



MODELAMIENTO Y CARACTERIZACIÓN DE
REDES DELINCUENCIALES: UNA
APROXIMACIÓN DESDE LA FÍSICA
ESTADÍSTICA DE LOS VIDRIOS DE ESPÍN Y LA
TEORÍA DE JUEGOS

FREDIS AGÁMEZ GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
CARTAGENA DE INDIAS D.T. Y C.
COLOMBIA
2016



MODELAMIENTO Y CARACTERIZACIÓN DE REDES DELINCUENCIALES: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA FÍSICA ESTADÍSTICA DE LOS VIDRIOS DE ESPÍN Y LA TEORÍA DE JUEGOS

FREDIS AGÁMEZ GONZÁLEZ

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Ciencias Físicas

DIRECTORES

JOHN EDUARDO REALPE GÓMEZ, Ph. D
JAVIER ANTONIO MONTOYA MARTÍNEZ, Ph. D

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
CARTAGENA DE INDIAS D.T. Y C.
COLOMBIA

2016

Nota de Presentación

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

*Dedicado a
mi madre, a mi esposa
y a mi hija.
Tres generaciones de amor puro*

AGRADECIMIENTOS

Muchas gracias a mi familia y a todos los buenos amigos que siempre han estado presentes para compartir triunfos y derrotas, pero sobre todo, para dar voces de aliento cuando ha sido necesario.

También agradezco a todas aquellas personas que durante muchos años me han acompañado en la vida, son estos, mis maestros y mis alumnos, porque de ambos he aprendido y sigo aprendiendo a ser mejor persona.

RESUMEN

Hoy por hoy el impacto de la física estadística trasciende las fronteras de la física e incluso de las llamadas ciencias duras. Gracias a la generalidad de su marco conceptual y a la versatilidad y efectividad de sus métodos, la física estadística encuentra cada vez más aplicaciones en áreas tan diversas como la biología, las tecnologías de la información, la ciencia de la computación, la economía, las ciencias sociales, entre muchas otras [1]. Las aplicaciones de la física estadística al estudio de problemas que yacen en la intersección entre las ciencias de la computación y las ciencias socioeconómicas, en particular el fenómeno de la delincuencia, resultan muy interesantes para el desarrollo de esta investigación [2, 3].

Hay que ser cuidadoso al hablar de, delincuente o de criminal, puesto que no es lo mismo, delincuente se refiere a crímenes pequeños o *petty crimes*. En *Delinquent Networks et al.* [4] Ballester dice: Nos centramos en los delitos menores, por lo que consideramos a los delincuentes más que a los criminales. También anota: Está bien documentado que las interacciones sociales y los efectos de los compañeros son más fuertes para los delitos menores que para otros tipos de crímenes (Glaeser, Sacerdote, and Scheinkman 1996; Jacob and Lefgren 2003; Patacchini and Zenou 2008). Como sustantivos la diferencia entre delincuente y criminal es que el delincuente es aquel que desobedece o rompe las reglas o leyes mientras que el criminal es una persona que es culpable de un delito, especialmente violando la ley (ver <http://www.wikidiff.com/criminal/delinquent>).

Una red de delincuentes puede ser vista como un sistema en el que interactúan múltiples agentes, cuya formulación matemática usualmente tiene lugar dentro de la llamada Teoría de Juegos [5]. En esta teoría se asume que los agentes son autónomos y que pueden tener objetivos conflictivos, de modo que cada agente busca obtener lo mejor para sí condicionado al comportamiento estratégico de los demás agentes, y condicionando a su vez, el comportamiento de los mismos. Las diferentes estrategias que un agente puede asumir pueden representarse por una variable definida sobre un dominio específico y las preferencias de un agente dado pueden codificarse en una cierta función, llamada función de pagos o utilidad, que depende de la estrategia del agente en cuestión y de la de los demás agentes con los que interactúa [6]. Uno de los conceptos centrales de la Teoría de Juegos en general es el de equilibrio de Nash: una configuración de estrategias de la cual ningún agente tiene un incentivo para desviarse unilateralmente.

En esta investigación se estudiaron redes delincuenciales desde la perspectiva de la física estadística de los vidrios de espín. Para esto se consideró un modelo de redes delincuenciales en el cual cada uno de los agentes que interactúan en la red pueden decidir si delinque o no, de acuerdo a sus preferencias y a la escogencia de aquellos individuos con quienes interactúa. Utilizando técnicas de la física estadística se calcularon propiedades típicas de los equilibrios de Nash [7] tales como su número, si existe alguno, y el nivel de actividad criminal global y cómo estos varían con parámetros del modelo, tales como

la severidad de las sanciones impuestas a los individuos capturados. Para lograr esto se realizaron mapeos del sistema de agentes a un sistema físico equivalente.

Índice general

<i>Agradecimientos</i>	II
<i>Resumen</i>	III
<i>Índice de figuras</i>	VII
1.. <i>INTRODUCCIÓN</i>	1
2.. <i>MARCO TEÓRICO</i>	3
2.1. Teoría de Juegos	3
2.2. Teoría de Grafos	6
2.3. Grafos	8
2.3.1. Grafo dirigido	9
2.3.2. Subgrafo	11
2.3.3. Grafo conexo	11
2.3.4. Matriz de adyacencia	11
2.3.5. Matriz de incidencia	15
2.3.6. Grafo completo	16
2.3.7. Grafo bipartito	16
2.3.8. Árboles	17
2.3.9. Grafos regulares	18
2.4. Redes Complejas	21
2.5. Problemas P y Problemas NP	22
2.6. Física Estadística de los Vidrios de Espín	25
2.6.1. El modelo de Ising	26
3.. <i>MODELAMIENTO Y CARACTERIZACIÓN DE REDES DELINCUENCIALES</i> 28	
3.1. Definición del Problema	28
3.2. Equilibrio de Nash	29
3.2.1. Equilibrio de Nash y satisfacción de restricciones	31
3.3. Relación con la Física Estadística	31
3.3.1. Construcción de un sistema físico equivalente	31
3.3.2. Estrategia binaria	33
3.3.3. Método de la cavidad	34
3.3.4. Método de la cavidad para redes delinCUENCIALES	37
3.3.5. Análisis de la Función de Utilidad	38
4.. <i>RESULTADOS</i>	44
5.. <i>CONCLUSIONES</i>	50

6.. ANEXOS	56
----------------------	----

Índice de figuras

2.1. Representación hecha por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg	8
2.2. Grafo dirigido	10
2.3. Componentes Fuertemente Conectadas	10
2.4. Grafo condensado del digrafo de la figura 2.3	11
2.5. Grafo conexo	12
2.6. Grafo G	13
2.7. Grafo G_n	15
2.8. Ejemplos de grafos completos	16
2.9. Grafo bipartito	17
2.10. Ejemplo de árbol	18
2.11. Sub-árbol del árbol de la figura 2.10	19
2.12. Ilustración del proceso de evolución de un grafo según el modelo Erdős-Rényi	20
2.13. Un circuito booleano	23
3.1. Operaciones básicas que permiten definir el método de la cavidad sobre grafos con topología de árbol	35
3.2. Grafo de factores asociado a una juego sobre redes, como lo es el modelo de redes delincuenciales aquí estudiado	38
3.3. Comportamiento de la función de utilidad cuando $\alpha_i < 0$	39
3.4. Comportamiento de la función de utilidad cuando $\alpha_i < 1 < \pi_0$	40
3.5. Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 \geq 1$ y $k_i + 1 < \delta(\varphi + 1)$	40
3.6. Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 < 1$ y $\alpha_i < 1$	42
3.7. Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 < \alpha_i$ y $\varphi < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$	42
4.1. Criminalidad Promedio vs Intensidad de Competencia Global (δ). $\pi_0 = 0.5$, $\varphi = 0.5$ y δ variando en el intervalo $[0.5, 3.5]$	45
4.2. Entropía vs Intensidad de Competencia Global (δ). $\pi_0 = 0.5$, $\varphi = 0.5$ y δ variando en el intervalo $[0.5, 3.5]$	46
4.3. Criminalidad Promedio vs Intensidad de las Sanciones Impuestas (π_0). $\delta = 3.8$, $\varphi = 0.3$ y π_0 variando en el intervalo $[0.1, 0.9]$	47
4.4. Entropía vs Intensidad de las Sanciones Impuestas (π_0). $\delta = 3.8$, $\varphi = 0.3$ y π_0 variando en el intervalo $[0.1, 0.9]$	47
4.5. Criminalidad Promedio vs Colaboración Local entre Delincuentes (φ). $\delta = 1.7$, $\pi_0 = 0.5$ y φ variando en el intervalo $[0.15, 1]$	48
4.6. Entropía vs Colaboración Local entre Delincuentes (φ). $\delta = 1.7$, $\pi_0 = 0.5$ y φ variando en el intervalo $[0.15, 1]$	49

1. INTRODUCCIÓN

Una red de delincuentes puede ser vista como un sistema en el que interaccionan múltiples agentes, cuya formulación matemática usualmente tiene lugar dentro de la llamada Teoría de Juegos [5]. La Teoría de Juegos asume que los agentes son autónomos y que además pueden tener objetivos conflictivos, de modo que cada agente busca obtener lo mejor para sí condicionado al comportamiento estratégico de los demás agentes, y condicionando a su vez, el comportamiento de los mismos. Las diferentes estrategias que un agente puede asumir se representan por variables, ya sean de carácter discreto o continuo, y las preferencias de un agente dado se codifican en una función de pagos, la cual depende de su estrategia y de la de los demás agentes con los que interacciona.

La complejidad de este tipo de problemas constituye un asunto que se trata a partir de conceptos de la Física estadística. La Física estadística ha realizado importantes contribuciones al estudio de problemas que se ubican en la intersección entre la ciencia de la computación y las ciencias socioeconómicas, ayudando a dilucidar el origen de la complejidad computacional y proponiendo nuevos tipos de algoritmos para enfrentarla [7, 8], y además, proveyendo ideas, conceptos y técnicas, tanto analíticas como computacionales, para el estudio de fenómenos socioeconómicos emergentes [9]. Algunas de las técnicas y conceptos que mayor aplicación han tenido en el estudio de sistemas complejos de carácter interdisciplinar, han sido desarrolladas inicialmente para investigar las propiedades de los vidrios estructurales o los vidrios de espín, que se caracterizan, por la carencia de las simetrías cristalinas frecuente en los sólidos [10].

Desde el punto de vista de la física estadística, un sistema tal se puede concebir como un sistema de partículas que interaccionan y sus propiedades se pueden obtener a partir de una función de partición conveniente. Dada la ausencia de simetrías cristalinas, se considera que las partículas se encuentran situadas en los nodos de una red o grafo genérico, el cual corresponde precisamente al grafo que representa las interacciones en un sistema de agentes [11]. El estado de una de tales partículas corresponde a la estrategia del agente que representa. A cada configuración se le puede asociar una energía apropiada, de manera que las configuraciones de interés, como por ejemplo los equilibrios de Nash, correspondan a los estados base o configuraciones de mínima energía. Una vez se tiene este mapa, el problema principal que queda por resolver es el cálculo de la función de partición resultante.

En esta investigación se estudió un modelo de redes delincuenciales que consiste de un conjunto de individuos situados en los nodos de una red aleatoria que pueden decidir si delinquir o no. Un vínculo entre un par de nodos en esta red indica que los individuos correspondientes tienen una influencia mutua en sus decisiones. Las preferencias de un agente dado están codificadas en su función de pagos, la cual representa la relación costo-beneficio caracterizada por el balance entre las ganancias obtenidas de su activi-

dad criminal, la probabilidad de que sea capturado y la sanción a la que se expone. A diferencia de otros estudios realizados sobre redes delincuenciales [4], este se caracteriza por el desconocimiento de la topología de la red, lo cual nos impide predecir en determinado momento, el comportamiento de un delincuente particular en lo que respecta a sus relaciones con otro delincuente, así como en las estrategias que decida seguir. Esta situación es la razón por la cual decidimos utilizar en la construcción de nuestro modelo redes aleatorias, toda vez que la aleatoriedad de estas puede representar el desconocimiento que tenemos sobre la topología de la red delincencial. Modelos similares han sido investigado recientemente en la literatura de las ciencias socioeconómicas, como lo deja ver [12], aunque no desde el punto de vista que aquí propusimos. Por ejemplo, mientras que los trabajos referenciados anteriormente se enfocan más en la definición general del problema y el análisis de experimentos de campo, en este proyecto se propone estudiar las propiedades estadísticas del sistema inducidas por la carencia de información precisa sobre la topología de la red. Desde esta perspectiva, resulta importante caracterizar las propiedades de redes delincuenciales tales como la conectividad o los equilibrios de Nash, utilizando métodos como el de la cavidad [13].

La Física Estadística ha sido pionera en el análisis de este tipo de estructuras [7], por lo que es de utilidad en el estudio de la actividad criminal global del sistema, así como posibles estrategias para disminuirla.

Hay por lo menos otro aspecto en el cual el modelo aquí propuesto difiere del tipo de modelos que han sido estudiados en la literatura sobre redes delincuenciales. En efecto, mientras en el primero se asume que sólo se tiene información sobre si un determinado individuo está delinquir o no, en los últimos se asume que se conoce además el nivel de actividad criminal de cada uno y que éste toma un valor real. Desde un punto de vista matemático hay una gran diferencia si se trabaja con variables discretas, más aún binarias (delinquir o no), que si se trabaja con variables reales, las cuales permiten el uso de las técnicas analíticas del cálculo. Cuando el problema está definido sobre variables binarias, como nuestro modelo, las técnicas de la física estadística de vidrios de espín, y en especial el método de la cavidad, resultan muy efectivas para el análisis de las propiedades de interés en el sistema, e incluso para calcular un equilibrio de Nash, si existe alguno [14]. Cuando el problema está definido sobre variables reales, no hay garantía de que exista un único equilibrio de Nash [6].

El problema que nos ocupó en este trabajo consistió en calcular los equilibrios de Nash del sistema, en caso que existiera alguno, caracterizar sus propiedades estadísticas, en especial el número promedio de individuos que delinquen y explorar posibles estrategias para reducirlo, y analizar si pueden existir transiciones de fase en el sistema. Los métodos para llevar a cabo este estudio consisten en el desarrollo de algoritmos de paso de mensajes inspirados en el método de la cavidad de la física de los vidrios de espín [10].

2. MARCO TEÓRICO

2.1. *Teoría de Juegos*

La Teoría de Juegos es el estudio del comportamiento estratégico cuando dos o más individuos interactúan y cada decisión individual resulta de lo que él espera que los otros hagan[15].

El primer ejemplo de un análisis formal de Teoría de Juegos es el estudio de un duopolio (Situación que se produce en un mercado en el que sólo dos empresas tienen la capacidad para ofertar productos a precios competitivos pudiendo llegar a acuerdos de repartos del mismo) por parte de Antoine Cournot en 1838 [15]. En el modelo de Cournot el producto es homogéneo y las empresas actúan sobre las cantidades. El matemático Emile Borel sugirió una Teoría Formal de Juegos en 1921, que fue promovida por el matemático John von Neumann en 1928 en una Teoría de Juegos de salón. La Teoría de Juegos se estableció como un campo por derecho propio después de la publicación 1944 de *La Teoría de Juegos y Comportamiento Económico* por von Neumann y el economista Oskar Morgenstern [14]. En este libro se puede encontrar gran parte de la configuración y la terminología básica que hoy en día todavía está en uso. En 1950, John Nash demostró que los juegos finitos siempre tienen un punto de equilibrio, en el que todos los jugadores eligen las acciones que son mejores para ellos dadas las acciones de sus oponentes. Entre los años 1950 y 1970, la Teoría de Juegos se amplió teóricamente y fue aplicada a situaciones militares y a la política. Desde 1970 la Teoría de Juegos ha impulsado una revolución en la teoría económica. Adicionalmente, se han encontrado aplicaciones en la sociología y la psicología, y se han establecido vínculos con la evolución y la biología. La Teoría de Juegos recibió una atención especial en 1994 con el logro del premio Nobel de Economía por parte de Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten.

A finales de la década de 1990, se utilizó la Teoría de Juegos en el diseño de subastas tales como la asignación de derechos para el uso de bandas del espectro electromagnético para la industria de las telecomunicaciones móviles. La mayoría de estas subastas fueron diseñadas con el objetivo de destinar estos recursos de manera más eficiente que las prácticas tradicionales del gobierno, y, además, significaron miles de millones de dólares en Estados Unidos y Europa[16].

La coherencia y los fundamentos matemáticos de la Teoría de Juegos la convierten en un instrumento de gran importancia para el modelado y diseño de los procesos automatizados de toma de decisiones en entornos interactivos.

La fuerza de la Teoría de Juegos como una herramienta matemática para la toma de decisiones es la metodología que contempla la estructuración y análisis de los problemas de elección de estrategias. El proceso de modelar formalmente una situación como un juego

requiere la toma de decisiones para enumerar explícitamente los jugadores y sus opciones estratégicas, y tener en cuenta sus preferencias y reacciones. La disciplina involucrada en la construcción de un modelo de este tipo ya tiene el potencial de proporcionar a la toma de decisiones una visión más clara y amplia de la situación. Se trata de una aplicación prescriptiva de la Teoría de Juegos, con el objetivo de mejorar la toma de decisiones estratégicas[17].

Un juego en forma normal o estratégica, que se denotará por $G[X; U]$, consta de tres elementos esenciales:

- Los n jugadores que participan en el juego.
- Las estrategias disponibles para cada jugador, que son $X = \{X_1, \dots, X_n\}$. $X_i = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}\}$ es el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i , que también se conoce como un perfil estratégico del jugador i .
- El conjunto de funciones de pago $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, donde la función de pagos u_i de cada jugador representa la utilidad o pagos obtenidos por el i -ésimo jugador, que es función de las estrategias elegidas por él y sus rivales en el juego.

Normalmente los jugadores eligen sus estrategias en forma simultánea, de tal forma que cada jugador elige su jugada sin saber qué decisiones toman los demás jugadores. Así, el pago que cada jugador recibe depende de los demás.

La ganancia esperada para el jugador i está dada por:

$$u_i(\mathbf{x}, g) = y_i(\mathbf{x}) - p_i(\mathbf{x}, g)f \quad (2.1)$$

Aquí $y_i(\mathbf{x})$ corresponde a la ganancia bruta del jugador i , la cual depende de su estrategia y del perfil estratégico de la población. Dicha ganancia o utilidad depende no sólo de la estrategia del jugador en consideración, sino también del esfuerzo de todos los jugadores y de la estructura de la red. Esto se debe a la competencia global y a la colaboración local entre jugadores. Por otra parte, $p_i(\mathbf{x}, g)$ y f se refieren a la probabilidad que el jugador i tenga pérdidas en el juego y a la intensidad de la sanción recibida (valor de la multa o tiempo de cárcel), respectivamente.

Se supone aquí que los jugadores tienden a mejorar su actividad en la medida en que interaccionan con sus compañeros directos. En otras palabras, cuanto mayor sea la participación en actividades de la red menor será su probabilidad individual de ser tener pérdidas $p_i(\mathbf{x}, g)$.

Los jugadores harán la jugada x_i , que maximice su ganancia $u_i(\mathbf{x})$, dados los niveles de esfuerzo de los demás jugadores $\mathbf{x}_{-i} = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$. El perfil estratégico dado por $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ constituye un equilibrio de Nash del sistema cuando

$$u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^*) = \max_{x_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^*) \quad (2.2)$$

Esto implica que todos y cada uno de los jugadores resuelven individualmente el problema, alcanzándose el equilibrio de Nash cuando todos, simultáneamente, obtienen la ganancia

máxima, bajo el supuesto de que los demás jugadores también aplican su estrategia óptima.

El objeto de estudio de la Teoría de Juegos es el juego, que es un modelo formal de una situación interactiva. Por lo general implica varios jugadores; a un juego con un solo jugador se le llama un *problema de decisión*. La definición formal establece los jugadores, sus preferencias, sus datos, las acciones estratégicas disponibles para ellos, y como éstas influyen en el resultado[17].

Los juegos pueden ser descritos formalmente en varios niveles de detalle. Un juego de coalición (o cooperativo) es una descripción que especifica solamente los pagos que cada grupo o coalición puede obtener mediante la cooperación de sus miembros. Lo que no se hace explícito es el proceso por el cual se forman las coaliciones. Por ejemplo, los jugadores pueden ser de varios partidos en el Congreso. Cada parte tiene una fuerza diferente, basada en el número de curules ocupada por los miembros del partido. El juego, que describe las coaliciones de partidos, puede derivar en mayorías, pero esto no necesariamente implicaría que se logre un proceso de negociación a través del cual se acuerde votar en bloque[17].

La Teoría de Juegos cooperativos investiga este tipo de juegos de coalición con respecto a las cantidades relativas de poder en manos de diversos jugadores, o como una coalición exitosa debe dividir su producto. Esto se aplica, naturalmente, a la mayoría de las situaciones en las ciencias políticas o relaciones internacionales, donde conceptos como la energía son los más importantes. Por ejemplo, Nash propone una solución para la división de las ganancias de acuerdo a un problema de negociación que depende únicamente de las fuerzas relativas de la posición de negociación de ambas partes. La cantidad de energía de cada una de las partes está determinada por el resultado, por lo general ineficaz, que se tiene cuando se rompen las negociaciones. El modelo cooperativo de Nash no especifica las ofertas y contraofertas, sino que se centra únicamente en el resultado del proceso de negociación. Por el contrario, la Teoría de Juegos no cooperativos tiene que ver con el análisis de las estrategias. El paradigma de la Teoría de Juegos no cooperativos es que los detalles del juego y el momento de las elecciones de los jugadores son cruciales para determinar el resultado del mismo[17].

