Trabajo de Grado para aspirar al título de Matemático

Solución del sistema $x'(t) = Ax(t)$ mediante el método B. Van Rootselaar

Juan Pablo Alvis Estrada
Código: 0200720019

Asesor
Alfonso Gómez Mulett

Programa de Matemáticas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Cartagena
Septiembre de 2012

Índice general

INTRODUCCIÓN

En ecuaciones diferenciales ordinarias la solución del sistema homogéneo $x'(t) = Ax(t)$, donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ es resuelto mediante el algebra lineal, vía autovalores. Alternativamente, B. Van Rootselaar propuso un método mucho más sencillo sin recurrir a los valores propios de la matriz. Método que se expondrá en este trabajo.

Para su realización se siguió muy de cerca el artículo "método alterno para resolver el sistema $x'(t) = Ax(t)$", [1], considerándose un estudio de la teoría matemática en que se sustenta, junto con otros estudios que condujeron al mismo método.

La exposición del contenido se dividió en tres capítulos. En el primer capítulo se hizo la revisión de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden n con un enfoque de operadores basado en el álgebra lineal; en el segundo capítulo, se expone la solución del sistema $x'(t) = Ax(t)$ siguiendo el método clásico presentado en el capítulo dos; finalmente, en el tercer capítulo se muestra la solución del sistema mencionado en el capítulo dos con base en el método de B. Van Rootselaar.

Durante la realización de este trabajo se revisó parte de la literatura clásica del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la cual se aplica en la solución del sistema con el método clásico, luego se demostró el método alterno comparándose con el método clásico y así mostrar la ventaja del método de B. Van Rootselaar. El método heurístico permitió resolver el problema mostrando las diferentes teorías que existen en dicha solución. Al final del trabajo se exponen algunas conclusiones.

Capítulo 1

Teoría de ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

En esta primera parte se establecerán las definiciones y teoremas básicos que son de utilidad para la comprensión de este trabajo; además, se presenta parte de la teoría pertinente sobre ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

En lo que sigue se empieza enunciando las definiciones y teoremas que serán de utilidad.

Definición 1.1 Espacio vectorial.
Sea V un conjunto no vacío de objetos, llamados elementos. El conjunto V, junto con las dos operaciones $+$, $\bullet$ se llama espacio vectorial si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

Axiomas de clausura

Axioma 1. Clausura respecto de la adición. A todo par de elementos x e y de V corresponde un elemento único de V llamado suma de x e y, designado por $x+y$.

Axioma 2. Clausura respecto de la multiplicación por elementos de un campo, no necesariamente real. A todo x de V y todo escalar a del campo, corresponde un elemento de V llamado producto de a por x, designado por $a \bullet x$. Se escribirá ax para abreviar.

Axiomas para la adición

Axioma 3. Ley conmutativa. Para todo x y todo y de V, se tiene que $x+y = y+x$.

Axioma 4. Ley asociativa. Cualesquiera que sean x, y, z de V, se tiene que $(x+y)+z=x+(y+z)$.

Axioma 5. Existencia de elemento cero. Existe un elemento en V, designado con el símbolo 0, tal que

$$x+0=x \text{ para todo } x \text{ de } V.$$

Axioma 6. Existencia de opuestos. Para todo x de V, el elemento $(-1)x$ tiene la propiedad

$$x+(-1)x=0.$$

Axiomas para la multiplicación por números

Axioma 7. Ley asociativa. Para todo x de V y todo par de números reales a y b, se tiene que

$$a(bx)=(ab)x.$$

Axioma 8. Ley distributiva para la adición en V. Para todo x y todo y de V y todo número real a, se tiene que

$$a(x+y)=ax+ay.$$

Axioma 9. Ley distributiva para la adición de números. Para todo x de V y todo par de números reales a y b, se tiene que

$$(a+b)x=ax+bx.$$

Axioma 10. Existencia de elemento idéntico. Para todo x de V, se tiene que

$$1x=x.$$

Definición 1.2 Subespacio vectorial.
Dado un espacio vectorial V, sea S un subconjunto no vacío de V. Si S es también un espacio vectorial, junto con las dos operaciones $+$ y $\bullet$, entonces S se llama subespacio vectorial de V.

Definición 1.3 Un conjunto S de elementos de un espacio vectorial V se llama linealmete dependiente si existe un conjunto finito de elementos distintos de S, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y un correspondiente conjunto de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, tales que

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0$$

El conjunto S se llama linealmente independiente si no es linealmente dependiente. En tal caso, cualquiera que sean los elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de S y los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \quad \text{implica} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Definición 1.4 Sea V un espacio vectorial, con S subespacio de V y sea $T : S \longrightarrow V$ una transformación de S en V. Un escalar λ se denomina autovalor de T si existe un elemento no nulo x en S tal que

$$T(x) = \lambda x$$

El elemento x se llama autovector de T correspondiente a λ. El escalar λ se llama autovalor correspondiente a x.

Teorema 1.1 Si $u_1, ..., u_k$ son autovectores de una transformacón lineal $T : S \longrightarrow V$, y los autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son distintos, entonces los autovectores $u_1, ..., u_k$ son independientes.

Demostración.
La demostración se hará por indución sobre k. Para $k = 1$, se tiene que el autovector es u_1 y el autovalor es λ_1; así, u_1 es linealmente independiente ya que si $\lambda_1 u_1 = 0$, entonces $\lambda_1 = 0$ puesto que $u_1 \neq 0$. Supóngase que el resultado ha sido probado para cualquier conjunto de $k - 1$ autovectores. Sean $u_1, ..., u_k$, k autovectores pertenecientes a autovalores distintos, y supóngase que existen escalares c_i tales que

$$\text{(1.1)} \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$$

Al aplicar T a ambos miembros de la igualdad anterior y al utilizarse el hecho de que $T(u_i) = \lambda_i u_i$ se encuentra que

$$\text{(1.2)} \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i u_i = 0;$$

al multiplicar (1.1) por λ_k y restándosela a (1.2) se obtienene la ecuación

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i(\lambda_i - \lambda_k)u_i = 0.$$

Pero ya que $u_1, ..., u_{k-1}$ son independientes, debe ser ser $c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ para cada $i = 1, 2, ..., k - 1$. Puesto que los autovalores son distintos se tiene que

$\lambda_i \neq \lambda_k$ para $i \neq k$ así que $c_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., k-1$, y en virtud de (1.1) se observa que c_k es también 0, por lo que los autovectores $u_1, ..., u_k$ son independientes.

Definición 1.5 Si A es una matriz $n \times n$ el determinante

$$f(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

se denomina polinomio característico de A.

Definición 1.6 Una ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y = R(x),$$

donde las funciones $P_0, P_1, ..., P_n$ se llaman coeficientes de la ecuación. Se supondrá que todos los coeficientes son funciones continuas en un intervalo J.

Dada la definición anterior de una ecuación diferencial lineal de orden n se puede escribir en notación de operadores como sigue:

$$P_0(x)D^n y + P_1(x)D^{n-1}y + ... + P_n(x)y = R(x),$$

en donde $D^k y = d^k/dy^k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Para esto, desígnese con $\mathscr{C}(J)$ el espacio vectorial constituido por todas las funciones de valores reales, continuas en un intervalo J, y con $\mathscr{C}^n(J)$ el subespacio de todas las funciones f cuyas n primeras derivadas, $f', f'', ..., f^{(n)}$ existen y son continuas en J. Sean $P_1, ..., P_n$, n funciones dadas en $\mathscr{C}(J)$ y consíderese el operador $L : \mathscr{C}^n(J) \longrightarrow \mathscr{C}(J)$ dado por

$$L(f) = f^{(n)} + P_1 f^{(n-1)} + ... + P_n f$$

El operador L suele escribirse así:

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + ... + P_n,$$

el cual es lineal ya que dado un escalar α y f, g en $\mathscr{C}^n(J)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
L(f + \alpha g) &= (f + \alpha g)^{(n)} + P_1(f + \alpha g)^{(n-1)} + \cdots + P_n(f + \alpha g) \\
&= [(f + \alpha g)']^{(n)} + P_1 [(f + \alpha g)']^{(n-2)} + \cdots + P_n(f + \alpha g) \\
&= (f' + \alpha g')^{(n-1)} + P_1(f' + \alpha g')^{(n-2)} + \cdots + P_n(f + \alpha g) \\
&= (f^{(n)} + \alpha g^{(n)}) + P_1(f^{(n-1)} + \alpha g^{(n-1)}) + \cdots + P_n(f + \alpha g) \\
&= f^{(n)} + P_1 f^{(n-1)} + ... + P_n f + \alpha g^{(n)} + \alpha P_1 g^{(n-1)} + \cdots + \alpha P_n g \\
&= L(f) + \alpha L(g).
\end{aligned}$$

En notación abreviada la ecuación diferencial de la definición anterior queda así:

$$L(y) = R.$$

Cuando se tiene que las funciones $P_1, P_2, ..., P_n$ son constantes en la definición anterior, se le llama a L un operador con coeficientes constantes, es decir,

$$L = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$$

Adicionalmente, a cada operador con coeficientes constantes L se le puede asociar un polinomio P_L, llamado polinomio característico de L; así, si $L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_n$ entoces el polinomio que tiene los mismos coeficientes de L es $P_L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n$, con r en $\mathbb{R}$. Inversamente, dado un polinomio p, existe un operador L que tiene los mismos coeficientes que p.

