

Teoría del ángulo de fricción interna bidimensional en arenas

Álvaro Ignacio Covo Torres ¹

¹Ingeniero Civil, Ph.D en Geotecnia, Profesor Asociado del Programa de Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena, Colombia. Correo electrónico: alvaroicovot@yahoo.com

RESUMEN

El presente artículo presenta una teoría que explica la tendencia observada en los resultados de las investigaciones efectuadas hasta la fecha, las cuales establecen que el ángulo de fricción interna de un suelo granular aumenta cuando se incrementa su densidad relativa y en particular basándose en los resultados de la tesis de grado efectuada en la Universidad de Cartagena por los ingenieros Edwin Tuirán y Tomas Pereira en el año 2000 para obtener el título de ingeniero civil en el programa de Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena.

PALABRAS CLAVE: Ángulo de fricción interna, Capacidad portante, Esfuerzo de corte, Propiedades del suelo, Regresión lineal

ABSTRACT

In this article a theoretical development that explains the findings of all research performed around the world and particularly utilizing the results of the bachelor degree project undertaken by the engineers Edwin Tuiran and Tomas Pereira in 2000 as a partial requirement to obtain the degree in the Civil Engineering Department at the University of Cartagena.

KEYWORDS: *Angle of internal friction, Bearing capacity, Shear Strength, Soil properties, Lineal regression.*

1. INTRODUCCIÓN

El ensayo de corte directo se aplica para un estado de esfuerzos bidimensional, donde los desplazamientos horizontales y verticales que se producen en el suelo en las direcciones de la aplicación de las cargas son medidos rutinariamente en los ensayos efectuados en el laboratorio. El ensayo de corte directo está normalizado por la norma ASTM D 3080-90. Los ensayos efectuados por los ingenieros Tuiran y Pereira en el año 2000 fueron realizados en un equipo de corte directo calibrado en la Universidad de Cartagena (Pereira y Tuirán, 2000).

En la figura 3, ϕ_{cv} representa el ángulo de fricción residual (a volumen constante), el cual es aproximadamente igual al ángulo de reposo y ϕ_v el ángulo de fricción entre partículas, el cual es igual al de una superficie especular construida con el material que constituye el suelo. La diferencia entre ϕ_{cv} y ϕ_v se debe a la energía adicional que debe disiparse para vencer el entrelazamiento entre los granos de suelos en el plano de falla de la muestra donde se produce una desorganización de la estructura densa de la muestra con el consiguiente incremento de la porosidad en ese plano.

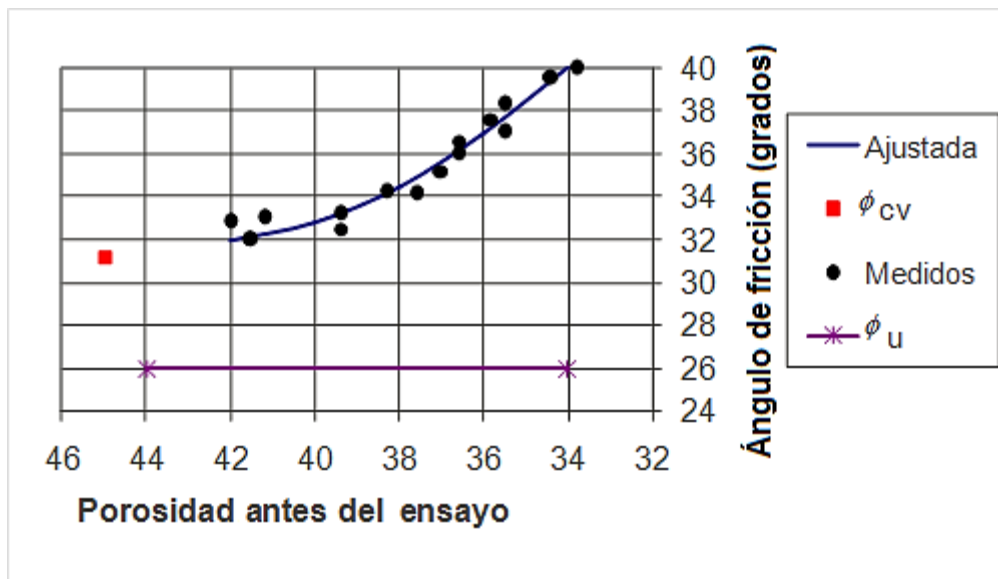


Figura 3. Ángulo de fricción interna de una arena media a fina (Rowe, 1962)

Fuente: (Rowe, 1962).

2. LA TEORÍA DE LA ADHESIÓN.

Las leyes de la fricción fueron estudiadas por Leonardo Da Vinci en 1500 y restablecidas por Amontons en 1699 y se conocen frecuentemente como las leyes de Amontons. Desde entonces se ha comprobado que la máxima fuerza lateral que se le puede aplicar al cajón de la figura 1 es independiente del área y directamente proporcional a la fuerza normal aplicada. Karl Terzaghi a raíz de sus estudios de Mecánica de Suelos a principios de este siglo sugirió un modelo que se conoce hoy como la teoría de la adhesión. La primera teoría que se estableció para explicar el fenómeno de la fricción fue el del entrelazamiento que ocurre debido a las asperezas de las superficies en contacto. Esta teoría fue descartada ya que ensayos efectuados por diferentes investigadores donde las superficies friccionantes fueron pulidas especularmente presentaban esencialmente la misma fricción

que superficies menos pulidas (Bowden y Tabor, 1950, 1964). Con el objeto de comprender el fenómeno consideremos la figura 4 donde se muestra los puntos de contacto a nivel microscópico entre las superficies. Según la teoría de la adhesión, los esfuerzos de contacto entre las superficies microscópicas son generalmente lo suficientemente altos como para alcanzar el límite de fluencia (σ_y) de los materiales que constituyen la muestra; por ejemplo, el esfuerzo de fluencia del cuarzo es del orden de 1'500.000 psi, considerando que el máximo esfuerzo cortante que podemos aplicar al material en las condiciones de fluencia es directamente proporcional al esfuerzo de fluencia podemos escribir:

$$\tau_y = \mu \sigma_y \quad 3$$

Donde τ_y y σ_y representan los esfuerzos cortantes y normales de fluencia, respectivamente. Llamando N_i^1 a la fuerza normal, y A_i^1 al área que actúan en la cara 1 y en el punto i a nivel microscópico, respectivamente, podemos relacionar dicha área de contacto microscópica con las fuerzas normales en las caras (1) y (2) como:

