Caracterización de Matrices Totalmente no Positivas y Totalmente Negativas

César S. Salgado Quiroz

Trabajo de grado
Para optar al título de matemático

Asesor
Pedro Pablo Ortega Palencia

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas

Cartagena de Indias D. T. y C.

Septiembre de 2010

Dedico este trabajo con todo cariño a mis padres.

Doy gracias a Dios por haberme permitido alcanzar este logro, y a mis padres por su apoyo incondicional.

Índice general

Introducción

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es totalmente no positiva (totalmente negativa) y se denota como matriz t.n.p. (t.n) si todos sus menores son no positivos (negativos). En el caso de matrices cuadradas totalmente negativas, en [6] se analizan propiedades espectrales y factorizaciones del tipo LDU. Para matrices invertibles totalmente no positivas, en [5] se estudia su caracterización a partir de la factorización LDU lo que permite, por una parte, reducir el número de menores a estudiar para saber si una matriz es totalmente no positiva y, por otra, obtener propiedades similares a las conocidas para las matrices totalmente positivas TP, es decir, matrices cuyos menores son todos no negativos. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $ran(A) = r$, se llama factorización de rango completo en forma escalonada de A a la factorización de rango completo de la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times r}$ es una matriz en la forma escalonada inferior, $D = diag(d_1, d_2, ...d_r)$ es una matriz diagonal e invertible, y $U \in \mathbb{R}^{r\times m}$ es una matriz en la forma escalonada superior. Es conocido que no todas las matrices tienen factorizaciones de este tipo, pero si dicha factorización exite, entonces es única [2]. Cuando A tiene rango completo por filas (columnas) diremos que $L(U)$ es triangular inferior (superior) unitaria.
Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en el capítulo 1, se muestra la notación respectiva y la factorización de Cholesky para matrices simétricas definidas positiva de orden $n \times n$. En el capítulo 2, a partir de la caracterización para las matrices rectangulares totalmente no positivas (totalmente negativas) en términos de su factorización de rango completo [3], se obtiene una reducción significativa del número de menores a estudiar para saber si una matriz rectangular es totalmente no positiva o totalmente negativa. Estos resultados son análogos a los conocidos para las matrices totalmente positivas TP, y para las matrices estrictamente totalmente positivas STP, matrices cuyos menores son todos positivos. y en el capítulo 3, en el caso cuadrado e invertible se traslada a las matrices t.n.p. y t.n. una caracterización a partir de su factorización QR similar a la obtenida para matrices totalmente no negativas y totalmente positivas en [8,Teorema 4.7].

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

En este capítulo se establecen algunas definiciones y notaciones básicas, necesarias para la comprensión de este trabajo.

Definición 1. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *se denota por* $A[\alpha|\beta]$ *la submatriz de* A *formada por las filas de índices* $\alpha \subseteq \{1, 2, ..., n\}$,*y las columnas de índices* $\beta \subseteq \{1, 2, ...m\}$. *La submatriz principal* $A[\alpha|\alpha]$ *se denota por* $A[\alpha]$. *Además, dados* $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $Q_{k,n}$ *denota el conjunto de todas las sucesiones crecientes de* k *números naturales menores o iguales que* n. *Cuando los números naturales son consecutivos, la secuencia se denota por* $Q^0_{k,n}$. *El cardinal de* α *se denota por* $card(\alpha)$.

Definición 2. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha, \beta \subset \{1, 2, ..., n\}$ *conjuntos de índices tales que* $card(\alpha) = card(\beta) = k$, $1 \leq k \leq n$. *Entonces el determinante de la submatriz* $A[\alpha|\beta]$ *de* A *se llama menor de orden* k. *Si* $1 \leq k < n$, *entonces,* $detA[\alpha|\beta]$ *se le llama menor propio de* A.

Definición 3. *Se denotará con* $\mathbb{R}^{n\times m}$ *al conjunto de las matrices rectangulares de orden* $n \times m$ *con entradas en el campo* $\mathbb{R}$.

Definición 4. *Una matriz real de tamaño* $n \times m$ *se dice que es totalmente no positiva (totalmente negativa) y se denota como matriz t.n.p. (t.n.) si todos sus menores son no positivos (negativos).*

Definición 5. *Dada una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *con* $ran(A) = r$, *se llama factorización de rango completo de* A *a la factorización de la forma* $A = FG$, *donde* $F \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *y* $ran(F) = r = ran(G)$.

Definición 6. *Dada una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *con* $ran(A) = r$, *se llama factorización de rango completo en forma escalonada de* A *a la factorización de rango completo de la forma* $A = LDU$, *donde* $L \in \mathbb{R}^{n\times r}$ *es una matriz en la forma escalonada inferior,* $D = diag(d_1, d_2, ..., d_r)$ *una matriz diagonal e invertible y* $U \in \mathbb{R}^{r\times m}$ *es una matriz en la forma escalonada superior.*

Definición 7. *Una matriz está en forma escalonada superior si cumple las tres condiciones siguientes:*

i. su primer elemento no nulo situado más a la izquierda en cada fila es un 1 llamado 1 principal de dicha fila.

ii. cada 1 principal está situado a la derecha de los 1´s principales de las filas anteriores.

iii. las filas nulas se sitúan debajo, en las últimas filas de la matriz.

Definición 8. *Una matriz está en forma escalonada inferior si su transpuesta está en forma escalonada superior.*

Definición 9. *Una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *es estrictamente totalmente positiva* (STP) *si todos sus menores son positivos.*

Definición 10. *Una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *en forma escalonada inferior* $(superior)$ *es* $\triangle STP$ *si todos sus menores no triviales son positivos.*

Definición 11. *Una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *es totalmente positiva* (TP) *si todos sus menores son no negativos.*

Teorema 1. *Una matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es invertible si y sólo si* $detA \neq 0$.

1.1. Identidad de Cauchy-Binet

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tal que $m \leq n$. Sea γ una función de $\{1, 2, ..., m\}$ en $\{1, 2, ..., n\}$, tal que $\gamma(1) < \gamma(2) < ... < \gamma(m)$. Usando los valores $\gamma(1), ..., \gamma(m)$ para seleccionar m columnas de A para formar una matriz A_γ de orden $m \times m$ y las filas correspondientes de B para formar una matriz B_γ de orden $m \times m$, entonces,
$detAB = \sum_\gamma detA_\gamma detB_\gamma$. En [1], la identidad es expresada de la siguiente manera,
$detAB[\alpha|\beta] = \sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detA[\alpha|\gamma]detB[\gamma|\beta]$, con $car(\gamma) = car(\alpha) = car(\beta)$.