Además, si $P_L(r)$ puede factorizarse en n factores lineales, es decir,

$$P_L(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n),$$

luego al operador L le corresponde la factorización

$$L = a_0(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n) = L_1 L_2 \cdots L_n,$$

siendo $L_1 = a_0(D - r_1)$, $L_2 = (D - r_2)$, $\ldots$, $L_n = (D - r_n)$ operadores, y donde $r_1, r_2, ..., r_n$ son las raíces de la ecuación $P_L(r) = 0$, que es llamada *ecuación característica de* L.

Definición 1.7 Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal de V en W. El conjuto de todos los elementos de V que aplica en 0 se llama núcleo o kernel de T y se designa por $N(T)$; esto es,

$$N(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$$

Teorema 1.2 Sea L un operador con coeficientes constantes que puede factorizarse como un producto de operadores con coeficientes constantes, por ejemplo

$$L = A_1 A_2 \ldots A_k.$$

Entonces el espacio solución de la ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$ contiene el espacio solución de cada una de las ecuaciones diferenciales $A_i(y) = 0$. Dicho de otro modo,

$$N(A_i) \subseteq N(L) \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.3}$$

Demostración

Supóngase que u es el núcleo del último factor A_k, entonces $A_k(u) = 0$, así que

$$L(u) = (A_1A_2 \dots A_k)(u) = (A_1A_2 \dots A_{k-1})A_k(u) = (A_1A_2 \dots A_{k-1})(0) = 0.$$

Por tanto, el núcleo de L contiene al último factor A_k. Pero ya que los operadores con coeficientes constantes son permutables debido a la existencia de un isomorfismo del espacio vectorial de operados diferenciales con coeficientes constantes al espacio vectorial de los polinomios reales, se puede reordenar los factores de modo que uno cualquiera de ellos sea el úlimo factor, lo que demuestra (1.3).

Teorema 1.3 Sea L un operador con coeficientes constantes cuya ecuación característica $P_L(\lambda) = 0$ tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Entonces la solución general de la ecuación diferencial $L(y) = O$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ viene dada por la fórmula

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda x} \tag{1.4}$$

Demostración

Se tiente que la factorización del operador L es

$$L = a_0(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n)$$

Puesto que el núcleo de $(D - \lambda_k)$ contiene a $u_k(x) = e^{\lambda_k x}$, ya que $D(e^{\lambda_k x}) = \lambda_k e^{\lambda_k x}$; así, $(D - \lambda_k)(e^{\lambda_k x}) = \lambda_k e^{\lambda_x} - \lambda_k e^{\lambda_k x} = 0$, luego el núcleo de L contiene las n funciones

$$u_1(x) = e^{\lambda_1 x}, u_2(x) = e^{\lambda_2 x}, ..., u_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

Se mostrará que estas n funciones son linealmente independientes; para esto se procederá por inducción sobre n.
Así, si $n = 1$, se tiene que $u_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y ésta es linealmente independiente ya que

$$c_1 u_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} = 0, \text{ implica que } c_1 = 0 \text{ puesto que } e^{\lambda_1 x} \text{ nunca es cero.}$$

Supóngase que el resultado es válido para las $n - 1$ funciones y considérese n escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ tales que

$$(1.5) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} = 0.$$

Sea λ_M el mayor de los números $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, luego multiplicándose (1.5) por $e^{-\lambda_M x}$ se obtiene

$$(1.6) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k e^{(\lambda_k - \lambda_M)x} = 0.$$

En la igualdad anterior, si $k \neq M$, $\lambda_k - \lambda_M$ es un número negativo, por consiguiente, cuando $x \to \infty$ en (1.6), cada término con $k \neq M$ tiende a cero y se encuentra que $c_M = 0$; asi, el término M-ésimo de (1.5) se suprime y al aplicar la hipótesis de inducción, se encuentra que cada uno de los $n-1$ restantes coeficientes c_k es cero. Esto prueba que estas n funciones son linealmente independientes. Por tanto, constituyen una base para el espacio solución de la ecuación $L(y) = 0$, así que la solución general viene dada por (1.4).

Teorema 1.4 Sea L un operador con coeficientes constantes de orden n. Entonces las m funciones

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}, \varphi_2(t) = te^{\lambda t}, ..., \varphi_{m-1}(t) = \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t}, \varphi_m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}$$

son m elementos linealmente independientes anulados por el operador$(D-\lambda)^m$.

Demostración

La prueba se hará por inducción sobre m. Si $m = 1$, se tiene solamente la función $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$, la cual es anulada por $D - \lambda$ ya que $D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$; así, $(D-\lambda)\varphi_1(t) = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0$.
Ahora, supóngase que el teorema es cierto para $m-1$; esto significa que las funciones $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}$ son anuladas por $(D-\lambda)^{m-1}$.
Debido a que $(D-\lambda)^m = (D-\lambda)^{m-1}(D-\lambda)$, las $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}$ funciones son anuladas por $(D-\lambda)^m$. Para completar la prueba hay que demostrar que $(D-\lambda)^m$ anula a φ_m.
Consíderese por tanto que

$$(D-\lambda)^m \varphi_m(t) = (D-\lambda)^{m-1}(D-\lambda)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t};$$

así se tiene,

$$\begin{aligned}(D-\lambda)(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}) &= D(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}) - \tfrac{\lambda t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ &= \tfrac{1}{(m-1)!}[(m-1)t^{m-2}e^{\lambda t} + \lambda t^{m-1}e^{\lambda t}] - \tfrac{\lambda t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ &= \tfrac{m-1}{(m-1)!}t^{m-2}e^{\lambda t} + \tfrac{\lambda t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} - \tfrac{\lambda t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ &= \tfrac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t},\end{aligned}$$

que al aplicar $(D-\lambda)^{m-1}$ en ambos lados de la igualdad anterior se obtiene que el segundo miembro de esta ecuación se hace cero ya que $(D-\lambda)^{m-1}$ anula a $\dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t}$; luego $(D-\lambda)^m\varphi_m(t) = 0$, con lo cual φ_m es anulada por $(D-\lambda)^m$ y así se completa la demostración.

Definición 1.8 Todo conjunto de n soluciones linealmente independiente en un intervalo J de un operador diferencial L de orden n con coeficientes constantes, se llama conjunto fundamental de soluciones en el intervalo J.

Para la solución de una ecuación diferencial lineal de orden n se hace uso del determinante de una matriz la cual se enuncaiará ahora.

Supóngase que las $u_1, u_2, ..., u_n$ funciones poseen $n-1$ derivadas continuas en J. La matriz siguiente

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1' & u_2' & ... & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

se llama matriz wronskiana y su determinante

$$W(u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1' & u_2' & \vdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se donomina wronskiano del conjunto $u_1, u_2, ..., u_n$.

