^2}\rangle \in C$, con $v_i \geq x_i > 0$,veamos que $u(x,v) \in C$. En efecto $u(x,v) = \sum_{i=1}^n x_i e^{-|v|^2}$, entonces $\nabla_x u(x,v) = \langle e^{-|v|^2}, e^{-|v|^2}, ..., e^{-|v|^2}\rangle$, así $v.\nabla_x u(x,v) = \sum_{i=1}^n v_i e^{-|v|^2} \geq \sum_{i=1}^n x_i e^{-|v|^2} > 0 = Q(u,u)$.

ii) Si $u \in C$ y $-u \in C$ tenemos que $v\cdot\nabla_x u(x,v) \geq u(x,v) \geq Q(u,u)(v) > 0$ y $-v\cdot\nabla_x u(x,v) \geq -u(x,v) \geq Q(-u,-u)(v) = Q(u,u)(v) > 0$ y esto es cierto si y solo si $u = 0$.

iii) Sea $u_n \longrightarrow u$ en $B_E(0,R)$, con $u_n \in C$, veamos que $u \in C$. Como $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, y $v\cdot\nabla_x u_n(x,v) \geq Q(u_n,u_n)(v) > 0$ entonces $v\cdot\nabla_x u = v\cdot\nabla_x(u - u_n + u_n) = v\cdot\nabla_x(u-u_n) + v\cdot\nabla_x(u_n) \geq v\cdot\nabla_x(u-u_n) + Q(u_n,u_n)(v)$ así $\lim_{n\to\infty} v\cdot\nabla_x u(x,v) \geq \lim_{n\to\infty} v\cdot\nabla_x(u-u_n)(x,v) + \lim_{n\to\infty} Q(u_n,u_n)(v) > 0$, entonces $v\cdot\nabla_x u(x,v) \geq \lim_{n\to\infty} Q(u_n,u_n)(v) = Q(u,u)(v)$ (Q es continuo en $B_E(0,R)$) así $u \in C$, y C es cerrado.

iv) Sea $0 \leq t \leq 1$ y sea $u_1 \in C$ y $u_2 \in C$ esto quiere decir que $v\cdot\nabla_x u_1(x,v) \geq u_1(x,v) \geq Q(u_1,u_1)(v) > 0$ y $v\cdot\nabla_x u_2(x,v) \geq u_2(x,v) \geq Q(u_2,u_2)(v) > 0$ entonces:
$v\cdot\nabla_x[tu_1 + (1-t)u_2](x,v) = tv\cdot\nabla_x u_1(x,v) + (1-t)v\cdot\nabla_x u_2(x,v) \ \geq$
$tQ(u_1,u_1)(v) + (1-t)Q(u_2,u_2)(v) \geq t^2 Q(u_1,u_1)(v) + (1-t)^2 Q(u_2,u_2)(v) \ =$

$Q(tu_1, tu_1)(v) + Q((1-t)u_2, (1-t)u_2)(v) = Q(tu_1 + (1-t)u_2, tu_1 + (1-t)u_2)(v)$, como $Q(u, h) = 0$ si $u \neq h$ así C es convexo.

□

Definición 2.0.5. *Si $u, h \in E$, $u \leq h$ si y solo si $h - u \in C$.*

El siguiente lema prueba que $\| \quad \|_E$ es creciente, teniendo encuenta la definición 2.0.5.

Lema 2.0.6. *Sea $u, h \in C$ y $u \leq h$, entonces $\|u\|_E \leq \|h\|_E$.*

Demostración. Como $h - u \in C$, tenemos que: $v \cdot \nabla_x(h)(x, v) - v \cdot \nabla_x(u)(x, v) \geq (h)(x, v) - (u)(x, v) \geq 0$ esto es$v \cdot \nabla_x h(x, v) - (h)(x, v) \geq v \cdot \nabla_x u(x, v) - (u)(x, v) \geq 0$ and $v \cdot \nabla_x h(x, v) \geq (h)(x, v)$

Además tenemos $\|u\|_E = max\{\|u\|_{L^1(\overline{\Omega})}, \|v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\overline{\Omega})}\}$. Esto es, $\|h\|_E \geq \|h\|_{L^1(\overline{\Omega})}$

Si $\|u\|_E = \|u\|_{L^1(\overline{\Omega})}$ entonces $\|u\|_E \leq \|h\|_E$ es válido.

Ahora, si $\|u\|_E = \|v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\overline{\Omega})}$, entonces $\|u\|_E = \int_{\overline{\Omega}} |v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}| dx$ y

$\sum_{i=1}^n \|u\|_E = \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\Omega}} |v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}| dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\Omega}} |v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}| dx \leq \sum_{i=1}^n \|h\|_E$. Entonces $n\|u\|_E \leq n\|h\|_E$, esto es, $\|u\|_E \leq \|h\|_E$. □

A continuación definimos un operador F y en el resto de este trabajo se demuestra que este operador cumple con las hipótesis del Teorema 0.0.1.