1.2. Factorización de Cholesky

Toda matriz simétrica, definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite una única factorización de Cholesky $A = LL^t$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior con diagonal principal positiva; L es llamada factor triangular inferior de Cholesky de A. Cuando $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se obtiene la factorización de A^tA. Si A tiene rango completo por columnas, entonces A^tA es simétrica definida positiva, en otro caso, es simétrica semidefinida positiva y tiene una única fartorización de Cholesky de rango completo.

Ejemplo 1. *La matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ *es simétrica definida positiva y por tanto admite una única factorización de Cholesky,* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3/2 & \sqrt{19}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ 0 & \sqrt{19}/2 \end{bmatrix} = LL^t$.

Capítulo 2

Caracterización de matrices t.n. y t.n.p. por menores

En esta sección obtenemos una caracterización de las matrices totalmente negativas (t.n.) y de las matrices totalmente no positivas (t.n.p.) a partir del signo de determinados menores, teniendo en cuenta su factorización de rango completo en forma escalonada. Resultados similares para matrices STP se pueden encontrar en [9] y para TP en [4].

Teorema 2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $a_{nm} < 0$ y $n \leq m$. A es una matriz t.n. si y sólo si A admite una factorización de rango completo en forma escalonada $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz escalonada inferior $\triangle STP$, $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es una matriz escalonada superior $\triangle STP$ y $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Demostración. Ver ([3]. Teorema 5) □

Teorema 3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $a_{11} < 0$, $a_{nm} \leq 0$ y $ran(A) = r$. A es una matriz t.n.p. si y sólo si A admite una factorización de rango completo en forma escalonada $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times r}$ es una matriz TP escalonada inferior, $U \in \mathbb{R}^{r\times m}$ es una matriz TP escalonada superior, $ran(L) = ran(U) = r$, todos los elementos de L y de U que no son nulos, por la estructura triangular de las matrices deben ser necesariamente positivos, y $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_r)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., r$.*

Demostración. Ver ([3]. Teorema 9) □

Nota 1. *En el Teorema 2, sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz t.n.p. y $a_{11} < 0$. Consideremos la factorización $A = LDU$, entonces las entradas de la primera columna $(fila)$ de $L(U)$ son positivas, por que si $l_{j1} = 0$ $(U_{1j} = 0)$ para algún $j \in \{2, 3, ..., n\}$, entonces, $a_{jj} > 0$ lo cual contradice el hecho de que A sea t.n.p., además como $L(U)$ es una matriz TP tenemos que $detL[j, i|1, j] \geq 0$ $(detU[1, j|j, i] \geq 0)$, así $l_{ij} > 0$ $(U_{ji} > 0)$ para todo $i > j$, Por lo tanto $L(U)$ es una matriz TP triangular inferior $(superior)$ unitaria con entradas positivas debajo $(encima)$ de la diagonal principal.*

Teorema 4. *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es STP si y sólo si para cada $k = 1, 2, ..., n$. Las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] > 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n} \tag{2.1}$$

$$detA[1, 2, ..., k|\beta] > 0, \;\; para \;\; todo \;\; \beta \in Q^0_{k,m} \tag{2.2}$$

Demostración. Ver [9. Teorema 4.1] □

Definición 12. *Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, sus menores $detA[\alpha|1, 2, ..., k]$ con $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., \min\{n, m\}$, se llaman menores iniciales por columnas de A, y los menores $detA[1, 2, ..., k|\beta]$ con $\beta \in Q^0_{k,m}$ y $k = 1, 2, ..., \min\{n, m\}$, se conocen como menores iniciales por filas de A.*

Teorema 5. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $a_{nm} < 0$ y $n \leq m$. A es una matriz t.n. si y sólo si para cada $k = 1, 2, ..., n$. Las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n} \tag{2.3}$$

$$detA[1, 2, ..., k|\beta] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \beta \in Q^0_{k,m} \tag{2.4}$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $a_{nm} < 0$ y $n \leq m$ una matriz *t.n.*, entonces, las desigualdades (2,3) y (2,4) se satisfacen como consecuencia directa de la total-negatividad de A.
Recíprocamente, supongamos que las desigualdades (2,3) y (2,4) se satisfacen, entonces, a partir de (2,4) y el método de eliminación de Gauss sin intercambio de filas, obtenemos la factorización de rango completo en forma escalonada $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ y $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es una matriz escalonada superior unitaria con la submatriz $U[1, 2, ..., n]$ triangular superior unitaria. Así por la identidad de Cauchy-Binet y por (2,3) tenemos para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$.

$$\begin{aligned}
detA[\alpha|1, 2, ..., k] &= det(LDU)[\alpha|1, 2, ..., k] \\
&= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1, 2, ..., k] \\
&= det(LD)[\alpha|1, 2, ..., k]detU[1, 2, ..., k] \\
&= det(LD)[\alpha|1, 2, ..., k] \\
&= detL[\alpha|1, 2, ..., k]detD[1, 2, ..., k] \\
&= detL[\alpha|1, 2, ..., k]\Big(-\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \; < 0
\end{aligned}$$

Luego $detL[\alpha|1,2,...,k] > 0$ para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$, $k = 1,2,...,n.$, pues $(-\prod_{i=1}^k d_i) < 0$, y de (2,4) tenemos para todo $\beta \in Q^0_{k,m}$, $k = 1,2,...,n.$,

$$\begin{aligned} detA[1,2,...,k|\beta] &= det(LDU)[1,2,...,k|\beta] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detL[1,2,...,k|\gamma]detDU[\gamma|\beta] \\ &= detL[1,2,...,k]detDU[1,2,...,k|\beta] \\ &= det(DU)[1,2,...,k|\beta] \\ &= detD[1,2,...,k]detU[1,2,...,k|\beta] \\ &= \Big(-\textstyle\prod_{i=1}^k d_i\Big)detU[1,2,...,k|\beta] < 0. \end{aligned}$$