$$\sigma_y = \frac{N_i^1}{A_{ci}^1} \quad 4a)$$

$$\sigma_y = \frac{N_i^2}{A_{ci}^2} \quad 4b)$$

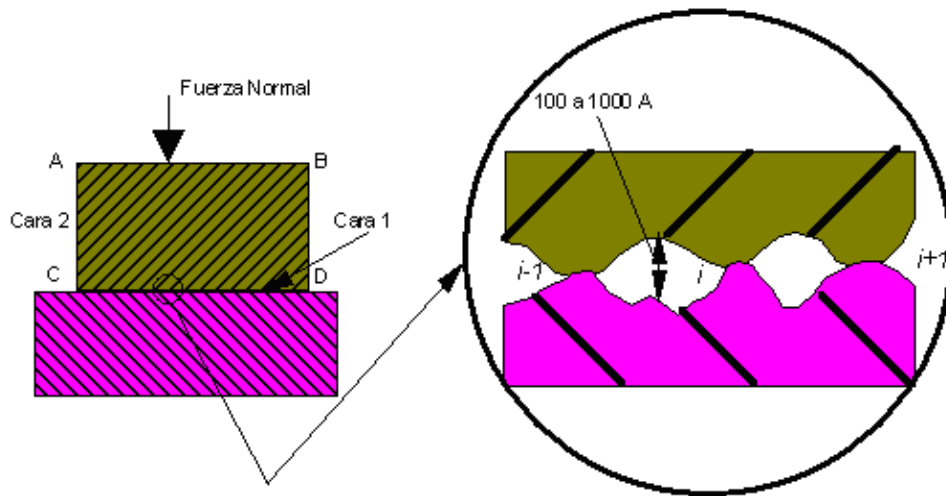


Figura 1. Bloques friccionantes mostrando puntos microscópicos de contacto.

Fuente: El autor.

Combinando las ecuaciones 3 y 4a) obtenemos la contribución a la resistencia tangencial total T_i que produce el punto i . llamando T_i a la máxima resistencia tangencial en el punto i podemos escribir:

$$T_i^1 = A_{ci}^1 * \tau_y = N_i^1 \text{Tan}(\phi) \tag{5a)}$$

$$T_i^2 = A_{ci}^2 * \tau_y = N_i^2 \text{Tan}(\phi) \tag{5b)}$$

Sumando las contribuciones de cada uno de los puntos obtenemos de las ecuaciones 5a) y 5b) obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n_1} T_i^1 = \tau_y \sum_{i=1}^{n_1} A_{ci}^1 = \text{Tan}(\phi) \sum_{i=1}^{n_1} N_i^1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n_2} T_i^2 = \tau_y \sum_{i=1}^{n_2} A_{ci}^2 = \text{Tan}(\phi) \sum_{i=1}^{n_2} N_i^2$$

De donde obtenemos nuevamente la ecuación 1b).

$$T = N \text{Tan}(\phi) \tag{1b)}$$

Nótese que de acuerdo con esta teoría, al apoyar el bloque de la figura 4 sobre una cara que tenga un área menor, las ecuaciones 5 predicen que el número de puntos de contacto individuales $A_{c2}(i)$ serán menores que las del área 1, pero la suma de las áreas microscópicas de contacto será constante para cualquier posición del cuerpo (k) tal como se ilustra en la ecuación 6.

$$A_c (\text{Suma de Areas Microscopica}) = \sum_{i=1}^{n_1} A_{ci}^1 = \sum_{i=1}^{n_2} A_{ci}^2 = \sum_{i=1}^{n_3} A_{ci}^3 = \text{Constante} \tag{6}$$

Donde $n_2 = \frac{n_1 A_2}{A_1}$ y $n_3 = \frac{n_1 A_3}{A_1}$, con n_1 , n_2 y n_3 representando el número microscópico de área de contacto, de las caras 1, 2 y 3, respectivamente, tal como se muestra en la figura 4.

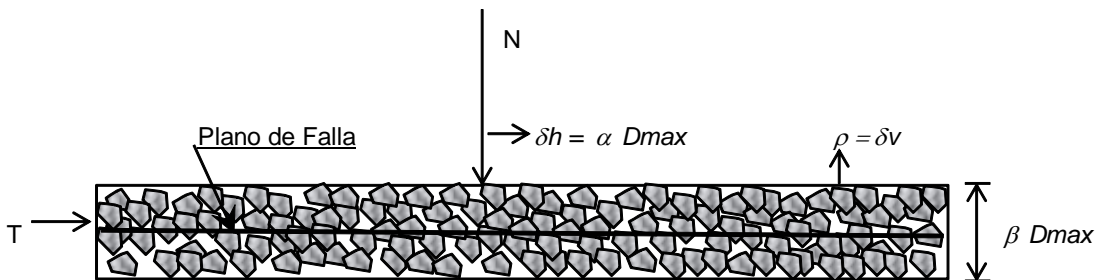


Figura 2. Esquema del efecto del desplazamiento horizontal del suelo en su densidad relativa
Fuente: El autor 2011.

En el ensayo de corte directo que se efectúa rutinariamente a las muestras de suelo, se le aplica una fuerza horizontal a un plano inducido de falla, tal como se ilustra en la figura 1. Debido a esta sollicitación, el suelo primeramente trata de fallar las partículas de mayor tamaño que se encuentran en dicho plano de falla. Como resultado de este fenómeno, el sistema desplaza las partículas de mayor tamaño fuera del mencionado plano. Como resultado de esto, el suelo cambia de estructura dentro de un altura que llamaremos $\beta(D_{max})$ al desplazarse una distancia $\alpha(D_{max})$ en el

sentido horizontal. Asumiendo que el suelo a lo largo de la altura $\beta(D_{max})$ pasa de una relación de vacíos inicial (e_o) a una final (e_{max}), podemos escribir el asentamiento por dilatación del suelo como:

$$\rho = \left(\frac{e_{max} - e_o}{1 + e_o} \right) (\beta D_{max}) \quad 7$$

Considerando la energía que se disipa al desplazar horizontal y verticalmente las cargas mostradas en la figura 1, e invocando la teoría de la adhesión¹,

$$\frac{Tan(\phi')}{Tan(\phi_o)} = \frac{Tan(\phi_o) + \left(\frac{e_{max} - e_o}{1 + e_o} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)}{Tan(\phi_o)} \quad 8$$

De donde podemos escribir finalmente:

$$Tan(\phi') = Tan(\phi_o) \left[1 + \left(\frac{e_{max} - e_o}{1 + e_o} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{Tan(\phi_o)} \right) \right] \quad 9$$

3. RESULTADOS DE LABORATORIO.

Ensayos de corte directo efectuados en arenas pobremente gradadas y limos en el Programa de Ingeniería Civil de la Universidad de Cartagena arrojaron los resultados mostrados en la Figura 3. Los ensayos de corte directo fueron efectuados en muestras preparadas en el laboratorio con el fin de estudiar su variación en función del tamaño máximo del grano para arenas pobremente gradadas; la gradación de las muestras se muestra en el apéndice en las figuras 8 y 9. El coeficiente de uniformidad varió entre 1.4 y 5.9, y se muestra en la Tabla 1.