Definición 2.0.7. *Sea $F : B_E(0, R) \cap C \longrightarrow C$*

$$u \longrightarrow F(u) := \begin{cases} u - v \cdot \nabla_x u + Q(u, u) & si \quad u \in B_E(0, r) \cap C \\ \frac{1}{2} u - v \cdot \nabla_x u + Q(u, u) & si \quad u \in \partial B_E(0, r) \cap C \\ u + v \cdot \nabla_x u - Q(u, u) & si \quad u \in [\overline{B_E(0, R)} - \overline{B_E(0, r)}] \cap C \\ \frac{3}{2} u + v \cdot \nabla_x u - Q(u, u) & si \quad u \in \partial B_E(0, R) \cap C \end{cases}$$

siendo $0 < r < R$

Proposición 2.0.8. *Propiedades de F*

i) $\|F(u)\| < \|u\|$, *si* $u \in \partial_E B(0, r) \cap C$.

ii) $\|F(u)\| > \|u\|$, *si* $u \in \partial B_E(0, R) \cap C$.

iii) $u \neq F(u)$ *para todo* $u \in \partial_E B(0, r) \cap C$.

iv) $F(u) \in C$ *si* $u \in B_E(0, R) \cap C$

Demostración. i) Si $u \in \partial_E B(0,r) \cap C$, entonces $F(u) = \frac{1}{2}u - v \cdot \nabla_x u + Q(u,u)$, ahora $v \cdot \nabla_x u \geq Q(u,u)$, así $F(u) + v \cdot \nabla_x u - Q(u,u) = \frac{1}{2}u \Rightarrow \|F(u)\| \leq \|\frac{1}{2}u\| < \|u\|$ si $u \in C \cap \partial B_E(0,r)$.

ii) Si $u \in \partial B_E(0,R) \cap C$, entonces $F(u) = \frac{3}{2}u + v \cdot \nabla_x u - Q(u,u)$, como $u \in C$, entonces $\|F(u)\| \geq \|\frac{3}{2}u\| > \|u\|$

iii) Supongamos que existe $u_0 \in \partial B_E(0,r) \cap C$ tal que $F(u_0) = u_0$ entonces $u_0 = \frac{1}{2}u_0 - v \cdot \nabla_x u_0 + Q(u_0,u_0)$, esto es, $\frac{1}{2}u_0 = -v \cdot \nabla_x u_0 + Q(u_0,u_0)$, como $u_0 \in C$, entonces $v \cdot \nabla_x u_0 \geq Q(u_0,u_0) > 0$ esto quiere decir $-v \cdot \nabla_x u_0 + Q(u_0,u_0) < 0$ y $u_0 > 0$ lo cual es una contradicción.

iv) Si $u \in \overline{B_E(0,r)} \cap C$, entonces $F(u) \leq u$, esto quiere decir que, $u - F(u) \in C$, así existe $c \in C$ tal que $u - F(u) = c$, esto es, $F(u) = u - c \in C$. Si $u \in B_E(0,R) \cap C$, $F(u) \geq u$, entonces $F(u) - u \in C$, esto es, existe $c' \in C$ tal que $F(u) - u = c'$, por lo tanto $F(u) = u + c' \in C$. En los otros casos precedemos análogamente.

$\square$

Lema 2.0.9. *Existe $k' \geq 0$ tal que si $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n, w-v)| dn\ dw < \infty$, entonces $|Q(u,u)(v)| \leq k' \|u\|_E^2$.*

Demostración. Tenemos que

$|Q(u,u)(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| |u(x,v')u(x,w') - u(x,v)u(x,w)| dn\ dw$

como $u(x,v) \geq 0$,$u(x,w) \geq 0$, $u(x,v') \geq 0$ y $u(x,w') \geq 0$ entonces

$|Q(u,u)(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| |u(x,v')u(x,w')| dn\ dw$

. $+ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| |u(x,v)u(x,w)| dn\ dw$

Integrando con respecto a x

$|Q(u,u)(v)| \leq \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw \ \int_\Omega u(x,v')u(x,w') dx$

. $+ \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw \ \int_\Omega u(x,v)u(x,w) dx$

Ahora

$0 \leq [u(x,v') - u(x,w')]^2 = u^2(x,v') - 2u(x,v')u(x,w') + u^2(x,w')$

Entonces

$u(x,v')u(x,w') \leq \frac{1}{2}u^2(x,v') + \frac{1}{2}u^2(x,w')$

Análogamente

$u(x,v)u(x,w) \leq \frac{1}{2}u^2(x,v) + \frac{1}{2}u^2(x,w)$

Así

$|Q(u,u)(v)| \leq \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw\ [\int_\Omega \frac{1}{2}u^2(x,v')dx + \int_\Omega \frac{1}{2}u^2(x,w')dx]$

