INVARIANTES CARDINALES EN GRUPOS TOPOLÓGICOS

TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Presentado por
JOSÉ PÉREZ SANTANDER

Asesor
JULIO HERNÁNDEZ ARSUZA

Coasesor
CONSTANCIO HERNÁNDEZ GARCÍA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
Cartagena de Indias, D. T y C
2018

Este trabajo está dedicado a mis padres Libia y Ainaldi quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir un sueño más, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a las adversidades porque Dios está conmigo siempre; a mis hermanos por su cariño y apoyo incondicional durante todo este proceso. En general, se lo dedico a toda mi familia porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mi una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas. Una dedicatoria muy especial a mi novia Grey por apoyarme cuando mas lo necesito, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida, y a toda mi familia por estar siempre presentes.
Mi más profundo agradecimiento a la Universidad de Cartagena, a toda la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, a mis profesores quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos lograron que pueda crecer día a día como profesional, gracias a cada uno de ustedes por su paciencia, dedicación y apoyo incondicional.
Finalmente, quiero expresar mi más grande agradecimiento al profesor Julio Hernández y al Dr. Constancio Hernández (d.e.p), principales colaboradores durante todo este proceso, quienes con su dirección, conocimientos, enseñanza y colaboración permitieron el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción

Uno de los problemas de la topología es la clasificación de los espacios topológicos y una herramienta de gran importancia para este fin son los invariantes cardinales topológicos. Un invariante cardinal asigna a cada espacio topológico un número cardinal de tal manera que el valor de esta función se preserva bajo homeomorfismos. Esto es, si dos espacios son homeomorfos, entonces el valor de la función es el mismo en cada uno de ellos. El ejemplo más sencillo es *el peso* que denota al cardinal más pequeño que puede alcanzar una base del espacio topológico. Si dos espacios son homeomorfos, entonces el peso de cada uno de estos espacios es el mismo. En la topología moderna, las funciones cardinales han adquirido gran importancia. Esto lo podemos constatar por la gran cantidad de artículos de investigación que han aparecido sobre el tema y el esfuerzo que le han dedicado los más prestigiosos investigadores. Una característica notable de los invariantes cardinales es que su comportamiento cuando trabajamos en el ámbito de los grupos topológicos es más sencillo y estable. Por ejemplo, en un grupo topológico siempre coinciden el peso con el π-peso y el carácter con el π-carácter. Más aún, muchos de los teoremas de la topología en los que intervienen los cardinales se simplifican de una manera considerable. Por ejemplo, un grupo topológico es metrizable si, y sólo si, tiene una base local numerable. En contraste, para espacios topológicos las condiciones para la metrizabilidad son mucho más complejas. Este hecho resalta la importancia de hacer un estudio comparativo de las propiedades de las funciones cardinales poniendo en un lado los espacios topológicos y en otro los grupos. Más aún, existen funciones cardinales que en grupos son muy fáciles de definir y estudiar y, por el contrario, en espacios topológicos su definición y estudio resulta, si no imposible, mucho más difícil de lograr. Un ejemplo es el índice de acotación o índice de precompacidad. Nuestra tarea será estudiar algunos métodos de trabajo en grupos topológicos que aprovechen toda simplificación que se pueda lograr gracias a la interacción de una estructura de grupo con una estructura topológica.

En este trabajo se pretende mostrar algunas desigualdades entre las funciones cardinales, así como ver que algunas funciones cardinales se comportan "mucho mejor" en grupos topológicos que en espacios topológicos más generales. En particular, se mostrará que algunos de estos invariantes coinciden sobre las clases de los grupos topológicos, mientras que son distintas en dichos espacios.

En el primer capítulo de este trabajo se darán algunas definiciones preliminares, tales como las de funciones cardinales, los cardinales topológicos básicos (peso, densidad, celularidad, dispersión, número de Lindelöff, carácter, π-carácter, pseudocarácter, entre otros), espacios compactos y localmente compactos, la compactificación de Alexandroff, grupos topológicos, etc. Se enunciarán y mostrarán algunos resultados sobre espacios y grupos topológicos, tales como el Teorema 2, el cual da condiciones para que un espacio sea localmente compacto y Hausdorff, el Teorema 6, el cual nos muestra condiciones necesarias para que un espacio topológico tenga una compactificación de Husdorff, el Teorema 7, que nos muestra la forma de compactificar un espacio topológico por un punto, el Lema 2 que nos presenta algunas desigualdades que se obtienen entre los cardinales topológicos básicos o los Teoremas 15 y 16, los cuales nos muestran algunas cotas sobre la cardinalidad de un espacio X. También podemos ver en el Corolario 3 que prueba que todo grupo topológico es homogéneo, o el Teorema 20 que nos muestra una base local para la identidad de un grupo topológico formada por vecindades simétricas.

En el segundo capítulo, se pretende alcanzar los objetivos propuestos. Se empieza enunciando las definición de grupo τ- estrecho e indice de estrechez de un grupo topológico, luego se muestra que en todo grupo topológico su peso es igual al producto del índice de estrechez por el carácter de este. Posteriormente mostraremos algunas relaciones entre el indice de estrechez, el número de Lindelöff y la celularidad. Se prueba que en todo espacio homogéneo (particularmente, en grupos topológicos) el carácter local es igual en todos sus puntos y a continuación vemos un contraejemplo, que muestra que el resultado anterior no se satisface en espacios topológicos más generales. Un resultado importante, demuestra que el peso de un grupo topológico es igual a la densidad por el carácter, sin embargo, en un contraejemplo posterior veremos que en un espacios topológicos no numerable, con la topología del punto incluido, el peso es igual al $\aleph_1$ y el producto de la densidad con el carácter es $\aleph_0$. En otro resultado de trascendental importancia de este trabajo se muestran dos relaciones fundamentales: la primera, que en todo grupo topológico el carácter es igual al π-carácter, y la segunda, que en grupos topológicos el peso es igual al π-peso. Luego, para verificar que estos resultados no se satisfacen en grupos topológicos tomaremos, para la primera, la Recta de Sorgenfrey, la cual es la recta real dotada con la topología limite inferior, es decir, la topología generada por la base $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. En este espacio, el peso es $\aleph_0$ y el π-peso es menor o igual que el cardinal de $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$, la cual es numerable. Para la segunda, tomamos la Compactificación de Alexandroff de un espacio discreto no numerable. En este espacio compacto el carácter es no numerable y el π-carácter si lo es. Finalmente, se demuestra que en un grupo topológicos G infinito compactos el π-carácter, el carácter y el peso coinciden, así como la cardinalidad de G es igual $2^{w(G)}$.

Capítulo 1

Nociones topológicas y algebraicas

En esta sección se hará un resumen con definiciones y resultados topológicos que serán necesarios para el desarrollo de la teoría sobre cardinales topológicos en espacios y grupos topológicos.

1.1. Cardinales topológicos

Definición 1. *Una **función cardinal** (cardinal topológico) es una función f definida en la clase de los espacios topológicos que toma valores en la clase de todos los cardinales y asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $f(X)$ tal que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par X, Y de espacios homeomórficos.*

A continuación definiremos los cardinales básicos en espacios topológicos.

Definición 2. *Sea X un espacio topológico.*

1. *El **peso** de X se define como*

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ es una base de } X\} + \aleph_0.$$

   *Si $w(X) = \aleph_0$, entonces decimos que X **es segundo numerable o 2-contable**.*

2. *La **densidad** de X se define como*

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \text{ es un conjunto denso en } X\} + \aleph_0.$$

Si $d(X) = \aleph_0$, entonces decimos que X es separable.