Luego $detU[1,2,...,k|\beta] > 0$, para todo $\beta \in Q^0_{k,m}$, $k = 1,2,...,n.$, pues $(-\prod_{i=1}^k d_i) < 0$. Así por el Teorema 4, L es una matriz inferior unitaria $\triangle STP$ y U es una matriz escalonada superior unitaria $\triangle STP$. Entonces, por el Teorema 2, A es una matriz totalmente negativa. □

Ejemplo 2. *Se probará, aplicando el resultado del Teorema anterior que la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -6 \\ -6 & -5 & -9 \\ -6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

es totalmente negativa. en efecto, para $k = 1,2,3.$, *y* $\beta, \alpha \in Q^0_{3,3}$ *con* $Q^0_{3,3} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. *tenemos que* $detA[1,2|1,2] = -3, detA[1,2|2,3] = -3$, $detA[1,2,3|1,2,3] = -3$ *y* $detA[2,3|1,2] = -12$, *luego, la matriz* A *tiene menores iniciales por filas y menores iniciales por columnas negativos, así* A *es t.n..*

Proposición 1. *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ *con* $ran(A) = r$ *una matriz escalonada inferior. Entonces* A *es* TP *si y sólo si* $detA[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$, *para todo* $\alpha \in Q_{k,n}$, *con* $k = 1,2,...,r$.

Demostración. Si A es una matriz TP, la desigualdad $detA[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, con $k = 1,2,...,r$, es cierta por la definición de matrices TP.
Recíprocamente, supongamos que $detA[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, con $k = 1,2,...,r$, veamos que A es TP, en efecto, es suficiente mostrar que $detA[\alpha|\beta] \geq 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, para todo $\beta \in Q^0_{k,r}$ y $k = 1,2,...,r$. Si $\alpha_1 < \beta_1$, entonces $detA[\alpha|\beta] = 0$ por la forma escalonada inferior de A. Si $\alpha_1 \geq \beta_1$, sea $\gamma = \{1,2,...,\beta_1 - 1\}$, entonces,

$$0 \leq detA[\gamma \cup \alpha|1,2,...,\beta_k] = detA[\gamma \cup \alpha|\gamma \cup \beta]$$

$$= detA[\gamma]detA[\alpha|\beta] = \Big(\prod_{i=1}^{\beta_1-1} a_{ii}\Big)detA[\alpha|\beta]$$

Como $\prod_{i=1}^{\beta_1-1} a_{ii} \neq 0$ y cada $a_{ii} > 0$, tenemos $\prod_{i=1}^{\beta_1-1} a_{ii} > 0$, por tanto $detA[\alpha|\beta] \geq 0$ $\square$

Teorema 6. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible con todas sus entradas negativas excepto para la entrada (n, n) no positiva. Entonces A es t.n.p. si y sólo si para cada $k = 1, ..., n$, las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] \leq 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q_{k,n} \tag{2.5}$$

$$detA[1, 2, ..., k|\beta] \leq 0, \;\; para \;\; todo \;\; \beta \in Q_{k,n} \tag{2.6}$$

$$detA[1, 2, ..., k] < 0. \tag{2.7}$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz $t.n.p.$, entonces, las desigualdades (2,5) y (2,6) se siguen por la definición de matrices $t.n.p.$ y la desigualdad (2,7) se sigue de la Proposición 3.1. de [5].
Recíprocamente, de (2,7) obtenemos por el método de eliminación de Gauss la factorización $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$ y $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior unitaria, entonces por (2,5) y la identidad de Cauchy-Binet tenemos,

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1, 2, ..., k] &= det(LDU)[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= det(LD)[\alpha|1, 2, ..., k]detU[1, 2, ..., k] \\ &= det(LD)[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= detL[\alpha|1, 2, ..., k]detD[1, 2, ..., k] \\ &= detL[\alpha|1, 2, ..., k]\Big(-\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \leq 0 \end{aligned}$$

Puesto que $(-\prod_{i=1}^{k} d_i) < 0$, tenemos que $detL[\alpha|1, 2, ..., k] \geq 0$, para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, $k = 1, 2, ..., n$, y por la Proposición 1, L es una matriz TP.

Ahora de (2,6) y por la identidad de Cauchy-Binet tenemos,

$$\begin{aligned} detA[1,2,...,k|\beta] &= det(LDU)[1,2,...,k|\beta] \\ &= \sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detL[1,2,...,k|\gamma]detDU[\gamma|\beta] \\ &= detL[1,2,...,k]detDU[1,2,...,k|\beta] \\ &= det(DU)[1,2,...,k|\beta] \\ &= detD[1,2,...,k]detU[1,2,...,k|\beta] \\ &= \Big(-\prod_{i=1}^{k} d_i\Big)detU[1,2,...,k|\beta] \leq 0 \end{aligned}$$

para todo $\beta \in Q_{k,n}$ y $k = 1,...,n$. Como $(-\prod_{i=1}^{k} d_i) < 0$, $detU[1,2,...,k|\beta] \geq 0$, para todo $\beta \in Q_{k,n}$, $k = 1,2,...,n$, luego por la Proposición 1, U es una matriz TP y por Teorema 3, la matriz A es $t.n.p.$. □

Teorema 7. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ con $ran(A) = r$, $a_{nr} \leq 0$ y el resto de sus elementos menores que cero. Sea $A_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ la submatriz invertible de A formada por sus r primeras filas linealmente independientes. Entonces, A es $t.n.p.$ si y sólo si para cada $k = 1,2,...,r$, las siguientes desigualdades se satisfacen:*

$$detA[\alpha|1,2,...,k] \leq 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q_{k,n} \tag{2.8}$$

$$detA_1[1,2,...,k|\beta] \leq 0, \;\; para \;\; todo \;\; \beta \in Q_{k,r} \tag{2.9}$$

$$detA_1[1,2,...,k] < 0. \tag{2.10}$$

Demostración. Sea A una matriz $t.n.p.$, la desigualdad (2,8) se sigue de la definición para matrices $t.n.p.$ por otra parte, sea A_1 una submatriz de A, entonces, A_1 es una matriz $t.n.p.$ invertible y por Teorema 6, las desigualdades (2,9) y (2,10) se satisfacen. Recíprocamente, por (2,8) para todo $\alpha \in Q_{k,r}$ y $k = 1,2,...,r$, la siguiente desigualdad se satisface

$$detA_1[\alpha|1,2,...,k] \leq 0 \tag{2.11}$$

Entonces por (2,9), (2,10), (2,11) y el Teorema 6, tenemos que A_1 es una matriz $t.n.p.$ invertible. Por tanto, A_1 admite una factorización de rango completo en forma escalonada $A_1 = L_1D_1U_1$, donde $L_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz TP triangular inferior unitaria, $D_1 = diag(-d_1,...,d_r)$ con $d_i \geq 0$, $i = 1,...,r$ y $U_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz TP triangular

superior unitaria. Puesto que $A = FA_1$, donde $F \in \mathbb{R}^{n\times r}$ es una matriz escalonada inferior, tenemos que $A = FA_1 = F(L_1D_1U_1) = (FL_1)D_1U_1 = LDU$,
donde $D = D_1, U = U_1$ y $L = (FL_1)$ es una matriz escalonada inferior tal que