Seguidamente, se probará que la matriz wronskiana W de n soluciones linealmente independientes $u_1, u_2, ..., u_n$ de una ecuación homogénea $L(y) = 0$ es no singular; para esto, se mostrará que el determinante de W es una función exponencial en el intervalo J a considerar. Teniéndose ésto en cuenta, defínase la función

$$w(x) = \text{det}(W) \quad \text{para cada} \quad x \in J,$$

y supóngase que la ecuación diferencial que satisfacen las n funciones $u_1, u_2, ..., u_n$ es de la forma

$$(1.7) \qquad y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0.$$

Luego, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.5 El determinante wronskiano satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$(1.8) \qquad w' + P_1(x)w = 0 \quad \text{en} \quad J,$$

por consiguiente, si $c \in J$, entonces

$$(1.9) \qquad w(x) = w(c) \exp\left[-\int_c^x P_1(t)dt\right].$$

Además, $w(x) \neq 0$ para todo $x \in J$.

Demostración.

Sea u el vector fila $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$. Puesto que cada u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ satisface la ecuación diferencial (1.7), luego u también satisface dicha ecuación.

Las filas de la matriz W son los vectores $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$; luego w puede escribirse de la siguiente forma

$$w = \text{det}W = \text{det}(u, u', \ldots, u^{(n-1)}).$$

Puesto que, dada una matriz de tamaño $n \times n$ definida por $F(x) = det[f_{ij}(x)]$, donde las $f_{ij}(x)$ son derivables; luego su derivada viene dada como una suma de determinantes, a saber, $F'(x) = \sum_{i=1}^{n} detA_i(x)$, donde $A_i(x)$ es la matriz que se obtiene derivando las funciones de la fila i de $[f_{ij}(x)]$; por consiguiente, $w' = \text{det}(u, u', \ldots, u^{(n-2)}, u^{(n)})$ ya que hay $n-1$ sumandos que se anulan porque tienen dos filas iguales. De este modo al multiplicar la última fila de w por $P_1(x)$ se obtiene

$$P_1(x)w = \text{det}(u, u', \ldots, P_1(x)u^{(n-1)});$$

por consiguiente,

$$w' + P_1(x)w = \mathsf{det}(u, u', \ldots, u^{(n-2)}, P_1(x)u^{(n-1)} + u^{(n)}).$$

Pero las filas de este último determinante son linealmente dependientes ya que u satisface (1.7); de ahí que dicho determinante sea cero y así w satisface (1.8).

Consecuentemente, si $c \in J$, entonces w es de la forma

$$w(x) = w(c)\exp[-A(x)], \qquad \text{con} \qquad A(x) = \int_c^x P_1(t)dt$$

Seguidamente, se demostrará que $w(c) \neq 0$ para algún c en J; para esto, supóngase lo contrario, que $w(t) = 0$ para todo $t \in J$. Elíjase un t fijo en J, sea este $t = t_0$, y consíderese el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$W(t_0)X = 0,$$

donde X es un vector columna. Puesto que $\mathsf{det}W(t_0) = 0$, la matriz $W(t_0)$ es singular, de ahí que el sistema admita una solución no nula, sea ésta $X = (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Haciéndose uso de las componentes de este vector X, sea f la combinación lineal

$$f(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_nu_n(t).$$

f satisface la ecuación $L(y) = 0$ ya que es combinación lineal de $u_1, u_2, ..., u_n$; así, la ecuación matricial $W(t_0)X = 0$ implica que

$$f(t_0) = f'(t_0) = \cdots = f^{(n-1)}(t_0) = 0;$$

por consiguiente, f tiene como valor inicial el vector 0 en $t = t_0$, de modo que f es la solución cero, lo que implica que $c_1 = \cdots = c_n = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto $w(t) \neq 0$ para algún $t \in J$. Tomándose ese valor de t como c en (1.9) se observa que $w(x) \neq 0$ para todo $x \in J$, que era lo que se quería demostrar.

Posteriormente, un sistema lineal de primer orden es aquel que consta de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con n funciones incógnitas $y_1, y_2, ..., y_n$; viene dado de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + ... + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + ... + p_{nn}(t)y_n + q_n(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Las funciones p_{ik} y q_i que aparecen en (1.10) se consideran funciones dadas definidas en un cierto intervalo J, y las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son las funciones incógnitas que hay que determinar.

En notación matricial el sistema queda de la siguiente forma

$$Y' = P(t)Y + Q(t)$$

Siendo $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$, $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))$ y $P(t) = [p_{ji}(t)]$ con $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq n$ para cada t de J.

Adicionalmente, el problema de valor incial asociado a tal sistema es el siguinte:

Problema de valor inicial: Sea t_0 un punto en el intervalo J y
$Y(t_0) = (y_1(t_0), y_2(t_0), ..., y_n(t_0)) = (a_1, a_2, ..., a_n) = Y_0$ donde las a_i, con $i = 1, 2, ..., n$ son constantes dadas. Entoces, el problema
Resolver: $Y' = P(t)Y + Q(t)$
Sujeto a: $Y(t_0) = Y_0$
es un problema de valor inicial en el intervalo J.

Además, dada una ecuación diferencial lineal de orden n siempre puede transformarse en un sistema; para esto, supóngase que la ecuación de orden n es

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = R(t), \tag{1.11}$$

donde los coeficientes a_i son funciones dadas. Para transformarla en un sistema se escribe $y_1 = y$ y se introduce una nueva función incógnita para cada una de las sucecivas derivadas de y. esto es, se pone

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2', ..., y_n = y_{n-1}'$$

Así, se escribe (1.11) como sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - ... - a_1 y_n + R(t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Capítulo 2

Solución del problema $x'(t) = Ax(t)$ por el método clásico.

Debido a que para el caso escalar,la solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$, donde P y Q son funciones continuas en un intervalo J, viende dada por la fórmula

$$f(x) = f(a)e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}dt,$$

donde $A(x) = \displaystyle\int_a^x P(t)dt$ y $f(a) = b$ es la condición inicial.

La idea ahora es generalizar este resultado para sistemas lineal de ecuaiones diferenciales. Para ello es necesario introducir conceptos tales como integral de una matriz, derivada de una matriz, exponencial de una matriz; además de generalizar resultados clásicos del cálculo de una variable. De acuerdo a esto, en lo que sigue se trataran dichas temáticas.

2.1. Cálculo con funciones matriciales

Para generalizar los conceptos de integral y derivada de funciones matriciales se hace lo siguiente. Consíderese la matriz de funciones $P(t) = [p_{ij}(t)]$, y defínase la integral $\displaystyle\int_a^b P(t)dt$ por

$$\int_a^b P(t)dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right].$$

Esto es, la integral de la matriz $P(t)$ es la matriz obtenida integrando cada elemento de $P(t)$, suponiéndose como es natural, que cada elemento sea integrable en $[a, b]$. La linealidad para las integrales se generaliza para las funciones matriciales. En efecto, sean $P(t) = [p_{ij}(t)]$ y $Q(t) = [q_{ij}(t)]$ funciones matriciales de tamaños adecuados y c un número real; así,

$$\begin{aligned}\int_a^b [cP(t) + Q(t)]dt &= \left[\int_a^b [cp_{ij}(t) + q_{ij}(t)]dt\right] \\ &= \left[c\int_a^b p_{ij}(t)dt + \int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\ &= \left[c\int_a^b p_{ij}(t)dt\right] + \left[\int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\ &= c\left[\int_a^b p_{ij}(t)dt\right] + \left[\int_a^b q_{ij}(t)dt\right] \\ &= c\int_a^b P(t)dt + \int_a^b Q(t)dt.\end{aligned}$$

La continuidad y derivabilidad de funciones matriciales se definen también en función de los elementos; esto es, se dice que una función matricial $P = [p_{ij}]$ es continua en t si cada elemento p_{ij} es continuo en t. La derivada P' se defiine derivándose cada elemento

$$P'(t) = \left[p'_{ij}\right]$$

siempre que existan todas las derivadas p'_{ij}. Se puede comprobar las siguientes reglas de la derivación para funciones matriciales, suponiéndose que P y Q sean derivables:

► Si P y Q son del mismo tamaño, entonces $(P + Q)' = P' + Q'$. En efecto,

$$(P(t) + Q(t))' = [(p_{ij} + q_{ij})'] = \left[p'_{ij} + q'_{ij}\right] = \left[p'_{ij}\right] + \left[q'_{ij}\right] = P'(t) + Q'(t)$$

.