Estas ramas de la Teoría de Juegos también difieren en sus supuestos. Un supuesto central en muchas variantes de la Teoría de Juegos es que los jugadores son racionales. Un jugador racional es aquel que siempre elige una acción que da el resultado que la mayoría prefiere, teniendo en cuenta lo que espera que sus oponentes hagan. El objetivo del análisis de Teoría de Juegos en estas ramas es, entonces, predecir como actuarán los jugadores racionales para dar consejos sobre la mejor manera de realizar el juego contra oponentes que son racionales.

La forma estratégica (también llamada forma normal) es el tipo básico de juegos estudiados en la Teoría de Juegos no cooperativos. Un juego en forma estratégica enumera las estrategias de cada jugador, y los resultados que se derivan de cada combinación posible de opciones. Un resultado está representado por un pago independiente para cada jugador, que es un número (también llamado utilidad) que mide cuanto le gusta al jugador el resultado.

La forma extensiva es más detallada que la forma estratégica de juego. Se trata de una descripción completa de como el juego evoluciona con el tiempo. Esto incluye el orden en el que los jugadores toman acciones, la información que los jugadores tienen en el momento en que deben tomar esas acciones, y las horas a las que se resolvieron cualesquiera incertidumbres en la situación. Un juego en forma extensiva puede analizarse directamente, o se puede convertir en una forma estratégica equivalente.

2.2. Teoría de Grafos

A lo largo de la historia, los trabajos en ciencia han tratado de reducir al máximo las variables que puedan influenciarlos y aunque los logros asociados a este enfoque son muchos y valiosos, resulta insuficiente cuando el sistema bajo estudio está formado por un número alto de elementos que interactúan de forma no lineal entre sí. En los últimos años ha aparecido una nueva forma de abordar los sistemas complejos y esto es a través de un aparato matemático denominado red. La herramienta matemática utilizada para describir estas redes se denomina grafo y data de mediados del siglo *XX* pero no fue sino hasta principios del siglo *XXI* cuando su uso se consolidó con la capacidad de los ordenadores para procesar muchos datos de manera rápida y eficiente.

Al principio la teoría de grafos estudiaba redes que contaban con pocos nodos, pero con el desarrollo de las teorías de la probabilidad y la estadística en los años setentas del siglo *XX*, la teoría de grafos tuvo un nuevo repunte de la mano del matemático Paul Erdős, pues los métodos probabilísticos permitieron estudiar las propiedades de grafos arbitrariamente grandes, cambiando un poco el enfoque y dándole una aproximación estadística. En contraposición al grafo regular, Erdős y su colaborador Rényi presentaron el concepto de grafo aleatorio o grafo de Erdős- Rényi como aquel grafo generado por un proceso estocástico donde en cada paso dos nodos cualesquiera se conectan con cierta probabilidad p [18, 19]. Con la llegada de los ordenadores modernos a finales del siglo *XX*, los grafos reales, tales como la red de redes (la Internet) o las redes sociales o las redes biológicas pudieron ser examinadas y sus propiedades estadísticas calculadas. Como resultado de esto se encontró que estas redes eran mucho más complejas de lo que la teoría de Erdős- Rényi describía. Sin embargo, dentro de ese caos de conexiones, se visualizaban ciertos patrones de orden.

Por último, aparecen grafos enormes que no son ni regulares ni aleatorios, a los cuales se les llamó redes complejas. Estas redes deben contener algún tipo de organización, la cual debe estar codificada de alguna forma en la topología de las mismas y explotada mediante algoritmos. El físico Húngaro László Barabási y su alumno Réka Albert se centraron en el estudio de las distribuciones de grado de las redes reales. Para ello estudiaron datos disponibles de redes complejas. Demostraron que muchas de las redes del mundo real tienen distribuciones de grado completamente diferentes a la de los grafos Erdős Rényi (distribución de Poisson). Las redes reales por lo general presentan distribuciones de grado que siguen una ley potencial [20, 21]. A las redes cuya distribución de grado sigue una ley potencial se las conoce también como redes libres de escala. Esto se debe a que la distribución de ley potencial se extiende sin producir un corte, a diferencia de una distribución normal donde sí existe una escala característica. Las redes libres de escala tienen la característica de que muchos nodos están pobremente conectados, mientras

que muy pocos nodos en la red presentan un alto grado de conexiones. Según Barabási y Albert, en las redes sociales los nodos que poseen más conexiones tienen mayor probabilidad de formar nuevas conexiones [21]. En esta investigación estuvimos interesados en el estudio de las interacciones estratégicas en una red de muchos agentes con intereses propios independientes, luchando por obtener el mejor beneficio para cada uno de ellos, estando este condicionado al comportamiento de los demás agentes, pero a su vez siendo condicionante del comportamiento del de los demás agentes. Estas situaciones son estudiadas por la Teoría de Juegos, creada por Von Neumann y Morgenstern [14], donde es clave el concepto de equilibrio. Se destaca entre ellos el concepto de equilibrio de Nash, el cual es una asignación de estrategias a cada agente en la que ninguno tiene incentivos para desviarse unilateralmente.

Una preocupación importante para los científicos de la computación ha sido entender si los equilibrios de Nash se pueden calcular de manera eficiente. Muchos trabajos se han dedicado a analizar la complejidad computacional de encontrar un equilibrio de Nash [22, 23]. Los métodos de la física estadística han sido usados recientemente para investigar esta cuestión y desarrollar algoritmos que cumplan esta tarea eficientemente [7].

Por otra parte, las principales corrientes económicas se han centrado tradicionalmente en los modelos donde las interacciones agente - agente están mediadas a través de un mercado. Este tipo de interacción tiende a generar sistemas de buen comportamiento con equilibrios únicos y otras propiedades que facilitan su análisis. Sin embargo, recientemente se ha venido reconociendo que se deben tener en cuenta las influencias de las interacciones sociales en los resultados económicos. En un sistema económico en el que los intereses individuales dominen las tendencias prosociales se puede asumir que cada agente actúe deliberadamente tratando de maximizar sus ganancias teniendo en cuenta el comportamiento de los demás, y al hacerlo crea correlaciones que pueden propagarse por toda la población, dando lugar a un resultado global que no está directamente vinculado a las preferencias individuales. No es extraño entonces que los modelos de la física estadística hayan demostrado ser muy valiosos en la investigación de tales sistemas. Es así como Schelling [24, 25], argumenta cómo las decisiones individuales de un agente, cuando es influenciado por el comportamiento de los demás, puede llevar a un comportamiento agregado no trivial.

Una propiedad común de las redes sociales es que se forman camarillas, que representan el círculo de amigos o conocidos en la que cada miembro conoce a todos los demás miembros. Esta tendencia inherente al clúster se cuantifica por el coeficiente de agrupamiento [26], un concepto que tiene sus raíces en la sociología, que aparece bajo el nombre de fracción de transitividad triple [27]. Si seleccionamos un nodo i tendremos k_i aristas que conectan a i con otros k_i nodos. Si los vecinos más cercanos al nodo original forman camarillas, habría $k_i(k_i - 1)/2$ aristas entre ellos. La relación entre el número de aristas E_i que realmente existen entre estos k_i nodos y el número $k_i(k_i - 1)/2$ da el valor del coeficiente de agrupación del nodo i ,

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.3)$$

El coeficiente de agrupamiento de toda la red es el promedio de todos los C_i individuales.

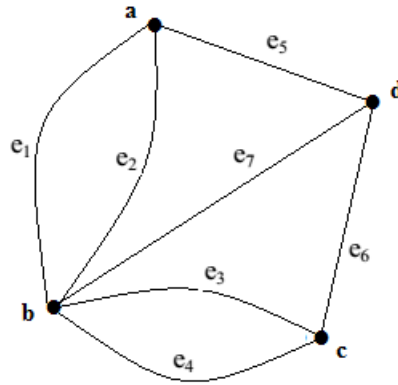


Fig. 2.1: Representación hecha por Euler para resolver el problema de los puentes de Königsberg

En esta investigación tomamos como punto de partida el modelo de red delincencial propuesto por Ballester, Calvó-Armengol y Zenou [4], el cual desarrollan un juego explícito de redes delictivas, donde las personas deciden no cooperativamente su participación en el crimen. En el trabajo de Ballester *et al.* [4] se consideran diferentes políticas destinadas a reducir las actividades de la delincuencia total en una red delictiva y presenta entre otras, las siguientes innovaciones:

- i. La función de pagos contiene un componente con estrategia global sustitutiva y parametrizada de modo que los efectos de diferentes parámetros pueden ser fácilmente interpretados.
- ii. Compara los efectos de un aumento de castigo y otras políticas comunes anti delincuencia con una política del jugador clave.
- iii. Se analizan políticas de grupo clave y de enlace clave.
- iv. Muestra que la búsqueda de un grupo clave es un problema *NP hard* y proporciona un algoritmo voraz simple que puede cometer un error relativo de hasta 37 %.

2.3. Grafos

La primera definición de grafo tuvo lugar a raíz de un artículo publicado en 1736, por Leonhard Euler. El trabajo surgió de un problema conocido como el problema de los puentes de Königsberg [28].

Durante el Siglo *XVIII*, la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones. El problema que se presentaba era tratar de encontrar una forma de caminar por la ciudad, cruzando cada puente una sola vez, y regresando al lugar de partida. Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas como cuatro puntos, y los puentes como aristas que unen los puntos, tal y como se muestra en la figura 2.1. Esta Representación conduce a la siguiente definición de grafo [28].

Un grafo G es un par $(V;E)$, donde V y E son conjuntos, junto con una aplicación $\gamma_G : E \longrightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Al conjunto V se le llama conjunto de vértices; al conjunto E conjunto de aristas o lados, y a la aplicación γ_G (o simplemente γ) aplicación de incidencia. El grado de un vértice de un grafo corresponde al número de aristas que concurren a él.

Si tomamos como ejemplo el caso de los puentes de Königsberg, el grafo correspondiente tiene como conjunto de vértices al conjunto $V = \{a, b, c, d\}$, como conjunto de aristas al conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y la aplicación de incidencia es la dada por: $\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2) = \{a, b\}$, $\gamma_G(e_3) = \gamma_G(e_4) = \{b, c\}$, $\gamma_G(e_5) = \{a, d\}$, $\gamma_G(e_6) = \{b, d\}$, $\gamma_G(e_7) = \{c, d\}$. Si e_1 y e_2 son dos aristas tales que $\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2)$, se dice que son aristas paralelas. Una arista tal que $\gamma_G(e) = \{v\}$ se dice un lazo.

Un camino en G es una sucesión donde se alternan vértices y aristas, comenzando y terminando con vértices y en el que cada arista es incidente con los dos vértices que lo preceden y lo siguen. Un camino que une los vértices v_1 y v_n sería:

$$v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$$

A este camino también se le puede nombrar por la sucesión de sus vértices, v_1, v_2, \dots, v_n y se representa por

$$\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$$

A los vértices v_1 y v_n se les denomina extremos del camino.

Acostumbra decirse también que el camino conecta v_1 con v_n o que va de v_1 a v_n . La longitud del camino es el número $n - 1$ de aristas que contiene. Un camino es simple si en la sucesión de vértices no hay ninguno repetido. Un ciclo en G es un camino en el que sus extremos coinciden. El ciclo será simple si no hay, además del primero y el último, ningún otro vértice repetido.

2.3.1. Grafo dirigido

Un grafo dirigido G o digrafo es una tripleta compuesta por un conjunto de vértices $V(G)$, conjunto de aristas $E(G)$, y una función de asignación para cada arista de un par ordenado de vértices (cola, cabeza); estos vértices juntos son llamados puntos extremos de la arista. Decimos que una arista va de su cola a su cabeza[29]. La figura 2.2 nos muestra un grafo dirigido

En un digrafo, una arista es un bucle si sus puntos extremos son iguales. Aristas múltiples son las que tienen colas idénticas y cabezas idénticas. Un digrafo se llama simple, si no tiene aristas múltiples. Una arista con cola u y cabeza v se denota uv . El vértice u es llamado el antecesor de uv , y v es llamado el sucesor de uv .

El grado de salida del vértice v es el número de aristas que salen de él y se denota $d^+(v)$ y el grado de entrada de v es el número de aristas que entran en él y se denota $d^-(v)$.

En el camino dirigido, $v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \dots, e_{jk}, v_{ik}, v_{il}$ es el vértice inicial y v_{il-1} es el vértice terminal de la arista e_{jl} .

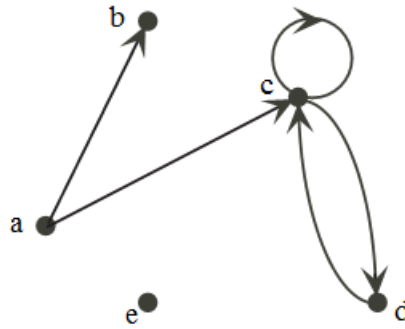


Fig. 2.2: Grafo dirigido

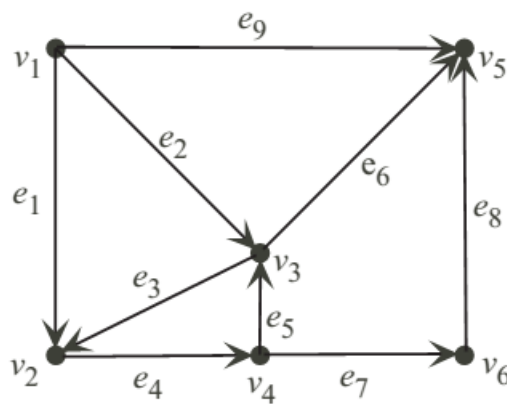


Fig. 2.3: Componentes Fuertemente Conectadas. Para el digrafo G las componentes fuertemente conectadas son (v_1, \emptyset) , $(v_2, v_3, v_4, e_3, e_4, e_5)$, (v_5, \emptyset) y (v_6, \emptyset) .

Cuando tratamos al grafo (V, E) como un grafo no dirigido habitual, decimos que éste es el grafo no dirigido subyacente del digrafo $G = (V, E)$, y lo denotamos G_u .

Los vértices u y v están fuertemente conectados si hay un camino dirigido uv y también un camino dirigido vu como se aprecia en la figura 2.3. Un digrafo G está fuertemente conectado si cada par de vértices está fuertemente conectado. Por convención, el grafo trivial está fuertemente conectado.

Cada vértice del digrafo G pertenece a una componente fuertemente conectada de G . Sin embargo, una arista no necesariamente pertenece a ninguna componente fuertemente conectada de G .

El grafo condensado G_c del grafo G se obtiene mediante la contracción de todas las aristas en cada componente fuertemente conectada. La figura 2.4 nos muestra el grafo condensado correspondiente al digrafo de la figura 2.3.

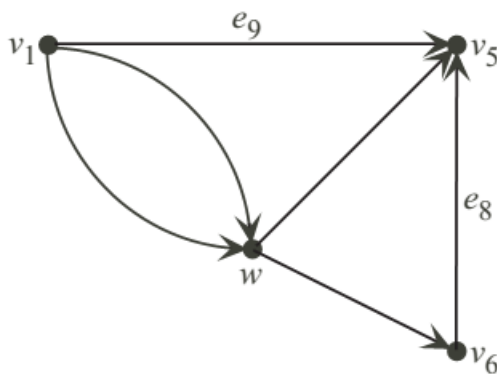


Fig. 2.4: Grafo condensado del digrafo de la figura 2.3

2.3.2. Subgrafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo con aplicación de incidencia γ_G . Un subgrafo de G es un nuevo grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y se verifica que $\gamma_{G'}(e) = \gamma_G(e)$ para cualquier $e \in E'$.

Si $G' = (V', E')$ es un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$, se dice que es un subgrafo completo si dado $e \in E$ tal que $\gamma_G(e) \subseteq V'$ se verifica que $e \in E'$. Dicho de otra forma, si tiene todas las aristas que tenía G y que unen vértices de V' .

Las componentes de un digrafo G son los subgrafos dirigidos de G que corresponden a las componentes de G_u . Los vértices de G están conectados si están conectados en G_u . Otros conceptos para grafos no dirigidos se pueden utilizar para digrafos al tratar con el grafo no dirigido subyacente[29].

Una componente fuertemente conectada H del grafo G es un subgrafo dirigido de G (no nulo) de tal manera que H está fuertemente conectada, pero si añadimos algún vértice o arista a él, entonces deja de estar fuertemente conectada.

2.3.3. Grafo conexo

Sea G un grafo. Se dice que G es conexo, si dados dos vértices u y v de G existe al menos un camino de u a v . En un grafo conexo $G = (V, E)$, llamamos puente a cualquier arista e de G tal que el grafo $(V, E - \{e\})$ no sea conexo. En el grafo de la figura 2.5 la arista 5 es un puente

2.3.4. Matriz de adyacencia

Las representaciones gráficas que hasta ahora hemos visto de los grafos no resultan de mucha utilidad cuando se desea hacer un análisis formal con la ayuda de un ordenador. Es necesario entonces de otro tipo de representación.

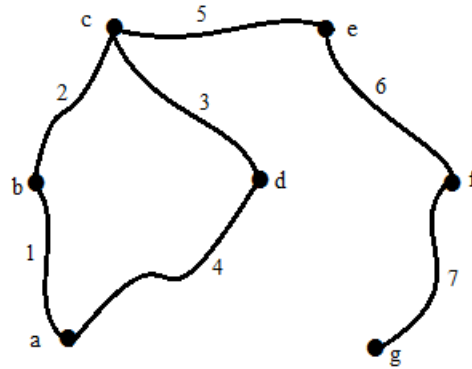


Fig. 2.5: Grafo conexo

Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como la matriz $A \in M_n(N)$ cuyo coeficiente (i, j) es igual al número de aristas e que unen v_i con v_j .

Observaciones:

- 1 La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica respecto de la diagonal, pues cada arista que une v_i con v_j une también v_j con v_i . Es por esto que la información, exceptuando la contenida en la diagonal, aparece dos veces.
- 2 Si ordenamos de otra forma los vértices, la matriz de adyacencia es diferente. Por tanto, un grafo puede tener varias matrices de adyacencia. En general, si A y C son dos matrices de adyacencia de un mismo grafo, entonces existe una matriz de permutación P tal que $P^{-1}CP = A$.
- 3 La existencia de aristas paralelas se traduce en la matriz de adyacencia en la existencia de coeficientes mayores que 1. De la misma forma, la existencia de bucles se traduce en que algún elemento de la diagonal principal de la matriz de adyacencia es distinto de cero.
- 4 Si tenemos un grafo dirigido, también podemos definir su matriz de adyacencia. En este caso, el coeficiente a_{ij} es el número de aristas que verifican que $s(e) = v_i$ y $t(e) = v_j$. En este caso, la matriz no tiene porqué ser simétrica.
- 5 La matriz de adyacencia de un grafo lo determina. Además, toda matriz cuadrada con coeficientes en N es la matriz de adyacencia de un grafo (dirigido o no) finito. Podríamos entonces tomar como definición de grafo la de una matriz cuadrada con coeficientes en N .
- 6 La matriz de adyacencia de un grafo permite representar los bucles, aunque no las aristas repetidas entre dos vértices.
- 7 Si el grafo no tiene bucles, entonces puede calcularse el grado de un vértice sumando la fila o columna correspondiente al mismo.

Ilustremos el concepto de matriz de adyacencia con el siguiente ejemplo.

Consideremos el grafo $G = (V, E)$, con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ que se muestra en la figura

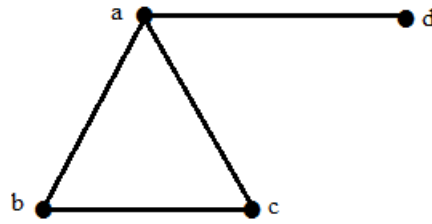


Fig. 2.6: Grafo G

2.6 La matriz de adyacencia de G , $M = (a_{ij}) \in M_p$, está dada por:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in A \\ 0, & \text{si } v_i v_j \notin A. \end{cases}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por si misma esta matriz se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando cualquier elemento distinto de cero que no esté en la diagonal principal, por ejemplo el a_{23} que vale uno. Este elemento resulta de multiplicar la segunda fila correspondiente al vértice v_2 con la tercera columna correspondiente al vértice v_3 . Es decir,

$$(1 \ 0 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

Ahora bien, la única forma de que los sumandos sean distintos de cero es que los elementos que se multipliquen sean, ambos, iguales a uno. Esto ocurrirá cuando haya un vértice cuyo elemento en la fila correspondiente a v_2 sea uno y el de la columna que corresponde con v_3 también sea uno. Es decir, han de existir aristas de la forma $v_2 v$ y de la forma vv_3 . Cada vez que esto suceda, la suma aumentará una unidad. Aquí, la suma es uno, representando al par de aristas $v_2 v_1$ y $v_1 v_3$ es decir, se tiene un caminos de longitud dos entre $v_2 v$ y vv_3 ,

$$\gamma = (v_2, v_1, v_3)$$

Si se hubiera elegido el elemento a_{31} que vale uno, se tendría

$$(1 \ 1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

y el único producto no nulo es $1 \cdot 1$ que representa al par de aristas v_3v_2, v_2v_1 , es decir, hay un camino de longitud dos entre v_3 y v_1 ,

$$\gamma = (v_3, v_2, v_1)$$

Por tanto,

- 1 Todos los ceros de la matriz A^2 significan que no hay ningún camino de longitud dos entre los vértices correspondientes.
- 2 Todos los unos de la matriz A^2 significan que existe un camino de longitud dos entre los vértices correspondientes.
- 3 todos los dos de la matriz A^2 significan que existe dos caminos de longitud dos entre los vértices correspondientes.

y así sucesivamente.