¹ Invocar la teoría de la adhesión implica que el ángulo de fricción interna propiamente dicho no depende de las áreas de contacto, por lo que a mayor densidad aumenta el número de puntos de contacto pero no aumenta el área microscópica de contacto entre las partículas, tal como lo indica la ecuación 6.

Tabla 1. Propiedades físicas de las arenas ensayadas.

	(Milímetros)		Cu	e(max)	e(min)	R ²
	D60	D10				
pasa 20 Ret 60	0.5500	0.2800	2.0	0.85	0.40	0.934
pasa 60 Ret 100	0.1800	0.1300	1.4	0.91	0.40	0.988
pasa 100 Ret 200	0.1050	0.0900	1.2	0.86	0.40	0.933
pasa 200 (Limo)	0.0400	0.0068	5.9	1.56	0.50	0.981

Fuente: Los autores

El cuadrado de los coeficiente de regresión (R^2) de las líneas de la figura 3 ajustadas, 10a) a 10d) se muestra en la tabla 1 y está comprendido entre 0.934 y 0.988. Las líneas de regresión lineal de las muestras ensayadas, mostradas en la figura 3, se pueden resumir por medio de las siguientes expresiones:

$$\text{Para la arena pasa tamiz 20 retiene tamiz 60: } \phi = 0.146Dr + 30.68 \text{ (Grados)} \quad 10a)$$

$$\text{Para la arena pasa tamiz 60 retiene tamiz 100: } \phi = 0.119Dr + 27.70 \text{ (Grados)} \quad 10b)$$

$$\text{Para la arena pasa tamiz 100 retiene tamiz 200: } \phi = 0.111Dr + 28.20 \text{ (Grados)} \quad 10c)$$

$$\text{Para el limo (pasa tamiz 200): } \phi = 0.107Dr + 27.00 \text{ (Grados)} \quad 10d)$$

Las ecuaciones 10a) a 10d) se pueden expresar como:

$$\phi = 31.10 + 4.17 \text{Log}_{10}(D_{\max}) + (0.037 + 0.144 \text{Log}_{10}(D_{\max}))Dr \quad 11$$

Donde el símbolo (ϕ) representa el ángulo de fricción interna del material, (D_{\max}) representa el tamaño máximo del grano y (Dr) la densidad relativa, la cual se define para suelos granulares mediante la relación:

$$Dr = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} * 100 \quad 12$$

Con e_{\max} y e_{\min} representando la máxima y mínima relación de vacíos, obtenidas en los ensayo ASTM designación 4254 y 4253, respectivamente.

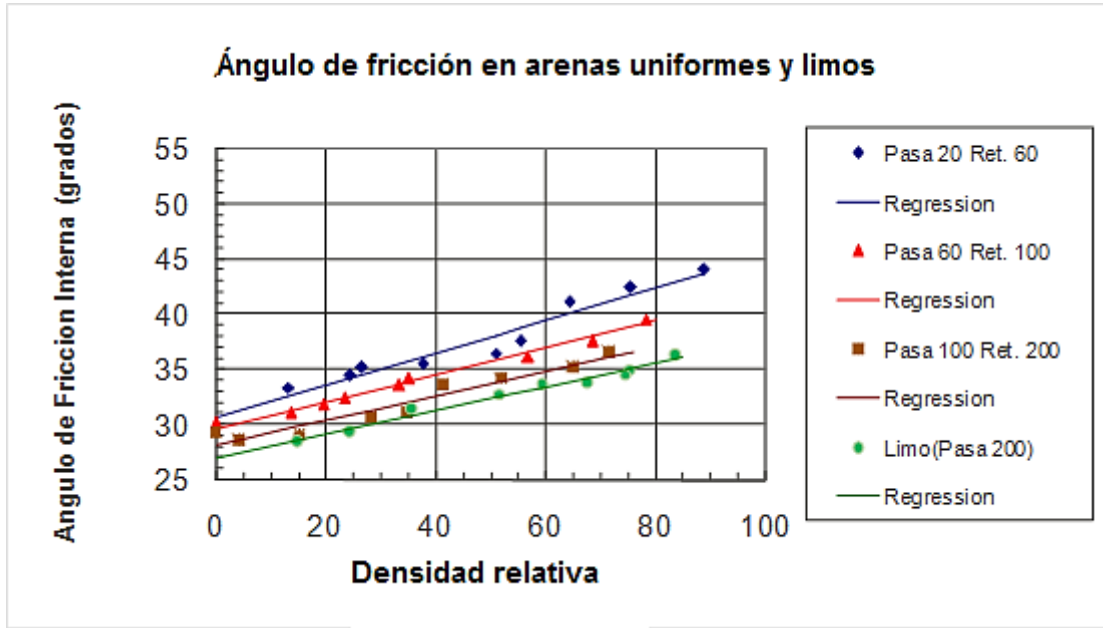


Figura 3. Resumen ángulo de fricción interna en función de la densidad relativa

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

Con referencia a la figura 6, el ángulo correspondiente a una densidad relativa igual a cero se puede expresar como:

$$\phi(DR = 0) = 4.17 \cdot \text{Log}_{10}(D_{\max}) + 31.10 \quad 13$$

Utilizando la ecuación 9 y los resultados del ángulo de fricción interna para un ángulo de fricción interna correspondiente a una densidad relativa (Dr) de cero obtenemos ajustando las rectas, valores de (β/α) tal como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Valores de (β/α) en función de las gradaciones de las muestras.