3. *Una colección de conjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos se llama **familia celular**. Se define la **celularidad** de X como*

$$c(X) = \sup\{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{ es una familia celular de } X\} + \aleph_0.$$

*Si $c(X) = \aleph_0$, decimos que X tiene la **propiedad de Souslin**.*

4. *Un subconjunto D de X se denomina **discreto** si dado $p \in D$, existe una vecindad V_p de p tal que $D \cap V_p = \{p\}$, o dicho de otra manera, si $p \in D - D^d$, donde D^d es el conjunto de los puntos limites de D, o lo que es lo mismo que decir que D consta exclusivamente de puntos aislados. El mínimo número cardinal $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ tal que todo subconjunto de X que consta exclusivamente de puntos aislados tiene cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$ se llama **dispersión** y se denota por $hc(X)$ o $s(X)$.*

5. *El mínimo número cardinal $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ tal que todo subconjunto cerrado de X que consta exclusivamente de puntos aislados tiene cardinalidad $\leq \mathfrak{m}$ se llama **extensión** y se denota por $e(X)$.*

6. *La noción de espacio de Lindelöf da lugar a una nueva función cardinal, el **número de Lindelöf** de X, denotado por $L(X)$, y definido como el cardinal más pequeño κ tal que todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento de cardinalidad no mayor que κ.*

7. *Una **red** en X es una familia $\mathscr{N}$ de subconjuntos de X tales que todo conjunto abierto no vacío en X es la unión de elementos de $\mathscr{N}$. El **peso de red** de X está definido como*

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathscr{N}| : \mathscr{N} \text{ es una red en } X\} + \aleph_0.$$

8. *Una **π-base** en X es una familia $\mathscr{V}$ de abiertos no vacíos en X tales que si U es abierto y no vacío en X, entonces $V \subseteq U$ para alguna $V \in \mathscr{V}$.*

*El π-**peso** de X se define como*

$$\pi w(X) = \text{mín}\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ es una } \pi\text{-base en } X\} + \aleph_0.$$

9. *Sea $\mathscr{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X y $p \in X$. Entonces, $\mathscr{V}$ es una π-**base local** en p si para cada vecindad U de p existe $V \in \mathscr{V}$ con $V \subseteq U$. Si además se cumple que $p \in V$ para toda $V \in \mathscr{V}$, entonces $\mathscr{V}$ es una **base local** en p. Finalmente, si $\cap\{V : V \in \mathscr{V}\} = \{p\}$, entonces $\mathscr{V}$ es una **seudobase** para p. Ahora podemos definir las siguientes funciones cardinales:*

$$\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ es una base local en } p\}$$
$$\pi\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ es una } \pi\text{-base local en } p\}$$
$$\psi(p, X) = \text{mín}\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \text{ es una seudobase para } p\}$$

*El **carácter**, el π-**carácter** y el **seudocarácter** se definen, respectivamente como sigue:*

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$
$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$
$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$

10. *La **estrechez** en un punto x en X es el cardinal infinito más pequeño $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ tal que si $x \in \overline{C}$, existe $C_0 \subseteq C$, tal que $x \in \overline{C}_0$ y $|C_0| \leq \mathfrak{m}$. Este número cardinal se denota como $t(x, X)$. La estrechez o el ajuste de un espacio X es el supremo de todos los cardinales $t(x, X)$ para $x \in X$; se denota como $t(X)$.*

1.2. Espacios compactos

Definición 3. *Diremos que un espacio topológico es **compacto** si todo cubrimiento abierto de X, contiene un subcubrimiento finito.*

El siguiente es uno de los teoremas más importantes de la topología, puesto que garantiza la compacidad del producto arbitrario de espacios compactos.

Teorema 1. (Tychonoff, [5],pág 406) *Supongamos que*

$$X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset.$$

Entonces X es compacto si y solo si cada X_α es compacto.

Definición 4. ([9], pág 208) *Un espacio X se dice que es* ***localmente compacto en*** *x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es* ***localmente compacto****.*

Ejemplo 1. *La recta real $\mathbb{R}$ es localmente compacta. El punto x está contenido en un intervalo de la forma (a, b), el cual a su vez está contenido en el subespacio compacto $[a, b]$. El subespacio $\mathbb{R}$ de los números racionales no es localmente compacto.*

Teorema 2. ([9], pág 209) *Sea X un espacio. X es localmente compacto y de Hausdorff si, y solo si, existe un espacio Y que cumpla las siguientes condiciones:*

1. *X es subespacio de Y.*
2. *El conjunto $Y - X$ consta de un solo elemento.*
3. *Y es un espacio compacto y de $Hausdorff$.*

Si Y y Y' son dos espacios que satisfacen estas condiciones, existe un homeomeorfismo de Y en Y' que, restringido al subespacio X, es la identidad en X.

Teorema 3. ([9], pág 211) *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si, y sólo si, dados $x \in X$ y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$.*

Corolario 1. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y sea A un subespacio de X. Si A es cerrado o abierto en X, entonces es localmente compacto.*

El siguiente teorema expone algunas propiedades fundamentales de los espacios Hausdorff. Probaremos primero el siguiente lema:

Lema 1. *Sea X un espacio topológico, V abierto y A un subconjunto de X, entonces*

$$V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A}.$$

Demostración. Sea $x \in V \cap \overline{A}$, y U un entorno de x, entonces $x \in int\, U$. Ahora, $x \in int\, U \cap V$ y como la intersección de abiertos es abierta se sigue que $int\, U \cap V$ es un entorno de x. Como $x \in \overline{A}$, tenemos que $int\, U \cap V \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica a su vez que $U \cap V \cap A \neq \emptyset$, esto quiere decir que $x \in \overline{V \cap A}$ ya que U es un entorno cualquiera de x. □

Teorema 4. ([5], pág 421) *Sea $A \subseteq X$, donde X es un espacio Hausdorff:*

1. *Si X es localmente compacto y $A = F \cap G$, siendo F cerrado y G abierto, entonces A es localmente compacto.*

2. *Si A es localmente compacto en X, entonces A es abierto en su clausura.*

3. *Si A es un subespacio localmente compacto en X, entonces $A = F \cap G$, donde G es abierto y F es cerrado.*

Demostración. (1) Veamos que si F es cerrado y G es abierto en un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces son localmente compactos. Si $x \in F$, podemos tomar un entorno compacto V de x, entonces como X es Hausdorff se sigue que V es cerrado. Luego, $V \cap F \subseteq V$ es un cerrado contenido en un compacto, en consecuencia, es un compacto y un entorno de x. Si $x \in G$, por ser abierto es entorno de todos sus puntos, así que existe un entorno compacto V de x tal que $V \subset G$. Por lo tanto, G es localmente compacto.
Pongamos ahora $A = F \cap G$ y $x \in A$, entonces $x \in F$ y $x \in G$, los cuales son localmente compactos, luego existen compactos U y V tales que $x \in V \subset F$ y $x \in U \subset G$. La intersección de dos compactos en un espacio Hausdorff es compacto, por lo tanto A es localmente compacto tomando como base de entornos compactos de x la familia

$$\{U \cap V : U \,\text{entorno compacto de}\, x \,\text{en}\, G \,\text{y}\, V \,\text{entorno compacto de}\, x \,\text{en}\, F\}.$$

(2) Sea $a \in A$ y sea K un entorno compacto de a en A. Entonces $a \in Int_X A = U$. Como A es Hausdorff se tiene que K es cerrado y por la definición de clausura tenemos que $\overline{U^A} \subseteq K$, entonces $\overline{U^A}$ es compacto. Como U es abierto en A, existe V abierto en X tal que $U = A \cap V$ y tenemos que

$$\overline{A \cap V} \cap A = (\overline{U} \cap A) = \overline{U^A} \subseteq A.$$

Entonces $\overline{A \cap V} \cap A$ es compacto y por lo tanto cerrado por ser X Hausdorff. Como $A \cap V \subseteq \overline{A \cap V} \cap A$ y $\overline{A \cap V} \cap V$ es cerrado, tenemos que $\overline{A \cap V} \subseteq \overline{(A \cap V)} \cap A$. Teniendo en cuenta que V es abierto, por lema anterior se tiene que $V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A}$. Tomando $W = V \cap \overline{A} \subseteq \overline{V \cap A} \subseteq \overline{(A \cap V)} \cap A \subseteq A$. Entonces $a \in W$ puesto que este contiene a U, $W \subseteq A$ y A es abierto en $\overline{A}$. En conclusión A es abierto en $\overline{A}$.
(3) Como A es localmente compacto, por el apartado (2), A es abierto en $\overline{A}$, entonces $A = \overline{A} \cap G$ para un cierto G abierto en X y tomamos $F = A$. □

Corolario 2. *Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y Hausdorff si, y sólo si, X es localmente compacto y Hausdorff.*

Culminamos esta sección dando algunas definiciones que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo.

Definición 5. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Se dice que X cumple el **primer axioma de numerabilidad**, o que es $1A\mathbb{N}$, si cada punto de X posee una base de entornos con cardinal numerable.*

2. *Se dice que X cumple el **segundo axioma de numerabilidad**, o que es $2A\mathbb{N}$, si posee una base con cardinal numerable.*

Definición 6. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *X se dice **regular** si para todo F cerrado y todo $x \notin F$, existen U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

2. *X se dice que es T_3 si es regular y T_1.*

3. *X se dice que es* ***completamente regular*** *si cada F cerrado en X y $x \notin F$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f|_F = 0$.*

4. *X se dice* ***Tychonoff*** *si es completamente regular y T_1.*

5. *X se dice* ***normal*** *si para cualesquiera F y C cerrados disjuntos, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $F \subset U$ y $C \subset V$.*

6. *X se dice T_4 si es normal y T_1.*

Definición 7. *Un* ***embebimiento*** *es una aplicación $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \tau')$ entre dos espacios topológicos tal que*

$$f : (X, \tau) \mapsto (f(X), \tau'|_{f(X)})$$

es un homeomorfismo.