► Sean P y Q matrices de tamaños distintos de modo que la multiplicación esté bien definida, entonces $(PQ)' = PQ' + P'Q$. En efecto,

$$\begin{aligned}(P(t)Q(t))' = [(p_{ij}q_{ij})'] &= \left[p_{ij}q'_{ij} + p'_{ij}q_{ij}\right] = \left[p_{ij}q'_{ij}\right] + \left[p'_{ij}q_{ij}\right] \\ &= P(t)Q'(t) + P'(t)Q(t).\end{aligned}$$

► Sean P una función matricial derivable y g una función escalar derivable cuyo recorrido sea un subconjunto del dominio de P. Defínase la función compuesta

$F(t) = P[g(t)]$, entonces se cumple la regla de la cadena, $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$.

En efecto, se tiene que $F(t) = P[g(t)] = [p_{ij}[g(t)]]$; así,

$$F'(t) = [(p_{ij}[g(t)])'] = \left[g'(t)p'_{ij}[g(t)]\right] = g'(t)P'[g(t)].$$

Antes de exponer la definición de la exponencial de una matriz, se darán varios conceptos.

2.2. Series de matrices y normas de matrices

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$ de elementos reales o complejos. Se quiere definir la exponencial e^A de manera que posea alguna de las propiedades fundamentales de la exponencial ordinaria de valores reales o complejos; en particular, se exigirá la ley de los exponentes en la forma

$$\text{(2.1)} \qquad e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} \quad \text{para todo par} \quad s \quad \text{y} \quad t \quad \text{reales,}$$

y la relación

$$\text{(2.2)} \qquad e^0 = I$$

donde 0 e I son las matrices $n \times n$, cero e identidad respectivamente. Puede parecer natural definir e^A como la matriz $[e^{a_{ij}}]$. No obstante, eso no es aceptable porque no satisface ninguna de las propiedades (2.1) o (2.2). En lugar de ello, se define e^A por medio de un desarrollo de serie de potencias,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Se sabe que esta fórmula es válida si A es un numero real o complejo, y se desmostrará que satisfacen las propiedades (2.1) y (2.2) si A es una matriz. Antes se necesitará aclarar qué se entiende por serie convergente de matrices.

Definición 2.2.1 *Dada una sucesión $\{C_k\}$ de matrices $m \times n$ cuyos elementos son números reales o complejos, desígnese el elemnto ij de C_k por $c_{ij}^{(k)}$. Si todas las mn series*

$$\text{(2.3)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \qquad (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$$

son convergentes, se dice entonces que la serie de matrices $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ *es convergente, y su suma está definida como la matriz* $m \times n$ *cuyo elemento* ij *es la serie (2.3).*

Un sencillo y útil criterio de convergencia de una serie de matrices puede darse en función de la norma de una matriz, generalización del valor absoluto de un número.

Definición 2.2.2 *Si* $A = [a_{ij}]$ *es una matriz* $m \times n$ *de elementos reales o complejos, la norma de* A*, designada por* $\|A\|$*, se define como el número no negativo dado por la fórmula*

$$\text{(2.4)} \qquad \|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

es decir, la norma de A *es la suma de los valores absolutos de todos sus elementos. Se usa ésta norma para demostrar las propiedades siguientes.*

Teorema 2.2.1 *Para las matrices rectangulares* A *y* B*, y todos los escalares* c *reales o complejos se tiene*

a) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

c) $\|cA\| = |c|\|A\|$

Demostración

a) Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$; asi,

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij} + b_{ij}|) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

b) Supóngase que la matriz A es de tamaño $m \times n$ y la matriz B de tamaño $n \times p$. Escribiendo $A = [a_{ik}]$ y $B = [b_{kj}]$, tenemos $AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$, asi que se tiene

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}|\\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}b_{kj}|\\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}|\\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\|B\|\\ &= \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

c) Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y c un escalar; luego,

$$\|cA\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|ca_{ij}| = |c|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = |c|\|A\|$$

Nota 2.2.1 *En el caso que $A = B$, la desigualdad para $\|AB\|$ se convierte en $\|A^2\| \leq \|A\|^2$, y por inducción se tiene*

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k.$$

Para probar lo anterior se hará inducción sobre k. Nótese que para $k = 1$ es la parte b) del teorema 1; así, supóngase que el enunciado es cierto para $k = n$ y se probará que es cierto para $k = n + 1$. En efecto,

$\|A^{n+1}\| = \|A^nA\| \leq \|A^n\|\|A\| \leq \|A\|^n\|A\| = \|A^{n+1}\|$*, donde se usó la parte b) y la hipótesis de inducción en la primera y segunda desigualdad respectivamente.*

El teorema siguiente da una útil condición suficiente para la convergencia de una serie de matrices.

Teorema 2.2.2 *Si $\{C_k\}$ es ua sucesión de matrices $m \times n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty}\|C_k\|$ converge, entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ también converge.*

Demostración.
Desígnese el elemento ij de C_k por c_{ij}^k. Puesto que $|c_{ij}^k| \leq \|C_k\|$, la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty}\|C_k\|$ implica la convergencia absoluta de cada una de las series $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$, luego cada una de las series $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ es convergente, por lo que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ es convergente.

2.3. Exponencial de una matriz.

Al aplicarse el teorema 2.2.2 se demuestra que la serie matricial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.5}$$

converge para cualquier matriz cuadrada A con elementos reales o complejos (se sobreentiende que el término correspondiente a $k = 0$ es la matriz identidad I). Por la nota 2.2.1 se tiene que cada uno de los términos satisface la desigualdad

$$\|\frac{A^k}{k!}\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge para todo número real a, el teorema 2.2.2 implica que la serie (2.5) converge para toda matriz cuadrada A.

Definición 2.3.1 *Dada una matriz cualquiera A, $n \times n$, con elementos reales o complejos se define la exponencial e^A como la matriz $n \times n$ dada por la serie convergente (2.5). Esto es,*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Nota 2.3.1 *Note que la definición implica que $e^0 = I$, donde 0 es la matriz cero.*

ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE SE SATISFACE POR e^{tA}

Sean t un número real, A una matriz $n \times n$ y $E(t)$ la matriz $n \times n$ dada por

$$E(t) = e^{tA}.$$

Se mantendrá A fijo y se estudiará esa matriz como una funcion de t. Se obtendrá primero una ecuación diferencial a la que satisfaga E.

Teorema 2.3.1 *Para todo real t la función matricial E definida por $E(t) = e^{tA}$ satisface la ecuación diferencial matricial*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t)$$

Demostración.
De la definición de la exponencial de una matriz se tiene que

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Desígnese con $c_{ij}(k)$ el elemento ij de A^k. Entonces el elemento ij de $t^k A^k/k!$ es $t^k c_{ij}^{(k)}/k!$; luego, de la definición de la serie matricial, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)} \right]. \tag{2.6}$$

Cada elemento del segundo miembro en (2.6) es una serie de potencias en t, convergente para todo t y viene dada por la serie derivada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k+1)},$$

lo cual demuestra que existe la derivada $E'(t)$ y viene dada por la serie matricial

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} A = E(t)A,$$

donde se ha se utilizado la propiedad $A^{k+1} = A^k A$ en la última ecuación. Puesto que A es permutable con A^k se puede también escribir $A^{k+1} = AA^k$ para obtener la relación $E'(t) = AE(t)$. Esto completa la demostración.

Nota 2.3.2 *La demostración anterior pone también en evidencia que A es permutable con e^{tA}.*

Seguidamente, se muestra un teorema de unicidad que caracteriza todas las soluciones de la ecuación diferencial matricial $F'(t) = AF(t)$. Primero se prueba el siguiente teorema que sirve para su demostración.

Teorema 2.3.2 *Cualquiera que sea la matriz A, $n \times n$, y el escalar t se tiene que*

$$e^{tA} e^{-tA} = I, \tag{2.7}$$

entonces e^{tA} es no singular y su inversa es e^{-tA}.

Demostración.
Antes de dar la demostración se enunciará otro resultado que también es válido para funciones matriciales, a saber, el teorema de la derivada nula: si $P'(t) = 0$ para todo t en un intervalo abierto (a, b), la función matricial P es constante en (a, b).