D_{50}	D_{100}	D_{\max}/D_{\min}	De Ensayos	
			$(\beta/\alpha)/\text{Tan}(\phi_0)$	(β/α)
0.565	0.880	3.52	2.02	1.29
0.210	0.250	1.47	1.71	0.99
0.122	0.170	2.30	1.67	0.94
0.032	0.074	37.00	0.87	0.45

Fuente. El autor (2011).

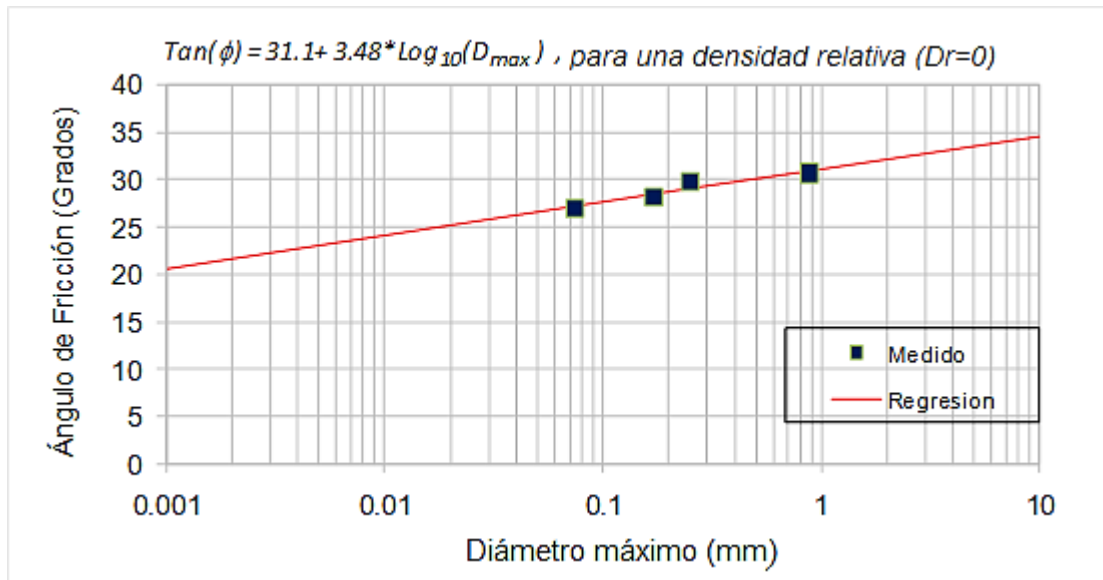


Figura 4a). Determinación del ángulo de fricción interna (ϕ) para $Dr=0$, ángulo de reposo (Ecuación 11), en función del tamaño máximo (UdeC, 2000).

Fuente: Pereira y Tuiran 2000.

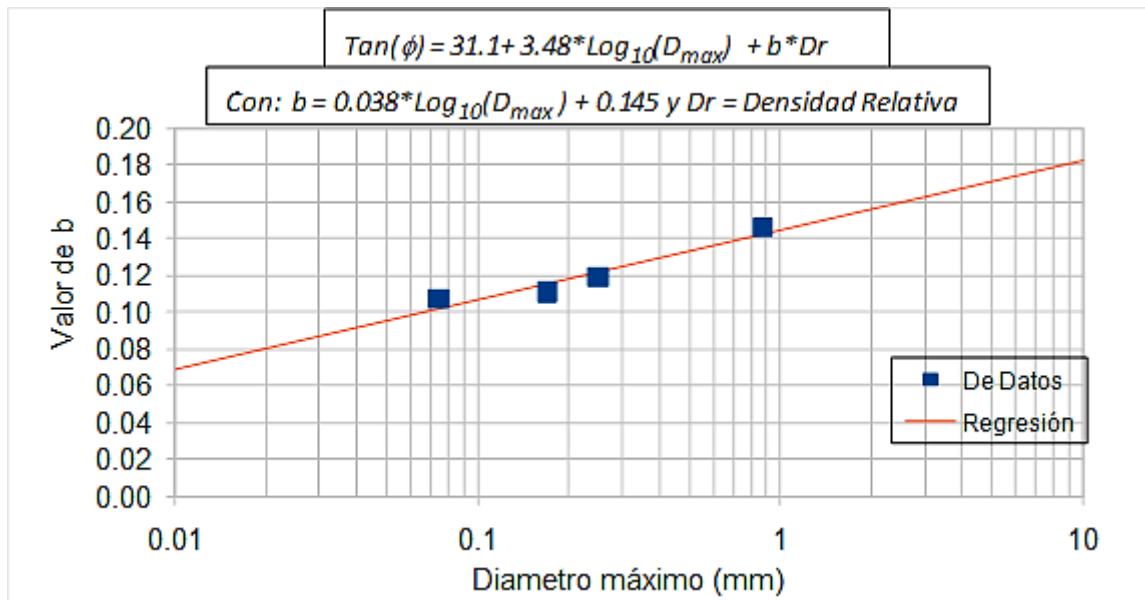


Figura 4b). Determinación del valor de b de la ecuación 5a) en función del tamaño máximo, en función del tamaño máximo (UdeC, 2000)

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

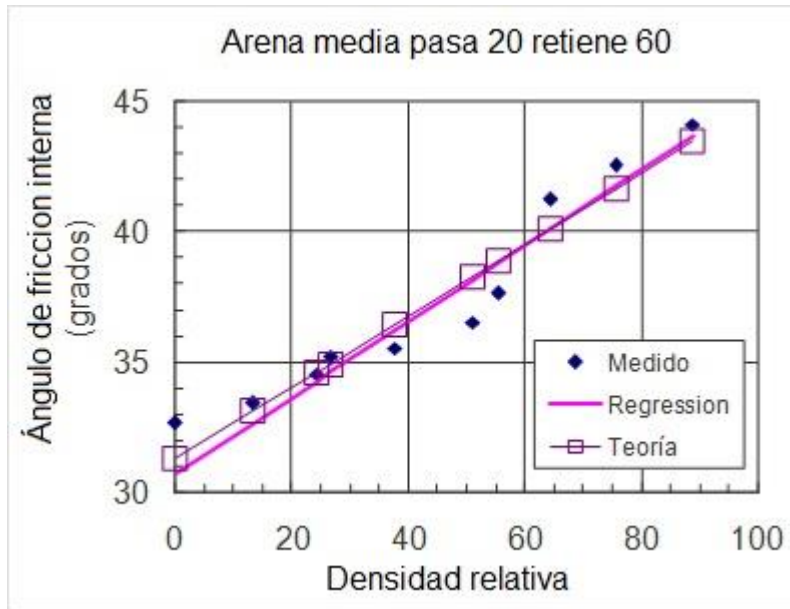


Figura 5a). Resumen ángulo de fricción interna en función de la densidad relativa para arena gruesa a media.