Se observa además, que los elementos de la diagonal principal son los grados de los vértices. En efecto, si consideramos el elemento a_{11} que vale tres, entonces

$$(0 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

y los tres productos no nulos, representan a los pares de aristas

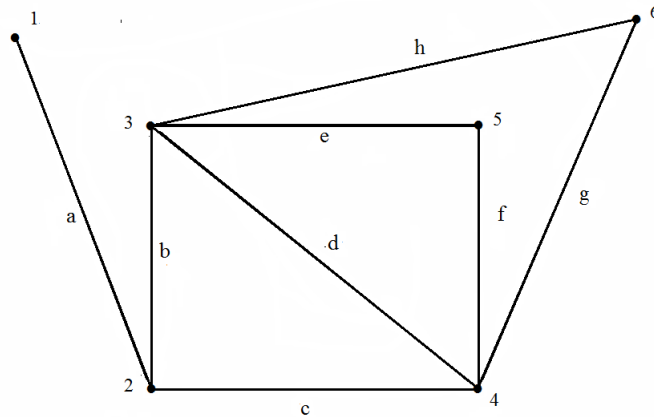
$$v_1, v_2, v_2v_1$$

$$v_1, v_3, v_3v_1$$

por tanto, el número de caminos de longitud dos entre v_1 y v_1 es tres que es el grado de v_1 .

Todas estas ideas permiten afirmar:

Si A es la matriz de adyacencia de un grafo simple, el elemento a_{ij} que ocupa la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz A^n es el número de caminos de longitud n que existen entre el vértice i y el vértice j .

Fig. 2.7: Grafo G_n

2.3.5. Matriz de incidencia

Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de aristas es $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Se define la matriz de incidencia del grafo G como una matriz $n \times m$ que tiene en la posición (i, j) un 1 si $v_i \in f(e_j)$ y 0 en otro caso.

Observaciones:

- 1 Si tomamos otra ordenación de los vértices y/o aristas, la matriz de incidencia puede ser diferente. En este caso, dos matrices de incidencia corresponden al mismo grafo i se puede pasar de una a otra mediante operaciones elementales por filas y/o columnas.
- 2 El que un grafo tenga aristas paralelas se traduce en que tenga dos columnas iguales en la matriz de incidencia, mientras que los bucles se traducen en filas con un único coeficiente uno.
- 3 Si el grafo es dirigido, se puede definir también la matriz de incidencia. En este caso, el coeficiente (i, j) puede también tomar el valor 1 (si la arista e_j parte del vértice v_i). En tal caso, el grafo no podría tener bucles.

Consideremos el grafo $G_a = (V, E)$, con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ que se muestra en la figura 2.7 La matriz de incidencia de orden $n \times m$ de G_a , $B = (b_{ij})$, está dada por:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ incide con } a_j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

esto es,

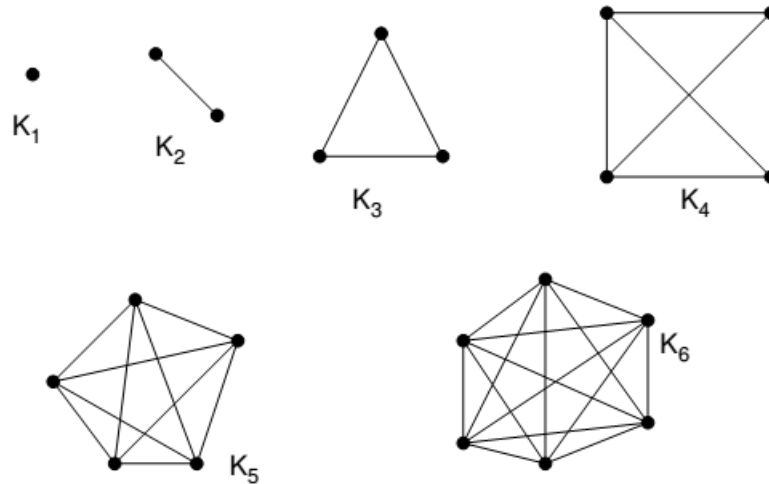


Fig. 2.8: Ejemplos de grafos completos .

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de incidencia sólo contiene ceros y unos (matriz binaria). Como cada arista incide exactamente en dos vértices, cada columna tiene exactamente dos unos. El número de unos que aparece en cada fila es igual al grado del vértice correspondiente. Una fila compuesta sólo por ceros corresponde a un vértice aislado.

La matriz de incidencia de un grafo permite representar tanto bucles como aristas repetidas entre dos vértices. Si el grafo no tiene bucles, entonces cada columna tiene dos 1 y la suma de cada fila da el grado del vértice correspondiente.

2.3.6. Grafo completo

Se llama grafo completo de n vértices al grafo (con n vértices) que no tiene vértices ni aristas paralelas, y dados dos vértices hay una arista que los une. Dicho de otra forma, su matriz de adyacencia toma el valor cero en todos los elementos de la diagonal y el valor uno en el resto. Los grafos completos carecen de bucles y se acostumbra usar el símbolo K_n para nombrar al grafo completo de n vértices. El grado de cada vértice de un grafo completo K_n es $n - 1$, luego la suma de todos los grados del grafo es $n(n - 1)$ y, como cada par de vértices está unido por una arista, se tiene que el número de aristas de un grafo completo K_n es $\frac{n(n - 1)}{2}$.

2.3.7. Grafo bipartito

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es bipartito si podemos descomponer V en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de forma que toda arista incide en un vértice de V_1 y en un vértice de V_2 . Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito completo si es bipartito, y para



Fig. 2.9: Grafo bipartito. En la primera figura se tiene que $V_1 = \{v_1, v_3\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4\}$. Además, podemos ver que para cualquier pareja formada por un vértice de V_1 y un vértice de V_2 hay una arista y sólo una que los une. Por tanto, es un grafo bipartito completo. Dado que V_1 y V_2 tienen dos elementos, dicho grafo es $K_{2,2}$. En la segunda tenemos $V_1 = \{x_1\}$ y $V_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Vemos también que este es un grafo bipartito completo, es decir, este grafo es $K_{1,6}$.

cada $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ existe un única arista $e \in E$ tal que $\gamma_G = \{v_1, v_2\} \in E$. Un grafo bipartito completo está completamente determinado por el cardinal de V_1 y V_2 . Si G es un grafo bipartito completo en el que V_1 tiene cardinal m y V_2 tiene cardinal n , entonces denotaremos a G como $K_{m,n}$.

2.3.8. Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos. Un grafo no conexo que no tenga ciclos se denomina bosque. Dado un grafo conexo, un subgrafo suyo se dice árbol generador si tiene todos los vértices y es un árbol. Un árbol no puede tener bucles ni aristas paralelas.

Observaciones:

- 1 Un grafo puede ser un árbol si está conectado. Es decir, si cada uno de los nodos está conectado con al menos otro nodo. Si un nodo no está conectado a algún otro nodo, el grafo no es un árbol.
- 2 Un grafo puede ser un árbol si es acíclico. Es decir, si hay uno y solo un camino entre dos nodos diferentes.
- 3 Un árbol no tiene una dirección específica. Su dirección depende de la forma en que se va a utilizar, el árbol puede ramificar hacia fuera mientras va hacia arriba (como un árbol real), o se puede ramificar hacia abajo como las raíces de un árbol. También puede ramificar hacia la derecha o hacia la izquierda.

En el estudio de los árboles es común utilizar la siguiente terminología:

- *Raíz*: Se refiere comúnmente a un nodo desde donde se extiende el árbol. La raíz es de nivel superior cuando el árbol se extiende hacia abajo. El nodo m en el grafo de la figura 2.10 es el nodo raíz.
- *Descendiente*: Es un nodo que está más lejos de la raíz que algún otro nodo. El término descendiente se da siempre con respecto a otro nodo. En el grafo de la figura 2.10, el nodo g es un descendiente de los nodos b , a y m .

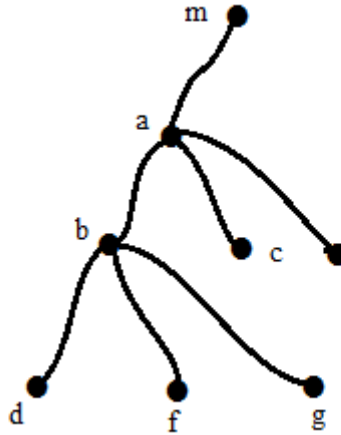


Fig. 2.10: Ejemplo de árbol

- *Padre*: Es un nodo que está más cerca del nodo raíz que otro nodo dado. En el grafo de la figura 2.10, el nodo b es el padre del nodo f . Del mismo modo, el nodo a es el padre de nodo b .
- *Hermano*: Dos o más nodos se dicen hermanos si comparten el mismo padre. En el grafo de la figura 2.10, los nodos b , c y g son hermanos porque tienen al nodo a como su padre.
- *Antepasado*: Es cualquier nodo entre un nodo dado y la raíz, incluyendo la raíz. En el grafo de la figura 2.10, los antepasados del nodo f son b , a , y m .
- *Nodo terminal o vértice*: Un nodo se dice que es un terminal si no tiene hijos. En el grafo de la figura 2.10, los nodos d , f , g , c y e son nodos terminales. Si el nodo no es un nodo terminal se dice que es un *nodo interno*. En el grafo de la figura 2.10, los nodos m , a , y b son nodos internos. El número total de nodos es el número de nodos internos más el número de nodos terminales.
- *Altura*: Se define como el número de nodos que se debe atravesar para llegar desde la raíz hasta el vértice o terminal más distante. En el grafo de la figura 2.10, la altura del árbol es tres.
- *Sub-árbol*: Es una sección más pequeña de un árbol que parte de algún nodo específico. En el grafo de la figura 2.10, el sub-árbol con raíz en b se vería así:

2.3.9. Grafos regulares

Un grafo regular es aquel cuyos vértices tienen el mismo grado. Un grafo con vértices de grado k se denomina k -regular. Un grafo completo es n -regular.

Un grafo se dice aleatorio si cada par de nodos se une con aristas con una probabilidad p [30]. Así, el número total de aristas es una variable aleatoria con una esperanza

$$E[M] = p \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] \quad (2.4)$$

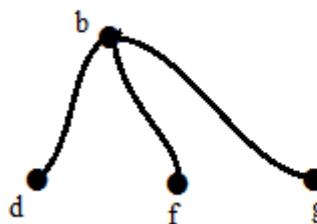


Fig. 2.11: Sub-árbol del árbol de la figura 2.10

La probabilidad de que cada una de las aristas exista sigue una distribución de Bernoulli

$$p^m(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-m} \quad (2.5)$$

y la probabilidad de que un vértice tenga grado k es

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.6)$$

Si se incrementa el número de nodos y aristas del grafo, el valor medio de la distribución tiende a ser constante, con lo que la ley de distribución se hace independiente del número de nodos y de aristas. Esto conduce a la sustitución de la ley binomial por una distribución de Poisson

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cong \frac{z^k e^{-z}}{k!} \quad (2.7)$$

Los grafos aleatorios se caracterizan por la formación de subgrafos

La teoría de grafos aleatorios estudia las propiedades del espacio de probabilidad asociada a grafos con N vértices cuando $N \rightarrow \infty$. Muchas de las propiedades de dichos grafos aleatorios se pueden determinar usando argumentos probabilísticos. A este respecto Erdős- Rényi dicen que casi todos los grafos tienen una propiedad Q si la probabilidad de tener Q se aproxima a 1 cuando $N \rightarrow \infty$.

La construcción de un grafo aleatorio a menudo se llama una evolución [30]: a partir de un conjunto de N vértices aislados, el grafo se desarrolla mediante la adición sucesiva de aristas aleatorias. Los grafos obtenidos en las diferentes etapas de este proceso tienen más y más probabilidades de conexión p , y con el tiempo se obtiene un grafo totalmente conectado [que tiene el número máximo de aristas $n = N(N-1)/2$] para $p \rightarrow 1$. El objetivo principal de la teoría aleatoria de grafos es determinar en qué probabilidad de conexión p es más probable que surja una propiedad particular de un grafo. El descubrimiento más grande de Erdős- Rényi fué que muchas de las propiedades importantes de los grafos aleatorios aparecen de repente. Es decir, en una probabilidad dada, ya sea que casi todo grafo tenga alguna propiedad Q (por ejemplo, cada par de vértices está conectado por un camino de aristas consecutivas) o, por el contrario, que casi ningún grafo la tenga. La transición de que una propiedad sea muy poco probable a ser muy probable suele ser rápida. Para muchas de estas propiedades hay una probabilidad crítica $p_c(N)$. Si la probabilidad conexión $p(N)$ crece más lentamente que $p_c(N)$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces casi ningún grafo con probabilidad conexión $p(N)$ tiene la propiedad Q . Si $p(N)$ crece un

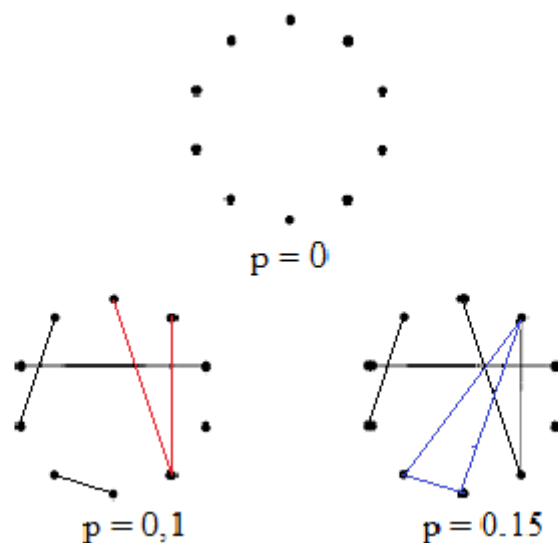


Fig. 2.12: Ilustración del proceso de evolución de un grafo según el modelo Erdős- Rényi. Se comienza con $N = 10$ nodos aislados (panel superior), a continuación, se conecta cada par de nodos con una probabilidad p . El panel inferior de la figura muestra dos etapas diferentes en el desarrollo del grafo, correspondientes a $p = 0,1$ y $p = 0,15$. Se puede notar la aparición de los árboles (un árbol de orden 3, dibujado con líneas rojas) y ciclos (un ciclo de orden 3, dibujado con líneas azules) en el grafo, y un clúster que une la mitad de la nodos en $p = 0,15 = 1,15/N$.

poco más rápido que $p_c(N)$, entonces casi todo grafo tiene la propiedad Q . Por lo tanto la probabilidad de que un grafo con N vértices, probabilidad de conexión $p = p(N)$ y la propiedad Q satisfice

$$\lim_{x \rightarrow 0} P_{n,p}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p(N)}{p_c(N)} \rightarrow 0, \\ 1 & \text{si } \frac{p(N)}{p_c(N)} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Al estudiar los fenómenos críticos se reconoce en la probabilidad crítica $p_c(N)$ algunas características familiares en la teoría de percolación. En física un sistema se da generalmente con un tamaño fijo N y luego los diferentes regímenes de la ecuación (2.3) permiten reducirlo dependiendo de si p es menor o mayor que p_c . El valor adecuado de p_c , es decir, el límite $p_c = p_c(N \rightarrow \infty)$, da una escala de tamaño finito. La base de este procedimiento es la suposición de que este límite existe, lo que refleja el hecho de que en última instancia, el umbral de percolación es independiente del tamaño del sistema. Esto suele darse en los sistemas de dimensión finita, que incluyen la mayoría de los sistemas físicos de interés para la teoría de la percolación y fenómenos críticos. En contraste, las redes son, por definición, de dimensión infinita: el número de vecinos de un nodo puede aumentar con el tamaño del sistema. aleatorio se define teóricamente en función del tamaño de sistema: p representa la fracción de las aristas que están presentes de las $N(N-1)/2$ posibles. Grafos más grandes con la misma p tendrán más aristas, y por lo tanto las propiedades como la aparición de ciclos podrán producirse más. Esto significa que para muchos grafos aleatorios no existe un umbral único, N -independiente, pero tenemos que definir una función de umbral que

depende del tamaño del sistema, y de $p_c(N \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Sin embargo, el grado promedio del grafo es

$$\langle p \rangle = \frac{2N}{n} = p(n-1) \simeq pN \quad (2.9)$$

2.4. Redes Complejas

Una red compleja puede ser definida como un conjunto de nodos interconectados, donde un nodo es un elemento básico o una unidad fundamental con contenidos detallados dependiendo de la naturaleza de la red específica bajo consideración [31].

Los nodos en una red compleja pueden ser cualquier cosa dependiendo del contexto de la discusión. Pueden ser enrutadores en Internet, que están conectados por unos enlaces físicos, tales como fibras ópticas; pueden ser documentos, por ejemplo en el Word Wide Web (WWW) son páginas web, unidas por los llamados hipervínculos; también pueden ser sustratos y enzimas en algunas redes metabólicas conectados a través de interacciones químicas; incluso pueden ser documentos científicos en la red de citación científica, donde los enlaces correspondientes a las citas entre los diferentes artículos pueden ser los científicos de la red de colaboración científica, en la que dos nodos están conectados si dos científicos tienen trabajos conjuntos como coautor de los artículos; pueden ser personas, organizaciones o países en la red social conectada por las interacciones sociales. Hay algunos ejemplos típicos y representativos que han motivado a la comunidad científica a investigar, centrándose en algunos de los elementos genéricos que caracterizan la formación y la topología de las diversas redes complejas [31].

Una red con topología compleja se describe mediante un grafo aleatorio, y el modelo de grafo aleatorio más ampliamente investigado fue quizás el introducido por Erdős Rényi. Aunque claramente muchas redes complejas reales no son ni totalmente regulares ni completamente aleatorias, el modelo de grafo aleatorio de Erdős- Rényi ha dominado el pensamiento de los científicos acerca de las redes complejas, debido en gran parte a la ausencia de información detallada acerca de la topología de las redes reales a gran escala.

Con el fin de describir la transición de una retícula regular a un grafo aleatorio, Watts y Strogatz introdujeron el concepto de red de mundo pequeño [26]. Es notable que el fenómeno del mundo pequeño sea muy común. Una experiencia interesante es que, a menudo, poco después de conocer a un extraño, uno es sorprendido al encontrar que tienen un amigo común en el medio. Así, todos estamos conectados a través de una corta cadena de conocidos. La manifestación más popular de que tan pequeño es el mundo es el llamado seis grados de separación, concepto descubierto por el psicólogo social Milgram a finales de 1960 en el que concluyó, a través de un sencillo experimento, que seis era el número promedio de citas que separa la mayoría de los pares de gente en los Estados Unidos. Él, a partir de entonces conjeturó que una separación similar podría caracterizar la relación de cualesquiera dos personas en el mundo [32]. El patrón del mundo pequeño ha demostrado ser omnipresente en muchas redes reales, incluyendo los ejemplos anteriores y muchos otros, como la red alimentaria, circuitos, e incluso el lenguaje humano.

Una característica común de los grafos aleatorios Erdős- Rényi y el modelo del mundo pequeño es que la distribución de la conectividad de las redes decae exponencialmen-

te. Tales redes se llaman redes exponenciales. Una red exponencial es homogénea en la naturaleza: Cada nodo tiene aproximadamente el mismo número de conexiones. Otro descubrimiento significativo en el campo de las redes complejas es la observación de que un número de redes complejas a gran escala, incluido Internet, WWW y redes metabólicas son libres de escala, es decir, sus distribuciones de conectividad tienen forma de ley de potencia. Una red libre de escala es homogénea en la naturaleza: la mayoría de los nodos tienen muy pocas conexiones y sólo unos pocos nodos tienen muchas conexiones [31]. Es muy importante caracterizar la estructura de las redes complejas, debido a que la estructura siempre afecta la función y el comportamiento de un sistema dinámico, especialmente de uno complejo.

Por otro lado, la topología de una red a menudo juega un papel crucial en la determinación de sus características dinámicas. Por ejemplo, a pesar de la evidencia de que un acoplamiento difusivo suficientemente fuerte daría lugar a la sincronización dentro de un conjunto de nodos idénticos, esto no puede explicar por qué muchas redes complejas del mundo real muestran una fuerte tendencia a la sincronización incluso con un acoplamiento relativamente débil. Como un ejemplo, se observó que los mensajes de enrutamiento aparentemente independientes de diferentes routers en Internet pueden fácilmente sincronizarse, mientras que la tendencia para los routers hacia sincronización puede depender en gran medida de la topología del Internet. Una forma de romper la sincronización para cada router es añadir una componente aleatoria (lo suficientemente grande) para el período comprendido entre los mensajes de enrutamiento. Sin embargo, la tendencia a la sincronización en el Internet es tan fuerte que al cambiar un protocolo determinista para corregir es probable que la sincronización genere otra sincronía. Esto sugiere que una solución más eficiente requiere una mejor comprensión de la naturaleza del comportamiento de sincronización en redes complejas [31].

2.5. Problemas P y Problemas NP

Para ambientar esta sección tomaremos un fragmento de las notas NP - *hardness* de Jef Erickson llamado *Un juego que no puedes ganar* [33].

Un vendedor con un traje rojo que se parece sospechosamente a Tom Waits se presenta con una caja de acero negro con N interruptores binarios en el frente y una bombilla en la parte superior. El vendedor te dice que el encendido de la bombilla es controlado por un valor lógico en un circuito complejo mediante una colección de Y , O y NO puertas conectadas por medio de cables, con un cable de entrada de cada interruptor y un único cable de salida para la bombilla. A continuación, enuncia la pregunta: Hay una manera de ajustar los interruptores de modo que la bombilla se encienda. Si usted puede contestar a esta pregunta correctamente, le dará la caja y mil millones de dólares; si la respuesta es incorrecta, o si muere sin responderla, él tomará su alma.