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= det(FL_1)D_1U_1[\alpha|1,2,...,k] \\ &= detLDU[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,r}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k]detU[1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]detD[1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(-\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \leq 0 \end{aligned}$$

Como $(-\prod_{i=1}^{k} d_i) < 0$, tenemos que $detL[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$ para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, $k = 1,...,n$, por Proposición 1, L es una matriz TP, y por Teorema 3, A es una matriz $t.n.p.$ $\square$

Capítulo 3

Caracterización de matrices t.n. y t.n.p. invertibles

En [8] los autores introducen los conceptos de inferiormente TP (inferiormente STP) y de γ -matriz (γ-matriz estricta) para matrices TP (STP) invertibles, los cuales permiten obtener una caracterización para este tipo de matrices a partir de su factorización QR. La extensión de esos conceptos y caracterizaciones a matrices TP singulares o rectangulares viene dada en [4]. En esta sección se da una caracterización similar para matrices t.n.p. (t.n.) invertibles utilizando para ello los conceptos de inferiormente t.n.p. (inferiormente t.n.) y quasi γ -matriz (quasi γ-matriz estricta), respectivamente.

Teorema 8. *Una matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inferiormente t.n.p.$(inferiormente\ t.n.)$ si y sólo si A se descompone en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior unitaria y $LDI_{(-1)}$ es una matriz TP, $(\triangle STP)$.*
Representamos por $I_{(-1)}$ a la matriz $diag(-1, 1, ..., 1)$.

Proposición 2. *Una matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inferiormente t.n.p. si y sólo si para cada $k = 1, ..., n$, se verifican las siguientes desigualdades:*

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] \leq 0, \ \ para \ \ todo \ \ \alpha \in Q_{k,n} \tag{3.1}$$

$$detA[1, 2, ..., k] < 0. \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Una matriz invertible inferiormente *t.n.p.*, entonces $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior unitaria y $LDI_{(-1)}$ es una matriz TP. Como L es una matriz triangular inferior unitaria, la total-positividad de $LDI_{(-1)}$ implica que L y $DI_{(-1)}$ son matrices TP, y aplicando la identidad de Cauchy-Binet tenemos,

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detLDU[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k]detU[1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]detD[1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(-\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \leq 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in Q_{k,n}$, $k = 1,...,n$.
y

$$\begin{aligned} detA[1,2,...,k] &= detLDU[1,2,...,k] \\ &= detL[1,2,...,k]detD[1,2,...,k]detU[1,2,...,k] < 0 \end{aligned}$$

Recíprocamente, por (3,2), A puede ser descompuesta aplicando el método de eliminación de Gauss sin intercambio de filas en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1,2,...,n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior unitaria, por (3,1) y la identidad de Cauchy-Binet, para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $k = 1,2,...,n$, se verifica

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detLDU[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k]detU[1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]detD[1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(-\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \\ &= -detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) \\ &= -detL[\alpha|1,2,...,k]detDI_{(-1)}[1,2,...,k] \\ &= -detLDI_{(-1)}[\alpha|1,2,...,k] \leq 0 \end{aligned}$$

Luego $detLDI_{(-1)}[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$ y por Proposición 1, $LDI_{(-1)}$ es una matriz TP y como consecuencia A es una matriz inferiormente $t.n.p.$. □

Proposición 3. *Una matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inferiormente t.n. si y sólo si para cada $k = 1,..,n$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$detA[\alpha|1,2,...,k] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n} \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Una matriz invertible inferiormente $t.n.$, entonces $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1,2,...,n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior unitaria y $LDI_{(-1)}$ es una matriz $\triangle STP$. Como L es una matriz triangular inferior unitaria, por ser $LDI_{(-1)}$ una matriz $\triangle STP$, se tiene que L y $DI_{(-1)}$ son matrices $\triangle STP$ y aplicando la identidad de Cauchy-Binet, se verifica

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detLDU[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k]detU[1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]detD[1,2,...,k] \\ &= detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(-\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big) < 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1,...,n$.
Recíprocamente, por (3,3) A puede descomponerse aplicando el método de eliminación de Gauss sin intercambio de filas en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1,2,...,n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior unitaria. Por la identidad de Cauchy-Binet, para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1,2,...,n$, se verifica

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detLDU[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detLD[\alpha|\gamma]detU[\gamma|1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k]detU[1,2,...,k] \\ &= det(LD)[\alpha|1,2,...,k] \end{aligned}$$

$$= detL[\alpha|1,2,...,k]detD[1,2,...,k]$$

$$= detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(-\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big)$$

$$= -detL[\alpha|1,2,...,k]\Big(\textstyle\prod_{i=1}^{k} d_i\Big)$$

$$= -detL[\alpha|1,2,...,k]detDI_{(-1)}[1,2,...,k]$$

$$= -detLDI_{(-1)}[\alpha|1,2,...,k] < 0$$

Luego $detLDI_{(-1)}[\alpha|1,2,...,k] \geq 0$ y por Teorema 4, $LDI_{(-1)}$ es una matriz $\triangle STP$ y como consecuencia A es una matriz inferiormente $t.n.$. □

Definición 13. *Una matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que es una quasi $\gamma -$ matriz (quasi $\gamma -$ matriz estricta) si es inferiormente t.n.p. ($inferiormente$ t.n.) y en la factorización $A = LDU$, $(DUI_{(-1)})^{-1}$ es TP ($\triangle STP$).*

Ejemplo 3. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es quasi $\gamma -$ matriz por que,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

siendo $LDI_{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 12 & 5 \end{bmatrix}, \qquad (DUI_{(-1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$

matrices TP triangular inferior y triangular superior, respectivamente.