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

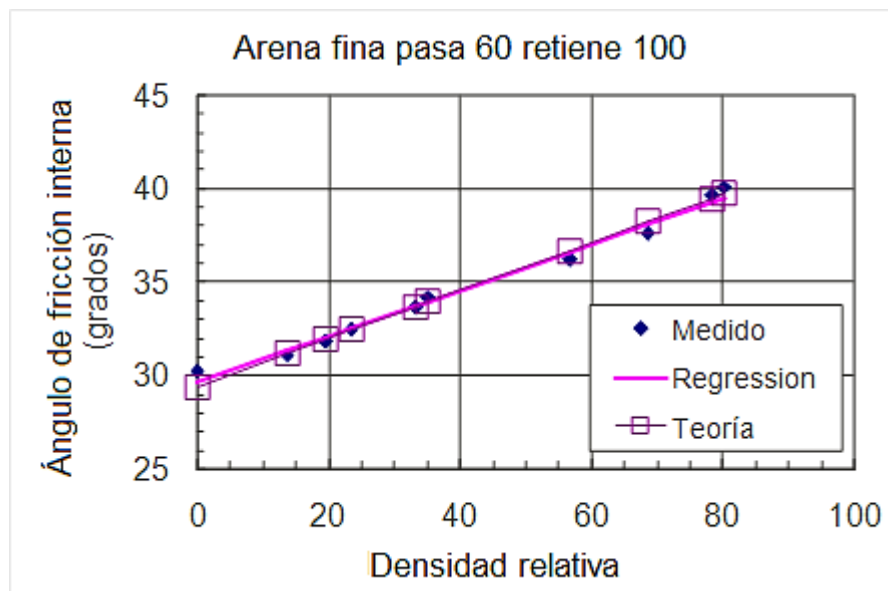


Figura 5b). Resumen ángulo de fricción interna en función de la densidad relativa para arena media a fina.

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

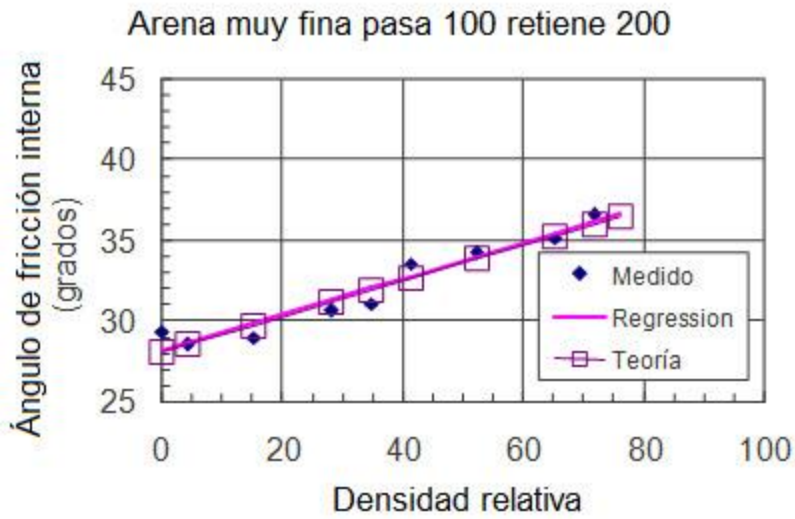


Figura 5c). Resumen ángulo de fricción interna en función de la densidad relativa para arena fina.

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

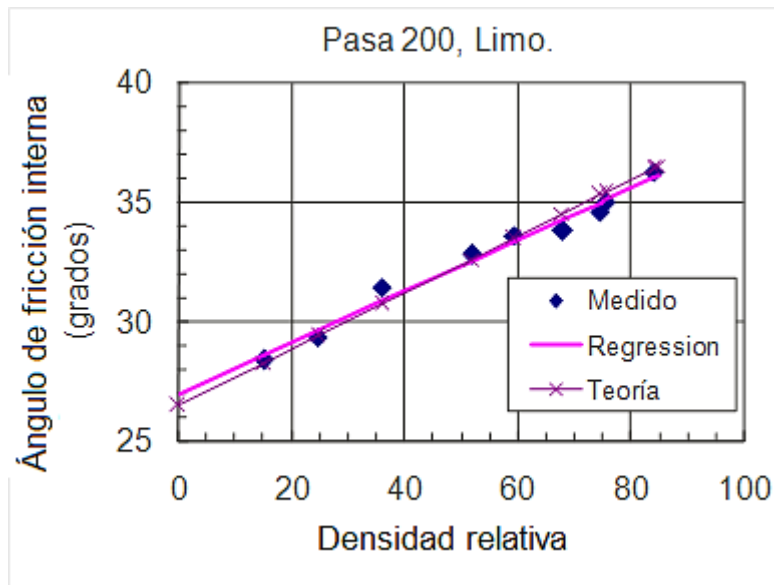


Figura 5d). Resumen ángulo de fricción interna en función de la densidad relativa para limo.

Fuente: Pereira y Tuirán 2000.