Por lo que se puede decir, el adversario no ha conectado los interruptores de la bombilla en absoluto, así que no importa cómo configuren los interruptores, la bombilla se quedará apagada. Si afirma que es posible encender la luz, el adversario abrirá la caja y revelará que no hay circuito en absoluto. Pero si afirma que no es posible encender la luz, antes de probar las 2^n posibles configuraciones, el adversario inmediatamente creará un circuito dentro de la caja con el que se enciende la luz si y sólo si los interruptores están configurados con uno de los ajustes que no han sido puestos a prueba y luego, con

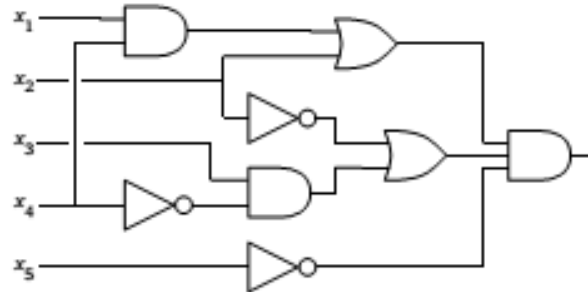
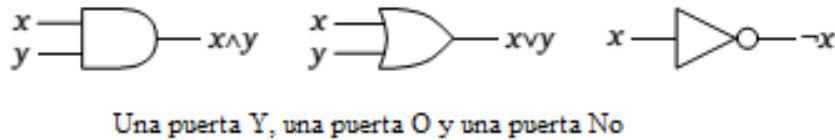


Fig. 2.13: Un circuito booleano. Las ordenes entran desde la izquierda, y la respuesta sale a la derecha.

ese ajuste, encenderá la luz. (No se puede detectar el engaño del adversario, porque no se puede ver el interior de la caja hasta el final). La única manera de responder correctamente la pregunta del adversario es ejecutando todas las 2^n configuraciones posibles. Usted rápidamente se dará cuenta que esto llevará mucho más tiempo de lo esperado para vivir, por lo que rechazará la oferta del adversario.

Con una sonrisa el adversario le dice: Ah, sí, por supuesto, que no tiene ninguna razón para confiar en mí. Pero tal vez pueda convencerlo de la facilidad del problema. Él le dará un gran rollo de pergamino hecho a partir de piel de oveja, con un diagrama de circuito dibujado (o tal vez tatuado) en él. Aquí están los planos completos para el circuito dentro de la caja. Siéntase libre de hurgar dentro de la caja para asegurarse de que los planos son correctos. O construya su propio circuito a partir de estos planos. O escriba un algoritmo para simular el circuito. Lo que quiera. Si descubre que los planos no coinciden con el circuito dentro de la caja, gana los mil millones de dólares. Con estos argumentos podrá convencerlo de que los planos no tienen defectos obvios. Un engaño parece ser imposible.

Pero aún debe rechazar la generosa oferta del adversario. El problema que el adversario está planteando es llamado circuito de satisfactibilidad o CircuitSat: Dado un circuito booleano (aquel en el que hay un conjunto de entradas que hace que la salida del circuito siempre sea verdadera, o por el contrario, siempre sea falsa), para cualquier configuración particular de entrada, se puede calcular la salida del circuito en un tiempo polinómico (en realidad, lineal) realizando una búsqueda a profundidad. Pero nadie sabe cómo resolver un CircuitSat más rápido que tratando todas las 2^n configuraciones posibles del circuito, pero esto requiere de un tiempo exponencial. Por otro lado, en realidad nadie ha demostrado que esto sea lo mejor que se pueda hacer; tal vez hay un algoritmo inteligente que simplemente no se ha descubierto aún.

Los conjuntos V y E mencionados al definir grafos pueden tener una cardinalidad muy grande. Esto implica problemas en los que el número de cálculos a resolver puede ser

enorme. La manera como la computación resuelve un problema es por medio de algoritmos eficientes y rápidos. Un algoritmo esencialmente comprueba todas las configuraciones posibles de un problema. Sin embargo, esto se vuelve poco práctico cuando el número de configuraciones crece exponencialmente rápido con el tamaño del problema. Resulta necesario analizar la estructura del problema para optimizar los algoritmos. Esto ha motivado a los científicos de la computación para clasificar los problemas en clases de acuerdo con el grado esperado de dificultad como: problemas P (tiempo polinomio) son cada uno de los problemas que puede ser resuelto mediante un algoritmo en un tiempo polinomial y problemas NP (tiempo polinomial no determinista) son todos los problemas que pueden ser verificados por un algoritmo en tiempo polinomial. También existen los problemas $co - NP$ que son problemas esencialmente opuestos a los problemas NP . Si la respuesta de un problema en $co - NP$ es NO , entonces existe una demostración de este hecho que puede ser verificada en un tiempo polinomial. Se cree que no existe ningún algoritmo polinomial para todos los problemas en NP , aunque todavía no se conocen pruebas ya sea a favor o en contra de esta idea. Podría ser que la existencia de un algoritmo que resuelve un problema en tiempo polinómico implique la existencia de un algoritmo para resolver toda una clase C de problemas en tiempo también polinomial. En tal caso, se dice que el problema es $C-Hard$, y si el problema en sí mismo pertenece a una clase tal se dice que es $C-complete$.

La clase $NP-complete$ puede definirse alternativamente como la intersección entre NP y $NP-Hard$. Se puede decir que los problemas de $NP-complete$ son los problemas NP más difíciles y muy probablemente no formen parte de la clase de complejidad P .

Los problemas CircuitSat son problemas NP . Si la respuesta es Sí, entonces cualquier conjunto de m valores de entrada que produce una salida verdadera es una prueba de este hecho; podemos comprobar la correspondiente configuración mediante la evaluación del circuito en tiempo polinomial. Está ampliamente aceptado que un CircuitSat no es un problema P ni $co - NP$, pero nadie lo ha demostrado.

Cada problema de decisión P también es NP . Si un problema es P , podemos comprobar una respuestas Sí en tiempo polinomial recalculando la respuesta desde cero. Del mismo modo, todo problema P es también $NP - complete$.

Tal vez la pregunta sin respuesta más importante en las ciencias de la computación es si las clases de complejidad P y NP son diferentes. Parece obvio para la mayoría de las personas que $P \neq NP$; pues los problemas P pueden ser increíblemente difíciles de resolver, incluso cuando las soluciones son obvias en retrospectiva. La resolución de un problema a partir de cero es más difícil que simplemente comprobar que una solución es correcta. Pero nadie sabe como demostrarlo. El The Clay Mathematics Institute tiene al problema $P vs NP$ como el primero de sus siete Millennium Prize Problems, ofreciendo un premio de US \$ 1.000.000 por su solución.

Otra pregunta todavía abierta es si las clases de complejidad NP y $co - NP$ son diferentes. Incluso si podemos comprobar cada respuesta Sí rápidamente, no hay razón para creer que también podemos verificar rápidamente que hay respuestas No. Por ejemplo, aún, no hay ninguna prueba de que un corto circuito boleano no se pueda satisfacer. En general se cree que $PN \neq co - NP$, pero nadie sabe cómo demostrarlo.

Refiriéndonos a los problemas *NP - hard*, si pudiéramos resolver uno de ellos especialmente rápido, entonces podríamos resolver rápidamente cualquier problema cuya solución sea fácil de entender, usando la solución de un problema resuelto como una subrutina.

También tenemos que si alguien encuentra un algoritmo de tiempo polinomial para un problema *NP* complete, entonces eso implicaría la existencia de un algoritmo de tiempo polinomial para cada problema *NP - complete*. Muchos problemas han resultado ser *NP - complete*, por lo que un algoritmo de tiempo polinomial para uno (y por lo tanto todos) de ellos parece muy poco probable.

La Física Estadística ha dado importantes contribuciones a este campo, lo que sugiere que la existencia de transiciones de fase y la estructura orgánica del espacio de soluciones podría desempeñar un papel importante en el estudio de la complejidad computacional. Además, aunque la Física Estadística se ha interesado tradicionalmente en el estudio del comportamiento medio, recientemente se ha reconocido que, efectivamente, se puede aprovechar esa información genérica para encontrar soluciones particulares a los casos individuales. Esto ha sido interpretado particularmente con el llamado método de la cavidad [26], el cual trataremos posteriormente.

2.6. Física Estadística de los Vidrios de Espín

La física estadística ha desarrollado herramientas varias para el estudio de sistemas complejos y, como los fenómenos sociales se comportan de manera muy variada generando sistemas de gran complejidad [1], surge la idea de aplicar la Física Estadística al estudio de sistemas sociales. Sin embargo, si bien se han logrado explicar sistemas complejos no vivos, como las transiciones de fase por las que pasa un líquido, esto no implica que se pueda hacer una extensión para los de carácter social en donde interactúan personas.

A partir de la experiencia se conoce que la materia puede existir en diferentes fases y que las transiciones de una fase a otra pueden ocurrir si se cambia, por ejemplo, la temperatura. Un ejemplo de este fenómeno natural lo vemos cuando un imán pierde su magnetización al disminuir su temperatura por debajo de un valor crítico. Los fenómenos críticos ocurren en las transiciones de fase. Si se considera la transición de líquido a gas, al encontrarse cerca el punto crítico, van a aparecer fluctuaciones en la densidad del líquido en todas las escalas posibles. Estas fluctuaciones se manifiestan a través de gotas mezcladas con burbujas de gas. En la vecindad de este punto van a existir gotas y burbujas de todos tamaños y exactamente en el punto crítico, la escala de las fluctuaciones se vuelve infinita, es decir, se tienen de todos tamaños dentro de nuestro sistema. Esto sugeriría que se deberían de tomar en cuenta sólo las fluctuaciones de escalas mayores ya que tendrían más importancia, pero en realidad el papel de las fluctuaciones pequeñas no puede ignorarse. Una buena teoría de los fenómenos críticos debe tomar en cuenta todas las escalas de longitud debido a que sólo así se puede tener una descripción acertada de los mismos. Este problema requeriría del desarrollo de un nuevo tipo de teoría, capaz de describir los fenómenos a todas las escalas posibles.

Esta teoría de los fenómenos críticos está basada en el concepto fundamental de que las variables ocupadas son irrelevantes y universales, por lo que se plantea que sistemas físicos diferentes, como por ejemplo un líquido y un imán, se comportan de la misma for-

ma cuando se pasa de un estado macroscópico a otro [34]. La mayoría de las propiedades microscópicas de los compuestos físicos resultaron ser irrelevantes para describir el cambio macroscópico que, por el contrario, parece ser universal. Este planteamiento demuestra que fenómenos que parecían estar desconectados, como el magnetismo y los cambios de fase de los fluidos, tienen características similares. El concepto de universalidad plantea que en algunos casos los detalles no son importantes. Esto hace tentadora la extensión de estas nociones a sistemas que no son físicos, en particular a sistemas sociales, para los cuales en muchos casos, existe una relación entre propiedades microscópicas y realidades macroscópicas.

Las coaliciones entre individuos es un fenómeno social que puede ser modelado con herramientas de la física estadística como la teoría de vidrios de espín. Un vidrio de espín es un material desordenado que exhibe alta frustración magnética [9] debido a las interacciones competitivas que se tienen en el sistema. Por otro lado, en los modelos de formación de coaliciones, se plantea que las propensiones bilaterales que tienen dos actores a cooperar o a competir, puede ser simuladas por el tipo o signo de las interacciones que entre ellos se planteen. Además se establece que si dos agentes cooperan, estos tienden a estar en la misma coalición pero si compiten estarán entonces en diferentes coaliciones. En estos modelos se propone que las coaliciones óptimas pueden ser determinadas siguiendo un principio de conflicto mínimo, es decir, las coaliciones más probables serán aquellas en las que existan menos diferencias entre las estrategias de los actores. En ambos fenómenos (el social y el físico) se cuenta con un problema similar, el cual surge al intentar satisfacer simultáneamente fuerzas opuestas entre sí (sistemas frustrados). En el sistema social el problema radica en determinar que tipo de alianza, si existe alguna, va a optimizar las tendencias de todos los actores a pelear o a cooperar.

En la sección 3.3 se discute cómo se pueden utilizar técnicas de la Física Estadística para analizar sistemas sociales, en el contexto del problema específico en el que estamos interesados: redes delincuenciales.

2.6.1. El modelo de Ising

El modelo de Ising es un modelo de un imán que parte del hecho de que el campo magnético generado por un cuerpo continuo es el resultado de la combinación de muchos momentos magnéticos dipolares atómicos o moleculares dentro del material. Este modelo considera una rejilla con dipolos magnéticos o espines en cada sitio y supone que hay N espacios en la rejilla y el mismo número de espines, etiquetados por $i = 1, 2, \dots, N$ [24]. En este modelo los espines asumen la forma más simple posible, esto es, de variables escalares σ_i con valores de ± 1 . Cada espín σ_i apunta a lo largo de algún eje preferencial o en la dirección exactamente opuesta. Por lo que el valor de $+1$ se asigna cuando el espín está paralelo al eje escogido como preferencial, y -1 cuando se encuentra anti-paralelo. Se dice que el espín está arriba cuando $\sigma_i = +1$, y abajo cuando $\sigma_i = -1$. Los estados del sistema de Ising son los diferentes conjuntos de valores que los espines pueden tomar. Debido a que solamente se tienen dos estados para los espines, hay un total de 2^N estados para una rejilla con N espines dentro de ella. En los materiales magnéticos reales los espines se relacionan entre sí, por ejemplo a través de interacciones de intercambio, las cuales se intentan considerar en el modelo de Ising al incluir en el Hamiltoniano productos de espines $\sigma_i \sigma_j$. En el caso más simple, todas las interacciones tienen la misma fuerza, denotada por J que tiene dimensiones de energía y recibe el nombre de constante de acoplamiento de

los espines. Estas interacciones sólo se tienen entre espines que son vecinos cercanos en la rejilla propuesta. También se puede introducir un campo magnético externo B que afecta a los espines. El Hamiltoniano toma entonces la forma

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i \quad (2.10)$$

donde la notación $\langle i, j \rangle$ indica que los lugares i y j que aparecen en la suma son vecinos cercanos. Los signos negativos son convencionales. Estos determinan que signo va a tener el parámetro de interacción J y el campo magnético externo B . Con los signos tal y como se presentan en (2.10), un valor positivo de J hace que los espines tiendan a alinearse uno con otro (modelo ferromagnético), mientras que un valor negativo hace que intenten mantenerse desalineados (modelo anti-ferromagnético). Para el signo del campo magnético funciona de la misma manera, si $B > 0$ entonces los espines tienden a estar alineados con el mismo y si $B < 0$ intentan desalinearse respecto a éste [35]. Una variación de este modelo permite tener un parámetro de interacción para cada espín, así como un campo magnético que varíe espacialmente en el Hamiltoniano. Por lo tanto el Hamiltoniano se convierte en

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i B_i \sigma_i \quad (2.11)$$

La función de partición del modelo es

$$Z = - \sum_{\langle i,j \rangle} e^{-H/kT} \quad (2.12)$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura del sistema. Al realizar esta suma se puede utilizar esta función de partición (2.12) para encontrar varias propiedades del sistema, como son la energía interna, la entropía, la energía libre, el calor específico, entre otras. La magnetización media $\langle M \rangle$ del modelo se puede obtener directamente de un promedio sobre los estados.

$$\langle M \rangle = \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle \quad (2.13)$$

En ocasiones, resulta de gran interés la magnetización media por espín $\langle m \rangle$, la cual es solamente

$$\langle m \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle \quad (2.14)$$

La ecuación (2.11) define un vidrio de espín o sistema heterogéneo o desordenado, en el sentido que los J ya no son homogéneos o constantes, sino que varían para cada espín. El modelo principal de vidrios de espín es el de Sherrington -Kirkpatrick que posee una estructura supremamente rica y compleja en el que para cada par de espines la correspondiente J se extrae al azar con una distribución gaussiana con una cierta varianza [13]. En el capítulo 3 se muestra un ejemplo concreto pero diferente de un sistema desordenado.

3. MODELAMIENTO Y CARACTERIZACIÓN DE REDES DELINCUENCIALES

3.1. Definición del Problema

El modelo aquí propuesto se basa en el modelo de Ballester *et al.* [4] que ha sido estudiado recientemente en [35]. Sin embargo aquí, en contraste con el modelo de Ballester *et al.*, las variables son binarias y por lo tanto se deben utilizar otro tipo de técnicas, mas cercanas a la matemática discreta, que están siendo desarrolladas activamente en la actualidad. La presentación del modelo será por lo tanto necesariamente similar a la de [35] aunque en el proceso se enfatizarán algunas diferencias.

Una red delincuencial g se define mediante un conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de individuos idénticos y un conjunto de vínculos entre ellos. Esta se puede describir asociando una variable binaria g_{ij} a cada par de individuos i y j en la red, tal que $g_{ij} = 1$ si y sólo si i y j interactúan, o se influyen, directamente, y $g_{ij} = 0$ de otro modo. La matriz G con componentes g_{ij} se conoce como la matriz de adyacencia de la red. Cada individuo i en la red tiene asociada una variable binaria x_i tal que $x_i = 1$ si el individuo delinque y $x_i = 0$ en caso contrario. Se denotará por $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ una asignación de estas variables binarias para toda la red. En analogía con Ballester *et al.* [4], la ganancia esperada para el individuo i , si éste delinque, está dada por la expresión

$$u_i(\mathbf{x}, g) = y_i(\mathbf{x}) - p_i(\mathbf{x}, g)f, \quad (3.1)$$

donde

$$y_i(\mathbf{x}) = x_i \max \left\{ 1 - \delta \sum_{j=1}^n x_j, 0 \right\}, \quad (3.2)$$

corresponde a la ganancia bruta del individuo i , que depende de si éste delinque o no, y del perfil estratégico de la población. Cuando resulte necesario distinguir entre la estrategia x_i del agente i y las estrategias x_{-i} de los demás agentes, se escribirá \mathbf{x} como x_i, x_{-i} . Por otra parte,

$$p_i(\mathbf{x}, g) = p_0 x_i \max \left\{ 1 - \varphi \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j, 0 \right\}, \quad (3.3)$$

se refiere a la ‘pérdida’ debido a la posibilidad de que el individuo i sea capturado y f a la intensidad de la sanción recibida (valor de la multa o tiempo de cárcel). Dicha ganancia o utilidad depende no sólo de la estrategia adoptada por el individuo en consideración, sino también del esfuerzo de todos los demás individuos y de la estructura de la red. Esto se debe a la competencia global por recursos limitados y a la colaboración local entre individuos. Aquí el parámetro p_0 está relacionado con probabilidad de que un individuo genérico sea capturado, el parámetro $\delta > 0$ corresponde a la intensidad de la competencia

global, el parámetro $\varphi \geq 0$ modela la intensidad de la colaboración y complementariedad local entre los individuos para evitar la aprehensión y el parámetro f es una medida de la intensidad de la sancionada. Al producto $p_0 f$ lo llamaremos π_0 , correspondiendo al parámetro que modela la intensidad de las sanciones impuestas.

3.2. Equilibrio de Nash

Ante el interrogante que presenta conocer las acciones que elegirán los jugadores en un juego de estrategia, asumimos que cada jugador elige la mejor acción disponible. En un juego, la mejor acción para cualquier jugador dado depende, por lo general, de las acciones de los otros jugadores. Así que a la hora de elegir una acción un jugador debe tener en cuenta las acciones que los otros jugadores eligieron. Es decir, se debe formar una creencia acerca de las acciones de los otros jugadores.

Esta afirmación toma como base el supuesto de que la creencia de cada jugador se deriva de su experiencia pasada en el juego, y que esta experiencia es suficientemente extensa como para saber cómo sus oponentes se comportarán. Nadie le dice cuáles son las acciones que sus oponentes van a elegir, pero su participación previa en el juego lo lleva a estar seguro de estas acciones.

Aunque se supone que cada jugador es experto en el juego, asumimos que ve a cada jugada de forma aislada. Él no se familiariza con el comportamiento de los oponentes específicos y por lo tanto no condiciona su acción sobre la de los oponentes a los que se enfrenta; ni es lo que espera que los otros jugadores hagan.

Se suponen las siguientes circunstancias. Para cada jugador hay en el juego una población de muchos tomadores de decisiones que pueden, en cualquier ocasión, tomar el papel de ese jugador. En cada jugada del juego, los jugadores son seleccionados al azar, uno de cada población. Por lo tanto cada jugador participa varias veces en el juego, siempre contra oponentes cambiantes. Su experiencia lo lleva a asumir posiciones acerca de las acciones de los oponentes típicos, no acerca de un conjunto específico de oponentes.

Como ejemplo de esto, pensemos en la interacción entre una aerolínea y sus pasajeros. Los pasajeros y la aerolínea interactúan repetidamente, pero en una primera aproximación muchas de las interacciones pueden ser modeladas como aleatorias. En muchos casos un pasajero compra un boleto solamente una vez con cualquier aerolínea dada, o compra en varias ocasiones, pero de forma anónima (cuando la aerolínea tiene muchas filiales, por ejemplo).

En resumen, la situación que nos ocupa tiene dos componentes. En primer lugar, cada jugador elige su acción de acuerdo con el modelo de elección racional, dada su creencia acerca de las acciones de los otros jugadores. En segundo lugar, la creencia que cada jugador tiene acerca de las acciones de los otros jugadores es la correcta. Estos dos componentes están incorporados en la siguiente definición.