1.3. Compactificaciones

Los espacios compactos son de mucha utilidad en topología ya que por sus características tienen propiedades que facilitan trabajar sobre ellos. Por tanto, es especialmente útil “convertir” espacios topológicos que no son compactos en espacios compactos. El objetivo es insertarlo en un espacio compacto que se comporte topológicamente igual.

Definición 8. *Una* ***compactificación*** *de un espacio topológico (X, τ) es un par $((X', \tau'), f)$ donde:*

1. *(X', τ') es un espacio compacto.*

2. *$f : (X, \tau) \mapsto (X', \tau')$ es un embebimiento.*

3. *$f(X)$ es denso en X', es decir, $\overline{f(X)} = X'$.*

Dos compactificaciones $((X_1, \tau_1), f_1)$ y $((X_2, \tau_2), f_2)$ de X se consideran topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X_1 \mapsto X_2$ tal que $h \circ f_1 = f_2$.

Definición 9. *Diremos que una compactificación es* ***Hausdorff*** *cuando X' sea Hausdorff.*

Teorema 5. *Toda compactificación Hausdorff de un espacio compacto (X, τ) es equivalente a $((X, \tau), 1_X)$.*

Demostración. $((X', \tau), f)$ una compactificación de (X, τ), entonces $f(X)$ es subconjunto compacto de X', el cual es Hausdorff, por tanto es cerrado. Por otro lado, $\overline{f(X)} = X'$, así que $f(X) = X'$ y f es un homeomorfismo. Además $f^{-1} \circ f = 1_X$. □

El siguiente teorema muestra una condición necesaria para que un espacio tenga una compactificación Hausdorff.

Teorema 6. *Sea X un espacio topológico. Si X tiene una compactificación Hausdorff, entonces es Tychonoff.*

Demostración. Si X tiene una compactificación Hausdorff, entonces X es homeomorfo a un subconjunto de X', siendo X' un espacio compacto y Hausdorff. Luego, X' es T_4, por lo tanto es Tychonoff, y como ser Tychonoff es una propiedad hereditaria, cualquier subconjunto con la topología inducida será Tychonoff y como consecuencia, X es Tychonoff. □

1.4. Compactificación de Alexandroff

El siguiente es un método para construir, a partir de un espacio topológico X, un espacio compacto X^* que contenga a X como un espacio inmerso.

Teorema 7. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y no compacto, ∞ un elemento que no pertenece a X. Se define el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ y*

$$\tau^* = \tau \cup \{A \subset X^* : X^* - A \text{ es cerrado y compacto en } X\}.$$

Entonces $((X^*, \tau^*), i)$ es una compactificación de X, donde i es la aplicación inclusión.

La compactificación $((X^*,\tau^*),i)$ *se denomina* ***compactificación de Alexandroff.***

Demostración. El punto ∞ sólo pertenece a los abiertos del segundo tipo, y por otra parte, todos los abiertos que no están en τ contienen a ∞.

1. Veamos que $\tau*$ es una topología en X^*. Claramente $\emptyset \in \tau \subset \tau^*$. Por otra parte, $\emptyset$ es cerrado y compacto en X y $X^* = X^* - \emptyset \in \tau^*$.

   Sean $A_1, A_2 \in \tau^*$. Si ambos pertenecen a τ, su intersección también pertenece a τ por ser una topología, luego la intersección pertenece a τ^*. Si $\infty \in A_1 \cap A_2$, entonces $X^* - A_1$ y $X^* - A_2$ son cerrados y compactos en X, luego su unión es cerrada y compacta en X. Por leyes de Morgan, $A_1 \cap A_2 \in \tau^*$.

   Falta ver el caso en el que $\infty \in A_1$ y $A_2 \in \tau$. Entonces $\infty \notin A_1 \cap A_2$, de donde

   $$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (A_2 - \{\infty\}) = A_1 \cap (A_2 \cap X) = A_1 \cap (X - (X^* - A_2)) \in \tau.$$

   Sea ahora $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en $\tau*$. Si para todo $i \in I$, $A_i \in \tau$, la unión está en τ. Supongamos ahora que existe i_0 tal que $\infty \in A_{i_0}$, entonces el conjunto $X^* - A_{i_0}$ es cerrado y compacto en X. Además

   $$\bigcup_{i\in I} A_i = (\bigcup_{j\in J} A_j) \cup (\bigcup_{k\in K} A_k),$$

   donde $\infty \in A_j, \forall j \in J$ y $\infty \notin A_k, \forall k \in K$. Entonces

   $$X^* - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} (X^* - A_j) \cap \bigcap_{k\in K} (X^* - A_k)$$

   es un cerrado en X. Como $X^* - \bigcup_{i\in I} A_i \subset X^* - A_{i_0}$, tenemos que $X^* - \bigcup_{i\in I} A_i$ es compacto.

2. Probaremos ahora que la inclusión $i : X \mapsto X^*$ es un embebimiento. Veamos que $\tau = \tau^*|_X$. Sea $A \in \tau \subset \tau^*$, entonces $A = A \cap X \in \tau^*|_X$. Por otro lado, sea $A \in \tau^*|_X$, entonces existe $A^* \in \tau^* \cap X$. Hay dos posibilidades: si $A^* \in \tau$, entonces $A^* \cap X \in \tau$. La otra posibilidad es que $\infty \in A^*$. En este caso

   $$A = (A^* - \{\infty\}) \cap X = X - (X^* - A^*) \in \tau.$$

3. Veamos que (X^*, τ^*) es compacto. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto para X^*. Sea $i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_{i_0}$, entonces $X^* - A_{i_0}$ es compacto en X y puesto que $(X, \tau^*|_X = \tau)$ es compacto en X^*, existe n tal que

   $$X^* - A_{i_0} \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n},$$

   luego

   $$X^* = A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}.$$

4. Por último, probemos que $i(X) = X$ es denso en (X^*, τ^*). Si no fuera denso, existiría $A \in \tau^*$ tal que $A \cap X = \emptyset$, luego $A \notin \tau$ y $\infty \in A$. Lo cual implica que $X \subseteq X^* - A$, es decir, $X = X^* - A$. Esto muestra que X es compacto, lo cual es falso.

□

1.5. Algunas desigualdades fundamentales

El siguiente lema nos muestra una relación entre algunas funciones cardinales básicas.

Lema 2. *Sea X un espacio topológico, entonces se verifican las siguientes desigualdades:*

1. $d(X) \leq w(X)$;
2. $c(X) \leq d(X)$;
3. $s(X) \leq w(X)$;
4. $e(X) \leq s(S)$;
5. $c(X) \leq s(X)$

Demostración. (1) Sea $w(X) = |\mathscr{B}|$, donde $\mathscr{B}$ es una base para X, entonces para todo $U \in \mathscr{B}$, tomemos $x_U \in U$, luego el conjunto $D = \{x_U : U \in \mathscr{B}\}$ es claramente denso en X y además $|D| \leq |\mathscr{B}|$, por lo tanto, $d(X) \leq |D| \leq |\mathscr{B}| = w(X)$.

