1

EXTENSIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS CON VALORES ESCALARES EN GRUPOS ORDENADOS

Trabajo de grado que presenta
NELSY MORALES PESTANA
Para obtener el título de matemático

Asesor de Tesis
JULIO CESAR HERNANDEZ ARZUSA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas

Cartagena de Indias D. T. y C.

2011

DEDICATORIA .

En primer lugar a nuestro señor Jesucristo, en segundo lugar a mis Padres

María Pestana y Ramón Morales

Y

mi gran amiga Elsa María Bossio

AGRADECIMIENTOS.

Le agradezco a todas las personas que una u otra forma me apoyaron durante toda la carrera pero en especial a mi asesor Julio Cesar Hernández Arsuza y a mi gran amigo Héctor Pinedo

Gracias...

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN.

Las funciones definidas positivas han sido estudiadas por algunos matemáticos que se han interesado por saber que pasa cuando una función definida positiva se extiende de un intervalo dado a otro más amplio, como por ejemplo:

Lo establecido por M. G Krein (ver [11]) quién demostró que toda función continua definida positiva sobre un intervalo $I = (-a, a)$, se podía extender a una función continua definida positiva pero ahora sobre toda la recta.

Siguiendo esta misma línea encontramos que el matemático A.Devinatz (ver [6]) publicó un documento en donde muestra que bajo ciertas condiciones una función continua definida positiva sobre un rectángulo, también tiene una extensión definida positiva pero ahora en cualquier plano, sin embargo el recíproco de este planteamiento no es cierto y eso lo demostró W. Rudin (ver [10] y [11]) quien probó que existe una función continua definida positiva sobre un rectángulo que no tiene una extensión definida positiva en cualquier plano. Otro matemático que trabajo con estas funciones fue Sasvári (ver [12]) quién mostró que una función definida positiva sobre un intervalo de un grupo ordenado también puede extenderse a una función definida positiva en cualquier grupo, es decir, no necesariamente el grupo debía se ordenado.

Con base en el trabajo que han hecho estos matemáticos quisimos demostrar que dado un grupo ordenado abeliano (G,+) es un intervalo simétrico Δ en G y una función $f : \Delta \to C$ definida positiva es posible encontrar una extensión de f a todo G.

Es de saberse que toda función $f : (-a, a) \to C$ definida positiva admite una extensión sobre todo $\mathbb{R}$, es decir, existe $F : \mathbb{R} \to C$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in (-a, a)$

Nuestro propósito es hacer una generalización de este resultado sobre grupos ordenados.

6

1. PRELIMINARES.

Definición 1.1 (Conjunto parcialmente ordenado.). *Un orden parcial es una relación binaria R sobre un conjunto X que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, para cualesquiera a, b y c en X se tiene que :*

- *aRa (reflexividad).*
- *Si aRb y bRa, entonces $a = b$ (antisimetría).*
- *Si aRb y bRc, entonces aRc (transitividad).*

Un conjunto con un orden parcial se denomina conjunto parcialmente ordenado o poset. A veces se usa la expresión conjunto ordenado para uno parcialmente ordenado, siempre que quede claro que no se hará referencia a otras clases de orden. En particular, a un conjunto totalmente ordenado también se le llama ordenado a secas, en especial en campos donde éstos son más comunes que los parcialmente ordenados.
Usualmente se usa la notación $\leq$ en lugar de R para el orden parcial.

Definición 1.2 (Función Definida Positiva .). *Una función ϕ definida sobre G, se dice definida positiva si la desigualdad*

$$\Sigma_{n,m=1}^{N} C_n \overline{C}_m \phi(x_n - x_m) \geq 0$$

para todo $x_1, \ldots, x_N$ que escojamos en G y para todo número complejo $C_1, \ldots, C_N$

Ejemplo 1.1 (Funciones Definidas Positivas). *Suponga $f \in L^2$ y $\phi = f * \overline{f}$ (donde $*$ es la convolución de L^2 y $\overline{f}$ es la inversa de f), entonces ϕ es definida positiva y continua en G. La convolución de cualquier dos funciones en L^2 es continua y se tiene que*

$$\begin{aligned}
\Sigma C_n \overline{C}_m \phi(x_n - x_m) &= \Sigma C_n \overline{C}_m \int_G f(x_n - x_m - y)\overline{f(-y)}dy \\
&= \Sigma C_n \overline{C}_m \int_G f(x_n - y)\overline{f(x_m - y)}dy \\
&= \int_G |\Sigma C_n f(x_n - y)|^2 dy \geq 0
\end{aligned}$$

Definición 1.3 (Carácter.). *Una función compleja Y sobre un grupo G abeliano localmente compacto se llama **"Carácter"** de G si,*

$$| Y(x) | = 1$$

Para todo $x \in G$ y si la ecuación funcional

$$Y(x + y) = Y(x)Y(y)$$

se satisface para todo $x, y \in G$.