. $+ \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw\ [\int_\Omega \frac{1}{2}u^2(x,v)dx + \int_\Omega \frac{1}{2}u^2(x,w)dx]$

. $= \frac{2}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw [\|u^2\|_E]$

Entonces

$|Q(u,u)(v)| \leq k' \|u^2\|_E = k' \|u\|_E^2$ siendo $k' = \frac{2}{m(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_+^2} |B(n,w-v)| dn\ dw$ $\square$

Lema 2.0.10. *F es continuo en $B_E(0,R)$, siendo válidas las hipótesis sobre $B(n, w-v) < \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^2_+} b_1 \frac{|(w-v,n)|}{\|w-v\|}[1+\|w-v\|^{\mathfrak{v}}]dn\ dw$ y $m(\Omega) < \infty$.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

i) Sea $u, h \in [\overline{B_E(0,R)} - \overline{B_E(0,r)}] \cap C$, entonces
$F(u) = u + v\cdot\nabla_x u - Q(u,u)$ y $F(h) = h + v\cdot\nabla_x h - Q(h,h)$, luego
$F(u) - F(h) = (u-h) + v\cdot\nabla_x(u-h) + Q(h,h) - Q(u,u)$
Esto implica
$|F(u) - F(h)| \leq |(u-h)| + |v\cdot\nabla_x(u-h)| + |Q(h,h) - Q(u,u)|$
$|F(u) - F(h)| \leq |(u-h)| + |\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial(u-h)}{\partial x_i}| + |Q(h,h) - Q(u,u)|$
$\|F(u) - F(h)\|_E \leq \|u-h\|_E + n\|u-h\|_E + k\|h-u\|_E^2$
y esto muestra que F es continua en
$[\overline{B_E(0,R)} - \overline{B_E(0,r)}]$

ii) If $u, h \in \overline{B_E(0,r)} \cap C$, entonces:
$F(u) = u - v\cdot\nabla_x u + Q(u,u)$ y $F(h) = u - v\cdot\nabla_x h + Q(h,h)$, luego
$|F(u) - F(h)| \leq |(u-h)| + |v\cdot\nabla_x h - v\cdot\nabla_x u| + |Q(u,u) - Q(h,h)|$
Esto implica
$\|F(u) - F(h)\|_E \leq \|u-h\|_E + \sum_{i=1}^N \|v_i \frac{\partial(h-u)}{\partial x_i}\|_{L^1{}_\Omega} + k\|h-u\|_E^2$, que también implica que F es continuo en $\overline{B_E(0,r)}$. Los otros casos son similares.

□

Lema 2.0.11. *F es compacto.*

Demostración. Aplicando el citerio de Dunford-Pettis, ver [6].
Sea $\mathfrak{F} = \{F(u) \in C : u \in C \cap B_R(0)\}$. Veamos que $\mathfrak{F}$ es equintegrable.
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y calculemos $\int_\Omega |F(u)|dx$, para esto,

1. Supongamos que $u \in [\overline{B_R(0)} - \overline{B_r(0)}] \cap C$, entonces
$\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx = \int\limits_\Omega |u(x,v) + v\cdot\nabla_x u - Q(u,u)|dx$, además $u \in C$, $Q(u,u) > 0$ entonces $\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq \int_\Omega |u(x,v)|dx + \int_\Omega |v\cdot\nabla_x u|dx + \int_\Omega |Q(u,u)|dx$, esto es $\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq \|u\|_E + N\|u\|_E + k'\|u\|_E^2 m(\Omega)$, así existe un $\delta > 0$ tal que $m(\Omega) < \delta$, luego $\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq (1+N)\|u\|_E + k'\delta\|u\|_E^2$, como $u \in B_R(0)$, entonces $\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq (1+N)R + k'\delta R^2$, y si definimos $\epsilon = \{(1+N)R + k'\delta R^2\}$, podemos concluir que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \quad \int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq \epsilon$.

2. Si $u \in \overline{B_r(0)} \cap C$, entonces,
$\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq \int_\Omega |u(x,v)|dx - \int_\Omega |v\cdot\nabla_x u|dx + \int_\Omega |Q(u,u)|dx$, como $u \in C$, tenemos que $v\cdot\nabla_x u > 0$, luego $\int_\Omega |F(u)(x,v)|dx \leq \int_\Omega |u(x,v)|dx + \int_\Omega |v\cdot\nabla_x u|dx + \int_\Omega |Q(u,u)|dx$
Si $u \in \partial_E B(0,r) \cap C$ y $u \in \partial_E B(0,R) \cap C$, procedemos análogamente..