Sea ahora F la función matricial definida para todo número real t mediante la ecuación

$$F(t) = e^{tA}e^{-tA}.$$

Se probará que $F(t)$ es la matriz identidad I haciendo ver que la derivada $F(t)$ es la matriz cero; así, derivándose F como un producto, y recordando el resultado del teorema 2.3.1, resulta que

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{tA}(e^{-tA})' + (e^{tA})'e^{-tA} = e^{tA}(-Ae^{-tA}) + Ae^{tA}e^{-tA} \\ &= -Ae^{tA}e^{-tA} + Ae^{tA}e^{-tA} = 0. \end{aligned}$$

Puesto que A es permutable con e^{tA}, por consiguiente, según el teorema de la derivada nula, F es una matriz constante; pero $F(0) = e^{0A}e^{0A} = I$, por lo cual $F(t) = I$ para todo t. Esto demuestra (2.7).

Teorema 2.3.3 *Sean A y B dos matrices constantes $n \times n$ dadas. La única función matricial F, $n \times n$, que satisface el problema de valor inicial*

$$F'(t) = AF(t), \qquad F(0) = B$$

para $-\infty < t < +\infty$ es

$$F(t) = e^{tA}B. \tag{2.8}$$

Demostración.

Obsérvese primero que $e^{tA}B$ es una solución. Sea ahora F una solución cualquiera y consíderese la función matricial

$$G(t) = e^{-tA}F(t);$$

al derivar este producto se obtiene

$$G'(t) = e^{-tA}F'(t) - Ae^{-tA}F(t) = e^{-tA}AF(t) - e^{-tA}AF(t) = 0;$$

por consiguiente $G(t)$ es una matriz constante,

$$G(t) = G(0) = F(0) = B,$$

es decir, $e^{-tA}F(t) = B$. Multiplicándose por e^{tA} y aplicándose (2.7) se obtiene (2.8).

Nota 2.3.3 *El mismo tipo de demostración hace ver que $F(t) = Be^{tA}$ es la única solución del problema de valor inicial*

$$F'(t) = F(t)A, \qquad F(0) = B.$$

Ley de exponentes para exponenciales de matrices.

La ley de exponentes $e^A e^B = e^{A+B}$ no siempre es válida para exponenciales de matrices. Sin embargo para matrices permutables se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.4 *Sean A y B dos matrices $n \times n$ permutables, $AB = BA$. Se tiene*

$$e^A e^B = e^{A+B} \tag{2.9}$$

Demostración.

De la ecuación $AB = BA$ se deduce que

$$A^2B = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2,$$

de modo que B es permutable con A^2. Por inducción se obtiene que $A^kB = BA^k$ para cualquier k. Siendo así, supóngase que se cumple la afirmación para $k = n$ y veamos que es cierto para $k = n + 1$; en efecto,

$$A^{n+1}B = A^n(AB) = A^n(BA) = (A^nB)A = (BA^n)A = B(AA^n) = BA^{n+1},$$

así, se tiene que la afirmación es cierta. Escribiendo e^{tA} en forma de serie de potencias se encuentra que B también es permutable con e^{tA} para todo t real; en efecto,

$$e^{tA}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Bt^kA^k}{k!} = B\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^kA^k}{k!} = Be^{tA}$$

Sea ahora F la función matricial definida por la ecuación

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB};$$

al derivarse $F(t)$ y teniéndose en cuenta que B es permutable con e^{tA} se encuentra que

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{t(A+B)} - (A+B)e^{tA}e^{tB} \\ &= (A+B)F(t). \end{aligned}$$

Según el teorema 2.3.3 se tiene que

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0).$$

Pero $F(0) = 0$, así que $F(t) = 0$ para todo t; luego

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB},$$

y cuando $t = 1$ se obtiene (2.9).

2.4. Teoremas para sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes.

La ecuación diferencial vectorial $Y'(t) = AY(t)$, donde A es una matriz constante $n \times n$ e Y es una función vectorial n-dimensional (considerada como una matriz columna $n \times 1$) se denomina sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes. Se utilizará la exponencial de una matriz para dar una fórmula explícita de la solución de un tal sistema. Como resultado de esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1 *Sean A una matriz constante $n \times n$ dada y B un vector n-dimensional. El problema de valor inicial*

$$\text{(2.10)} \qquad Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = B,$$

tiene solución única en el intervalo $-\infty < t < +\infty$; esta solución viene dada por la fórmula

$$\text{(2.11)} \qquad Y(t) = e^{tA}B$$

Más general, la única solución del problema de valor inicial

$$\text{(2.12)} \qquad Y'(t) = AY(t), \qquad Y(a) = B, \text{ es}$$

$$\text{(2.13)} \qquad Y(t) = e^{(t-a)A}B.$$

Demostración.

Al derivar (2.11) se obtiene $Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t)$. Puesto que $Y(0) = e^{0A}B = e^{0}B = IB = B$, ésta es una solución del problema de valor inicial (2.10). Para demostrar que es la única solución, sea $Z(t)$ otra función vectorial que satisfaga $Z'(t) = AZ(t)$ con $Z(0) = B$, y póngase $G(t) = e^{-tA}Z(t)$; luego se tiene que

$$\begin{aligned} G'(t) &= e^{-tA}Z'(t) - Ae^{-tA}Z(t) = e^{-tA}AZ(t) - Ae^{-tA}Z(t) \\ &= Ae^{-tA}Z(t) - Ae^{-tA}Z(t) = 0, \end{aligned}$$

así, que $G(t) = G(0) = Z(0) = B$. Es decir, $e^{-tA}Z(t) = B$, de modo que $Z(t) = e^{tA}B = Y(t)$.

Para el caso general, al derivar (2.13) se tiene que $Y'(t) = Ae^{(t-a)A}B = AY(t)$, y ya que $Y(a) = e^{0A}B = e^{0}B = IB = B$, ésta es una solución del problema de valor inicial (2.12). Para demostrar que es la única solución, sea $Z(t)$ otra función vectorial que satisfaga $Z'(t) = AZ(t)$ con $Z(a) = B$, y póngase $G(t) = e^{-(t-a)A}Z(t)$; luego se tiene que

$$\begin{aligned} G'(t) &= e^{-(t-a)A}Z'(t) - Ae^{-(t-a)A}Z(t) = e^{-(t-a)A}AZ(t) - Ae^{-(t-a)A}Z(t) \\ &= Ae^{-(t-a)A}Z(t) - Ae^{-(t-a)A}Z(t) = 0, \end{aligned}$$

así que, $G(t) = G(0) = Z(0) = B$. Es decir, $e^{-(t-a)A}Z(t) = B$, de modo que $Z(t) = e^{(t-a)A}B = Y(t)$.

Ahora que se tiene una fórmula explícita para la solución de un sistema homogéneo con coeficientes constantes, queda todavía el problema de calcular efectivamente la exponencial e^{tA}, ya que si se realiza el cálculo por medio de la definición puede éste resultar en un trabajo muy demorado. Sin embargo, si se conocen ciertas características de la matriz A puede el trabajo del cálculo resultar más sencillo.

Algunos casos son:

▶ Si A es una matriz diagonal, es decir, $A = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, entonces cualquier potencia de A también será una matriz diagonal, a saber, $A^k = diag\left(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k\right)$; luego

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!}, ..., \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_n^k}{k!}\right) = diag\left(e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}\right)$$

▶ Si A es una matriz diagonalizable, es decir, existe una matriz C no singular tal que $C^{-1}AC$ es una matriz diagonal. Sea $C^{-1}AC = D$, entonces queda $A = CDC^{-1}$, y a partir de aquí se puede obtener

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1};$$

en un proceso análogo se llega a

$$A^k = CD^kC^{-1},$$

por consiguiente,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k CD^kC^{-1}}{k!} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!}\right)C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

Ahora bien, ya que lo anterior muestra el modo como se calcula e^{tA} teniéndose en cuenta las caraterísticas de la matriz A, la idea ahora es mostrar el método de Putzer, el cual es un método más práctico para calcular e^{tA} puesto que sirve para toda matriz A. Así pues, en lo seguido se enunciará un resultado que servirá para esta tarea.

Teorema 2.4.2 *TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON.*

Sean A una matriz $n \times n$ y

$$f(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_1\lambda^1 + c_0 \tag{2.14}$$

su polinomio caraterístico. Entonces $f(A) = 0$, es decir, A satisface la ecuación

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + ... + c_1 A + c_0 I = 0 \tag{2.15}$$

Demostración.