(2) Sea $C \in \mathscr{C}$ y $d(X) = |D|$, para algún subconjunto denso en X, entonces como $C \neq \emptyset$, existe $x \in C$, luego $x \in \overline{D}$ por ser D un conjunto denso, así $C \cap D \neq \emptyset$, luego existe $y_C \in C \cap D$, Es decir por cada $C \in \mathscr{C}$, existe por lo menos un $y_C \in D$ y además ese y_C pertenece a uno y solo un C, lo cual prueba que $|\mathscr{C}| \leq |D|$. Así vemos que $|D|$ es una cota superior para el conjunto $\{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{es una familia celular de} X\}$, por lo tanto

$$c(X) = \sup\{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{es una familia celular de} X\} \leq |D| = d(X).$$

(3) Sea $\mathscr{B}$ una base de X tal que $w(X) = |\mathscr{B}|$ y sea D un conjunto discreto en X, entonces dado $x \in D$, existe $V_x \in \mathscr{B}$ tal que $V_x \cap D = \{x\}$. Esto define una función inyectiva $\varphi : D \mapsto \mathscr{B}$ con $\varphi(x) = V_x$. Por lo tanto, $|D| \leq |\mathscr{B}| = w(X)$. De donde, el conjunto $\{|D| : D \text{ es discreto en } X\}$ tiene como cota superior a $w(X)$, lo cual implica que $\sup\{|D| : D \text{ es discreto en } X\} \leq w(X)$ y por tanto, $s(X) \leq w(X)$.
(4) Según la definición tenemos que

$$e(X) = \sup\{|D| : D \text{ es discreto y cerrado en } X\} + \aleph_0.$$

Note que $\{|D| : D \text{ es discreto y cerrado en } X\} \subseteq \{|D| : D \text{ es discreto en } X\}$. Así, $\sup\{|D| : D \text{ es discreto y cerrado en } X\} \leq \sup\{|D| : D \text{ es discreto en } X\}$, lo cual implica que $e(X) \leq s(X)$.
(5) Sea $\mathscr{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ una familia celular de X, entonces para cada $i \in I$ tomemos $x_i \in C_i$. Sea $D = \{x_i : i \in I\}$. Claramente D es discreto y $|D| = |\mathscr{C}|$. Por lo tanto, $|\mathscr{C}| = |D| \leq s(X)$. Es decir, $|\mathscr{C}| \leq s(X)$ para toda familia celular $\mathscr{C}$ de X. En consecuencia, $\sup\{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{ es una famila celular en } X\} \leq s(X)$ y por tanto, $c(X) \leq s(X)$. □

Teorema 8. *Si un espacio topológico Y es la imagen continua de un espacio topológico X, entonces $c(Y) \leq c(X)$.*

Demostración. Sea $f : X \mapsto Y$ una función sobreyectiva y continua. Sea $\mathscr{M} = \{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{ es una familia celular de } Y\}$ y $\kappa \in \mathscr{M}$. Tomemos una familia celular $\mathscr{C}$ de Y tal que $|\mathscr{C}| = \kappa$ y pongamos $\mathscr{C}' = \{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{C}\}$. Entonces $\mathscr{C}'$ es una familia celular de X y $|\mathscr{C}'| = \kappa$. Por lo tanto, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{K} = \{|\mathscr{C}| : \mathscr{C} \text{ es una familia celular de } X\}$, así $c(Y) = \sup \mathscr{M} \leq \sup \mathscr{K} = c(Y)$. □

Teorema 9. *Sea X un espacio topolóogico. Para todo $x \in X$, tenemos que $t(x, X) \leq \chi(x, X)$ y $t(X) \leq \chi(X)$.*

Demostración. Se define

$$t(p, X) = \text{mín}\{\kappa : \forall\, C \subseteq X, \,\text{si}\, p \in \overline{C}, \exists\, C_0 \subseteq C \,\text{tal que}\, |C_0| \leq \kappa \,\text{y}\, p \in \overline{C_0}\}$$

y $\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B}\,\text{es una base local en}\, p\}$. Veamos que $t(p, X) \leq \chi(p, X)$. Sea $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ una base local en p tal que $|\mathscr{B}| = \lambda$ y sea C un subconjunto de X tal que $p \in \overline{C}$, entonces para cada $i \in I$ tenemos que $B_i \cap C \neq \emptyset$, por lo que existe $x_i \in B_i \cap C$. Definamos $C_0 = \{x_i \in B_i \cap C : i \in I\}$; claramente $C_0 \subseteq C$ y $|C_0| \leq |\mathscr{B}| = \lambda$ y por la forma como fue definido C_0 se tiene que $B_i \cap C_0 \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, lo cual implica que $p \in \overline{C_0}$. Así, $\lambda \in \{\kappa : \forall\, C \subseteq X, \,\text{si}\, p \in \overline{C}, \exists\, C_0 \subseteq C \,\text{tal que}\, |C_0| \leq \kappa \,\text{y}\, p \in \overline{C}_0\}$, por lo tanto $t(p, X) \leq \lambda = |\mathscr{B}|$ para toda vecindad local $\mathscr{B}$ en p y en consecuencia,

$$t(p, X) \leq \text{mín}\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ es una base local en } p\} \leq \chi(p, X).$$

Por otra parte, $t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} \leq \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} = \chi(X)$. □

Teorema 10. *Sea X un espacio topológico.*

1. *$w(X) \leq 2^{|X|}$;*

2. *Si X es T_0 tenemos que $|X| \leq 2^{w(X)}$*

Demostración. (1) Sea $\kappa = w(X)$, existe una base $\mathscr{B}$ tal que $\kappa = |\mathscr{B}|$. Definamos la función $\varphi : \mathscr{B} \mapsto P(X)$ por $\varphi(B) = B$. Entonces φ es uno a uno, luego $w(X) = \kappa \leq 2^{|X|}$.
(2) Sea X un espacio T_0 y sea $\mathscr{B}$ una base para X tal que $|\mathscr{B}| \leq w(X)$. Definamos $\varphi : X \mapsto P(\mathscr{B})$ por $\varphi(p) = \{B : B \in \mathscr{B}, p \in B\}$. Como X es T_0 se tiene que φ es uno a uno, luego $|X| \leq 2^{w(X)}$. □

El teorema anterior nos muestra una cota natural para el peso de X y una cota para $|X|$ siempre que X sea T_0.

Teorema 11. [Pospísil]. *Si X es un espacio T_2, se cumple que $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ y $w(X) \leq 2^{2^{2^{d(X)}}}$.*

Demostración. Sea $\kappa = d(X)$ y D un subconjunto denso en X tal que $|D| \leq \kappa$. Para cualquier dos puntos distintos $x_0, x_1 \in X$ existe $A \subseteq D$ tal que $x_0 \in \overline{A}$ y $x_1 \notin \overline{A}$. Por tanto, la función $\varphi : X \mapsto P(P(D))$ definida por $\varphi(x) = \{A : A \subseteq D,\ x \in \overline{A}\}$ es uno a uno, en consecuencia, $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$. La segunda parte es consecuencia del resultado anterior y el Teorema 10. $\square$

El teorema anterior nos prueba que todo espacio separable Hausdorff tiene cardinalidad a lo sumo $2^{2^{\aleph_0}}$.

Teorema 12. *Sean $c(X) = \kappa$ y $\mathscr{V}$ una colección de abiertos en X. Existe una subcolección $\mathscr{W}$ de $\mathscr{V}$ tal que $|\mathscr{W}| \leq \kappa$ y $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{W}}$*

Demostración. Sea $\mathscr{G}$ la colección de todos los conjuntos abiertos no vacíos en X, los cuales son subconjuntos de algún elemento de $\mathscr{V}$. Por el lema de Zorn, podemos obtener una familia celular maximal $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$. Entonces $|\mathscr{G}'| \leq c(X) = \kappa$ y $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{G}'}$ por la maximalidad de $\mathscr{G}'$. Ahora podemos usar $\mathscr{G}'$ para obtener $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}$ con $|\mathscr{W}| \leq \kappa$ y $\bigcup \mathscr{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathscr{W}}$. $\square$

Teorema 13. [Lema de Jones]. *Si X es normal, entonces $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$ para todo subconjunto D discreto y cerrado de X.*

Demostración. Sea S un subconjunto denso de X con $|S| \leq d(X)$. Para cada subconjunto E de D, sea U_E un conjunto abierto tal que $E \subseteq U_E$ y $\overline{U_E} \cap (D - E) = \emptyset$. Pongamos $V_E = U_E \cap S$, se puede ver que para cada subconjuntos E, F distintos de D se tiene que $V_E \neq V_F$. Así, $\{V_E : E \subseteq D\}$ es una colección de $2^{|D|}$ subconjuntos de S y por tanto, $2^{|D|} \leq 2^{|S|} \leq 2^{d(X)}$. $\square$

El Lema de Jones implica que si X es un espacio separable normal, no puede tener un subconjunto cerrado discreto de cardinalidad $\geq 2^{\aleph_0}$.

Definición 10. *Se define la **densidad hereditaria** y el **número hereditario de Lindelöf**, respectivamente por*

1. $hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \subseteq X\}$ *y*
2. $hL(X) = \sup\{L(Y) : Y \subseteq X\}$

Definición 11. *Se define $o(X)$ como el número de conjuntos abiertos en X más $\aleph_0$.*

Teorema 14. *Para cualquier espacio X, se cumple que $o(X) \leq |X|^{hd(X)}$ y $o(X) \leq w(X)^{hL(X)}$.*

Demostración. Sean $\kappa = hd(X)$ y H un subconjunto cerrado de X, entonces $d(H) \leq \kappa$, luego existe $S \subseteq H$ con $|S| \leq \kappa$ tal que $\overline{S} = H$. Así, todo conjunto cerrado en X está en la colección $\{\overline{S} : S \subseteq X, |S| \leq \kappa\}$, por tanto $o(X) \leq |X|^{\kappa}$. ahora, sea $hL(X) = \kappa$ y $\mathscr{B}$ una base para X tal que $\mathscr{B} \leq w(X)$, entonces todo conjunto abierto en X es la unión de $\leq \kappa$ elementos de $\mathscr{B}$, así que $o(X) \leq |\mathscr{B}|^{\kappa}$. □

Con los siguientes teoremas se pretende obtener cotas sobre $|X|$ en términos de algunas funciones cardinales elementales.