Nota 2. *Una condición suficiente para que una matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sea quasi $\gamma -$ matriz es que A sea t.n.p.*
en efecto,
Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

una matriz t.n.p e invertible entonces, por Teorema 3, A puede escribirse como $A =$

LDU, donde $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz TP triangular inferior unitaria, $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz TP triangular superior unitaria y $D = diag(-d_1, d_2)$ con $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$. Esto es,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

donde $LDI_{(-1)} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ ld_1 & d_2 \end{bmatrix}$ es una matriz T.P.,

$$DUI_{(-1)} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 u \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad y \quad (DUI_{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & u/d_2 \\ 0 & 1/d_2 \end{bmatrix},$$

claramente $(DUI_{-1})^{-1}$ es una matriz TP, Por tanto una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.n.p. e invertible es una quasi $\gamma - matriz$.
Dicha condición no es necesaria, como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$ *es quasi $\gamma - matriz$ pero no es t.n.p.*

Afirmación 1. *Si una Matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $n \geq 3$ es t.n.p. entonces no es una quasi $\gamma - matriz$. En efecto,*
Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

una matriz t.n.p. e invertible y con $n \geq 3$, entonces, por Teorema 3, A puede escribirse en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz TP triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, y $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz TP triangular superior unitaria, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & ... & u_{1n} \\ 0 & 1 & ... & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$DUI_{(-1)} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1u_{12} & ... & -d_1u_{1n} \\ 0 & d_2 & ... & d_2u_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix}$$

sea $G = DUI_{(-1)}$, *entonces* $G^{-1} = \dfrac{1}{detG}C_G^t$, $detG = \prod_{i=1}^n d_i \neq 0$.

$detG = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij}m_{ij}$, $i = 1, 2, ..., n$, *para* $i = 3$ *tenemos,*

$detG = \sum_{j=1}^n (-1)^{3+j} g_{3j}m_{3j} = (-1)^{3+1}g_{31}m_{31} + (-1)^{3+2}g_{32}m_{32} + ... + (-1)^{3+n}g_{3n}m_{3n}$

donde $m_{32} = det \begin{bmatrix} d_1 & -d_1u_{13} & ... & -d_1u_{1n} \\ 0 & d_2u_{23} & ... & d_2u_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix} = u_{23}\Big(\prod_{i=1}^n d_i\Big) > 0$, $i \neq 3$

pues $\Big(\prod_{i=1}^n d_i\Big) > 0$, $i \neq 3$ *y por la nota 1,* $u_{23} > 0$, *por tanto* $-m_{32} < 0$ *es un elemento de la matriz* C_G *y de la matriz* G^{-1}, *luego* $(DUI_{(-1)})^{-1} = G^{-1} = \dfrac{1}{detG}C_G^t$ *no es una matriz* TP, *así* A *no es una quasi* $\gamma-$*matriz.*

Proposición 4. *Si* A *y* $(A^t)^{-1}$ *son matrices inferiormente t.n.p., entonces* A *es quasi* $\gamma-$ *matriz.*

Demostración. Sea A una matriz inferiormente $t.n.p.$, entonces, A se descompone en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, ..., n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior unitaria y $LDI_{(-1)}$ es una matriz TP, como L es una matriz triangular inferior unitaria, la total positividad de $LDI_{(-1)}$ implican que L y $DI_{(-1)}$ son matrices TP, como por hipótesis $(A^t)^{-1}$ es inferiormente $t.n.p.$ por la Proposición 2, se verifica que

$det(A^t)^{-1}[\gamma|1, 2, ..., k] \leq 0$, para todo $\gamma \in Q_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$

y $det(A^t)^{-1}[1,2,...,k] < 0$ por tanto,

$$\begin{aligned} det(DUI_{(-1)})^{-1}[\alpha|1,2,...,k] &= det(I_{(-1)}^{-1}U^{-1}D^{-1})[\alpha|1,2,...,k] \\ &= det(I_{(-1)}^{-1}U^{-1}D^{-1})^t[\alpha|1,2,...,k] \\ &= det((D^{-1})^t(U^{-1})^tI_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\ &= det((D^t)^{-1}(U^t)^{-1}I_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\ &= det((L)^t(A^t)^{-1}I_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detL^t[\alpha|\gamma]det((A^t)^{-1}I_{(-1)})[\gamma|1,2,...,k] \\ &= detL^t[\alpha|1,2,...,k]det(A^t)^{-1}I_{(-1)}[1,2,...,k] \\ &= detL^t[\alpha|1,2,...,k]det(A^t)^{-1}[1,2,...,k]detI_{(-1)}[1,2,...,k] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

luego por Proposición 1, $(DUI_{(-1)})^{-1}$ es una matriz TP triangular superior, y como consecuencia, A es una *quasi* $\gamma - matriz$. □

Proposición 5. *Si A y $(A^t)^{-1}$ son matrices inferiormente t.n., entonces A es quasi $\gamma-$ matriz estricta.*

Demostración. Sea A una matriz inferiormente $t.n.$, entonces, A puede descomponerse en la forma $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular inferior unitaria, $D = diag(-d_1,...,d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1,...,n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior unitaria y $LDI_{(-1)}$ es una matriz $\triangle STP$, luego L y $DI_{(-1)}$ son matrices $\triangle STP$, como por hipótesis $(A^t)^{-1}$ es inferiormente $t.n.$, por la proposición 3, se verifica,

$det(A^t)^{-1}[\gamma|1,2,...,k] < 0$, para todo $\gamma \in Q^0_{m,n}$ y $k = 1,2,...,n$, por tanto,

$$\begin{aligned}
det(DUI_{(-1)})^{-1}[\alpha|1,2,...,k] &= det(I_{(-1)}^{-1}U^{-1}D^{-1})[\alpha|1,2,...,k] \\
&= det(I_{(-1)}^{-1}U^{-1}D^{-1})^{t}[\alpha|1,2,...,k] \\
&= det((D^{-1})^{t}(U^{-1})^{t}I_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\
&= det((D^{t})^{-1}(U^{t})^{-1}I_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\
&= det((L)^{t}(A^{t})^{-1}I_{(-1)})[\alpha|1,2,...,k] \\
&= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detL^{t}[\alpha|\gamma]det((A^{t})^{-1}I_{(-1)})[\gamma|1,2,...,k] \\
&= detL^{t}[\alpha|1,2,...,k]det((A^{t})^{-1}I_{(-1)})[1,2,...,k] > 0
\end{aligned}$$

por Teorema 4, $(DUI_{(-1)})^{-1}$ es una matriz $\triangle STP$, por tanto A es una *quasi* $\gamma-matriz$ estricta. $\square$