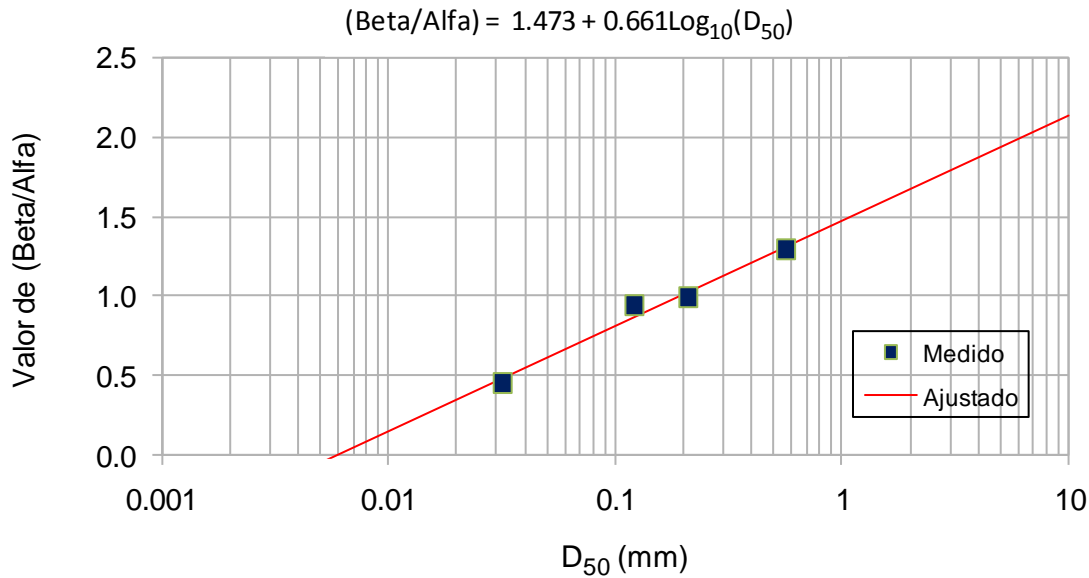


Figura 6). Determinación del valor de (β/α) de la ecuación 9 en función del tamaño máximo.

Fuente: El autor (2011)

En las Figuras 5a) a 5d) presentamos la forma como fueron ajustados los valores de (β/α) efectuados de acuerdo con la ecuación 9 en función de D_{50} , donde D_{50} representa el diámetro que corresponde al tamaño que pasa el 50 por ciento de la muestra en peso en los ensayos de gradación mostrados en el apéndice I.

En la Tabla 2 presentamos un resumen de los valores de (β/α) ajustados de acuerdo con las gráficas 5a) a 5d), la cual se resume en forma gráfica en la Figura 6 en función de la en función de D_{50} .

Teniendo en cuenta los resultados encontrados a través de las Figuras 5a) a 5d) y resumidos en la Tabla 2, el valor de (β/α) se puede expresar como:

$$(\beta/\alpha) = 1.473 + 0.661\text{Log}_{10}(D_{50})$$

14

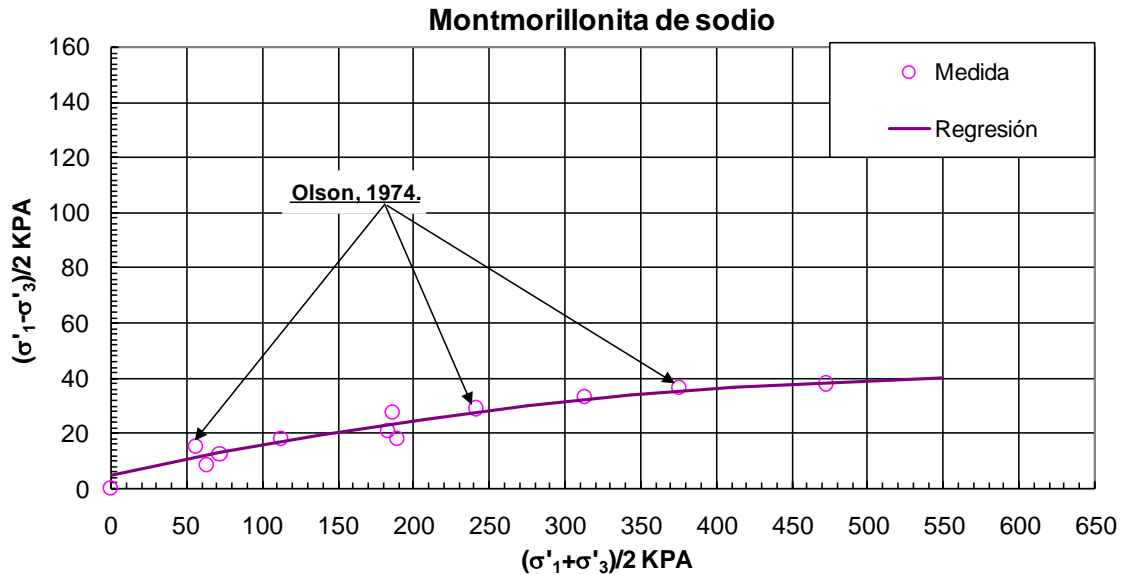


Figura 7. Esfuerzo efectivo en la falla para montmorillonita de sodio.
Fuente: Olson (1974)

CONCLUSIONES

En la presente publicación presentamos una teoría que involucra la disipación de energía debido al desarreglo que ocurre en el plano de falla, la cual produce un aumento de volumen en dicho plano. La energía necesaria para incrementar el volumen en el plano de falla, produce un aumento en la energía requerida para fallar la muestra, la cual se traduce en un aumento del ángulo de fricción interna del material.

Tal como lo indica la Figura 7, el valor de (β/α) disminuye en la medida en que disminuye el tamaño de los granos. Por extrapolación obtenemos que el valor de D_{50} al cual (β/α) se hace cero es igual 0.006 milímetros, el cual corresponde a tamaño de materiales arcillosos.

Es interesante además anotar, que de acuerdo con la ecuación 14, el ángulo de fricción interna en arcillas de plasticidad media a alta no se incrementa debido a que el valor de (β/α) se hace igual a cero para un valor de D_{50} de 0.006, lo cual es un hecho observado en los ensayos triaxiales efectuados en suelos de gradación fina.

La ecuación 14 también sugiere que el ángulo de fricción interna en suelos de gradación fina puede incluso llegar a disminuir al aumentarse el esfuerzo de consolidación, tal como ocurre en arcillas de tipo montmorillonita mostrada en la Figura 9 (Olson 1974). En la Figura 9 reproducimos resultados obtenidos por Olson en 1974, donde se muestra que el ángulo de fricción interna disminuye en la medida en que se incrementa el esfuerzo de consolidación que confina la muestra, lo que explica la disminución del ángulo de fricción interna de este tipo de suelos.

Esfuerzos de repulsión eléctrica relativamente fuertes explican la disminución en el ángulo de fricción interna observado en la figura 9, ya que dichos esfuerzos de repulsión se incrementan en la medida en que las partículas de suelo se acercan.

Se necesita llevar a cabo más investigación con el fin de validar los resultados encontrados que permitan verificar la teoría expuesta en este artículo para diferentes tipos de mineral de arcilla.

REFERENCIAS

ASTM (1991), "Soil and rock; Dimension stone; Geosynthetics", Annual book of ASTM standards, Section 4, Construction, Vol. 04.08.