Un equilibrio de Nash es un perfil de acción x^* con la propiedad de que ningún jugador i pueda elegir otra acción mejor, dado que todos los demás jugadores j eligieron x_j^* .

En el entorno idealizado en el que los jugadores en cualquier jugada del juego son elegidos aleatoriamente de un conjunto de jugadores, un equilibrio de Nash corresponde a un estado inmodificable. Si siempre que se juega el perfil de acción es el mismo equilibrio de Nash x^* , entonces ningún jugador tiene una razón para elegir una acción diferente a su componente en x^* ; no hay presión en el perfil de acciones para cambiar. Dicho de otra manera, un equilibrio de Nash encarna un estado de *norma social*: si todos los demás se adhieren a él, ningún individuo desea desviarse de él.

El segundo componente de la teoría del equilibrio de Nash que plantea que las creencias de los jugadores sobre las acciones de los demás son correctas implica que las creencias de dos jugadores acerca de la acción de un tercer jugador son las mismas. Por esta condición, se dice que las expectativas de los jugadores son coordinadas.

La teoría del equilibrio de Nash no se puede aplicar a todas las situaciones en forma general, sino a configuraciones idealizadas como la descrita anteriormente. Por ejemplo, en algunos casos, los jugadores no tienen mucha experiencia con el juego; en otros, no se ve cada jugada de forma aislada. Sea o no, el que el concepto de equilibrio de Nash sea apropiado en una situación dada es una cuestión de criterio. En algunos casos, un mal ajuste con la configuración idealizada puede ser mitigado por otras consideraciones. Por ejemplo, los jugadores inexpertos pueden ser capaces de sacar conclusiones sobre posibles acciones de sus oponentes, de su experiencia en otras situaciones, o de otras fuentes.

Con la ayuda de esta notación, podemos precisar la definición de equilibrio de Nash. Sea x un perfil de acción, en el que la acción de cada jugador i es x_i y sea x'_i , cualquier otra acción del jugador i (ya sea igual, o diferente a x_i), entonces (x'_i, x_{-i}) denota el perfil de acción en el que todo los jugador j , excepto i escoge su acción x_j según lo especificado por x , mientras que el jugador i elige x'_i (el subíndice $-i$ en x significa, excepto i). Es decir, (x'_i, x_{-i}) es el perfil de acción en el que todos los jugadores, excepto i se deciden por x mientras que i se inclina por x'_i (si $x'_i = x_i$ se sigue que $(x'_i, x_{-i}) = (x_i, x_{-i}) = x$). Si por ejemplo, hay tres jugadores entonces (x'_2, x_{-2}) es el perfil de acción en el que los jugadores 1 y 3 se adhieren a x (el jugador 1 elige x_1 , el jugador 3 elige x_3) y el jugador 2 se inclina por x'_2 .

Usando esta notación, podemos replantear la condición para que un perfil de acción x^* sea un equilibrio de Nash: ningún jugador i tiene una acción x_i con la cual prefiera a (x_i, x_{-i}^*) sobre x^* . De manera equivalente, para cada jugador i y cada acción x_i que asuma, el perfil de acción x^* es al menos tan bueno para el jugador i como el perfil de acción (x_i, x_{-i}^*) .

Según la hipótesis de racionalidad de la Teoría de Juegos, los individuos de esta investigación escogen la estrategia x_i (delinquir o no) que maximice su utilidad $u_i(\mathbf{x})$, dados las estrategias escogidas por los demás individuos $\mathbf{x}_{-i} = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$. Así pues, todos los individuos estarán satisfechos en la configuración $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ si

$$u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^*) = \max_{x_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^*). \quad (3.4)$$

En este caso, dicha configuración es un *equilibrio de Nash puro*. El término *puro* se refiere a que se están considerando las estrategias delinquir o no, en contraste con estra-

tegiyas *mixtas* que consisten en delinquir o no con una cierta probabilidad. Si bien está garantizado que un equilibrio de Nash mixto siempre existe, no se puede decir lo mismo de un equilibrio de Nash puro. Por otra parte, los equilibrios de Nash no son necesariamente únicos. Por esta razón una de las cantidades a estudiar será el número de equilibrios de Nash puros como función de los parámetros del modelo.

3.2.1. Equilibrio de Nash y satisfacción de restricciones

Una configuración \mathbf{x}^* es un equilibrio de Nash si se satisfacen las n restricciones dadas por la expresión (3.4). Este tipo de sistemas se conocen como problemas de satisfacción de restricciones y son de gran relevancia práctica. Introduciendo la función indicador $\mathbb{I}[p]$, la cual es igual a 1 si la proposición p es verdadera e igual a 0 si p es falsa, la condición de Nash se puede escribir como

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{I} \left[u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}^*) = \max_{x_i} u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^*) \right] = 1, \quad (3.5)$$

la cual expresa que todos los jugadores se decantan por la jugada que les da la máxima ganancia, dado que los demás lo hacen.

Las propiedades típicas del sistema pueden calcularse a partir de la probabilidad de que una configuración escogida al azar sea un equilibrio de Nash

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^n \mathbb{I} \left[u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i^*} u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}) \right], \quad (3.6)$$

donde la constante de normalización

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} \prod_{i=1}^n \mathbb{I} \left[u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i^*} u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}) \right], \quad (3.7)$$

es el número de equilibrios de Nash en el sistema.

3.3. Relación con la Física Estadística

3.3.1. Construcción de un sistema físico equivalente

Esta formulación de la condición de Nash guarda una estrecha relación con la Física Estadística, y esta simple observación ha abierto toda un área de investigación sobre la aplicación de los métodos matemáticos y computacionales de ésta a un gran número de aplicaciones en diversas disciplinas [36, 37]. Esto ha motivado la formalización matemática de algunos potentes métodos heurísticos desarrollados en el estudio de la física estadística, tales como el celebrado método de la cavidad [38-41]. En particular, la aplicación del método de la cavidad a la búsqueda de equilibrios de Nash en juegos sobre redes fue explorado por uno de los autores [7], y es el método que ha sido empleado en esta investigación. Por esta razón vale la pena tener una idea más clara de dicha conexión con la física estadística.

La idea es simple: a cada configuración se le asocia una función de energía apropiada de manera que las configuraciones de interés, en este caso los equilibrios de Nash, correspondan a las configuraciones de mínima energía [7, 42]. Así pues dicha función de energía puede definirse en este caso como

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n E_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}), \quad (3.8)$$

donde

$$E_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i^*} [u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}) - u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i})] \geq 0. \quad (3.9)$$

en consecuencia, $E(\mathbf{x}) = 0$ si y sólo si \mathbf{x} es un equilibrio de Nash, y éste corresponde al valor mínimo.

Una vez que el espacio de configuraciones y la función de energía son fijados, la probabilidad $P_\beta(\mathbf{x})$ para que el sistema se encuentre en la configuración \mathbf{x} está dada por la distribución de Boltzmann [37]

$$P_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_B(\beta)} e^{-\beta E(\mathbf{x})}, \quad (3.10)$$

donde β es un parámetro que en aplicaciones a la física corresponde al inverso de la temperatura, excepto por una constante, y la constante de normalización

$$Z_B(\beta) = \sum_{\mathbf{x}} e^{-\beta E(\mathbf{x})}, \quad (3.11)$$

se conoce como función de partición. Las propiedades estadísticas del sistema se pueden estudiar mediante el análisis de dicha función de partición [14], la cual juega un rol de función generante [43].

Finalmente, si se nota que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ se tiene

$$e^{-\beta E(\mathbf{x})} = \begin{cases} 0, & \text{si } E > 0, \\ 1, & \text{si } E = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

y que la condición $E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n E_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = 0$ corresponde a la condición de Nash, se puede concluir que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta E(\mathbf{x})} = \prod_{i=1}^n \mathbb{I} \left[u_i(x_i, x_{-i}) = \max_{x_i^*} u_i(x_i^*, x_{-i}) \right], \quad (3.13)$$

y que la constante de normalización $\lim_{\beta \rightarrow \infty} Z_B(\beta) = Z$ coincide con el número de equilibrios de Nash (3.7).

Entonces la configuración \mathbf{x} es un equilibrio de Nash si para todo i

$$u_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}) = \max_{x_i^*} u_i(x_i^*, \mathbf{x}_{-i}) \quad (3.14)$$

Si bien esto puede parecer una trivialidad, y el parámetro β absolutamente innecesario, esta analogía entre la física estadística y los problemas matemáticos de origen combinatorio ha dado lugar al algoritmo de recocido simulado, uno de los más utilizados desde su inepción [36]. En éste el parámetro β juega un rol fundamental.

3.3.2. Estrategia binaria

Para nuestra investigación consideramos que en cada vértice hay un delincuente que tiene sólo dos posibles estrategias, delinquir o no, y que tiene asociada una función de pagos. Por ello se afirma que $x_i \in \{1, 0\}$, donde para cada i , $x_i = 0$ si el delincuente i no delinque, y $x_i = 1$ si el delincuente i delinque y la ganancia bruta del delincuente i , esto es, $y_i(x_i, x_{-i}) \in [0, 1]$. Un vínculo entre un par de vértices indica que los delincuentes correspondientes tienen una influencia mutua en sus decisiones.

Podemos notar por (3.1) y (3.13) que si $x_i = 0$ se tiene que $u_i(0, x_{-i}) = y_i(0, x_{-i}) - p_i(0, x_{-i})f = 0$, esto es, no delinquir no da ganancias. Por otro lado, para decidir si delinque o no, el delincuente calcula la ganancia esperada si delinque, es decir, calcula $u_i(1, x_{-i})$. Si $x_i = 1$ se tiene que: si $u_i(1, x_{-i}) > 0$ i delinque, si $u_i(1, x_{-i}) < 0$ i no delinque y si $u_i(1, x_{-i}) = 0$ a i le es indiferente delinquir o no.

Podemos decir entonces que

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} \prod_{j=1}^n \mathbb{I}[\text{máx}\{0, u_j(1, \mathbf{x}_{-j})\} = u_j(x_j, x_{-j})] \quad (3.15)$$

Es fácil notar que

$$(2x_i - 1)u_i(1, x_{-i}) \geq 0 \quad (3.16)$$

se cumple en el equilibrio de Nash y para demostrarlo miraremos los dos únicos casos posibles.

Si $x_i = 1$, se cumple que $\text{máx}\{0, u_i(1, x_{-i})\} = u_i(1, x_{-i})$. Entonces $u_i(1, x_{-i}) \geq 0$, con lo que se tiene la validez de la expresión

$$\begin{aligned} (2x_i - 1)u_i(1, x_{-i}) &= (2 - 1)u_i(1, x_{-i}) \\ &= u_i(1, x_{-i}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

También tenemos que si $x_i = 0$, se cumple que $\text{máx}\{0, u_i(0, x_{-i})\} = u_i(0, x_{-i}) = 0$. Luego $u_i(1, x_{-i}) \geq 0$ y $-u_i(1, x_{-i}) \geq 0$, entonces, si no delinquir es porque el valor esperado de delinquir es negativo, con lo que también es válida la expresión

$$\begin{aligned} (2x_i - 1)u_i(1, x_{-i}) &= (0 - 1)u_i(1, x_{-i}) \\ &= -u_i(1, x_{-i}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Estos últimos resultados y la ecuación (3.15), permiten deducir que el número de equilibrios de Nash, cuando $x_i \in \{0, 1\}$, está dado por

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} \prod_{i=1}^n \mathbb{I}[(2x_i - 1)u_i(1, x_{-i}) \geq 0] \quad (3.19)$$

Así, si i delinque es porque delinquir es su jugada de equilibrio de Nash. En caso contrario es porque no delinquir es su jugada de equilibrio. En ambos casos se cumple que $(2x_i - 1)u_i(1, x_{-i}) \geq 0$.

Conocido el comportamiento de la red ideamos una estrategia que produzca la máxima reducción posible en el nivel agregado de actividad delincuencial. Esta estrategia consiste en variar los parámetros δ , π_0 y φ en la función de utilidad.

En caso en que no exista el equilibrio buscado podemos interesarnos en soluciones aproximadas que satisfagan las condiciones Nash dentro de algunos errores tolerados [35].

En la última década otro método inspirado en la física estadística que ha dado lugar a algoritmos más potentes que el de recocido simulado [42] y que ha atraído gran interés por parte de los matemáticos [38-41] es precisamente el método de la cavidad que se discutirá a continuación [44-46].

3.3.3. Método de la cavidad

El problema de caracterizar los equilibrios de Nash del sistema está estrechamente relacionado con el cálculo de la función de partición Z . Uno de los métodos más efectivos para tratar con este tipo de problemas es el llamado método de la cavidad. Este método se puede interpretar como un algoritmo de paso de mensajes, donde cada nodo en la red recoge información de sus nodos vecinos, realiza un cálculo con ésta, y reenvía la información actualizada de nuevo a cada uno sus vecinos [37, 47]. De una manera más general, el problema consiste en calcular una suma de la forma

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}} \prod_{a=1}^M \Psi_a(\mathbf{x}_a), \quad (3.20)$$

donde la función que se está sumando se puede escribir como un producto de M factores $\Psi(\mathbf{x}) = \prod_{a=1}^M \Psi_a(\mathbf{x}_a)$, donde cada factor Ψ_a sólo depende de un subconjunto de variables denotado como \mathbf{x}_a . En el caso de las redes delinuenciales aquí estudiadas, hay un factor Ψ_i por cada variable i y está dado por la función indicador que verifica la condición de Nash para el individuo i , y la función Ψ es el producto de los n factores, como puede observarse en la ecuación (3.7), e decir, Es decir, los Ψ_i son los valores de la función indicador. El método de la cavidad explota la estructura de dicha factorización. Más específicamente, la función Ψ se puede representar como un grafo bipartito donde a cada factor Ψ_a se le asocia un tipo de nodo (representados, por ejemplo, por cuadrados) y a cada variable x_i se le asocia otro tipo de nodo (representados, por ejemplo, por círculos). En este grafo bipartito un vínculo entre factor Ψ_a y una variable x_i indica que este factor depende de dicha variable. No existen vínculos ni entre factores ni entre variables, lo que le da su carácter de bipartito (ver figura 3.1). Dicho grafo usualmente se denomina *grafo de factores* [47].

Ahora bien, el método de la cavidad parte de la hipótesis de que el grafo de factores tiene la topología de un árbol, es decir que no poseen ciclos, o mejor, que no es posible partir de algún nodo en el grafo, caminar por éste a través de los vínculos, y llegar de nuevo al punto de partida sin nunca haber repetido un vínculo. En el caso de la figura 3.1, al retirar un nodo factor del grafo y los vínculos correspondientes, éste se descompone en tres subgrafos completamente independientes y nuevamente con la topología de un árbol. Esta propiedad de independencia se debe precisamente a la topología de árbol del grafo original, y como puede verse los subgrafos obtenidos heredan dicha estructura. Esto

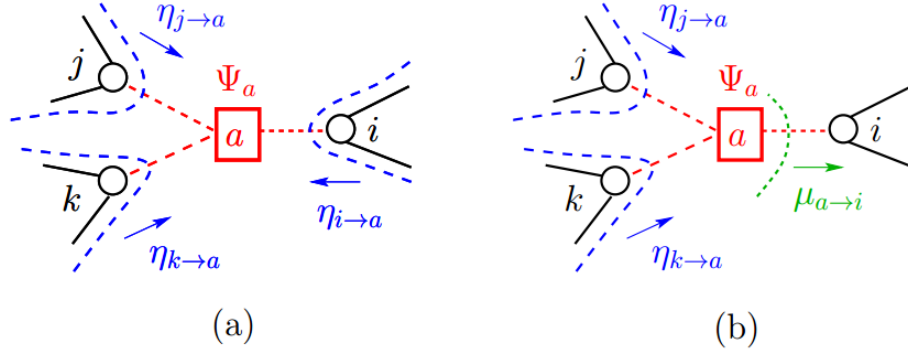


Fig. 3.1: Operaciones básicas que permiten definir el método de la cavidad sobre grafos con topología de árbol. a) Si se retira un factor el grafo se descompone en tres sub-grafos completamente independientes. b) Cada sub-grafo hereda la topología de árbol y por lo tanto se puede aplicar recursivamente la misma idea.

permite aplicar la misma idea de manera recursiva para obtener una solución del problema de manera eficiente. Más específicamente, la función de partición puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{\mathbf{x}} \prod_a \Psi_a(\mathbf{x}_a) \\
 &= \sum_{\mathbf{x}_a} \Psi_a(\mathbf{x}_a) \left[\sum_{\mathbf{x}_{-a}} \prod_{(b \in \partial a)} \Psi_b(\mathbf{x}_b) \right] \\
 &= \sum_{\mathbf{x}_a} \Psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{b \in \partial a} Z_{i \rightarrow a}(x_i),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde se han introducido las funciones de partición parciales $Z_{i \rightarrow a}(x_i)$ las cuales corresponden a la suma sobre toda la rama del árbol que contiene al nodo de la variable i pero no al nodo del factor a [37]. Podría escribirse $Z_{i \rightarrow a} = \sum_{\mathbf{x}'} \prod_c \Psi_c(x_c)$, donde x' , y c se refieren respectivamente a todas las variables y factores que están en la rama del árbol que contiene a la variable i y que no contiene el factor a . Cabe aclarar que x' excluye a la variable x_i . Esto puede verse en la figura 3.1a en donde se ha escrito $\eta_{i \rightarrow a}(x_i) = Z_{i \rightarrow a}(x_i)/Z_{i \rightarrow a}$, con $Z_{i \rightarrow a} = \sum_{x_i} Z_{i \rightarrow a}(x_i)$ de modo que $\sum_{x_i} \eta_{i \rightarrow a}(x_i) = 1$. Repitiendo el mismo análisis para cada una de los subgrafos se puede obtener un conjunto de ecuaciones recursivas que pueden escribirse como

$$\mu_{a \rightarrow i}(x_i) = \frac{1}{\zeta_{a \rightarrow i}} \sum_{\mathbf{x}_{a \setminus i}} \Psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in a \setminus i} \eta_{j \rightarrow a}, \tag{3.22}$$

$$\eta_{i \rightarrow a}(x_i) = \frac{1}{\zeta_{i \rightarrow a}} \prod_{b \in \partial i} \mu_{b \rightarrow i}(x_i), \tag{3.23}$$

donde $\mu_{a \rightarrow i}(x_i)$ se refiere a la función de partición parcial de la rama que contiene el factor a pero no contiene el nodo i , normalizada de manera que $\sum_{x_i} \mu_{a \rightarrow i} = 1$. Las constantes $\zeta_{a \rightarrow i}$ y $\zeta_{i \rightarrow a}$ se escogen de manera que garanticen la normalización de los mensajes $\mu_{a \rightarrow i}$ y $\eta_{i \rightarrow a}$ para todo vínculo (i, a) [37] (capítulo 14, sección 14.2, página 296) y [8, 47]. η es un término auxiliar que se introduce por conveniencia para escribir las ecuaciones en un modo más claro. En realidad las ecuaciones de la cavidad se pueden escribir exclusivamente

en términos de μ , (basta introducir la ecuación (3.23) en la ecuación (3.22). Una posible interpretación es que η recoge toda la información que le llega al nodo i a través de todas las ramas conectadas a i , excepto la que contiene a a . Y luego pasa esa información a a .

El conjunto de ecuaciones (3.22) y (3.23) puede resolverse inicializando los mensajes con valores positivos al azar y luego iterando dichas ecuaciones hasta converger a un punto fijo. En el caso de que el grafo de factores tenga la topología de un árbol, este método converge a un único punto fijo en un número de iteraciones dado por el diámetro del árbol, es decir la mayor distancia, o número de vínculos, que existe entre cualquier par de nodos en el grafo [37].

Una vez se solucionan estas ecuaciones se pueden obtener los marginales asociados a una variable o a un factor así

$$p_i(x_i) = \frac{1}{\zeta_i} \prod_{b \in \partial i} \mu_{b \rightarrow i}(x_i), \quad (3.24)$$

$$P_a(\mathbf{x}_a) = \frac{1}{\zeta_a} \Psi_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j \in a} \eta_{j \rightarrow a}(x_j), \quad (3.25)$$

donde las constantes ζ_i y ζ_a garantizan la correcta normalización de dichas distribuciones de probabilidad. Este resultado puede asimilarse de manera intuitiva observando que los marginales simplemente recogen toda la información que llega al nodo en consideración, con el detalle adicional que en el caso de un nodo factor a se debe adicionar el factor mismo Ψ_a ya que éste no ha sido tenido en cuenta por los mensajes que llegan a dicho factor.

A partir de estos marginales se pueden calcular cantidades de interés como el número promedio de individuos que delinquen y la *entropía*

$$\langle x \rangle = \sum_i \sum_{x_i} x_i p_i(x_i), \quad (3.26)$$

$$S = - \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \log P(\mathbf{x}) = - \sum_a \sum_{\mathbf{x}_a} P_a(\mathbf{x}_a) \log P_a(\mathbf{x}_a) + \sum_i (d_i - 1) \sum_{x_i} p_i(x_i) \log p_i(x_i). \quad (3.27)$$

Aquí se explota el hecho de que cualquier distribución de probabilidad que se pueda representar con un grafo de factores con la topología de un árbol puede escribirse de la forma [36]

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\prod_a P_a(\mathbf{x}_a)}{\prod_i [p_i(x_i)]^{d_i-1}}. \quad (3.28)$$

La entropía es un concepto de gran relevancia introducido originalmente en el área de la física estadística y la termodinámica, y luego re-introducido por Shannon en la entonces naciente teoría de la información [48]. La entropía puede concebirse como una medida del número de configuraciones típicas relevantes que contiene una distribución dada [37]. Un resultado de la física estadística es que en el límite $\beta \rightarrow \infty$ la entropía coincide con el logaritmo de la función de partición tal como se definió anteriormente. Así pues, la entropía de una red delincencial, de acuerdo al modelo aquí estudiado, corresponde

al logaritmo del número de equilibrios de Nash. La función logaritmo aparece porque el número de configuraciones de interés, en este caso de equilibrios de Nash, usualmente crece de manera exponencial con el número de variables (nodos o individuos) en el sistema.