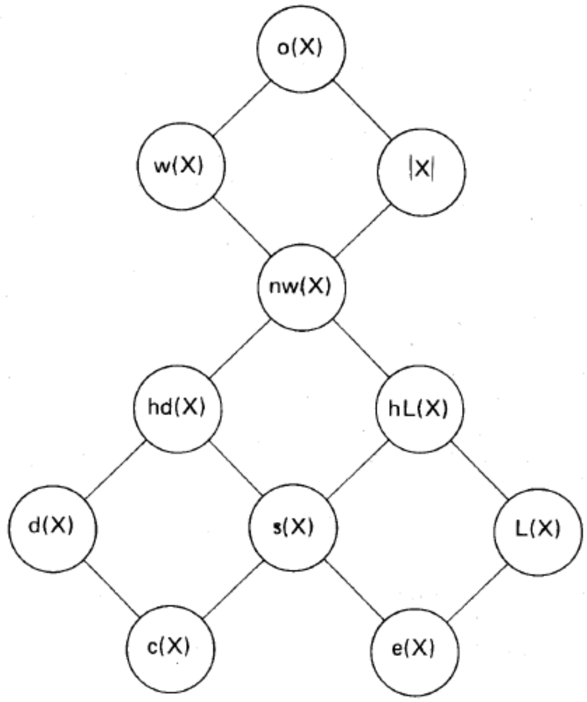
Teorema 15. *Sea X un espacio T_1, entonces $|X| \leq nw(X)^{\psi(X)}$. En particular, todo espacio T_1 con pseudo-carácter contable y una red de cardinalidad $\leq 2^{\aleph_0}$ tiene cardinalidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\kappa = \psi(X)$, $\mathscr{N}$ una red tal que $|\mathscr{N}| \leq nw(X)$ y $p \in X$. Puesto que $\psi(p, X) \leq \kappa$, podemos elegir $\mathscr{N}_p \subseteq \mathscr{N}$ con $|\mathscr{N}_p| \leq \kappa$, tal que $\cap \mathscr{N}_p = \{p\}$. El numero de subcolecciones de $\mathscr{N}$ elegidas de esta manera es $\leq nw(X)^{\kappa}$, por lo tanto $|X| \leq nw(X)^{\kappa}$. □

Teorema 16. *Sea X un espacio T_3, entonces $|X| \leq 2^{d(X)\cdot\psi(X)}$. En particular, todo espacio separable T_3 con pseudocarácter contable tiene cardinalidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. $|X| \leq nw(X)^{\psi(X)} \leq w(X)^{\psi(X)} \leq 2^{d(X)\cdot\psi(X)}$. □

El siguiente diagrama muestra en forma resumida las desigualdades entre las funciones cardinales, donde una función que está por debajo de otra unida con un segmento, significa que es menor o igual que esta.



1.6. Grupos topológicos

Definición 12. *Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama* ***grupo topológico*** *si*

1. *$(G, \cdot)$ es un grupo;*
2. *(G, τ) es un espacio topológico;*
3. *las funciones $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \mapsto (G, \tau)$ y $g_2 : (G, \tau) \mapsto (G, \tau)$ dadas por $g_1(x, y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.*

En ocasiones omitiremos el símbolo de operación binaria $\cdot$, y escribiremos xy en vez de $x \cdot y$. Usaremos además el símbolo e_G para denotar la identidad de un grupo G. Con frecuencia nos referiremos al grupo topológico G con operación $\cdot$ y topología τ como la terna $(G, \cdot, \tau)$. Si no hay ambigüedad, usaremos sólo G.

Sea G un grupo topológico y denotemos con $\mathcal{N}_x$ a la familia de vecindades de un punto $x \in G$, entonces la condición (3) de la Definición 12 se puede escribir de la siguiente manera: si x y y son elementos de G, para cada $U \in \mathcal{N}_{xy}$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}_x$ y $W \in \mathcal{N}_y$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, siendo $V \cdot W = \{vw : v \in V, w \in W\}$; y para cada $U \in \mathcal{N}_{x^{-1}}$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, donde $V^{-1} = \{v^{-1} : v \in V\}$

Lema 3. *Sean $(G, \cdot)$ un grupo topológico y τ una topología en G. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y solo si la función*

$$g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \mapsto (G, \tau),$$

donde $g_3(x, y) = xy^{-1}$ es continua.

Demostración. Sea G un grupo topológico, entonces las funciones g_1 y g_2 de la Definición 12 son continuas. Puesto que g_3 se puede expresar como $g_3(x, y) = xy^{-1} = g_1(x, g_2(y))$, vemos que g_3 es una función continua.

Por otro lado, supongamos que g_3 es una función continua, debemos ver que las funciones g_1 y g_2 también lo son. Observe que $g_2(y) = g_3(e_G, y)$ y $g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y))$. Por la definición de topología producto, obtenemos que g_1 y g_2 son continuas. $\square$

Teorema 17. *Sea G un grupo topológico y $g \in G$ un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, $x \in G$, de G en sí mismo, son homeomorfismos. La inversión $f : G \mapsto G$, definida por $f(x) = x^{-1}$, también es un homeomorfismo. Las funciones φ_g y σ_g se llaman traslaciones por g derecha e izquierda, respectivamente.*

Demostración. Por la definición de grupo topológico, φ_g es continua. Suponga que $a, b \in G$, con $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$, entonces $ag = bg$, de donde $agg^{-1} = bgg^{-1}$, así $a = b$ y φ_g es inyectiva. Ahora, sea $b \in G$, entonces $bg^{-1} \in G$ y $\varphi_g(bg^{-1}) = bg^{-1}g = b$ y φ_g es sobreyectiva. La inversa de φ_g es $\varphi_{g^{-1}}$ ya que $\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(a)) = \varphi_{g^{-1}}(ag) = agg^{-1} = a$. Además, $\varphi_{g^{-1}}$ es continua, por lo que φ_g es un homeomorfismo.

La demostración para el caso σ_g es totalmente análogo.
Si $f(x) = x^{-1}$, entonces f es continua por la Definición 12. La igualdad $f(x) = f(y)$, $x, y \in G$ implica que $x^{-1} = y^{-1}$, de donde $x = y$ por ser G un grupo, lo que prueba que f es inyectiva.
Sea $b \in G$, entonces $b^{-1} \in G$ y $f(b^{-1}) = (b^{-1})^{-1} = b$, así f es sobreyectiva.
La inversa de f es ella misma y, por tanto, f es un homeomeorfismo. $\square$

Definición 13. *Un espacio topológico X se dice un **espacio homogéneo** si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $f : X \mapsto X$ tal que $f(x) = y$.*

Corolario 3. *Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.*

Demostración. Probaremos que dados dos elementos arbitrarios $g, h \in G$, existe un homeomorfismo de G sobre sí mismo, que manda un elemento en el otro. Definamos $\varphi = \varphi_{g^{-1}h}$ (véase el Teorema 17), entonces φ es un homeomorfismo y $\varphi(g) = h$. $\square$

Definición 14. *Decimos que una función biyectiva $f : G \mapsto G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un **isomorfismo topológico** si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama **automorfismo topológico**. Dos grupos topológicos son **topológicamente isomorfos** si existe un isomosrfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.*

El siguiente teorema muestra que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

Teorema 18. *Si G es un grupo topológico y $a \in G$ está fijo, entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.*

Demostración. Observe que $g(x) = \sigma_g(\varphi_{a^{-1}}(x))$, donde σ_g y $\varphi_{a^{-1}}$ se han definido en el Teorema 17. Luego, g es la composición de dos homeomorfismos, y por tanto es un homeomorfismo. Tenemos además que g es un homomorfismo puesto que $g(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = g(x)g(y)$. $\square$

Describir la topología en un grupo topológico es generalmente una tarea más fácil que hacerlo en un espacio topológico arbitrario, basta describir una base local para la identidad e_G del grupo.