En la demostración se usará el hecho que establece que para toda matriz cuadrada A se tiene

$$(2.16) \qquad A(cofA)^t = (detA)I.$$

Se aplicará esta fórmula y se reemplazará A por $\lambda I - A$.
Puesto que $det(\lambda I - A) = f(\lambda)$, la ecuación (2.16) se convierte en

$$(2.17) \qquad (\lambda I - A)\{cof(\lambda I - A)\}^t = f(\lambda)I.$$

Esta ecuación es válida para todo real λ. La idea de la demostración consiste en hacer ver que también es válida cuando λ se reemplaza por A.

Los elementos de la matriz $cof(\lambda I - A)$ son los cofactores de $\lambda I - A$. Excepto para un factor ± 1, cada uno de tales cofactores es el determinante de una menor de $\lambda I - A$ de orden $n - 1$. Por lo tanto, cada elemento de $cof(\lambda I - A)$, y por consiguiente de $\{cof(\lambda I - A)\}^t$, es un polinomio en λ de grado $\leq n - 1$. Por tanto,

$$\{cof(\lambda I - A)\}^t = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k,$$

donde cada coeficiente B, es una matriz $n \times n$ con elementos escalares. Así, al aplicar ésto en (2.17) se obtiene la relación

$$(2.18) \qquad (\lambda I - A) \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = f(\lambda)I,$$

que se puede poner en la forma

$$(2.19) \qquad \lambda^n B_{n-1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (B_{k-1} - AB_k) - AB_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k c_k I + c_0 I.$$

Igualándose ahora los coeficientes de las potencias semejantes de λ en (2.19) se obtiene las ecuaciones

$$(2.20) \qquad \begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1}I \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I \\ -AB_0 &= c_0 I \end{aligned}$$

La igualación de los coeficientes es posible porque (2.20) es equivalente a n^2 ecuaciones escalares, en cada una de las cuales se puede igualar los coeficientes de potencias semejantes de A. Multiplicándose a continuación las ecuaciones (2.20) sucesivamente por $A^n, A^{n-1}, ..., A, I$ y sumándose los resultados, los términos del primer miembro desaparecen y se obtiene

$$0 = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + ... + c_1 A + c_0 I,$$

lo cual demuestra el teorema de Cayley-Hamilton.

2.5. Método de Putzer para calcular e^{tA}.

El teorema de Cayley-Hamilton demuestra que la potencia n-ésima de cualquier matriz A, $n \times n$, puede expresarse como combinación lineal de las potencias inferiores $I, A, A^2, ..., A^{n-1}$. De aquí resulta que cada una de las potencias superiores $A^{n+1}, A^{n+2}, ...$, también puede expresarse como combinación lineal de $I, A, A^2, ..., A^{n-1}$. Por lo tanto, en la serie que define e^{tA}, cada término $t^k A^k / k!$ con $k \geq n$ es una combinación lineal de $t^k I, t^k A, t^k A^2, ..., t^k A^{n-1}$. Luego cabe pensar que e^{tA} puede expresarse como un polinomio en A de la forma

$$(2.21) \qquad e^{tA} = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) A^k,$$

donde los coeficientes escalares $q_k(t)$ dependen de t.
El teorema que sigue describe el método.

Teorema 2.5.1 *Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los autovalores de una matriz A, $n \times n$, y defínase una sucesión de polinomios en A como sigue:*

$$(2.22) \qquad P_0(A) = I, \qquad P_k(A) = \textstyle\prod_{m=1}^{k} (A - \lambda_m I), \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Se tiene entonces

$$(2.23) \qquad e^{tA} = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

donde los coeficientes escalares $r_1(t), ..., r_n(t)$ se determinan por recurrencia a partir del sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$\textit{(2.24)} \qquad r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \qquad r_1(0) = 1,$$
$$r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \qquad r_{k+1}(0) = 1, \qquad (k = 1, 2, ..., n-1)$$

Demostración.

Sean $r_1(t), ..., r_n(t)$ las funciones escalares determinadas por (2.24) y defínase una función matricial F por inducción

$$\text{(2.25)} \qquad F(t) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

Obsérvese que $F(0) = r_1(0) P_0(A) = I$. Se demostrará que $F(t) = e^{tA}$ al probar que F satisface la misma ecuación diferencial que e^{tA}, es decir, $F'(t) = AF(t)$. Al derivar (2.25) y usándose las fórmulas de recurrencia (2.24) se obtiene

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \{r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)\} P_k(A),$$

donde $r_0(t)$ es por definición 0. Volviéndose a escribir esa fórmula en la forma

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}'(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

restándose luego $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A)$ para obtenerse la relación

$$\text{(2.26)} \qquad F'(t) - \lambda_n F(t) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1} \{P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A)\}.$$

Pero de (2.22) se ve que $P_{k+1} = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A)$, por lo que

$$P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A)$$
$$= (A - \lambda_n I) P_k(A).$$

Por tanto, la ecuación (2.26) se convierte en

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) &= (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) \{F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)\} \\ &= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A). \end{aligned}$$

El teorema de Cayley-Hamilton implica que $P_n(A) = 0$, así que la última ecuación se convierte en

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I)\, F(t) = AF(t) - \lambda_n F(t),$$

de la que resulta $F'(t) = AF(t)$. Puesto que $F(0) = 1$, el teorema 2.3.3 demuestra que $F(t) = e^{tA}$.

Capítulo 3

Método alterno para la solución del problema $x'(t) = Ax(t)$.

En este capítulo se expondrá el método para resolver el problema $x'(t) = Ax(t)$.

Consíderese el problema

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3.1}$$

siendo A una matriz constante de tamaño $n \times n$.

Encontrándose el polinomio caraterístico de la matriz A, a saber,

$$P(\lambda) = det\,(A - \lambda I) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{3.2}$$

se sabe que las raíces de $P(\lambda)$ son los valores propios de A.

Además, por el teorema de Cayley - Hamilton, se sabe que A satisface la ecuación $P(A) = 0$, es decir,

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI = 0, \tag{3.3}$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$.

Puesto que la ecuación matricial (3.3) es identicamente cero, entonces al multiplicarse en ambos lados por cualquier vector x de n componentes se obtiene

$$A^nx + a_1A^{n-1}x + \cdots + a_{n-1}Ax + a_nx = 0. \tag{3.4}$$

Ahora, de la ecuación (3.1), se obtiene la siguiente relación,

$$x' = Ax$$
$$x'' = Ax' = A(Ax) = A^2x$$
$$x^{(3)} = A^2x' = A^2(Ax) = A^3x$$
$$\vdots$$
$$x^{(k)} = A^kx, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Posteriormente, al hacerse uso de la ecuación (3.5), (3.4) queda de la siguiente forma

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0; \tag{3.6}$$

esto es, el vector x es una solución de una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes. Más precisamente, cada componente del vector solución x del sistema (3.1), satisface la misma ecuación diferencial escalar de orden n con coeficientes constantes,

$$x_1^{(n)} + a_1x_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_1' + a_nx_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(n)} + a_1x_n^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_n' + a_nx_n = 0$$

Como la ecuación (3.6) se puede escribir de la siguiente forma,

$$(D^{(n)} + a_1D^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)x = 0, \tag{3.7}$$

donde D^k representa el operador derivada k-ésima, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Al tenerse en cuenta que (3.7) se puede llevar a la forma (3.4), luego el polinomio caractrístico asociado a (3.7) es $P(\lambda)$.