Nota 3. *Los recíprocos de las Proposiciones 4 y 5 no son ciertos, en general, como muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 5. *las matrices* $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 45/7 \\ -6 & -11 & 121/7 \\ -4 & -5 & 55/7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -6 & -11 & 8 \\ -4 & -5 & 15 \end{bmatrix}$

son quasi $\gamma - matriz$ *y quasi* $\gamma - matriz$ *estricta, respectivamente, claramente* A *es inferiormente t.n.p y* B *es inferiormente t.n., sin embargo, las matrices*

$$(A^{t})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5/14 & -11/14 \\ 11 & -5 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad (B^{t})^{-1} = \begin{bmatrix} 25/2 & -29/5 & 7/5 \\ -5 & 11/5 & -3/5 \\ 1 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

no son inferiormente t.n.p. ni inferiormente t.n., respectivamente.

Nota 4. *Si* A *es inferiormente t.n.p. la condición necesaria y suficiente para que* $(A^{t})^{-1}$ *sea inferiormente t.n.p. es que* A *verifique las siguientes desigualdades:*

- $detA[k, k+1, ..., n] > 0$, *para todo* $k = 2, ..., n$
- $(-1)^{\sum_{i=1}^{n-k}\alpha_i + ((k+1+n)(n-k)/2)} detA[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k}|k+1, k+2, ..., n] \geq 0$, *para* $k = 1, 2, ..., n-1$ *y* $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k}\} \in Q_{n-k,n}$

Si A es inferiormente t.n. la condición necesaria y suficiente para que $(A^t)^{-1}$ sea inferiormente t.n. es que A verifique para $k = 1, 2, ..., n-1$ y $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k}\} \in Q_{n-k,n}$ la siguiente desigualdad

$$(-1)^{\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i + ((k+1+n)(n-k)/2)} det A[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k}|k+1, k+2, ..., n] > 0.$$

Teorema 9. *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $ran(A) = r$ y $(n \leq m)$ es una matriz $TP(STP)$ si y sólo si A admite la factorización de rango completo en forma escalonada $A = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times r}$ es una matriz $TP(\triangle STP)$ triangular inferior unitaria, $U \in \mathbb{R}^{r\times m}$ es una matriz $TP(\triangle STP)$ triangular superior unitaria y $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., r$, con $ran(L) = ran(U)$.*

Demostración. ver [4] □

Proposición 6. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz t.n.p.(t.n.). Entonces, A^tA admite una única factorizacíon de Cholesky $A^tA = LL^t$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz escalonada inferior $TP(\triangle STP)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz *t.n.p.*(*t.n.*), entonces $A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es también una matriz *t.n.p.*(*t.n.*), aplicando la identidad de Cauchy - Binet, se tiene

$$\begin{aligned} det A^tA[\alpha|1, 2, ..., k] &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} det A^t[\alpha|\gamma] det A[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= det A^t[\alpha|1, 2, ..., k] det A[1, 2, ..., k] \geq 0 (> 0). \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que $det A^tA[1, 2, ..., k|\beta] \geq 0(> 0)$ y $det A^tA[1, 2, ..., k] > 0$, esto se cumple para todo $k = 1, 2, ..., n$ y $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Luego, $A^tA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz $TP(STP)$ y por Teorema 9, con $ran(A) = n = m$, A^tA admite la factorización de rango completo en forma escalonada $A^tA = LDU$, donde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz $TP(\triangle STP)$ triangular inferior unitaria, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz $TP(\triangle STP)$ triangular superior unitaria y $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, como $d_i > 0$, para $i = 1, 2, ..., n$, entonces, $A^tA = \overline{L}\,\overline{U}$, donde $\overline{L} = L\sqrt{D}$ y $\overline{U} = \sqrt{D}U$, como A^tA es simétrica tenemos que $\overline{L}^t = \overline{U}$, es decir $A^tA = \overline{L}\,\overline{L}^t$, donde $\overline{L}^t = \overline{U} = \sqrt{D}U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz $TP(\triangle STP)$. □

Teorema 10. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible con $a_{nn} \leq 0$ y el resto de sus elementos negativos. Entonces, A es una matriz t.n.p. si y sólo si existen dos quasi $\gamma-$ matrices ortogonales $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y dos matrices TP triangulares superiores e invertibles $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tales que $A = Q_1R_1$ y $A^t = Q_2R_2$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Una matriz invertible con $a_{nn} \leq 0$ y el resto de sus elementos negativos, supongamos que A es *t.n.p.*, por ser A invertible, A admite una única factorización de la forma $A = Q_1R_1$, donde $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal y $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior invertible, como A es una matriz *t.n.p.*,

A^t también es $t.n.p.$,entonces, A^tA es una matriz TP, luego por Proposición 6, A^tA admite una única factorización de Cholesky $A^tA = LL^t$, donde $L^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior TP, además como $A^tA = (Q_1R_1)^t(Q_1R_1) = R_1^tQ_1^tQ_1R_1 = R_1^tR_1$, tenemos que $R_1 = L^t$ es el factor superior de Cholesky de A^tA.
Por otra parte, como A es una matriz $t.n.p.$ invertible, por el Teorema 6, A verifica para todo $k = 1, 2, ..., n$, las desigualdades