Aunque el método de la cavidad se define con referencia a un árbol, parte del gran interés que ha despertado se debe a que su aplicación a grafos más generales con ciclos funciona sorprendentemente bien. La intuición detrás del éxito del método de la cavidad es que si los ciclos en un grafo dado son lo suficientemente largos y si las correlaciones entre pares de variables en éste decaen lo suficientemente rápido con la distancia, o número de vínculos entre las variables, entonces las ecuaciones de la cavidad ‘ven’ efectivamente un árbol. En otras palabras, en la práctica los mensajes ‘convergen’, en un sentido aproximado, en un número de iteraciones relativamente corto y la variabilidad en éstos después de dicho punto puede ignorarse. Así pues, el método de la cavidad tal y como se ha presentado puede aplicarse también a grafos con ciclos, si bien en este caso ya no habrá garantías de convergencia ni de precisión en los resultados. En este sentido debe entenderse como un método heurístico que en la práctica usualmente funciona bastante bien.

3.3.4. Método de la cavidad para redes delinCUENCIALES

Antes de poder aplicar el método de la cavidad al problema de redes delinCUENCIALES se debe tener en cuenta un par de detalles adicionales que se describirán a continuación.

Por una parte, en la figura 3.2a se muestra el grafo de factores que corresponde al problema de satisfacción de restricciones asociado a la condición de equilibrio de Nash para una red delinCUENCIALES con la topología de un árbol. Como se puede observar dicho grafo de factores no hereda la misma topología de árbol debido a la existencia de ciclos pequeños de cuatro vínculos que unen cualquier par de variables. Este problema se puede resolver si se agrupan pares de variables de nodos vecinos en nuevas variables, como se muestra en la figura 3.2b. En este caso la topología del grafo de factores equivalente es la de un árbol, al costo de que ahora los mensajes en consideración dependerán de dos variables, y no de una como era el caso descrito anteriormente [7].

Por otra parte, como se puede observar en la figura (2.13) la función de utilidad de cada individuo depende de las estrategias de *todos* los individuos en la red a través de la suma $\sum_{i=1}^n x_i$. Esto implica que cada factor en el grafo de factores asociado dependerá a su vez de todas las variables del problema. Por lo tanto, incluso si se considera una red delinCUENCIALES con la topología de un árbol y se agrupan las variables por pares como se describió anteriormente, el grafo de factores asociado no heredará aún la topología de árbol de la red delinCUENCIALES. Sin embargo, esto se puede resolver de una manera aproximada aprovechando el hecho de que dicha dependencia no es arbitraria sino que cada factor depende de todas las variables a través de una cantidad agregada, es decir la suma de todas las variables. En este caso se puede asumir que se conoce el valor de dicha suma $c = \sum_{i=1}^n x_i$. Condicionado al valor de dicha suma el grafo de factores hereda la topología de árbol [14]. La aproximación aparece en el modo de escoger c . El modo mas elemental de hacerlo es reemplazando en (3.2)

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \approx \frac{x_i + \sum_{j \in \partial i} x_j}{|\partial i| + 1}. \quad (3.29)$$

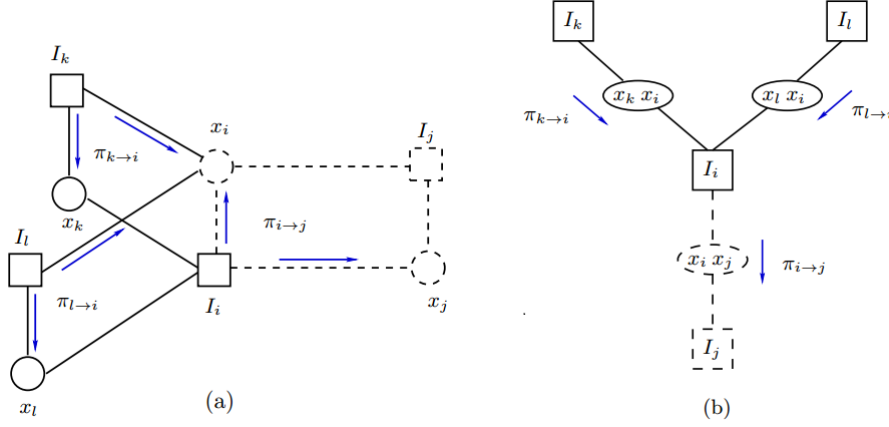


Fig. 3.2: Grafo de factores asociado a una juego sobre redes, como lo es el modelo de redes delinCUenciales aquí estudiado. a) A cada individuo se asocia una variable (círculo) que corresponde a su estrategia, y un factor (cuadrado) que verifica que se cumpla la condición de Nash respectiva; se puede notar que aunque la red delinCUencial tenga la topología de un árbol, el grafo de factores asociado al problema de restricciones que da lugar al equilibrio de Nash no lo es, pues tiene ciclos cortos de cuatro vínculos entre nodos vecinos. b) Si bien el grafo original no tiene la topología de un árbol, agrupando las variables por pares se puede construir un grafo equivalente con la topología de árbol sobre el cual el método de la cavidad es exacto. En este caso los mensajes dependerán de las dos variables agrupadas, y no de una sola, por lo que se han denotado como $\pi_{i \rightarrow j}$ [14].

Otra posibilidad sería escoger de manera auto-consistente el valor de c por su promedio $\langle x \rangle$ calculado con los mensajes en cada iteración. Este último método, implementado originalmente en [7], no dio buenos resultados y por eso esta investigación se concentró en el método descrito por la ecuación (3.29), dejando para futuros estudios la exploración de otros métodos más precisos.

3.3.5. Análisis de la Función de Utilidad

Si en las ecuaciones (3.2) y (3.3) hacemos $m_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j$ y nos aproximamos el caso global haciendo $\sum_{j=1}^n x_j = \frac{n(m_i + 1)}{k_i + 1}$, siendo k_i el número de vecinos de i , resulta

$$\begin{aligned} u_i(1, m_i) &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\delta(m_i + 1)}{k_i + 1} \right\} - \pi_0 \max \{0, 1 - \varphi m_i\} \\ &= \max \left\{ 0, 1 - \frac{\delta}{k_i + 1} - \frac{\delta(m - i)}{k_i + 1} \right\} - \pi_0 \max \{0, 1 - \varphi m_i\} \end{aligned}$$

tomando $\alpha_i = 1 - \frac{\delta}{k_i + 1} = \frac{k_i + 1 - \delta}{k_i + 1}$, entonces $\alpha_i < 1$ dado que $\frac{\delta}{k_i + 1} > 0$, con lo que la ecuación (3.1) toma la forma

$$\begin{aligned} u_i(1, m_i) = \max \left\{ 0, \alpha_i \left[1 - \frac{\delta}{\alpha_i(k_i + 1)} m_i \right] \right\} \\ - \pi_0 \max \{0, 1 - \varphi m_i\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para la ecuación (3.30), si $k_i + 1 < \delta$, entonces $\frac{\delta}{k_i + 1} > 1$, así, $\alpha_i < 0$ y

$$\text{máx} \left\{ 0, \alpha_i \left[1 - \frac{\delta}{\alpha_i(k_i + 1)} m_i \right] \right\} = 0, \text{ con lo que } u_i(1, m_i) = -\pi_0 \text{ máx} \{0, 1 - \varphi m_i\},$$

entonces

$$u_i(1, m_i) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_i > \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i \text{ no delinque} \\ = 0, & \text{si } m_i \geq \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i \text{ es indiferente} \end{cases} \quad (3.31)$$

Este primer resultado se muestra en la figura 3.3

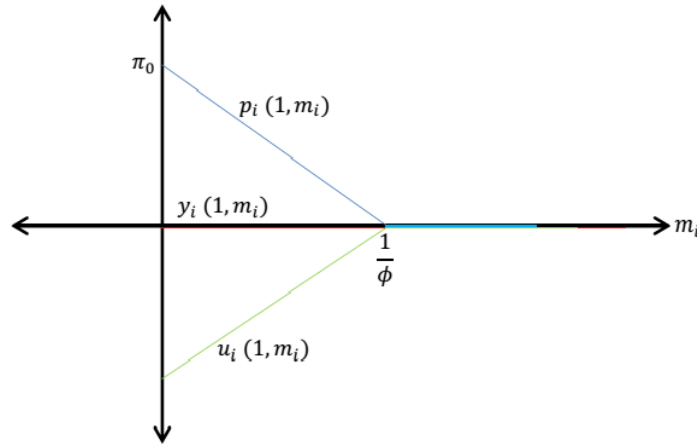


Fig. 3.3: Comportamiento de la función de utilidad cuando $\alpha_i < 0$

Ahora, si $k_i + 1 > n\delta$ entonces $\frac{\delta}{k_i + 1} < 1$, así, $\alpha_i > 0$, con lo que la ecuación (3.30) puede ser escrita de la forma

$$u_i(1, m_i) = \alpha_i \text{ máx} \left\{ 0, \left[1 - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} m_i \right] \right\} - \pi_0 \text{ máx} \{0, 1 - \varphi m_i\} \quad (3.32)$$

Consideramos cada uno de los casos posibles que describen los comportamientos de los delincuentes dadas algunas especificaciones en los parámetros del modelo:

1. Si $\pi_0 \geq 1$ y $\varphi < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$, es decir, $\pi_0 \geq 1$ y $k_i + 1 > \delta'(\varphi + 1)$, tenemos

$$u_i(1, m_i) = \begin{cases} < 0, & \text{si } m_i < \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i \text{ no delinque} \\ = 0, & \text{si } m_i \geq \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i \text{ es indiferente} \end{cases} \quad (3.33)$$

Como se ve en la figura 3.4

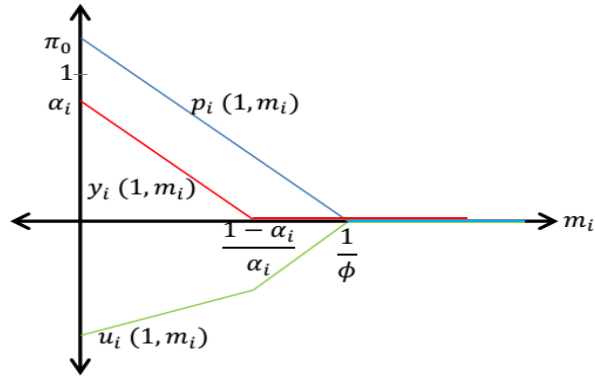


Fig. 3.4: Comportamiento de la función de utilidad cuando $\alpha_i < 1 < \pi_0$

2. Si $\pi_0 \geq 1$ y $\varphi > \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$, es decir, $\pi_0 \geq 1$ y $k_i + 1 < \delta(\varphi + 1)$, tenemos

$$u_i(1, m_i) \begin{cases} < 0, & \text{si } m_i < m^* \Rightarrow i & \text{no delinque} \\ > 0, & \text{si } m^* < m_i < \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \Rightarrow i & \text{delinque} \\ = 0, & \text{si } m_i \geq \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \Rightarrow i & \text{es indiferente} \end{cases} \quad (3.34)$$

Tal Como lo muestra la figura 3.4

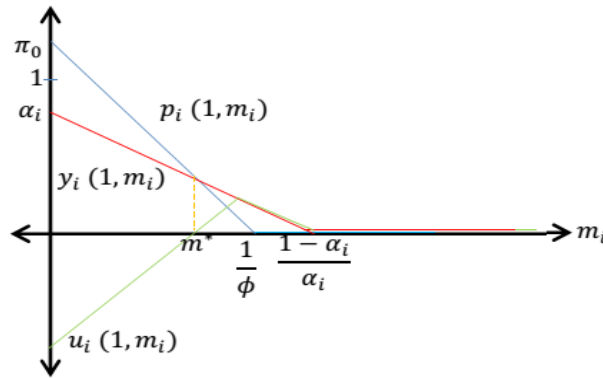


Fig. 3.5: Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 \geq 1$ y $k_i + 1 < \delta(\varphi + 1)$

Puede verse que cuando $m_i = m^*$ se cumple que $\alpha_i(1 - \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i})m^* = \pi_0(1 - \varphi m^*)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \alpha_i - (1 - \alpha_i)m^* &= \pi_0 - \pi_0\varphi m^* \\
 (\pi_0\varphi + \alpha_i - 1)m^* &= \pi_0 - \alpha_i \\
 m^* &= \frac{\pi_0 - \alpha_i}{\pi_0\varphi + \alpha_i - 1} \\
 m^* &= \frac{\pi_0(k_i + 1) - (k_i + 1) + \delta}{\pi_0\varphi + \alpha_i - 1} \\
 m^* &= \frac{(\pi_0 - 1)(k_i + 1) + \delta}{\pi_0\varphi(k_i + 1) + \delta}
 \end{aligned}$$

luego

$$0 < m^* < \frac{\pi_0(k_i + 1)}{\pi_0\varphi(k_i + 1)} < \frac{\pi_0}{\pi_0\varphi - 1} < \frac{1}{\varphi}$$

entonces

$$0 < \frac{(\pi_0 - 1)(k_i + 1) + \delta}{\pi_0\varphi(k_i + 1) - \delta} < \frac{1}{\varphi}$$

resulta luego que $0 < (\pi_0 - 1)(k_i + 1) + \delta < \pi_0(k_i + 1) - \frac{\delta}{\varphi}$ y $\pi_0(k_i + 1) > \delta$, entonces $k_i + 1 > \frac{\delta(\varphi + 1)}{\varphi}$ y $k_i + 1 > \frac{\delta}{\pi_0\varphi}$, ya que $\pi_0 \geq 1$, con lo que se obtiene

$$k_i + 1 > \frac{\delta}{\varphi} \max\left(\varphi + 1, \frac{1}{\pi_0}\right)$$

Concluimos pues que la ecuación (3.34) es válida si $\pi_0 \geq 1$ y $k_i > \frac{\delta(\varphi + 1)}{\varphi} - 1$

3. Si $\pi_0 < \alpha_i$ y $\varphi > \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i}$, entonces $\pi_0 < \frac{k_i + 1 - \delta}{k_i + 1}$ y $\varphi > \frac{\delta}{k_i + 1 - \delta}$, así $k_i + 1 > \frac{\delta}{1 - \varphi}$ y $k_i + 1 > \frac{\delta(1 + \varphi)}{\varphi}$.

Por lo tanto,

$$k_i + 1 > \delta \max\left\{\frac{\varphi + 1}{\varphi}, \frac{1}{1 - \pi_0}\right\} - 1$$

luego

$$u_i(1, m_i) \begin{cases} > 0, & \text{si } m_i < \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \Rightarrow i \text{ delinque} \\ = 0, & \text{si } m_i \geq \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \Rightarrow i \text{ es indiferente} \end{cases} \quad (3.35)$$

Este resultado se muestra en la figura 3.6

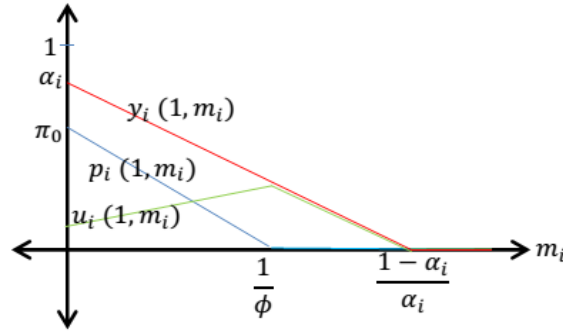


Fig. 3.6: Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 < 1$ y $\alpha_i < 1$

4 Si $\pi_0 < \alpha_i$ y $\varphi < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$, análogamente al caso anterior se tiene que $k_i + 1 > \frac{\delta}{1 - \pi_0}$ y $k_i + 1 < \frac{\delta(1 + \varphi)}{\varphi}$. Por lo tanto, si

$$\frac{\delta}{1 - \pi_0} - 1 < k_i < \frac{\delta(\varphi + 1)}{\varphi} - 1 \text{ concluimos}$$

$$u_i(1, m_i) \begin{cases} > 0, & \text{si } m_i < m^* \Rightarrow i & \text{delinque} \\ < 0, & \text{si } m^* < m_i < \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i & \text{no delinque} \\ = 0, & \text{si } m_i \geq \frac{1}{\varphi} \Rightarrow i & \text{es indiferente} \end{cases} \quad (3.36)$$

tal como lo muestra la figura 3.7

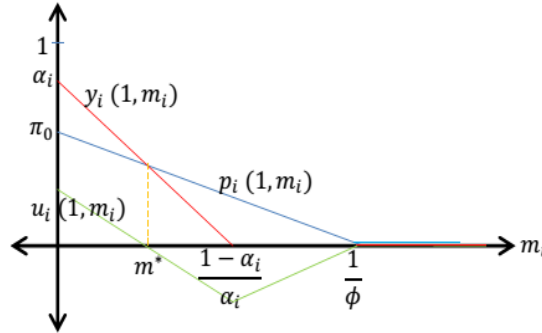


Fig. 3.7: Comportamiento de la función de utilidad cuando $\pi_0 < \alpha_i$ y $\varphi < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$

Para una variación del parámetro φ , debe tenerse en cuenta que $\varphi_0 < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} < \varphi_f$ esto es,

$$\varphi_0 < \frac{k_i + 1 - \delta}{\delta} < \varphi_f \quad (3.37)$$

Si aproximamos k_i a C (conectividad promedio), lo apropiado sería que:

$$\varphi_0 < \frac{C+1-\delta}{\delta} < \varphi_f \quad (3.38)$$

Para una variación del parámetro δ , debe tenerse en cuenta que $\frac{C+1-\delta_0}{\delta_0} < \varphi < \frac{C+1-\delta_f}{\delta_f}$, entonces $\frac{C+1-\delta}{\delta} \approx \varphi$, por lo que $\varphi\delta + \delta \approx C+1$ y en consecuencia, $\delta \approx \frac{C+1}{\varphi+1}$. luego, lo apropiado sería que:

$$\delta_0 < \frac{C+1}{\varphi+1} < \delta_f \quad (3.39)$$

Por último, $\alpha_i = \frac{k_i+1-\delta}{k_i+1} \approx \frac{C+1-\delta}{C+1} \approx \pi_0$. Así, lo apropiado sería que:

$$[\pi_0]_i < \frac{C+1-\delta}{C+1} < [\pi_0]_f \quad (3.40)$$

4. RESULTADOS

Los resultados que a continuación se presentan fueron obtenidos mediante la solución iterativa de las ecuaciones de la cavidad para redes delincuenciales, descritas anteriormente, con el fin de caracterizar las propiedades de los equilibrios de Nash puros en éstas (en la sección ANEXOS se muestra el algoritmo que permitió realizar una de estas iteraciones, específicamente aquella en la que se pone a variar el parámetro δ). El estudio se concentró en dos propiedades de interés, a saber: el número promedio de individuos que delinquen en la red (3.26), o criminalidad promedio, y la entropía de equilibrios de Nash puros (3.27) que corresponde al logaritmo del número de éstos. En particular, se estudió cómo varían dichas propiedades con los parámetros del modelo.

Si bien hay evidencias de que las redes oscuras, como las redes delincuenciales tienen la topología de una red libre de escala [34], con el objeto de facilitar este primer análisis asumimos que la topología de las redes delincuenciales en consideración corresponde a la de un grafo aleatorio o Erdős-Rényi, dejando para futuros trabajos su extensión a situaciones más realistas. Este tipo de grafos se genera primero seleccionando un conjunto de N nodos y luego uniendo pares de nodos al azar hasta completar M vínculos. La conectividad promedio de estos grafos, es decir el número de vínculos que en promedio tiene un nodo escogido al azar es simplemente $C = 2M/N$. Así pues, se generaron grafos con N nodos y M vínculos y se resolvieron las ecuaciones de la cavidad correspondientes con el fin de estimar el nivel de criminalidad promedio (3.26) y el logaritmo del número de equilibrios de Nash (3.27), o entropía, para diversos valores de los parámetros. En todos los casos se escogió $N = 100$ y $M = 250$, y por lo tanto $C = 5$.

En general se observó que los resultados muestran una gran granularidad, probablemente debido a la presencia de las funciones máximo en la función de utilidad y al carácter discreto de las variables involucradas. Este es un punto importante que se debe estudiar en futuras investigaciones.

Las figuras 4.1 y 4.2 muestran resultados obtenidos cuando el parámetro *Intensidad de las Sanciones Impuestas* $\pi_0 = 0.5$, el parámetro *Colaboración Local entre Delincuentes* $\varphi = 0.5$ y el parámetro *Intensidad de Competencia Global* δ varía en el intervalo $[0.5, 3.5]$. Análogamente, las figuras 4.3 y 4.4 muestran resultados obtenidos cuando el parámetro *Intensidad de Competencia Global* $\delta = 3.8$, el parámetro *Colaboración Local entre Delincuentes* $\varphi = 0.3$, y el parámetro *Intensidad de las Sanciones Impuestas* π_0 varía en el intervalo $[0.1, 0.9]$. Por último, las figuras 4.5 y 4.6 se obtuvieron cuando el parámetro *Intensidad de Competencia Global* $\delta = 1.7$, el parámetro *Intensidad de las Sanciones Impuestas* $\pi_0 = 0.5$, y el parámetro *Colaboración Local entre Delincuentes* φ varía en el intervalo $[0.15, 1]$. Es importante notar que en todos estas figuras se reportan cantidades normalizadas por el número de individuos en la red, es decir $\langle x \rangle/N$ y S/N .