Seguidamente, si se escribe el polinomio característico $P(\lambda)$ en forma factorizada,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \tag{3.8}$$

entonces el operador D queda factorizado como

$$(3.9) \qquad (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\dots(D-\lambda_r)^{m_r}x=0;$$

así, cada componente de x satisface la ecuación diferencial

$$(3.10) \qquad (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\dots(D-\lambda_r)^{m_r}x_i=0, \quad i=1,2,\dots,n$$

y para el valor propio λ_i, la correspondiente ecuación escalar es

$$(3.11) \qquad (D-\lambda_i)^{m_i}x=0.$$

Se sabe por el teorema 1.4 que un conjunto fundamental de soluciones de (3.11) es

$$\{\varphi_{i,m_i-1}(t)=\frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}e^{\lambda_i t},\varphi_{i,m_i-2}(t)=\frac{t^{m_i-2}}{(m_i-2)!}e^{\lambda_i t},\dots,\varphi_{i,0}(t)=e^{\lambda_i t}\}$$

Ahora, al ordenarse las soluciones en potencias decrecientes, para cada valor propio se forma el vector $\phi(t)$ cuyas n componentes son

$$\{\varphi_{1,m_1-1}(t),\dots,\varphi_{1,0}(t),\varphi_{2,m_2-1}(t),\dots,\varphi_{2,0}(t),\dots,\varphi_{r,m_r-1}(t),\dots,\varphi_{r,0}(t)\}.$$

Puesto que las componentes del vector $\phi(t)$ son soluciones de (3.10), esto significa que $\phi(t)$ es solución de (3.9); además, para cada $i=1,2,\dots,n$ se tiene que la solución general de (3.10) está dada por

$$x_i(t)=c_{i1}\phi_1(t)+c_{i2}\phi_2(t)+\dots+c_{in}\phi_n(t),$$

por consiguiente, la solución de (3.9) es de la forma

$$\begin{aligned} x_1(t)&=c_{11}\phi_1(t)+\dots+c_{1n}\phi_n(t)\\ &\vdots\\ x_n(t)&=c_{n1}\phi_1(t)+\dots+c_{nn}\phi_n(t)\end{aligned}$$

la cual se puede escribir matricialmente como

$$(3.12) \qquad x(t)=C\phi(t),$$

siendo $C=[c_{ij}]$, con $1\le i\le n$ y $1\le j\le n$.

Ahora bien, al derivar (3.12) se tiene

$$x'(t) = C\phi'(t),$$

por consiguiente, (3.12) es solución de $x'(t) = Ax(t)$ siempre que $C\phi'(t) = AC\phi(t)$.

Por otro lado, se tratará el problema (3.1) sujeto a la condición inicial $x(0) = x_0$; para esto, se comenzará construyendo la matriz wroskiana $W(t)$ del vector columna $x(t)$, la cual está conformada por las columnas $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)$, es decir,

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & \ldots & x_1^{(n-1)}(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & \ldots & x_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t) & x_n'(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = [x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)].$$

Análogamente, se construye la matriz Wroskiana $F(t)$ del vector columna $\phi(t)$, la cual está formada por las columnas $\phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t)$, es decir,

$$F(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_1'(t) & \ldots & \phi_1^{(n-1)}(t) \\ \phi_2(t) & \phi_2'(t) & \ldots & \phi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(t) & \phi_n'(t) & \ldots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = [\phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t)].$$

La idea ahora es relacionar el vector solucion $x(t)$ del sistema $x'(t) = Ax(t)$ con el vector solución de la ecuación vectorial de orden n. En tal sentido, al usarse (3.5) la matriz $W(t)$ queda redefinida de la siguiente forma

$$G(x(t)) = [x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)] = [x(t), Ax(t), \ldots, A^{(n-1)}x(t)]. \tag{3.13}$$

Con el fin de lograr el objetivo de obtener la relación deseada, se usarán las ecuaciones (3.1) y (3.12); esta última se deriva $n-1$ veces para obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= C\phi(t) \\ x'(t) &= C\phi'(t), \text{ es decir, } Ax(t) = C\phi'(t) \\ x''(t) &= C\phi''(t), \text{ es decir, } A^2x(t) = C\phi''(t) \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t) &= C\phi^{(n-1)}(t), \text{ es decir, } A^{(n-1)}x(t) = C\phi^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

de ahí que

$$
\begin{aligned}
G(x(t)) &= [x(t), Ax(t), \ldots, A^{(n-1)x}(t)] = [C\phi(t), C\phi'(t), \ldots, C\phi^{(n-1)}(t)] \\
&= C[\phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t)],
\end{aligned}
$$

concluyéndose que

$$
G(x(t)) = CF(t); \tag{3.14}
$$

así, que cuando se tiene la condición inicial en $t = 0$, $G(x_0) = C(x_0)F(0)$, donde la notación $C(x_0)$ hace indicación a la condición inicial x_0 puesto que C es una matriz constante. Usándose el teorema 1.0.5 se obtiene luego que $C(x_0) = G(x_0)F^{-1}(0)$; por consiguiente, la solución del problema $x'(t) = Ax(t)$ con $x(0) = x_0$ es

$$
x(t) = C(x_0)\phi(t),
$$

donde es necesario conocer $F(0)$ para poder obtener $C(x_0)$.

Teniéndose en cuenta que la matriz $F(0)$ está conformada por las entradas de $\phi(t)$, luego ésta viene dada en bloques de la siguiente forma

$$
F(0) = \begin{pmatrix}
\varphi_{1,m_1-1}(0) & \varphi'_{1,m_1-1}(0) & \ldots & \varphi^{(n-1)}_{1,m_1-1}(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{1,0}(0) & \varphi'_{1,0}(0) & \ldots & \varphi^{(n-1)}_{1,0}(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\underline{\varphi_{i,m_i-1}(0)} & \underline{\varphi'_{i,m_i-1}(0)} & \ldots & \underline{\varphi^{(n-1)}_{i,m_i-1}(0)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\underline{\varphi_{i,0}(0)} & \underline{\varphi'_{i,0}(0)} & \ldots & \underline{\varphi^{(n-1)}_{i,0}(0)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{r,m_r-1}(0) & \varphi'_{r,m_r-1}(0) & \ldots & \varphi^{(n-1)}_{r,m_r-1}(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\varphi_{r,0}(0) & \varphi'_{r,0}(0) & \ldots & \varphi^{(n-1)}_{r,0}(0)
\end{pmatrix}
$$

donde el bloque i de entradas subrayadas de $F(0)$ forman las m_i filas correspondiestes al valor propio λ_i.

Ahora, como

$$\varphi_{i,j}(t) = \frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t} = \frac{t}{j}\left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda_i t}\right) = \frac{t}{j}\varphi_{i,j-1}(t);$$

luego, utilizándose la derivada k-ésima de la anterior función se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned}
\varphi_{i,j}^{(k)}(0) &= \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{j}\varphi_{i,j-1}(t)\right)\right)_{t=0} \\
&= \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left(\frac{1}{j}\varphi_{i,j-1}(t) + \frac{t}{j}\varphi'_{i,j-1}(t)\right)_{t=0} \\
&= \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\left(\frac{1}{j}\varphi_{i,j-1}(t)\right)_{t=0}
\end{aligned}$$

ya que el segundo sumando se hace cero cuando $t = 0$, es decir,

$$\varphi_{i,j}^{(k)}(0) = \frac{k}{j}\varphi'_{i,j-1}(0), \quad j > 0,\ k > 0. \tag{3.16}$$

Así, cuando $k = 0$ y $j > 0$

$$\varphi_{i,j}^{(0)}(0) = \left(\frac{t^j}{j!}e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 0, \tag{3.17}$$

y cuando $j = 0$ y $k \geq 0$

$$\varphi_{i,j}^{(k)}(0) = \left(\frac{d^k}{dt^k}e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = \left(\lambda_i^k e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = \lambda_i^k. \tag{3.18}$$

Con las relaciones anteriores se puede calcular las entradas del bloque i de la matriz $F(0)$. Esto se hace de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6\lambda_i & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\lambda_i & 15\lambda_i^2 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda_i & 10\lambda_i^2 & 20\lambda_i^3 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 3\lambda_i & 6\lambda_i^2 & 10\lambda_i^3 & 15\lambda_i^4 & \ldots \\
0 & 1 & 2\lambda_i & 3\lambda_i^2 & 4\lambda_i^3 & 5\lambda_i^4 & 6\lambda_i^5 & \ldots \\
1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_i^4 & \lambda_i^5 & \lambda_i^6 & \ldots
\end{pmatrix}$$

La primera columna se obtiene así: se fija $k = 0$ y se pone a variar j. El 1 se obtiene con la ecuación (3.18) cuando $j = 0$ y los ceros usándose la ecuación (3.17).

La segunda columna se obtiene así: se fija $k = 1$ y se pone a variar j. Cuando $j = 0$ se usa la ecuación (3.18) para obtener λ_i. Posteriormente, cuando $j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$ se usa la ecuación (3.16).