Como Ω es medible, existe un subconjunto $\Omega', \Omega' \subseteq \Omega$ con $med(\Omega - \Omega') < \delta$, entonces
$\int_{\Omega-\Omega'} |F(u)(x,v)|dx \leq \|u\|_E + N\|u\|_E + k'\|u\|_E^2 m(\Omega - \Omega')$
. $\leq (1+N)\|u\|_E + k'\delta\|u\|_E^2$
. $\leq (1+N)r + k'\delta r^2$
Definimos $\epsilon = \{(1+N)r + k'\delta r^2\}$ entonces $\forall \epsilon, \exists \delta : \int_{\Omega-\Omega'} |F(u)(x,v)|dx \leq \epsilon$

$\square$

Así, se ha demostrado que el operador F definido en (2.0.7) cumple todas las hipótesis del Teorema (0.0.1), el cual garantiza la existencia de dos puntos fijos u_0 y u_1 con $u_0 \in B_E(0,r) \cap C$ y $u_1 \in C \cap [\overline{B_R(0)} - \overline{B_r(0)}]$, y estos puntos fijos son no triviales, es decir, $u_0 \neq 0, u_1 \neq 0$. Además, si $x \in \partial\Omega, v \in \mathbb{R}^n, F(u) = u(x,v) = e^{-|v|^2}$ con $u \in B_E(0,r) \cap C$ y análogamente $F(u) = u(x,v) = e^{-|v|^2}$ si $u \in [\overline{B_E(0,R)} - \overline{B_E(0,r)}] \cap C$

Capítulo 3

Conclusiones

En conclusión, se ha demostrado existencia de dos puntos diferentes de cero que satisfacen la Ecuación Estacionaria de Boltzmann en un espacio de Sobolev en $L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir, soluciones multiples de la Ecuación Estacionaria de Boltzmann.

Es importante resaltar que lo anterior se ha logrado mediante la teoría de punto fijo, en este caso un teorema de punto fijo para cascarones cónicos (Teorema (0.0.1)). Basicamente lo que se hizo fué definir un operdaor adecuado, de tal manera que un punto fijo de éste sea una solución de la Ecuación Estacionaria de Boltzmann en el espacio $L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y además se ha demostrado que el operador satisface ciertas condiciones para poder aplicar un teorema de punto fijo en cascarones cónicos (Teorema (0.0.1)).

Bibliografía

[1] AGARWAL R, MEEHAN M, OREGAN D, *"Fixed Point Theory and Applications", C. T. M., 2004.*

[2] ARKERYD, L. *"On the Stationary Boltzmann Equation", Seminary E.D.P. expose N 3, pp 11 (2001-2002).*

[3] ARKERYD, L. Y NOURI, A *"The Stationary Boltzman Equation in* $\mathbb{R}^n$ *with given data", Annals Scuola Normal Superior de Pisa. (2002).*

[4] CHEREPANOV A. N. *"Stationary Kinetic Model of a Dendrite Two-Phase Zone", Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Springer Verlag New York. 2005, 714-719.*

[5] CORACH,G, AND ANDRUCHOV, E., *"Notas de Análisis Funcional", Departamento de Matemáticas de la FCEyN, UBA, 1997.*

[6] BREZIS HAIM, *"Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations", Springer Verlag, 2011.*

[7] GALEANO R, ALMANZA M, *"A variational Approach of Stationary Boltzmann under a condition of Poisson type", Revista Tecnica Facultad de Ingenieria, Zulia, 2013.*

[8] GALEANO R, ALMANZA M, ORTEGA P, *"Stationary Boltzmann Equation with Boundary Data Depending on the Maxwellian", Matemática Enseñanza Universitaria, Vol 20, No. 2, 2012.*

[9] GALEANO R, CANTILLO J, ORTEGA P, *"Stationary Boltzmann Equation and the Nonlinear Alternative of Leray-Schauder", Cubo journal of mathematics, Vol 16, 2014.*

[10] GLASSEY R., *"The Cauchy Problem in Kinetic Theory", Society for Industrial and Applied Mathematics (Siam) , 1996.*

[11] ILLNER, R. Y KLAR, A., *"A kinetic Model for Vehiculos Traffic: Existence of Stationary Solutions", Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol 237 - 2, 1999, 622-643..*

[12] MASLOVA N, *“Nonlinear Evolution Equation”, Series on Advances in Mathematics for Applied Series, Vol 10, 1993.*

[13] PLASECKI, ALLEN Y HANSEN *“Kinetic Models of Ion Transport Through a Nanopone”, Arxiv: cond-mat/0403219.*

[14] URAY S, YANG T, *“Stationary Problems of Boltzmann Equation”, Handbook of Differential Equations, Vol 5, Elsevier, 2008.*

[15] WU LEI, *“Hydrodynamic Limit with Geometric Correction of Stationary Boltzmann Equation ”, Arxiv: 14093945v5, October 2015.*