Bishop, A. W., and Green, G. E., (1965) "The influence of end restraint on the compression strength of a cohesionless soil" *Geotechnique*. Vol. 15, pp, 243-266.

Black, W. P. M, (1962), "A method of estimating the california bearing ratio of cohesive soils from plasticity data", *Geotechnique*, Vol. 12, pp 271-282.

Bolt, G. H. (1956) "Physico-chemical analysis of the compressibility of pure clays" *Geotechnique*. Vol. 6 No. 2. pp, 86-93.

Bowden, F.P., and Tabor, D. (1950), *The friction and lubrication of solids, Part I*, Oxford University Press, London.

Bowden, F.P., and Tabor, D. (1964), *The friction and lubrication of solids, Part II*, Oxford University Press, London.

Bromwell, L. G., (1965) "Adsorption and friction behavior of minerals in vacuum," Phase Report 2, Research in Earth Physics, Contract Report 3-101, Department of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge, Mass.

Casagrande, A. (1942) "Fifth progress report on triaxial research", Harvard University Publication.

Casagrande, A. (1944) "Seventh progress report on triaxial research", Harvard University Publication.

Casagrande, A. "The determination of the pre-consolidation load and its practical significance" Discussion D-34, Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Cambridge, Vol. III, pp 60-64.

Casagrande, A (1969) "Notes on soil mechanics-first semester," Harvard University (unpublished), pp. 129.

Cornforth, D. H. (1964) "Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand," *Geotechnique*. Vol. 14. pp, 143-16.

Holtz, R. D. (1981) "An introduction to geotechnical engineering". Prentice-Hall civil eng. and eng. Mech. series.

Hvorslev, M. J. (1937) "Über die festigkeitseigenschaften gestorter bindiger Boden." *Ingenior-ridenskabelige*. A. No 45.

Lambe T. W. & Whitman (1969)A "Soil mechanics". Series in soil engineering. John Wiley & sons, Inc., pp. 44.

Lambe T. W. & Whitman (1969)B "Soil mechanics". Series in soil engineering. John Wiley & sons, Inc., pp. 131.

Lambe T. W. & Whitman (1969)C "Soil mechanics". Series in soil engineering. John Wiley & sons, Inc., pp. 146.

Mitchell J. K. (1976) "Fundamentals of soil behavior". Series in soil engineering. John Wiley & sons, Inc., pp 305-310.

Meyerhof, G.G. 1965. "Shallow foundation," Proc. ASCE, Vol. 91, No. SM2, pp 21-31.

Olson R. E., (1974) "Shearing strength of kaolinite, Illite and Montmorillonite" Journal of the Geotechnical Division , A.S.C.E, Vol 100, No GT11, pp 1215-1229.

Taylor, D. W. (1939) "A comparison of results of direct shear and cylindrical compression tests", Proc. ASTM., pp 1058-1070

Taylor , D. W. (1944) "Tenth report on triaxial shear research", M.I.T publications.

Taylor, D. W. and Merchant W., (1940) "A Theory of Clay Consolidation Accounting for Secondary Compression)", Jour. Math. Phys., Vol 19. July,

Terzaghi, K., (1920), "New facts about surface friction," The Physical review, N.S. Vol. XVI, No 1, pp 54-61; reprinted in from Theory to practice in soil mechanics, pp. 165-172, Wiley, New York, 1961.

Tuiran, E. y Pereira, T. (2000) "Ángulo de fricción interna en arenas y limos", Proyecto de grado presentado como requisito parcial para obtener el título de ingeniero civil en la Universidad de Cartagena.