Para $j = 1$, $\varphi'_{i,1}(0) = 1\varphi^{(0)}_{i,0}(0) = 1\left(e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 1.$

Para $j = 2$, $\varphi'_{i,2}(0) = \frac{1}{2}\varphi^{(0)}_{i,1}(0) = \frac{1}{2}\left(te^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 0.$

Así sucesivamente, de abajo hacia arriba en la columna son obtenidos los valores de $\varphi'_{i,j}(0)$

La tercera columna se obtiene así: se fija $k = 2$ y se pone a variar j. Cuando $j = 0$ se usa la ecuación (3.18) para obtener λ_i^2. Posteriormente, cuando $j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$ se usa la ecuación (3.16).

Para $j = 1$, $\varphi^{(2)}_{i,1}(0) = 2\varphi^{(1)}_{i,0}(0) = 1\left(\lambda_i e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 2\lambda_i.$

Para $j = 2$, $\varphi^{(2)}_{i,2}(0) = \varphi^{(1)}_{i,1}(0) = \left(e^{\lambda_i t} + \lambda_i te^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 1.$

Para $j = 3$, $\varphi^{(2)}_{i,3}(0) = \frac{2}{3}\varphi^{(1)}_{i,2}(0) = \frac{2}{3}\left(2te^{\lambda_i t} + \lambda_i t^2 e^{\lambda_i t}\right)_{t=0} = 0.$

Así sucesivamente, de abajo hacia arriba en la columna son obtenidos los valores de $\varphi^{(2)}_{i,j}(0)$

Repitiéndose el proceso anterior se obtienen los valores de las columnas restantes para $\varphi^{(3)}_{i,j}(0), \ldots, \varphi^{(n-1)}_{i,j}(0)$.

Cabe observarse que la primera columna, leida de abajo hacia arriba, es $(\lambda_i + 1)^0$, la segunda columna es $(\lambda_i + 1)^1$, la tercera es $(\lambda_i + 1)^2$ y así sucesivamente.

En lo seguido se darán ejemplos para que quede claro el método.

Ejemplo 1

Encontrar la solución del problema de valor inicial

$$x' = Ax, \text{ con } x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Lo primero que se hace es hallar el polinomio característico de la matriz A, esto es,

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1);$$

así, los valores propios son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ y $\lambda_4 = -i$, donde $i = \sqrt{-1}$. Por lo tanto,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \\ e^{it} \\ e^{-it} \end{pmatrix}$$

Ahora, $F(0)$ se encuentra de manera sencilla ya que los valores propios son distintos, esto es,

$$F(0) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

y $$F^{-1}(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}$$

Posteriormente, como $x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces

$G(x_0) = [x(0), Ax(0), A^2x(0), A^3x(0)]$, así

$$G(x_0) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $C(x_0) = G(x_0)F^{-1}(0) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1-2i & -1+2i \\ 2 & 2 & 2-i & 2+i \\ 6 & -2 & -2+i & 2-i \\ 6 & 2 & -1-2i & -1+2i \end{pmatrix}$;

de modo que la solución es

$$x(t) = C(x_0)\phi(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh t - \cos t + 2\sin t \\ 2\cosh t + 2\cos t + \sin t \\ 2\cosh t + 4\sinh t - 2\cos t - \sin t \\ 4\cosh t + 2\sinh t - \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución general del problema

$x' = Ax$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución.

Lo primero que se hace es hallar el polinomio característico de la matriz A, esto es,

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

Así, los valores propios son: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_1 = -3$; por consiguiente, el conjunto fundamental de soluciones es $\{te^{3t}, e^{3t}, e^{-3t}\}$. Por lo tanto,

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

La matriz $F(t)$ es

$$F(t) = [\phi(t), \phi'(t), \phi''(t)] = \begin{pmatrix} te^{3t} & (1+3t)e^{3t} & (3+9t)e^{3t} \\ e^{3t} & 3e^{3t} & 9e^{3t} \\ e^{-3t} & -3e^{-3t} & 9e^{-3t} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } F^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Ahora si $x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$G(x_0) = [x_0, Ax_0, A^2x_0] = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 - 2c_2 + 2c_3 & 9c_1 \\ c_2 & -2c_1 + c_2 + 2c_3 & 9c_2 \\ c_3 & 2c_1 + 2c_2 + c_3 & 9c_3 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que

$$C(x_0) = G(x_0)F^{-1}(0) = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 - 2c_2 + 2c_3 & 9c_1 \\ c_2 & -2c_1 + c_2 + 2c_3 & 9c_2 \\ c_3 & 2c_1 + 2c_2 + c_3 & 9c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_3 & \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_3 \\ 0 & \frac{2}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_3 & \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_3 \\ 0 & \frac{2}{3}c_3 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 & \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

donde a_i, b_i, $i = 1, 2, 3$ son constantes.

Por tanto, la solución general es

$$x(t) = C(x_0)\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1e^{3t} + b_1e^{-3t} \\ a_2e^{3t} + b_2e^{-3t} \\ a_3e^{3t} + b_3e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.

Resolver $x'(t) = Ax(t)$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución.

El polinomio característico de la matriz A es

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^3;$$

así, el valor propio $\lambda = 2$ tiene multiplicidad 3, de modo que

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2e^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \text{ y } \qquad F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

por consiguiente,

$$F^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, si $x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$G(x_0) = [x_0, Ax_0, A^2x_0] = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 & 4c_1 + 4c_2 + 29c_3 \\ c_2 & 2c_2 + 5c_3 & 4c_2 + 20c_3 \\ c_3 & 2c_3 & 4c_3 \end{pmatrix};$$

luego,

$$C(x_0) = G(x_0)F^{-1}(0) = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_1 + 2c_2 + 6c_3 & 4c_1 + 4c_2 + 29c_3 \\ c_2 & 2c_2 + 5c_3 & 4c_2 + 20c_3 \\ c_3 & 2c_3 & 4c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 + 6c_3 & c_1 \\ 0 & 5c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general es

$$x(t) = C(x_0)\phi(t) = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 + 6c_3 & c_1 \\ 0 & 5c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \phi(t) = \begin{pmatrix} t^2e^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-4c_2 + 5c_3)t^2e^{2t} + (2c_2 + 6c_3)te^{2t} + c_1e^{2t} \\ 5c_3te^{2t} + c_2e^{2t} \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix}$$

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró el método clásico y un método alterno para resolver el problema $x' = Ax$, siendo A una matriz constante de tamaño $n \times n$; para lo cual, se trató la teoría matemática que había detrás de los métodos, y se observa que aunque se da una fórmula explícita para la solución del problema del método clásico, es necesario la utilización del método de Putzer para encontrar tal solución, el cual es un método que no es muy económico en cuanto al tiempo que toma la realización de sus cálculos.

Por otra parte, en el método alterno se hace uso del polinomio característico de la matriz A para llevar el sistema homogéneo a una ecuación diferencial lineal de orden n, donde se obtiene un conjunto fundamental de soluciones asociado a éste, para luego encontrar una solución general. La sencillez del método radica en que con operaciones elementales del álgebra de matrices es resuelto el problema.

En resumidas cuentas, la importancia de este trabajo se basa en que gracias al método alterno se resuelve el problema de una forma más elemental y fácil, lo cual hace que sea más práctico para implementarlo en los programas de computación; y es allí en donde entra a jugar un rol importante el tiempo en que demore en ejecutarse dicho programa, de ahi que siempre se esté en la búsqueda de formas mucho más viables para la solución del problema, para que así sea de utilidad en la práctica con problemas de la ingeniería y demás.

Bibliografía

[1] B. Van Rootselaar. *How to solve the system* $x' = Ax$. American Mathematical Monthly. (1985). 92, 321-326.

[2] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Sexta edición. Internaciontal Thomsom Editores. (1997).

[3] Tom M, Apóstol. *Calculus, vol II*. Segunda edición. Editoral Reverté. (1985).

[4]J. Villegas. *Método alterno para resolver el sistema* $x'(t) = Ax(t)$. Enseñanza Universitaria.(2000).Vol VIII,No. 1,2.

[5]Laplace,P.S. *Theorie Analytique des Probabilities*. Edición Fascimil de Paris,Mme Ve. Courcier,1812,Bruselas,1967

[6]George F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Segunda edición. Mc Graw Hill.