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] \leq 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q_{k,n}$$

$$detA[1, 2, ..., k] < 0$$

y aplicando la identidad de Cauchy-Binet tenemos,

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detQ_1R_1[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_1[\alpha|\gamma]detR_1[\gamma|1,2,...,k] \\ &= detQ_1[\alpha|1,2,...,k]detR_1[1,2,...,k] \leq 0 \end{aligned}$$

como R_1 es una matriz TP,$detR_1[1, 2, ..., k] > 0, k = 1, 2, ...n$, por tanto, $detQ_1[\alpha|1, 2, ..., k] \leq 0$, para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$.
de igual forma

$$\begin{aligned} detA[1,2,...,k] &= detQ_1R_1[1,2,...,k] \\ &= detQ_1[1,2,...,k]detR_1[1,2,...,k] < 0 \end{aligned}$$

por tanto, $detQ_1[1, 2, ..., k] < 0$. Q_1 es una matriz ortogonal, luego $Q_1 = (Q_1^t)^{-1}$, entonces Q_1 y $(Q_1^t)^{-1}$ por Proposición 2, son matrices inferiormente $t.n.p.$ y por Proposición 4, Q_1 es una $quasi \;\; \gamma - matriz$ ortogonal.
Análogamente, como $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $t.n.p.$ e invertible, entonces $A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $t.n.p.$ e invertible, luego A^t admite una única factorización de la forma $A^t = Q_2R_2$, donde $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal y $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior invertible, por Proposición 6, A^tA admite una única factorización de Cholesky $A^tA = LL^t$, donde $L^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior TP, además como $A^tA = (Q_2R_2)^t(Q_2R_2) = R_2^tQ_2^tQ_2R_2 = R_2^tR_2$, tenemos que $R_2 = L^t$ es el factor superior de Cholesky de A^tA.
Por otra parte, como A^t es una matriz $t.n.p.$ invertible, por el Teorema 6, A^t verifica para todo $k = 1, 2, ..., n$, las desigualdades

$$detA^t[\alpha|1, 2, ..., k] \leq 0, \; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q_{k,n}$$

$$detA^t[1,2,...,k] < 0$$

y por la identidad de Cauchy-Binet tenemos,

$$\begin{aligned} detA^t[\alpha|1,2,...,k] &= detQ_2R_2[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \sum_{\gamma \in Q_{k,n}} detQ_2[\alpha|\gamma]detR_2[\gamma|1,2,...,k] \\ &= detQ_2[\alpha|1,2,...,k]detR_2[1,2,...,k] \leq 0 \end{aligned}$$

como R_2 es una matriz TP, $detR_2[1,2,...,k] > 0$, $k = 1,...,n$, por tanto, $detQ_2[\alpha|1,2,...,k] \leq 0$, para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $k = 1,2,...,n$.
de igual manera

$$\begin{aligned} detA^t[1,2,...,k] &= detQ_2R_2[1,2,...,k] \\ &= detQ_2[1,2,...,k]detR_2[1,2,...,k] < 0 \end{aligned}$$

luego $detQ_2[1,2,...,k] < 0$. Q_2 es una matriz ortogonal,entonces, $Q_2 = (Q_2^t)^{-1}$, así Q_2 y $(Q_2^t)^{-1}$ son matrices inferiormente $t.n.p.$ y por Proposición 4, Q_2 es una $quasi\ \ \gamma{-}matriz$ ortogonal.
Recíprocamente, Supongamos que $A = Q_1R_1$ y $A^t = Q_2R_2$, con Q_1 y Q_2 $quasi\ \ \gamma - matrices$ ortogonales y R_1, R_2 dos matrices TP triangulares superiores e invertibles, entonces Q_1 y Q_2 son por definición matrices inferiormente $t.n.p.$ y por la Proposición 2, se verifican las desigualdades

$$detQ_1[\alpha|1,2,...,k] \leq 0, ;\ para\ \ todo\ \ \alpha \in Q_{k,n}\ \ y\ \ k = 1,2,...,n$$

$$detQ_1[1,2,...,k] < 0$$

y

$$detQ_2[\alpha|1,2,...,k] \leq 0,\ \ para\ \ todo\ \ \alpha \in Q_{k,n}\ \ y\ \ k = 1,2,...,n$$

$$detQ_2[1,2,...,k] < 0$$

por la identidad de Cauchy-Binet, tenemos que para todo $k = 1,2,...,n$, se verifica que

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1,2,...,k] &= detQ_1R_1[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_1[\alpha|\gamma]detR_1[\gamma|1,2,...,k] \\ &= detQ_1[\alpha|1,2,...,k]detR_1[1,2,...,k] \leq 0, \ \ para \ \ todo \ \ \alpha \in Q_{k,n} \end{aligned} \tag{3.4}$$

y

$$\begin{aligned} detA[1,2,...,k] &= detQ_1R_1[1,2,...,k] \\ &= detQ_1[1,2,...,k]detR_1[1,2,...,k] < 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

de igual manera,

$$\begin{aligned} detA^t[\alpha|1,2,...,k] &= detQ_2R_2[\alpha|1,2,...,k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_2[\alpha|\gamma]detR_2[\gamma|1,2,...,k] \\ &= detQ_2[\alpha|1,2,...,k]detR_2[1,2,...,k] \leq 0, \\ para \ \ todo \ \ \alpha \in Q_{k,n} & \end{aligned} \tag{3.6}$$

y

$$\begin{aligned} detA^t[1,2,...,k] &= detQ_2R_2[1,2,...,k] \\ &= detQ_2[1,2,...,k]detR_2[1,2,...,k] < 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $detA^t[\alpha|1,2,...,k] = detA[1,2,...,k|\alpha]$, a partir de las desigualdades $(3{,}4), (3{,}5)$ y $(3{,}6)$ y del Teorema 6, se tiene que A es una matriz $t.n.p.$

□

Teorema 11. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible con todos sus elementos negativos. Entonces, A es una matriz t.n. si y sólo si existen dos quasi $\gamma -$ matrices estrictas y ortogonales $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y dos matrices triangulares superiores $\triangle STP$ $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tales que $A = Q_1R_1$ y $A^t = Q_2R_2$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Una matriz invertible con todos sus elementos negativos y supongamos que A es $t.n.$, por ser A invertible, admite una única factorización de la forma $A = Q_1R_1$, donde $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal y $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior invertible, como A es $t.n.$, A^t también es $t.n.$, entonces, A^tA es una matriz STP, y por la Proposición 6, A^tA admite una única factorización de Cholesky