APENDICE I. PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS MATERIALES UTILIZADOS EN LA INVESTIGACIÓN

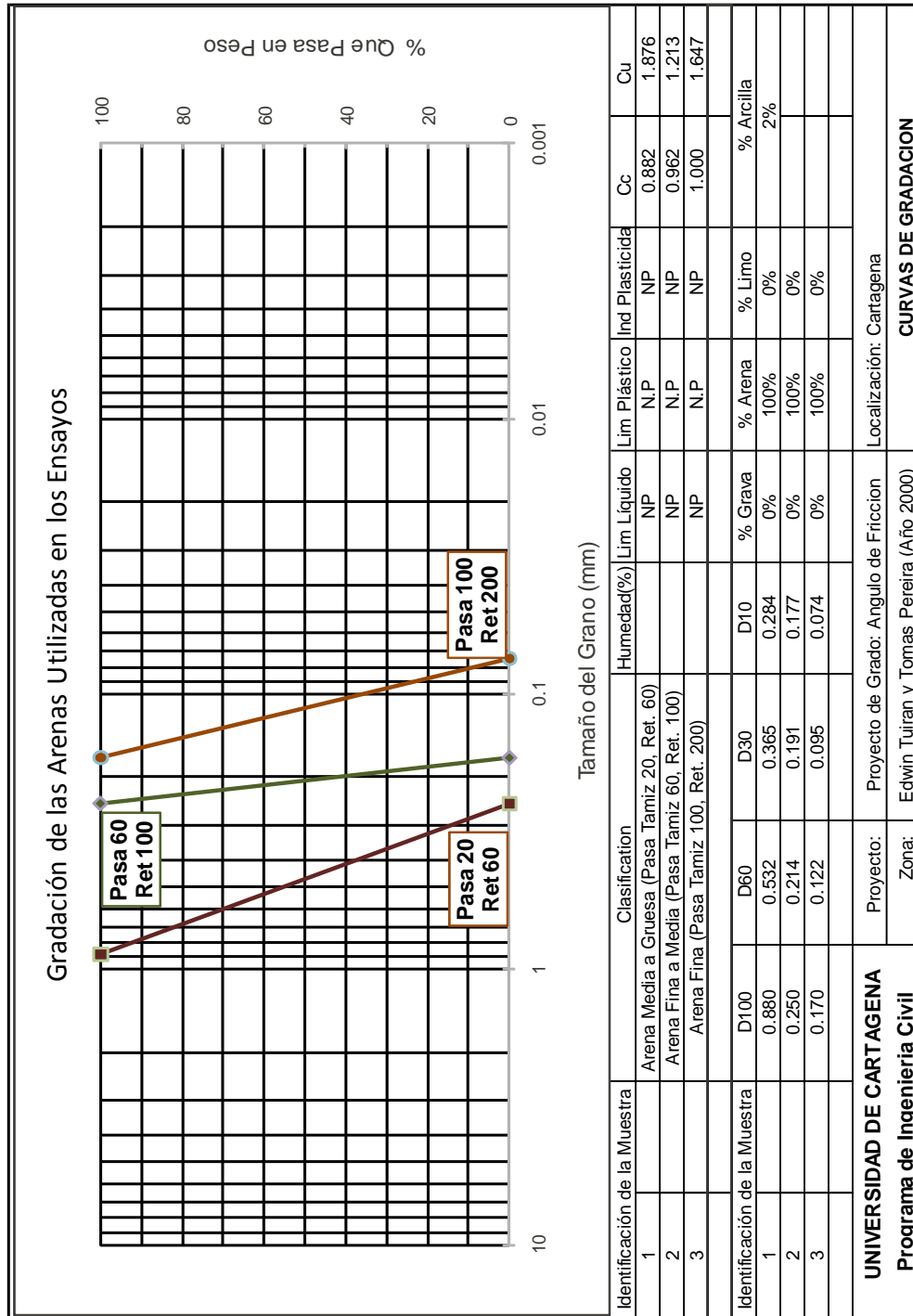


Figura 8. Propiedades físicas de las arenas utilizadas en los ensayos.

Fuente: El autor.

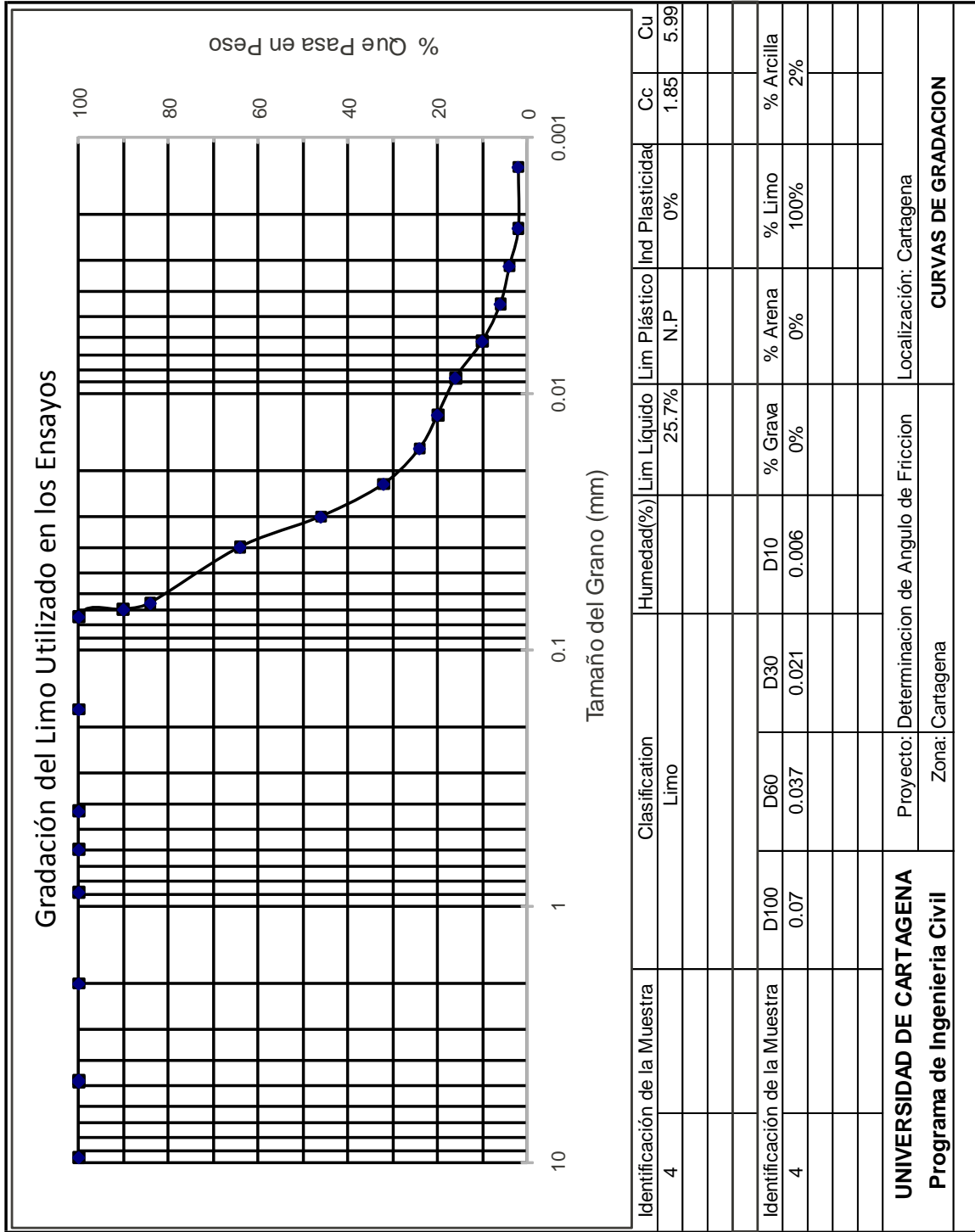


Figura 9. Propiedades físicas del limo utilizado en los ensayos.

Fuente: El autor.

APÉNDICE II. NOTACIÓN

b = Coeficiente constante.

$$c = \phi(Dr = 0) = 4.5 \text{Log}_{10}(D \text{max}) + 32$$

$$Dr = \text{Densidad relativa} = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}$$

V_T = Volumen total de la muestra

V_V = Volumen de vacíos

V_S = Volumen de sólidos

$$e = \text{Relación de vacíos} = \frac{V_V}{V_S}$$

$e_{min} = e(Dr=100)$ = Relación de vacíos mínima de acuerdo con ASTM 3080-90

$e_{max} = e(Dr=0)$ = Relación de vacíos máxima de acuerdo con ASTM 3080-90

R^2 = Coeficiente de regresión.

ϕ = Ángulo de fricción interna

$\phi(Dr)$ = Ángulo de fricción interna a una densidad relativa determinada.

$\phi(Dr=0)$ = Ángulo de fricción interna a una densidad relativa igual a cero.

$\phi(D_{max}, Dr)$ = Ángulo de fricción interna en función del tamaño máximo del grano y la densidad relativa.

ϕ_{cv} = Ángulo de fricción interna a volumen constante

ϕ_{μ} = Ángulo de fricción interna de partícula a partícula.