Teorema 19. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{N}_{e_G}$ una base local para la identidad e_G del grupo. Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x toma valores en los elementos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{N}_{e_G}$, son bases para la topología del grupo de G.*

Demostración. Sea W un conjunto abierto no vacío en G y a un elemento arbitrario de W. Dado que la función $f(x) = a^{-1}x$ es un homeomorfismo, transforma el abierto W en el abierto $a^{-1}W$, el cual contiene a la identidad e_G. Como $\mathcal{N}_{e_G}$ es una base local para e_G, existe $U \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $e_G \in U \subseteq a^{-1}W$. Por lo tanto,

$$a \in aU \subseteq aa^{-1}W = W,$$

lo cual implica que $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{N}_{e_G}\}$ es una base del grupo topológico G. En forma análoga $\{Ux : x \in G, U \in \mathcal{N}_{e_G}\}$ es una base. $\square$

El siguiente resultado, nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades tales que $V = V^{-1}$. Estas vecindades reciben el nombre de *simétricas*.

Teorema 20. *Si G es un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e_G constituyen una base local para e_G.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_{e_G}$ y $f(x) = x^{-1}$. Como f es un homeomorfismo de G sobre G, $f(U) = U^{-1}$ es abierto y $e_G \in U^{-1}$, así que $V = U \cap U^{-1}$ es abierto, $V^{-1} = V$ y $e_G \in V \subseteq U$. $\square$

En lo sucesivo, denotaremos con $\mathcal{N}^*_{e_G}$ la base de vecindades abiertas y simétricas para la identidad e_G de un grupo topológico G.
La identidad de un grupo topológico tiene otra propiedad muy importante: admite una base local formada por subconjuntos cerrados.

Teorema 21. *Sea G un grupo topológico.*

1. *Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, para cada $n \in$ existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $V^n \subseteq U$ ($V^n = V \cdots V$, n factores).*

2. *Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados.*

Demostración. (1) Sea $U \in \mathcal{N}_{e_G}$; utilicemos inducción sobre n. Para $n = 1$ hacemos $U = V$. Sea $n \in \mathbb{N}^+$ fijo y supongamos que el resultado es válido para n; es decir, existe $W \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $W^n \subseteq U$ y queremos encontrar una vecindad V de e_G tal que $V^{n+1} \subseteq U$. Como la multiplicación $g_1(x, y) = xy$ es continua y $g_1(e_G, e_G) = e_G$, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_{e_G}$ tales que $V_1 \cdot V_2 \subseteq W$. Sea $V = V_1 \cap V_2$, entonces $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ y $V^2 \subseteq W$, de donde $V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} \subseteq U$, lo que termina la inducción.
(2) Sea $V \in \mathcal{N}^*_{e_G}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $xV \cap V \neq \emptyset$; es decir, existen $v_1, v_2 \in V$ con $xv_1 = v_2$, por lo cual $x = v_2 v_1^{-1} \in VV^{-1} = V^2 \subseteq U$. Así que $\overline{V} \subseteq U$. □

Teorema 22. *Sea G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G. Entonces:*

1. *Si O es abierto, los conjuntos aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son abiertos.*

2. *Si A es cerrado, aA, Aa, A^{-1} son subconjuntos cerrados.*

3. *Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1}.*

4. *Se cumple que*
$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}_{e_G}} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}_{e_G}} WA$$

La demostración de este teorema se puede ver detalladamente en [7].
Sabemos que todo grupo topológico es un espacio homogéneo. Por lo tanto, para demostrar propiedades locales en un grupo topológico (por ejemplo, conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc.) es suficiente con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Una de éstas es la propiedad T_3.

Teorema 23. *Todo grupo topológico G cumple las siguientes propiedades:*

1. *G es un espacio T_3.*
2. *Si $A \subseteq G$ es compacto y $B \subseteq G$ es cerrado, entonces AB y BA son cerrados.*

Demostración. (1) Se debe probar que si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, existe una vecindad $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que

$$e_G \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Esto se deduce del Lema 3.
(2) Veamos que BA es cerrado, para ello debemos probar que $G - BA$ es abierto. Para cada $x \in A$, el conjunto Bx es cerrado, por tanto, existen vecindades $U_x, V_x \in \mathcal{N}^*{}_{e_G}$ con $aU_x \cap Bx = \emptyset$ y $V_x^2 \subseteq U_x$, así, $aV_x \cap BxV_x = \emptyset$. Los abiertos xV_x, con $x \in A$, cubren a A, así que existe una subfamilia finita $x_tV_{x_t}$, $t = 1, \ldots, n$ que cubren a A.
Sea

$$W = \bigcap_{t=1}^{n} V_{x_i}.$$

El conjunto W es abierto y simétrico, y además $aW \cap Bx_tV_{x_t} = \emptyset$ para todo $t \leq n$. Por lo tanto $aW \cap BA = \emptyset$, así aW es una vecindad abierta de a ajena a BA. De forma análoga se prueba que AB es cerrado en G. $\square$

Capítulo 2

Cardinales en Grupos Topológicos

En esta sección mostraremos algunos resultados sobre cardinalidad en grupos topológicos, probando que algunos de estos resultados se simplifican significativamente cuando agregamos la estructura de grupo a un espacio, y veremos además algunos contraejemplos que demuestran la importancia de esta estructura de grupo sobre un espacio topológico G.

Definición 15. *Sea τ un cardinal infinito. Un grupo topológico G se llama* **τ-estrecho** *si para toda vecindad U de la identidad en G, existe un subconjunto $K \subset G$ con $|K| \leq \tau$ tal que $KU = G$.*

Definición 16. *Se define* **el índice de estrechez** *de un grupo topológico G como el mínimo cardinal $\tau \geq \omega$ tal que G es τ-estrecho. Se denota $ib(G)$.*

Teorema 24. ([1], pág 297) *En todo grupo topológico G se satisfacen las desigualdades $ib(G) \leq L(G)$ y $ib(G) \leq c(G)$.*

Teorema 25. ([1], pág 297) *La igualdad $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$ se satisface en todo grupo topológico.*

Demostración. Las desigualdades $ib(G) \leq L(G) \leq w(G)$ son claras. Veamos que $\chi(G) \leq w(G)$. Sea $w(G) = |\mathscr{B}|$, donde $\mathscr{B}$ es una base de G y sea $p \in G$, entonces existe $B_p \in \mathscr{B}$ tal que $p \in B_p$. Sea $\mathscr{A} = \{B_p : p \in G\}$, entonces $\mathscr{A}$ es una base local en p y además $\chi(p,G) \leq |\mathscr{A}| \leq w(G)$ para todo $p \in G$, así $\chi(G) \leq w(G)$. En consecuencia, $ib(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Probemos que $w(G) \leq ib(G) \cdot \chi(G)$. Sea $\tau = ib(G) \cdot \chi(G)$ y sea $\mathscr{H}$ una base local para la identidad e de G que satisface $|\mathscr{H}| \leq \tau$. Puesto que G es $\tau-$estrecho, podemos encontrar, para todo $U \in \mathscr{H}$, un subconjunto $S_U \subseteq G$, con $|S_U| \leq \tau$ tal que $S_U U = G$. Para todo $U \in \mathscr{H}$ pongamos $\mathscr{B}_U = \{xU : x \in S_U\}$. La familia $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_U : U \in \mathscr{H}\}$ satisface $|\mathscr{B}| \leq \tau$. Veamos que $\mathscr{B}$ es una base para G. Sea O una vecindad de un punto $a \in G$. Podemos encontrar $U, V \in \mathscr{H}$ tal que $aU \subset O$ y $V^{-1}V \subset U$, luego existe $x \in S_V$ tal que $a \in xV$, de donde $x \in aV^{-1}$. Tenemos así que

$$xV \subset (aV^{-1})V = a(V^{-1}V) \subset aU \subset O,$$

es decir, xV es una vecindad abierta de a y $xV \subset O$. Esto demuestra que $xV \in \mathscr{B}$. □

Corolario 4. ([1], pág 297) *Sea G un grupo topológico indiscreto y ω-estrecho, entonces $w(G) = \chi(G)$.*

Demostración. Como G es ω-estrecho se tiene que $ib(G) = \omega$ y como es indiscreto entonces $\chi(G) = \omega$ ya que la única vecindad de cualquier punto p de G es G. Así $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G) = \omega \cdot \omega = \omega = \chi(G)$. □

Lema 4. ([7], pág 24) *Sea G un grupo topológico, D un subespacio denso de G y U una vecindad de la identidad e de G, entonces $DU = G$.*

Demostración. Claramente $DU \subseteq G$. Veamos que $G \subseteq DU$. Sea $g \in G$, puesto que D es un subconjunto denso y gU^{-1} es no vacío y abierto se sigue que existe $x \in D \cap gU^{-1}$. En consecuencia, $g \in xU \subseteq DU$. Por lo tanto, $G \subseteq DU$. □