En la figura 4.1 se puede observar que la criminalidad promedio es alta para valores pequeños de δ , manteniéndose casi constante para valores entre 0.5 y 1. Para $\delta = 1$ la criminalidad promedio disminuye considerablemente y a partir de allí manifiesta una leve disminución hasta estabilizarse en aproximadamente 0.55 cuando $\delta \geq 3$. Dado que el parámetro δ mide el nivel de competencia por los recursos limitados, se puede considerar que esta disminución de la criminalidad promedio con el aumento de δ es un indicador de que las ganancias disminuyen en la medida en que más individuos delinquen, tal y como se espera de la definición del modelo.

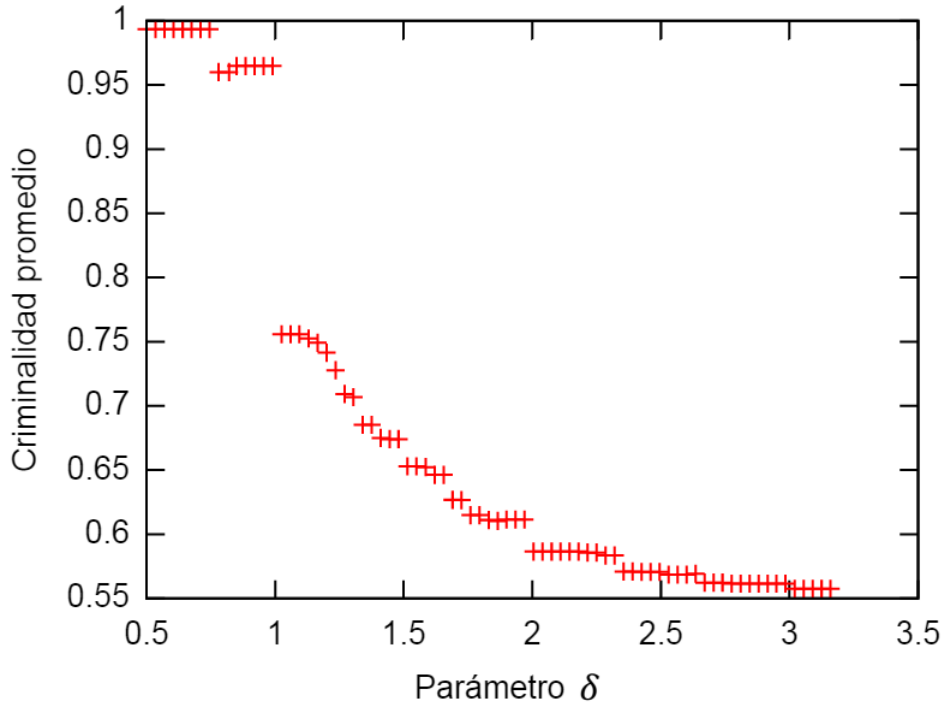


Fig. 4.1: Criminalidad Promedio vs Intensidad de Competencia Global (δ). $\pi_0 = 0.5$, $\varphi = 0.5$ y δ variando en el intervalo $[0.5, 3.5]$.

La figura 4.2 muestra que la entropía se mantiene igual a cero para valores de delta entre 0.5 y 1, lo cual indica un número sub-exponencial de equilibrios de Nash, (el número Z de equilibrios de Nash puede escribirse aproximadamente como $Z = e^{N \cdot s}$, donde s es la entropía por agente. Esto omite factores de corrección que escalan más lentamente, que por ende suelen llamarse correcciones sub-exponenciales. Mientras la entropía sea positiva el término $N \cdot s$ domina en el exponente y la aproximación $Z = e^{N \cdot s}$ es asintóticamente exacta. Sin embargo cuando la entropía es cero, dichas correcciones sub-exponenciales se vuelven relevantes, y por lo tanto no se puede concluir que $Z = 1$. Infortunadamente esto requiere cálculos más complejos que están fuera del alcance de esta tesis). Cuando $\delta = 1$ la entropía manifiesta un crecimiento abrupto y a partir de allí manifiesta un crecimiento lento hasta alcanzar un valor de 0.6 cuando δ se aproxima a 3.5. Un valor positivo equivale a un número de equilibrios de Nash que crece exponencialmente con el número de individuos en la red.

Con respecto a una entropía positiva podrían ocurrir dos situaciones: En primer lugar, al existir tantos equilibrios de Nash puede resultar relativamente fácil para los individuos

en la red encontrar uno y en ese sentido la actividad criminal en la red podría interpretarse como el resultado de un comportamiento racional en el sentido de la Teoría de Juegos. Por otra parte, al tener tantos caminos conducentes a equilibrios de Nash podrían confundirse y no encontrar ninguno, dado que se requeriría un esfuerzo de coordinación adicional para converger a un equilibrio específico de los tantos disponibles. Un mejor entendimiento requeriría de la introducción de dinámicas de aprendizaje [2] y/o de nociones más refinadas de equilibrio, lo cual se deja para estudios posteriores.

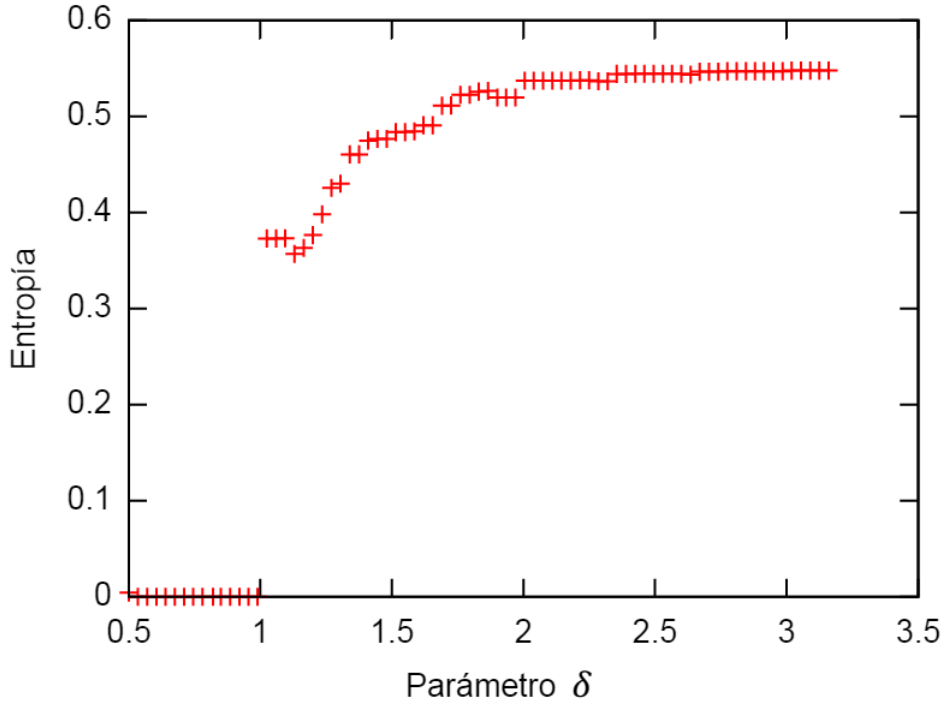


Fig. 4.2: Entropía vs Intensidad de Competencia Global (δ). $\pi_0 = 0.5$, $\varphi = 0.5$ y δ variando en el intervalo $[0.5, 3.5]$.

Con respecto al parámetro π_0 es importante anotar que los cambios observados son minúsculos, por lo que podría considerarse que no hay variaciones con este. La figura 4.3 muestra que la criminalidad promedio experimenta una leve disminución, casi que escalonada, en la medida que π_0 aumenta tornándose constante cuando π_0 alcanza un valor próximo a 0.66. Esto deja ver que aumentando la intensidad de la sanción aplicada, representada por π_0 , puede en principio disminuirse la criminalidad promedio pero dicha disminución es prácticamente imperceptible.

Así mismo, en la figura 4.4 puede verse que el comportamiento de la entropía es similar al de la criminalidad promedio puesto que también disminuye cuando π_0 aumenta y también logra estabilizarse cuando π_0 alcanza un valor próximo a 0.4. Esto indica que aumentando la sanción promedio se entorpece, aunque minimamente, la consecución de equilibrios de Nash, y entonces la red criminal se ve afectada en forma negativa.

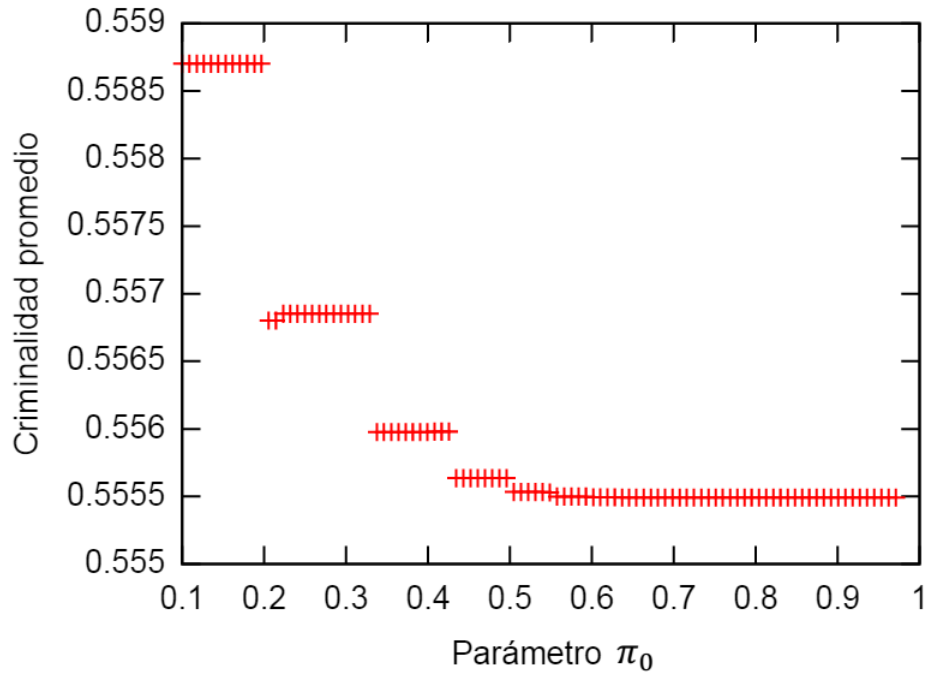


Fig. 4.3: Criminalidad Promedio vs Intensidad de las Sanciones Impuestas (π_0). $\delta = 3.8$, $\varphi = 0.3$ y π_0 variando en el intervalo $[0.1, 0.9]$.

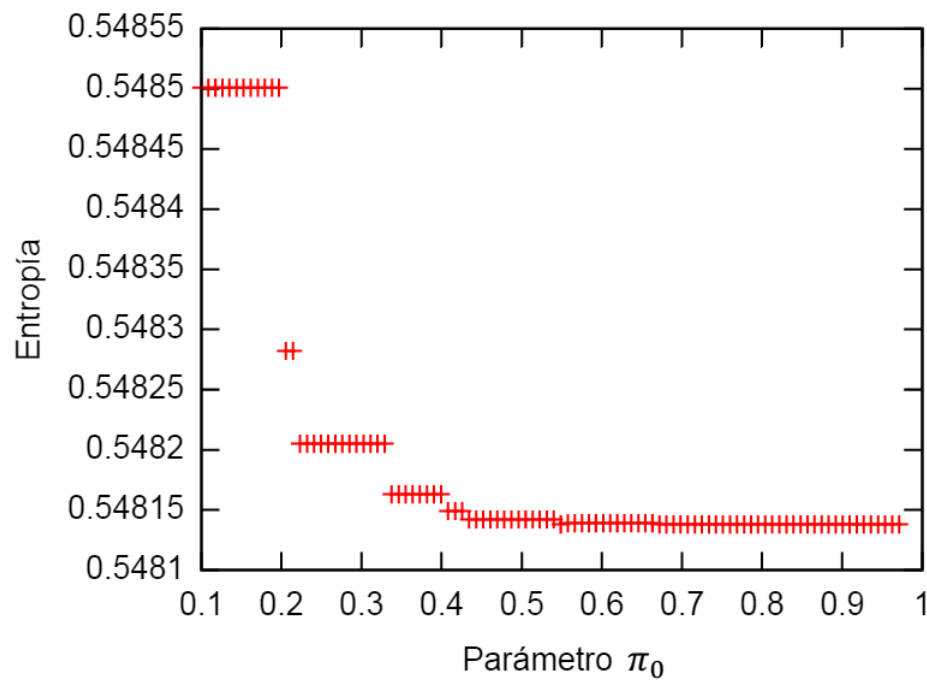


Fig. 4.4: Entropía vs Intensidad de las Sanciones Impuestas (π_0). $\delta = 3.8$, $\varphi = 0.3$ y π_0 variando en el intervalo $[0.1, 0.9]$.

Por otra parte, la figura 4.5 indica que la criminalidad promedio crece en forma escalonada en la medida que φ también aumenta variando entre 0.3 y 0.65, aproximadamente.

Los cambios en la criminalidad promedio se dan de forma notoria cuando φ pasa de 0.34 a 0.35 y un poco menos cuando φ pasa de 0.5 a 0.51. Estos resultados sugieren que los valores de φ deben mantenerse bajos porque este parámetro indirectamente regula la sanción que un delincuente particular pueda recibir. En otras palabras, entre más grande sea φ menor tiende a ser la probabilidad de que un delincuente en particular sea capturado. Este parámetro podría forzarse a tomar valores suficientemente bajos tratando de intervenir la intensidad de las interacciones de un individuo con sus compañeros directos, lo que podría quizás lograrse mediante campañas publicitarias o educativas.

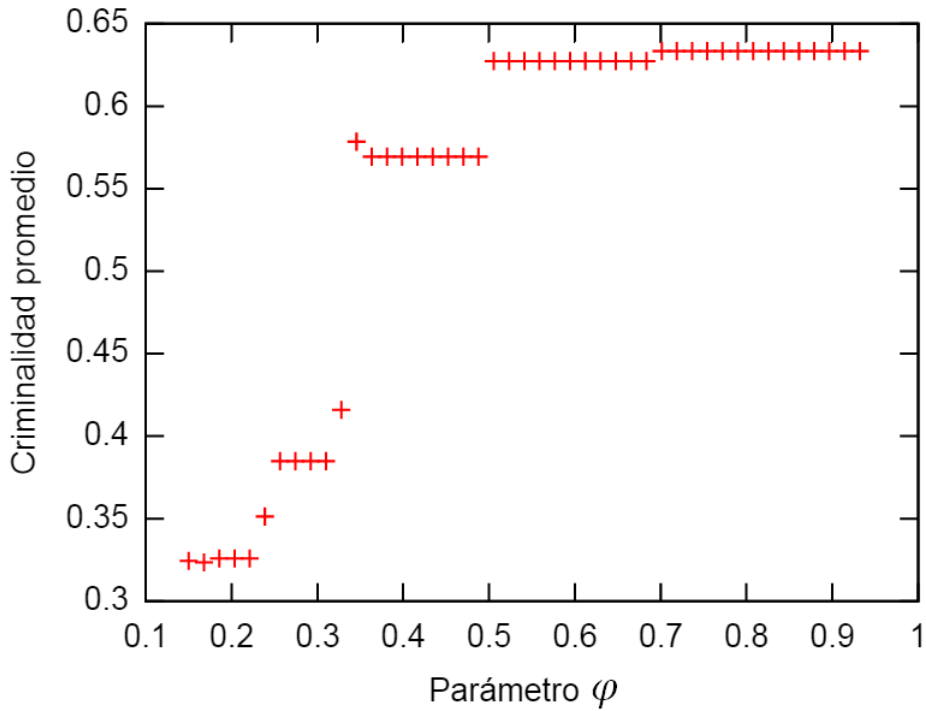


Fig. 4.5: Criminalidad Promedio vs Colaboración Local entre Delincuentes (φ). $\delta = 1.7$, $\pi_0 = 0.5$ y φ variando en el intervalo $[0.15, 1]$.

Por último, en la figura 4.6 se observa que la entropía aumenta cuando el parámetro φ también aumenta tomando valores entre 0.1 y 0.55, aproximadamente. Este aumento escalonado de la entropía se da de forma notoria cuando φ pasa de 0.34 a 0.35 y un poco menos cuando φ pasa de 0.5 a 0.51. También se puede notar una pequeña disminución en los valores de la entropía cuando φ asume valores próximos a 0.2.

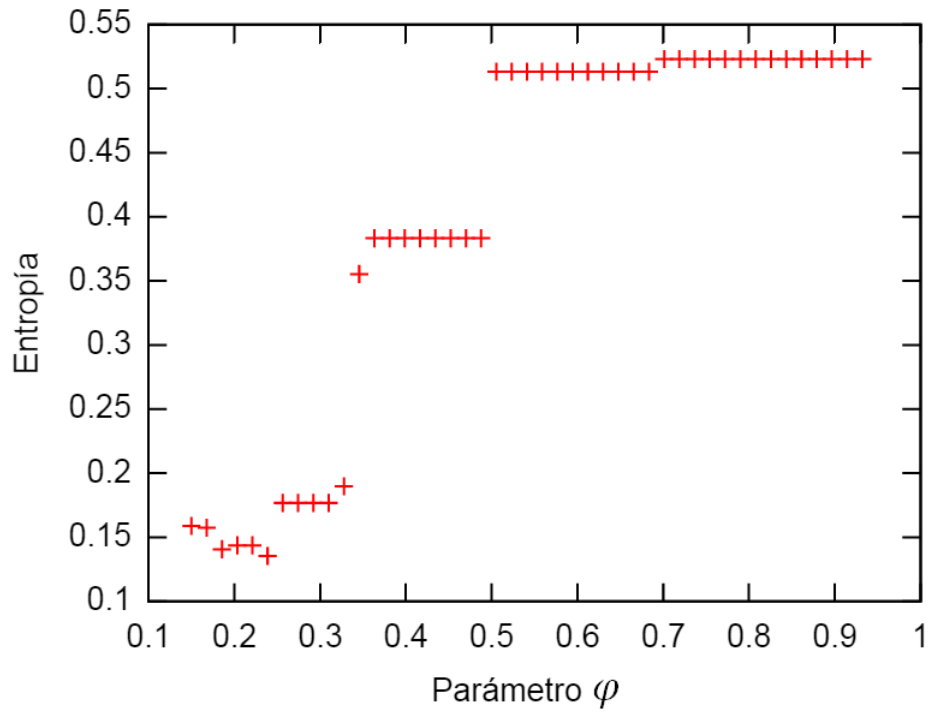


Fig. 4.6: Entropía vs Colaboración Local entre Delincuentes (φ). $\delta = 1.7$, $\pi_0 = 0.5$ y φ variando en el intervalo $[0.15, 1]$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se investigó el fenómeno de la delincuencia desde la perspectiva de la Física Estadística de sistemas complejos. Con tal fin se definió un modelo de redes delincuenciales basado en la Teoría de Juegos [18] y se exploraron algunas propiedades estadísticas de sus equilibrios de Nash. Se mostró como se puede formular el problema de encontrar equilibrios de Nash como un problema de satisfacción de restricciones y cómo se puede mapear formalmente dicho problema a un sistema físico ficticio equivalente con el fin de explotar los métodos matemáticos y computacionales de la Física Estadística para su estudio. Se presentó también una introducción a este tema, cuya formalización matemática rigurosa es un área muy activa de investigación en la actualidad. Uno de los métodos principales aquí estudiados fue el método de la cavidad el cual da lugar a un algoritmo de paso de mensajes que permite resolver el problema en consideración de manera eficiente, aunque aproximada.

A partir de estas técnicas se exploró el modelo de redes delincuenciales aquí propuesto en función de sus parámetros. Más específicamente, se generaron computacionalmente redes con la topología de grafos aleatorios o de Erdős-Rényi. Se estudió la variación de la criminalidad promedio y del número de equilibrios de Nash, o mejor de su logaritmo o entropía, en función de tres parámetros que definen el modelo. Estos parámetros se relacionan, respectivamente, con la intensidad de competencia global (δ), la colaboración local entre individuos en la red (φ), y la intensidad de las sanciones impuestas (π_0). Se observó que la variación con π_0 , dentro del rango estudiado, es prácticamente irrelevante, mientras que la variación con δ y φ es mucho más notoria. Los resultados de esta investigación sugieren que para atacar este tipo de redes delincuenciales puede ser más efectivo utilizar estrategias que busquen modificar la intensidad de interacción de los individuos en la red, más que aumentar la intensidad de las sanciones impuestas. Estudios más detallados son, sin embargo, necesarios antes de alcanzar conclusiones más sólidas.

Una característica que se observó en el modelo aquí estudiado es que produce resultados muy granulares. Esto se debe, al parecer, a los máximos que se toman dentro de la función de utilidad de cantidades que varían de manera discreta. Se requiere un estudio más cuidadoso que permita clarificar este punto y eventualmente sugerir modificaciones que hagan el modelo más razonable. Finalmente, se debe mencionar que aunque se utilizaron grafos aleatorios con el fin de simplificar este primer estudio sobre el tema, es de esperar que la topología de las redes delincuenciales reales se aproxime más a la de una red compleja [34], por lo que estudios posteriores deben abordar este tema.

En este estudio preliminar es aún difícil determinar los parámetros a partir de experimentos independientes basados en la interpretación de cada uno de ellos. Sin embargo, si se tiene acceso a suficientes datos de actividad delictiva, se puede en principio usar algoritmos de aprendizaje automático para inferir los parámetros, incluyendo además la

topología de la red.