$A^tA = LL^t$, donde $L^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior $\triangle STP$.
Además, como $A^tA = (Q_2R_2)^t(Q_2R_2) = R_2^tQ_2^tQ_2R_2 = R_2^tR_2$, tenemos que $R_2 = L^t$ es el factor superior de Cholesky de A^tA. Por otra parte, como A es una matriz $t.n.$, por el Teorema 5, A verifica para todo $k = 1, 2, ..., n$, la siguiente desigualdad

$$detA[\alpha|1, 2, ..., k] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n}$$

y por la identidad de Cauchy-Binet tenemos

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1, 2, ..., k] &= detQ_1R_1[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_1[\alpha|\gamma]detR_1[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= detQ_1[\alpha|1, 2, ..., k]detR_1[1, 2, ..., k] < 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in Q_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$, como R_1 es una matriz $\triangle STP$, $detR_1[1, 2, ..., k] > 0$, luego $detQ_1[\alpha|1, 2, ..., k] < 0$, para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$.
y por proposición 3, Q_1 es una matriz inferiormente $t.n.$, además como Q_1 es ortogonal, $Q_1 = (Q_1^t)^{-1}$, luego por Proposición 5, Q_1 es una *quasi* $\gamma - matriz$ estricta y ortogonal.
Análogamente, como $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $t.n.$ e invertible, entonces $A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $t.n.$ e invertible, luego A^t admite una única factorización de la forma $A^t = Q_2R_2$, donde $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal y $R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior invertible. Además A^tA es una matriz STP y por la proposición 6, A^tA admite una única factorización de Cholesky $A^tA = LL^t$, donde $L^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior $\triangle STP$. como $A^tA = (Q_2R_2)^t(Q_2R_2) = R_2^tQ_2^tQ_2R_2 = R_2^tR_2$, tenemos que $R_2 = L^t$ es el factor superior de Cholesky de A^tA.
Por otra parte, como A^t es una matriz $t.n.p.$ invertible, por el Teorema 5, A^t verifica para todo $k = 1, 2, ..., n$, la siguiente desigualdad

$$detA^t[\alpha|1, 2, ..., k] < 0, \;\; para \;\; todo\alpha \in Q^0_{k,n}$$

y por la identidad de Cauchy-Binet tenemos

$$\begin{aligned} detA^t[\alpha|1, 2, ..., k] &= detQ_2R_2[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_2[\alpha|\gamma]detR_2[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= detQ_2[\alpha|1, 2, ..., k]detR_2[1, 2, ..., k] < 0 \end{aligned}$$

como R_2 es una matriz $\triangle STP$, $detR_2[1, 2, ..., k] > 0$, por tanto $detQ_2[\alpha|1, 2, ..., k] < 0$, para todo $\alpha \in Q^0_{k,n}$ y $k = 1, 2, ..., n$ y por proposición 3, Q_2 es una matriz inferirmente

t.n.. Además como Q_2 es una matriz ortogonal se tiene $Q_2^t = Q_2^{-1}$,así $Q_2 = (Q_2^t)^{-1}$, luego por Proposición 5, Q_2 es una *quasi* $\gamma - matriz$ estricta y ortogonal.
Recíprocamente, Supongamos que $A = Q_1R_1$ y $A^t = Q_2R_2$, con Q_1 y Q_2 *quasi* $\gamma - matrices$ estrictas y ortogonales y R_1, R_2 dos matrices triangulares superiores e invertibles $\triangle STP$, luego Q_1 y Q_2 son por definición matrices inferiormente *t.n.* y por la Proposición 3, para todo $k = 1, 2, ..., n$, se verifican las desigualdades

$$detQ_1[\alpha|1, 2, ..., k] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n}$$

$$detQ_2[\alpha|1, 2, ..., k] < 0, \;\; para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n}$$

por la identidad de Cauchy-Binet tenemos que para todo $k = 1, 2, ..., n$, se verifica

$$\begin{aligned} detA[\alpha|1, 2, ..., k] &= detQ_1R_1[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_1[\alpha|\gamma]detR_1[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= detQ_1[\alpha|1, 2, ..., k]detR_1[1, 2, ..., k] < 0, \\ para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n} \end{aligned} \tag{3.8}$$

y

$$\begin{aligned} detA^t[\alpha|1, 2, ..., k] &= detQ_2R_2[\alpha|1, 2, ..., k] \\ &= \textstyle\sum_{\gamma\in Q_{k,n}} detQ_2[\alpha|\gamma]detR_2[\gamma|1, 2, ..., k] \\ &= detQ_2[\alpha|1, 2, ..., k]detR_2[1, 2, ..., k] < 0, \\ para \;\; todo \;\; \alpha \in Q^0_{k,n} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $detA^t[\alpha|1, 2, ..., k] = detA[1, 2, ..., k|\alpha]$, a partir de las desigualdades (3,8) y (3,9) y del Teorema 5, se tiene que A es una matriz *t.n.*.

$\square$

Conclusiones

- Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $a_{nm} < 0$ y $n \leq m$. Es suficiente calcular los menores iniciales por columnas y los menores iniciales por filas de A, para garantizar su total-negatividad. Teniendo en cuenta la factorización LDU de A.
- A partir de las quasi $\gamma - matrices$ (quasi $\gamma - matrices$ estrictas) se da una caracterización para las matrices $t.n.p.(t.n.)$ teniendo en cuenta su factorización QR.

Bibliografía

[1] Ando,T., Totally positive matrices,Linear Algebra Appl. 90 (1987), 165-219.

[2] Cantó,R., Ricarte,B., Urbano,A.M., Full rank factorization and Flanders Theorem, Submitted.

[3] Cantó,R., Ricarte,B., Urbano, A.M., Full rank factorization in echelon form of totally Nonnegative(negative) rectangular matrices,Submited.

[4] Cantó,R., Ricarte,B., Urbano, A.M., Characterizations of rectangular totally and strictly totally positive matrices,Submited.

[5] Cantó,R., Koev,P., Ricarte,B., Urbano, A.M.,LDU-factorization of nonsingular totally nonpositive matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 30 $n^{\circ}2$ (2008) 777-782.

[6] Fallat,S.M., Van Den Driessche,P.,on matrices with all minor negative. Electronic journal of linear Algebra 7(2000),92-99.

[7] Gasca,M., Peña,J.M., A test for strict sing-regularity, Linear Algebra Appl. 197/198 (1994) 133-142.

[8] Gasca,M., Peña,J.M., Total positivity, QR factorization and Nevile elimination, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 4(1993), 1132-1140.

[9] Gasca,M., Peña,J.M., Total positivity and Nevile elimination, Linear Algebra Appl. 44(1992),25 44.

[10] Johnson J.J., On Partially Non-Positive matrices, Linear Algebra Appl, 8: 185-187, 1974.