Teorema 26. ([7], pág 25) *Sea G un grupo topológico y $\mathscr{B}$ una base local para e. Supongamos además que para todo $B \in \mathscr{B}$ existe $D_B \subseteq G$ tal que $G = D_B B$. Entonces $\{xB : x \in D_B, B \in \mathscr{B}\}$ es una base para G.*

Demostración. Sea $g \in G$ y U un abierto que tal que $g \in U$, entonces existe una vecindad V de e tal que $gV = U$. Consideremos una vecindad W de

e tal que $W^{-1}W \subseteq V$ y un elemento $B \in \mathscr{B}$ que cumple $B \subseteq W$. En vista de que $G = D_B B$, existe un elemento $x \in D_B$ tal que $g \in xB$. Por lo tanto, $g \in xB \subseteq gB^{-1}B \subseteq gW^{-1}W \subseteq gV \subseteq U$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Teorema 27. *Sea $f : X \mapsto Y$ un homeomorfismo, entonces $\chi(x, X) = \chi(f(x), Y)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Si $x \in X$ y $\kappa = \chi(x, X)$, existe una base local $\mathscr{U}$ en x tal que $\kappa = |\mathscr{U}|$. La continuidad de f implica que $\mathscr{B} = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$ es una base local para $f(x)$ y la biyectividad de f implica que $\kappa = |\mathscr{U}| = |\mathscr{B}|$. Por tanto $\chi(f(x), Y) \leq |\mathscr{B}| = \chi(x, X)$. Análogamente, si $\tau = \chi(f(x), Y)$, entonces existe una base local $\mathscr{V}$ de $f(x)$ tal que $\tau = |\mathscr{V}|$, luego $\mathscr{A} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ es una base local para x, tal que $\tau = |\mathscr{V}| = |\mathscr{A}|$. Así, $\chi(x, X) \leq |\mathscr{A}| = \chi(f(x), Y)$, lo cual demuestra el teorema. $\square$

Corolario 5. *Si X es un espacio homogéneo, entonces $\chi(x, X) = \chi(y, X)$ para todo $x, y \in X$.*

Demostración. Si $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \mapsto X$ tal que $f(x) = y$, luego $\chi(x, X) = \chi(y, X)$. $\square$

Ejemplo 2. *Sea X un conjunto no numerable y definamos la siguiente topología* (topología del punto excluido)

$$\mathscr{T}_p = \{U \subseteq X : p \notin U \text{ y } X - U \text{ es finíto}\} \cup \{X\}.$$

El único abierto que contiene a p es X, luego la única base local para p es $\{X\}$, así que $\chi(p, X) = 1$. Por otro lado, si $x \neq p$ es un elemento de X, entonces la menor base local $\mathscr{U}$ de x tiene elementos de la forma $V_x = X - \{p, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ para algún n, por tanto $\mathscr{U}$ tiene la misma cardinalidad de X. Esto demuestra que $\chi(p, X) \neq \chi(x, X)$ para cualquier $x \neq p$.

Definición 17. *El mínimo número de subconjuntos compactos de X que se requieren para cubrir a X se denota por $k(X)$ y se llama* **número de recubrimiento compacto** *de X.*

Teorema 28. ([1], pág 297) *Todo grupo topológico G satisface*

1. $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$;
2. $w(G) \leq k(G) \cdot \chi(G)$;
3. $w(G) \leq L(G) \cdot \chi(G)$.

Demostración. (1) Sabemos que $d(G) \leq w(G)$ y ademas $\chi(G) \leq w(G)$, luego $d(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Por otro lado, sea D un subconjunto denso de G de cardinalidad $d(G)$ y sea $\mathscr{B}$ una base local para la identidad e de G tal que $|\mathscr{B}| = \chi(G)$. Por Lema 4 se tiene que $G = BD$ para cada $B \in \mathscr{B}$ y por el Teorema 26 se tiene que $\mathscr{V} = \{xB : x \in D, B \in \mathscr{B}\}$ es una base para G de cardinalidad $\leq$ que $\chi(G) \cdot d(G)$, lo cual demuestra que $w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G)$.
(2) y (3) Partimos de que en todo grupo topológico, $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$. Puesto que $ib(G) \leq L(G) \leq k(G)$ se tiene que $w(G) \leq k(G) \cdot \chi(G)$ y $w(G) \leq L(G) \cdot \chi(G)$. □

Ejemplo 3. *El siguiente ejemplo demuestra que la parte 1) del Teorema 28 no se cumple en espacios topológicos. Sea X no numerable, $p \in X$ y $\mathscr{T} = \{U \subseteq X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ una topología en X* (topología del punto incluido). *Vemos que $\{p\}$ es denso en X y además es el mínimo conjunto denso en X, entonces $d(X) = 1 + \aleph_0 = \aleph_0$. Ahora, para cualquier $x \in X$ fijo, $\{\{x, p\}\}$ es una base local para x, así que $\chi(x, X) = 1$, en consecuencia, $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0 = \aleph_0$. Por otra parte, la clase $\mathscr{B} = \{\{x, p\} : x \in X\}$ es la base mas pequeña de X, por lo tanto, $w(X) = |X| > \aleph_0$. Tenemos que $w(X) > \aleph_0$ y $d(X) \cdot \chi(X) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.*

Teorema 29. ([1], pág 298) *Si G es un grupo topológico, entonces:*

1. $\chi(G) = \pi\chi(G)$;
2. $w(G) = \pi w(G)$.

Demostración. (1) Supongamos que G es no discreto. La desigualdad $\pi\chi(G) \leq \chi(G)$ es inmediata. Debemos probar que $\chi(G) \leq \pi\chi(G)$. Sea γ una π-base de la identidad e de G tal que $|\gamma| = \pi\chi(G)$, entonces la familia

$\mu = \{UU^{-1} : U \in \gamma\}$ es una base local en e. En efecto, si O es una vecindad de e, existe una vecindad V de e tal que $VV^{-1} \subseteq O$. Puesto que γ es una π-base de e, podemos encontrar $U \in \gamma$ con $U \subseteq V$, entonces $W = UU^{-1} \in \mu$ y $e \in W \subseteq O$. Esto prueba que μ es una base local de la identidad de G. Como $|\mu| \leq |\gamma| = \pi\chi(G)$ concluimos que $\chi(G) \leq \pi\chi(G)$.
(2) Note que $d(G) \leq \pi w(G)$ y $\pi\chi(G) \leq \pi w(G)$, luego por parte 1) del Teorema 28 tenemos que

$$w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G) \leq \pi w(G) \cdot \pi\chi(G) \leq \pi w(G) \cdot \pi w(G) = \pi w(G).$$

Por otro lado, como toda base es una π-base, se sigue que $\pi w(G) \leq w(G)$.
$\square$

Los siguientes ejemplos prueban que el teorema anterior no se cumple, en general, en espacios topológicos.

Ejemplo 4. *Considere el espacio topológico X, con la topológia del punto incluido*

$$\mathscr{T} = \{U \subseteq X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

tal que $p \in X$ y $|X| = \aleph_1$. Entonces $\mathscr{B} = \{\{x, p\} : x \in X\}$ es una base para la topológia, la cual está contenida en cualquier otra base de $\mathscr{T}$. Así que $w(X) = |\mathscr{B}| = \aleph_1$. Por otro lado, $\{\{p\}\}$ es la π-base mas pequeña de X, en consecuencia $\pi w(X) = 1 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Ejemplo 5. *La topología del límite inferior, llamada también topología de Sorgenfrey es una topología definida sobre la recta real. Al espacio topológico resultante, denotado por $\mathbb{R}_\ell$, se le denomina Recta de Sorgenfrey. Esta topología es distinta de la topología usual, y está generada por la base $\beta = \{[a, b) \ : \ a < b\}$ donde a, b son números reales.*
Sea $\mathscr{B}$ una base numerable para $\mathbb{R}_\ell$ y sea $\mathscr{A}_\theta = \{[\alpha, \theta)/\alpha < \theta, \alpha \text{ irracional}\}$. Para cada $\alpha < \theta$, existe $U_\alpha \in \mathscr{B}$ tal que $\alpha \in U_\alpha \subseteq [\alpha, \theta)$. Además, si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se tiene que $U_{\alpha_1} \neq U_{\alpha_2}$, es decir, para cualquier dos números irracionales distintos, existen dos elementos básicos diferentes que los contienen, lo cual es imposible, ya que $\mathscr{B}$ es una familia numerable. Por lo tanto, no existe una base numerable para $\mathbb{R}_\ell$. Así, $w(\mathbb{R}_\ell) = \aleph_1$.