EL método utilizado en esta investigación es un método bastante general que es independiente de la interpretación que se le pueda dar a cada parámetro. La situación ideal sería encontrar relaciones causales entre aquellas características específicas que representan los parámetros del modelo y las variables de salida del modelo, como el nivel de actividad delincriminal. Esto permitiría tener capacidad de predicción y de control.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Newman, “Complex systems: a survey”, arXiv preprint arXiv:1112.1440 (2011), <http://www.escet.urjc.es/~fisica/msanjuan/complejidad/cssurvey.pdf>.
- [2] J. Realpe-Gomez, B. Szczesny, L. Dall’Asta y T. Galla, “Fixation and escape times in stochastic game learning”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2012**, P10022 (2012), <http://stacks.iop.org/1742-5468/2012/i=10/a=P10022>.
- [3] F. Altarelli, A. Braunstein, J. Realpe-Gomez y R. Zecchina, “Statistical mechanics of budget-constrained auctions”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2009**, P07002 (2009), <http://arxiv.org/pdf/0903.2429v2.pdf>.
- [4] C. Ballester, Y. Zenou y A. Calvó-Armengol, “Delinquent networks”, *Journal of the European Economic Association* **8**, 34-61 (2010), <https://ideas.repec.org/e/pca168.html>.
- [5] O. Morgenstern, “La teoría de los juegos y del comportamiento económico”, *Económica* **1** (1955).
- [6] Á. F. Tenorio Villalón y A. M. Martín Caraballo, “Un paseo por la historia de la teoría de juegos.”, *Boletín de Matemáticas* **22** (2015), <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/51847>.
- [7] A. Ramezanpour, J. Realpe-Gomez y R. Zecchina, “Statistical physics approach to graphical games: local and global interactions”, *The European Physical Journal B* **81**, 327-339 (2011), <http://link.springer.com/article/10.1140/epjb/e2011-10963-x#/page-1>.
- [8] F. Altarelli, R. Monasson, G. Semerjian y F. Zamponi, “A review of the statistical mechanics approach to random optimization problems”, arXiv preprint arXiv:0802.1829 (2008), http://www.researchgate.net/publication/%201910898_A_review_of_the_Statistical_Mechanics_approach_to_Random_Optimization_Problems.
- [9] P. Rotella, *Is data the new oil? forbes*, 2012, <http://www.forbes.com/sites/perryrotella/2012/04/02/is-data-the-new-oil/>.
- [10] K. Binder y A. P. Young, “Spin glasses: experimental facts, theoretical concepts, and open questions”, *Reviews of Modern physics* **58**, 801 (1986).
- [11] M. O. Jackson e Y. Zenou, “Games on networks”, *Handbook of game theory* **4** (2014), <http://web.stanford.edu/~mjacksonm/GamesNetworks.pdf>.
- [12] D. Helbing y A. F. Carbone, “Participatory science and computing for our complex world”, *THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL. SPECIAL TOPICS* **214** (2012).
- [13] M. Mézard y G. Parisi, “The cavity method at zero temperature”, *Journal of Statistical Physics* **111**, 1-34 (2003), http://lptms.u-psud.fr/membres/mezard/Pdf/03_MP_JSP.pdf.

-
- [14] J. Von Neumann y O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior* (Princeton university press, 2007), <http://press.princeton.edu/titles/7802.html>.
- [15] F. F. Rodriguez, “Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos”, *Métodos matemáticos en ciencias sociales, economía, finanzas y administración de empresas*, 27 (2005).
- [16] J. McMillan, “Selling spectrum rights”, *The Journal of Economic Perspectives* **8**, 145-162 (1994).
- [17] T. L. Turocy, “Texas a&m university”, Bernhard von Stengel, London School of Economics “Game Theory” CDAM Research Report (October 2001) (2001).
- [18] M. O. Jackson y col., *Social and economic networks*, vol. 3 (Princeton University Press Princeton, 2008), <http://press.princeton.edu/titles/8767.html>.
- [19] O. Miramontes y K. Volke, *Fronteras de la física en el siglo xxi* (CopIt ArXives, 2013), http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/TS0011ES/Miramontes_Volke_-_Fronteras_Fisica_S_XXI.pdf.
- [20] A.-L. Barabási y R. Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *science* **286**, 509-512 (1999), <http://science.sciencemag.org/content/286/5439/509>.
- [21] R. Albert y A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks”, *Reviews of modern physics* **74**, 47 (2002), <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106096>.
- [22] X. Chen y X. Deng, “3-nash is ppad-complete”, en *Electronic colloquium on computational complexity*, vol. 134 (2005), <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.634.6362&rep=rep1&type=pdf>.
- [23] C. Daskalakis y C. H. Papadimitriou, “Three-player games are hard”, en *Electronic colloquium on computational complexity*, vol. 139 (2005), págs. 81-87, <http://www.cs.berkeley.edu/~christos/papers/3players.pdf>.
- [24] T. C. Schelling, “A process of residential segregation: neighborhood tipping”, *Racial discrimination in economic life* **157**, 174 (1972).
- [25] T. C. Schelling, “Dynamic models of segregation†”, *Journal of mathematical sociology* **1**, 143-186 (1971), http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/157/Papers/Schelling_Seg_Models.pdf.
- [26] D. J. Watts y S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *nature* **393**, 440-442 (1998), <http://www.nature.com/nature/journal/v393/n6684/full/393440a0.html>.
- [27] S. Wasserman y K. Faust, *Social network analysis: methods and applications*, vol. 8 (Cambridge university press, 1994), <http://psycnet.apa.org/psycinfo/1995-97740-000>.
- [28] J. G. Miranda, “Capítulo 5: introducción a la teoría de grafos”, (2005), <http://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Grafos.pdf>.
- [29] F. G. Gutiérrez, “Lección 14: grafos”, (2004), <http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1710003/Apuntes/Leccion14.pdf>.
- [30] “Grafos regulares y aleatorios”, <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11749/fichero/Volumen+I%252FP1-5-GRAFOS+REGULARES+Y+ALEATORIOS.pdf>.

-
- [31] X. F. Wang, “Complex networks: topology, dynamics and synchronization”, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, 885-916 (2002), <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127402004802>.
- [32] N. A. Milgram, “Cognitive and empathic factors in role-taking by schizophrenic and brain damaged patients.”, *The Journal of Abnormal and Social Psychology* **60**, 219 (1960), <http://psycnet.apa.org/journals/abn/60/2/219/>.
- [33] J. Erickson, “Lecture 30: np-hard problems.”, (2014), <http://web.engr.illinois.edu/~jeffe/teaching/algorithms/notes/30-nphard.pdf>.
- [34] J. Xu y H. Chen, “The topology of dark networks”, *Communications of the ACM* **51**, 58-65 (2008), <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1400198>.
- [35] T. A. S. Bahoque, J. F. C. Palacio, J. E. R. Gómez y J. A. M. Martínez, “Optimal dismantling of criminal networks. a perspective from the mathematical and computational modeling”, *Ingeniería y Ciencia—ing. cienc.* **12** (2016).
- [36] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi y col., “Optimization by simulated annealing”, *science* **220**, 671-680 (1983), <http://www.jstor.org/stable/1690046>.
- [37] M. Mezard y A. Montanari, *Information, physics, and computation* (Oxford University Press, 2009), <http://web.stanford.edu/~montanar/RESEARCH/book.html>.
- [38] M. Talagrand, *Spin glasses: a challenge for mathematicians: cavity and mean field models*, vol. 46 (Springer Science & Business Media, 2003), <http://www.springer.com/us/book/9783540003564>.
- [39] M. Talagrand, *Mean field models for spin glasses: volume i: basic examples*, vol. 54 (Springer Science & Business Media, 2010), <http://www.springer.com/us/book/9783642222528>.
- [40] F. Guerra y F. L. Toninelli, “The thermodynamic limit in mean field spin glass models”, *Communications in Mathematical Physics* **230**, 71-79 (2002), <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00220-002-0699-y#page-1>.
- [41] F. Guerra, “Broken replica symmetry bounds in the mean field spin glass model”, *Communications in mathematical physics* **233**, 1-12 (2003), <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0205123.pdf>.
- [42] M. Mézard, G. Parisi y R. Zecchina, “Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems”, *Science* **297**, 812-815 (2002), <https://www.sciencemag.org/content/297/5582/812.abstract?related-urls=yes&legid=sci;297/5582/812>.
- [43] O. C. Martin, R. Monasson y R. Zecchina, “Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems”, *Theoretical computer science* **265**, 3-67 (2001), <http://www.phys.ens.fr/~monasson/Articles/a34.pdf>.
- [44] H. Bethe, “Statistical theory of superlattices”, en *Proc. roy. soc. london a*, vol. 150, 871 (1935), págs. 552-575, <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/150/871/552>.
- [45] R. Peierls, “Statistical theory of superlattices with unequal concentrations of the components”, en *Proceedings of the royal society of london a: mathematical, physical and engineering sciences*, vol. 154, 881 (The Royal Society, 1936), págs. 207-222, <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/154/881/207>.

-
- [46] M. Mézard y G. Parisi, “The bethe lattice spin glass revisited”, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **20**, 217-233 (2001), <http://link.springer.com/article/10.1007%2FPL00011099#page-1>.
- [47] F. R. Kschischang, B. J. Frey y H.-A. Loeliger, “Factor graphs and the sum-product algorithm”, *Information Theory, IEEE Transactions on* **47**, 498-519 (2001), <http://vision.unipv.it/IA2/Factor%20graphs%20and%20the%20sum-product%20algorithm.pdf>.
- [48] C. Shannon y E. July, “October: a mathematical theory of communication”, *The Bell system. Tech. J* **47**, 379-423 (1948), <https://www.cs.ucf.edu/~dcm/Teaching/COP5611-Spring2012/Shannon48-MathTheoryComm.pdf>.

6. ANEXOS

El siguiente es el algoritmo que nos permitió obtener los resultados de la criminalidad promedio y de la entropía cuando la intensidad de competencia global, parámetro δ , varía. Para obtener resultados de la criminalidad promedio y de la entropía cuando varía la intensidad de las sanciones impuestas, parámetro π_0 o cuando varía la colaborabilidad entre delincuentes, parámetro φ_0 utilizamos algoritmos análogos.

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<time.h>
#include<math.h>
#include<cstdlib>
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<vector>
#include <algorithm>
std::vector<int> binario(int m, int b, int n)
{
std::vector<int> vec;
int total=0;
int mmax = 1;
for(int i=0; i < n + 1; i++)
{
mmax*=b;
}
if(m < mmax)
{
if (m == 0)
{
for (int i=0; i < n + 1; i++)
{
vec.push_back(0);
}
}
else
{
int r = m % b;
, int c = (m-r)/b;
for(;;)
{
vec.push_back(r);
total+=r;
```

```

if(c == 0)
{
while((int)vec.size() < n + 1)
vec.push_back(0);
break;
}
r = c % b;
c = (c-r) / b;
}
for(int i=0; i < (int)vec.size();i++)
{
if(vec[i] > b - 1)
{
std::cerr << ERROR: strategy label greater than number of strategies << std::endl;
}
}
}
}
else
{
std::cerr << ERROR:: in binario()  $m \geq b^{(n+1)}$  << std::endl;
}
int v=vec.size()-1;
vec.push_back(total_vec[v]);
return vec;
}
using namespace std;
int main()
int N = 100;      número de nodos
int M = 250;      número de links
int Tmax=1000;   número máximo de iteraciones
int Ng=1;        número de grafos
double ff=1;     parámetro multa
double p0=0.5;   parámetro probabilidad inicial de ser capturado
double Pi0=ff*p0;   pi sub 0
double phi=0.5;   parámetro phi
double eps=1E-6;  tolerancia de error
double cero=1E-10;  cero particular
double c=2*M/N;   conectividad promedio
double delta=c+5*sqrt(c);  conectividad máxima
double h=0;
double deli=0.5;  parámetro delta inicial
double delf=4;   parámetro delta final
double ndel=100;
double epdel=(delf-deli)/(double)ndel;
int con;
ofstream ografdel("grafosdelta.dat");
for (double del=deli; del <= delf; del+ = epdel)
{
int conver=0;
int noconver=Ng;

```

```

int contradic=0;
double LgZprom=0;      Log natural de Z promedio
double Zzprom=0;      Z promedio
double Entroprom=0;    Entropía promedio
double Pipromtotal=0;  Pi promedio total
double U1=0;
double U2=0;
for (int g=0; g < Ng; g++)
{
int seed=54*g+g;
srand(seed);
con=0;
double Pr_1;
double dmax=1;        diferencia máxima
double Zi;
double LnZitotal=0;
double produ;
double Zik;          normalización de i respecto a k
double Zij;
double Zzij;
double LnZijTotal=0;
vector < vector < vector < int >>> G;
G.clear();
vector < vector < int >> aux;
aux.clear();
vector < int > inout;
inout.clear();
vector < int > nv(N);
nv.clear();
vector < int > par(N);
par.clear();
for(int i=0; i < 2; i++)
{
aux.push_back(inout);
}
for(int i=0; i < N; i++)
{
G.push_back(aux);
}
int num_links =0;
for(;;)
{
if (num_links >= M)
{
break;
}
int i=rand() % N;
int j=rand() % N;
for(;;)
{
if(i != j)

```

```
{
break;
}
j = rand() % N;
}
bool existe =false;
for(;;)
{
int n_min = i;      nodo con menos vecinos
int n_max = j;      nodo con mas vecinos
if(G[i][0].size() > G[j][0].size())
{
n_min = j;
n_max = i;
}
for(int k=0; k < G[n_min].at(0).size(); k++)
{
if (G[n_min][0][k]==n_max)
{
existe =true;
break;
}
}
if(i!=j && !existe)
{
break;
}
i=rand() %N;
for(;;)
{
if(G[i][0].size() <= delta)
{
break;
}
i = rand() %N;
}
j=rand() %N;
for(;;)
{
if(G[j][0].size() <= delta && j!=i)
{
break;
}
j = rand() %N;
}
existe = false;
}
G[i][0].push_back(j);
G[j][0].push_back(i);
G[i][1].push_back(j);
G[j][1].push_back(i);
```



```

existe = false;
num.links++;
}
for (int i=0; i < N; i++)
{
nv[i]=G[i][0].size();
}
par[0]=0; for (int i=0; i < N; i++)
{
par[i+1]=par[i]+nv[i];
}
double PIout[2*M][2][2];      multimatriz de mensajes
for (int i=0;i<2*M;i++)
{
for (int j=0; j < 2; j++)
{
for (int k=0; k < 2; k++)
{
PIout[i][j][k]=rand()/(double)(RAND_MAX+1.);
}
}
}
vector < vector < int >>Ent;
Ent.clear();
for(int k=0; k < N; k++)
{
vector < int > vect;
vect.clear();
Ent.push_back(vect);
}
for (int i=0; i < N; i++)
{
for (int j=0; j < nv[i]
,;j++)
{
int rr=G.at(i).at(0).at(j);
int qq=0;
for (;)
{
if (G.at(rr).at(0).at(qq)==i)
{
Ent[i].push_back(par[rr]+qq);
break;
}
qq++;
}
}
}
for(int t=0; t < Tmax; t++)
{
Pr_1=0;

```

```

for (int i=0; i< N; i++)
{
double Prs1=0;
double Prsi=0;
double Pro1=0;
for (int j=0; j < nv[i]; j++)
{
Prs1=(PIout [par [i]+j] [1 [0]*PIout [Ent . at (i) . at (j)] [0] [1]+PIout [par [i]+j] [1] [1]*
PIout [Ent . at (i) . at (j)] [1] [1]));
Prsi=(PIout [par [i]+j] [0 [0]*PIout [Ent . at (i) . at (j)] [0] [0]+PIout [par [i]+j] [0] [1]*
PIout [Ent . at (i) . at (j)] [1] [0]+PIout [par [i]+j] [1] [0]*PIout [Ent . at (i) . at (j)] [0] [1]
+PIout [par [i]+j] [1] [1]*PIout [Ent . at (i) . at (j)] [1] [1]));
if (Prsi < cero)
{
contradic++;
noconver--;
con=-1;
cout<< Contradiction: Prsi ==<< Prsi << endl;
return 1;
}
Pro1+=Prs1/(nv[i]*Prsi);
}
Pr_1+=Pro1/(double)N;
}
if (dmax < eps)
{
con=1;
conver++;
noconver--;
break;
}
for (int i=0; i < N; i++)
{
if (nv[i]!=0)
{
double Matr[nv[i]] [2] [2];
for (int j=0; j < nv[i]; j++)
{
for (int k=0; k < 2; ,k++)
{
for (int l=0; l < 2; l++)
{
Matr[j] [k] [l]=0;
}
}
}
}
for (int j=0; j < pow(2, nv[i] + 1); j++)
{
vector < int > s = binario(j, 2, nv[i]);
double Mpago=fmax(0, (1-del*((s[nv[i]+1]+1)/(double)(nv[i]+1))))-Pi0*
fmax(0, (1-phi*s[nv[i]+1]));
}
}
}

```

```

bool text=((2*s[nv[i]])-1)*Mpago >= 0;
double prod=1;
if (((2*s[nv[i]])-1)*Mpago>=0) {
int cont=0;
int k0;
for (int k=0; k < nv[i]; k++)
{
if(PIout[Ent.at(i).at(k)][s[k]][s[nv[i]]] <= cero)
{
k0=k;
cont++;
if (cont==2)
{
prod=0;
break;
}
}
else
{
prod*=PIout[Ent.at(i).at(k)][s[k]][s[nv[i]]];
}
}
if (cont==0)
{
for (int k=0; k < nv[i]; k++)
{
Matr[k][s[nv[i]]][s[k]]+=(exp(h*s[nv[i]])*prod/(PIout[Ent.at(i).at(k)][s[k]]
s[nv[i]]));
}
}
else if(cont==1)
{
Matr[k0][s[nv[i]]][s[k0]]+=(exp(h*s[nv[i]])*prod);
}
}
for (int k=0;k<nv[i];k++)
{
Zik=Matr[k][0][0]+Matr[k][0][1]+Matr[k][1][0]+Matr[k][1][1];
if(Zik <= cero)
{
contradic++;
noconver--;
cout
<< "CONTRADICTION FOUND!: << t << " " << i << " " << k << " " << Zik << endl;
return 1;
}
for (int kk=0; ,kk < 2; kk++)
{
for (int kkk=0; kkk < 2; kkk++)
{

```

```

double dmaxi=fabs(PIout[par[i]+k][kk][kkk]-Matr[k][kk][kkk]/Zik);
PIout[par[i]+k][kk][kkk]=Matr[k][kk][kkk]/Zik;
dmax=dmaxi;
}
}
}
}
}
}
double u1av=0;
double u2av=0;
for (int i=0; i < N; i++)
{
Zi=0;
double u1=0;
double u2=0;
for (int j=0; j < pow(2,nv[i]+1); j++)
{
vector < int > s = binario(j,2,nv[i]);
produ=1;
for (int k=0; k < nv[i]; k++)
{
produ*=PIout[Ent.at(i).at(k)][s[k]][s[nv[i]]];
,
double
Mpago=fmax(0,(1-del*((s[nv[i]+1]+1)/(double)(nv[i]+1))))-Pi0*fmax(0,1-phi*
s[nv[i]+1]);
if
(((2*s[nv[i]])-1)*Mpago >= 0)
{
Zi+=(exp(h*s[nv[i]])*produ);
u1+=(exp(h*s[nv[i]])*produ)*fmax(0,(1-del*((s[nv[i]+1]+1)/(double)(nv[i]+1)))));
u2+=(exp(h*s[nv[i]])*produ)*Pi0*fmax(0,1-phi*s[nv[i]+1]);
}
}
if (Zi < cero)
{
contradic++;
noconver--;
cout<< "grafo: " << g << ": z=0, no hay soluciones" << endl;
}
LnZitotal+=log(Zi);
u1av+=u1/(double)(Zi*N);
u2av+=u2/(double)(Zi*N);
}
U1+=u1av/(double)Ng;
U2+=u2av/(double)Ng;
for (int i=0; i < N; i++)
{
Zzij=0;
for (int j=0; j < nv[i]; j++)

```

```

{
Zij=PIout [par [i]+j] [0] [0]*PIout [Ent .at (i) .at (j)] [0] [0]+PIout [par [i]+j] [1] [0]*
PIout [Ent .at (i) .at (j)] [0] [1]+PIout [par [i]+j] [0] [1]*PIout [Ent .at (i) .at (j)] [1] [0]
+PIout [par [i]+j] [1] [1]*PIout [Ent .at (i) .at (j)] [1] [1];
if (Zij <)
{
contradic++;
cout << "no hay soluciones: z=0" << endl;
return 0;
}
Zzij+=log(Zij)/2.;
}
LnZijTotal+=Zzij;
}
double LgZ=LnZitotal-LnZijTotal;
double Zz=exp(LgZ);
double Entrop=LgZ/(double)N-h*Pr_1;
if (con=1)
{
LgZprom+=LgZ;
Zzprom+=Zz;
Entroprom+=Entrop;
Pipromtotal+=Pr_1;
}
}
ograpdel<< del << "" << conver << "" << Pipromtotal/(double)conver << "" <<
Zzprom/(double)conver << "" << Entroprom/(double)conver << "" <<
(LgZprom/(double)N)/(double)conver << endl;
cout << U1 << "" << U2 << "" << del << "" << conver << "" <<
Pipromtotal/(double)conver << "" << Zzprom/(double)conver << "" <<
Entroprom/(double)conver << "" << (LgZprom/(double)N)/(double)conver << endl;
}
ograpdel.close();
system("pause");
return 0;
}

```