Por otro lado, sea $\mathscr{T} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$. Entonces $\mathscr{T}$ es numerable y es una π-base para $\mathbb{R}_\ell$, ya que para cualquier $[a,b) \in \beta$, existe $[c,d) \in \mathscr{T}$ tal que $[c,d) \subseteq [a,b)$. Por lo tanto, $\pi w(\mathbb{R}_\ell) \leq |\mathscr{T}| \leq \aleph_0$.

Ejemplo 6. *Sea A un espacio discreto Hausdorff no numerable, entonces es localmente compacto. Consideremos $X = A \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: U es abierto en X si U es abierto en A o $\infty \in U$ y $X - U$ es cerrado y compacto en A. Luego, $X - U$ es finito (ya que en un espacio discreto un subconjunto es compacto si y solo si es finito), así que $X - U = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i \neq \infty$, lo cual implica que $U = X - \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Hallemos $\pi\chi(x, X)$ para $x \neq \infty$. Tenemos que $\{x\}$ es abierto en X, luego es una base local y por tanto una π-base local, así que $\pi\chi(x, X) = 1$. Para $x = \infty$, sea $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq A$ y consideremos un abierto U que contiene a ∞, el cual es de la forma $X - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde $a_i \neq \infty$. Entonces, existe $x_i \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, luego $\{x_i\} \subseteq X - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, es decir, $\{\{x_i\} : i = 1, 2, \ldots\}$ es una π-base local en ∞, así que $\pi\chi(\infty, X) \leq \aleph_0$. Como consecuencia de esto tenemos que $\pi\chi(X) = \aleph_0$. Por otro lado, sea $\mathscr{B}_\infty$ una base local en ∞ numerable, $\mathscr{B}_\infty = \{U_1, U_2, \ldots\}$, entonces $U_i = X - A_i$, siendo $A_i \subseteq A$ finito. Luego $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable y además $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq A$, por lo que existe $x \in A$ tal que $x \notin A_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots$. Ahora, $X - \{x\}$ es una vecindad de ∞, lo cual implica que $X - A_i \subseteq X - \{x\}$ para algún i. Por tanto, $\{x\} \subseteq A_i$, lo cual contradice lo anterior. Esto prueba que ∞ no tiene una base local numerable, así $\chi(\infty, X) \geq \aleph_1$, en consecuencia, $\chi(X) = \aleph_1$.*

Corolario 6. ([1], pág 298) *Sea G un grupo topológico infinito compacto, entonces*

1. $\pi\chi(G) = \chi(G) = w(G)$;
2. $|G| = 2^{w(G)}$.

Demostración. (1) La igualdad $\pi\chi(G) = \chi(G)$ se obtiene de de la parte (1) del Teorema 29. Ahora, como todo espacio compacto es Lindelöf, la parte 3) del Teorema 28 implica que $w(G) \leq \chi(G)$, por lo tanto $w(G) = \chi(G)$.
(2) Sea $\tau = w(G)$, como el espacio G es homogéneo y no discreteo, por 1) el carácter de G en cada punto es igual a τ. Por lo tanto el Teorema de

Cech-Pospisil (ver [4], 3.2.11) implica que $|G| \geq 2^{\tau}$. Puesto que todo espacio X que sea T_1 satisface $|X| \leq 2^{w(X)}$, concluimos que $|G| = 2^{\tau}$. $\square$

Conclusión

Este trabajo está desarrollado básicamente en las áreas de topología y topología algebraica. Se realiza una comparación del comportamiento de algunos cardinales básicos en espacios generales y en grupos topológicos, para ello se establecen algunos resultados que se satisfacen en dichos grupos. A partir de estos se dan contraejemplos que demuestran que esos resultados no se cumplen en espacios topológicos.

Fueron mostrados algunos resultados valiosos como las desigualdades que se presentan entre los cardinales en espacios topológicos, así como algunas cotas para el peso, la cardinalidad o el número de elementos de la topología del espacio.

Se hace un especial uso de la topología del punto excluido para demostrar que en un espacio topológico (no numerable) dotado de esta topología, el carácter local no coincide en todos sus puntos; así como en un espacio (no numerable) dotado de la topología del punto incluido, el peso no coincide con el producto de la densidad con el carácter, y el carácter y π-carácter no son iguales.

Finalmente, se toma como una fuente de contraejemplos la Linea de Sorgenfrey y la Compactificación de Alexandroff. Con la primera, logramos probar que en espacios topológicos, el peso y π-peso son diferentes, y con la segunda se demuestra también que el carácter y π-carácter no coinciden sobre la compactificación de un espacio discreto no numerable.

Bibliografía

[1] Arhangel'skii A., Tkachenko M., *Topological Groups and Related Structures.* Pág. 296-301. Universidad Autonoma Metropolitana de Mexico.

[2] Arhangel'skii, A. V. (1979). *Cardinal invariants of topological groups. Embeddings and condensations*, Soviet Math. Dokl. 20, pag. 783-787. Russian original in: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 247, pág. 779-782.

[3] Arhangel'skii, A. V. (1978). *Structure and classifcation of topological spaces and cardinal invariants*, Russian Math. Surveys 33, pag. 33-96. Russian original in: *Uspekhi Mat. Nauk* 33,6, pp. 29-84.

[4] Engelking, R. (1977). *General Topology* (PWN, Polish Scientific Publ., Warszawa).

[5] Freiwald, R. C. *Introduction to Set Theory and Topology*, St. Louis, 2013.

[6] Harbacek K. and Jech T. *Introduction to Set Theory.* Pág 129-133.

[7] Hernández C. and Tkachenko M. *Grupos Topológicos*, pág 1-24; 133-136.

[8] Kunen K. and Vaughan J. *Handbook of Set-Theoretic Topology.*

[9] Munkres, J. R. *Topología*, 2a ed. Prentice Hall, Madrid, 2002.

ANEXO

1827 ¡Siempre a la altura de los tiempos!	UNIVERSIDAD DE CARTAGENA	CÓDIGO: FO-GR-011
	RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN	VERSIÓN: 00
	CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	PAGINA: 1

FECHA		
DD	MM	AAAA
10	10	2018

1. Presentación del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Código	Documento de Identidad		Apellidos	Nombres	Correo electrónico
	Tipo	número			
1711322001	CC	1050952022	PEREZ SANTANDER	JOSÉ PRICILIANO	Joseps123@hotmail.com

Programa	MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
Facultad	CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Título al que opta	MAGISTER EN MATEMÁTICAS
Asesor	JULIO CESAR HERNÁNDEZ – CONSTANCIO HERNÁNDEZ GARCÍA

Título de la obra: CARDINALES INVARIANTES EN GRUPOS TOPOLÓGICOS

Palabras claves (materias): TOPOLOGÍA, GRUPOS, GRUPOS TOPOLÓGICOS

2. Autorización de publicación de versión electronica del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Con esta autorización hago entrega del trabajo de grado (investigacion o tesis) y de sus anexos (si existen), de forma gratuita en forma digital o electrónica (CD-ROM, DVD) y doy plena autorizacion a la Universidad de Cartagena, de forma indefinida, para que en los terminos establecidos en la ley 23 de 1982, la Ley 44 de 1993, leyes y jurisprudencia vigente al respecto, haga la publicación de éste, con fines educativos. Esta autorizacion, es válida sobre la obra en formato o soporte material, digital, electrónico o virtual, para usos en red, internet, intranet, biblioteca digital o cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR, expresa que el trabajo de grado (investigación o tesis) objeto de la presente autorizacion, es original y la elaboro sin quebrantar ni suplantar los derechos de autor de terceros, de tal forma que el Trabajo es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre éste. En caso de queja o acción por parte de un tercero referente a los derechos de autor sobre el trabajo de grado en cuestión EL AUTOR, asumira la responsabilidad total, y saldra en defensa de los derechos aqui autorizados, para todos los efectos, la Universidad de Cartagena actúa como un tercero de buena fe.

Toda persona que consulte ya sea la biblioteca o en medio electrónico podrá copiar apartes del texto **citando** siempre la fuentes, es decir el titulo del trabajo, autor y año

Esta autorizacion no implica renunciar a la facultad que tengo de publicar total o parcialmente la obra. La autorización debe estar respaldada por las firmas de todos los autores del trabajo de grado.

Si autorizo

3. Firma

1827 ¡Siempre a la altura de los tiempos!	UNIVERSIDAD DE CARTAGENA	CÓDIGO: FO-GR-011
	RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN	VERSIÓN: 00
	CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	PAGINA: 2

Firma Autor 1	Firma Autor 2
Firma Autor 3	Firma Autor 4