Ejemplo 1.2. *Todo carácter es definido positivo, así toda combinación lineal finita de caracteres lo es ya que toda combinación lineal se puede expresar en forma de suma. Si los coeficientes son positivos, más generalmente: Si* $\mu \in M(\Gamma), \mu \geq 0$*(donde* M *es el conjunto de las matrices) y si* $\phi(x) = \int_{\Gamma}(x, y)d\mu(y)$, *con* $x \in G$ *entonces* ϕ *es continua y definida positiva*

Definición 1.4 (Extensión de una Función.). *Decimos que una función* F *es una extensión de* f, *cuando el dominio de* F *contiene al de* f *y* $F(x) = f(x)$ *para todo* X *que pertenece al dominio de* f *y sus normas se definen:*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M, \|x\| \leq 1\}$$
$$\|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Definición 1.5 (Grupo Abeliano.). *Un grupo abeliano* $(G, *)$ *es un grupo conmutativo, es decir un grupo en el cual se cumple que para* $a, b \in G$,

$$a * b = b * a$$

Definición 1.6 (Función Continua .). *Sea* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación definida en el conjunto* $X \subset \mathbb{R}^m$,*se dice que* f *es continua en el punto* $a \in X$ *cuando para cualquier* $\varepsilon > 0$ *se puede obtener un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in X$ *cuya distancia al punto* a *sea menor que* δ *es transformado por* f *en un punto* $f(x)$ *que dista de* $f(a) < \varepsilon$, *en forma simbólica, esto es,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0); x \in X; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Definición 1.7 (Grupo Localmente Compacto.). *Un grupo topológico es localmente compacto si y solamente si la identidad "e" del grupo tiene una vecindad compacta. Esto es, existe un conjunto abierto* V *que contiene a "e" que es relativamente compacto en la topología de* G.

La característica más importante o más notable que tienen estos grupos es que lleva una medida natural única, llamada medida de **Haar**

Definición 1.8 (Conjunto medible.). *Un conjunto* E *se dice medible si para cada conjunto* A *tenemos que*

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

donde m^* *representa la mendida exterior de* A.

Definición 1.9 (Función Medible.). *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$ *es medible si para todo número real* a *el conjunto* $\{x \in X : f(x) > a\}$ *es medible.*

Definición 1.10 (Espacio topológico.). *Sea* X *un conjunto no vacío, una topología para* X *es una colección* Γ *de subconjuntos de* X *(los cuales son llamados abiertos) que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) X *y* ϕ *pertenecen a* Γ

ii) *La unión cualquiera de conjuntos de Γ está en Γ.*

iii) *La intersección finita de elementos de Γ está en Γ.*

El par (X, Γ) es un espacio topológico.

Definición 1.11 (Cuasi-triangulo.). *Un conjunto Q contenido en $\{(k,\ell) \in \{1,\cdots,N\} \times \{1,\cdots,N\} : k \leq \ell\}$ se llama cuasi-triangulo si $\ell_k = \text{máx}\{\ell : k \leq \ell \leq N, (k,l) \in Q\} \geq k$ Para cada $1 \leq k \leq N$ y para todo (k',ℓ') donde $k \leq k' \leq \ell' \leq \ell_k$ y $(K',\ell') \in Q$*

Definición 1.12 (Matriz Positiva.). *Sea $A \in M_n(C)$ una matriz cuadrada de números complejos, decimos que A es positiva cuando*

$$(\forall x \in C^n), \qquad x^* A x \geq 0$$

Para todo $x \in C^n$,donde C^n es el conjunto de los numeros complejos de orden n. Aqui $x^* = x^{-t}$.
Si $A \in M_n(R)$ decimos que A es positiva cuando $x^{-t} A x > 0$ para todo $x \in R^n$

Ejemplo 1.3. *Ejemplo: La matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

Es positiva.

En efecto:

si $(x', x^2) \in C^2$, entonces

$$\begin{aligned}
[\overline{x'}\ \overline{x^2}] \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ x^2 \end{bmatrix} &= [\overline{x'}\ \overline{x^2}] \begin{bmatrix} x' + & ix^2 \\ -ix' + & x^2 \end{bmatrix} \\
&= x'\overline{x'} + ix^2\overline{x'} - ix'\overline{x^2} + x^2\overline{x^2} \\
&= \overline{x'}(x' + ix^2) - i\overline{x^2}(x' + ix^2) \\
&= (x' + ix^2)(\overline{x'} - i\overline{x^2}) \\
&= (x' + ix^2)\overline{(x' + ix^2)} \\
&= |x' + ix^2|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Proposición

i) Toda matriz definida positiva es invertible y su inversa es definida positiva

ii) Si A es una matriz definida positiva y $r > 0$ es un numero real, entonces rM es definida positiva.

iii) Si A y B son matrices definidas positivas entonces la suma $A+B$, el producto ABA y BAB son definidas positivas

Demostración.

ii) Si $A \in M_n(C)$ es definida positiva si $A^* = A$, donde A^* es la conjugada traspuesta de A y para todo $x \in C^n$,

$$x^* Ax \geq 0$$

(algunos textos la llaman semidefinida positiva) Notación $A \geq 0$.

iii) Si $A, B \in M_n(C)$ son semidefinida positiva entonces A+B es semidefinida positiva De hecho tomemos $x \in C^n$ entonces

$$x^*(A+B)x = x^*Ax + x^*Bx \geq 0$$

pues $x^*Ax \geq 0$ y $x^*Bx \geq 0$, finalmente $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$

Sean A y B matrices positivas entonces se tiene que para todo $z \in C^n$; zBz^* es mayor que cero y zAz^* tambien es mayor que cero, así $z(A+B)z^*$ sigue siendo mayor que cero. Por lo tanto, A + B es definida positiva.

Observemos que como A es definida positiva si y solo si x^*Ax es definida positiva para cualquier matriz A tal que el producto x^*Ax tenga sentido.
Si A es definida positiva existe una única matriz M definida positiva tal que $M^2 = A$
Notación $M = \sqrt{A}$

Sean $A, B \in M_n(C)$ son definidas positivas entonces ABA y BAB son definidas positivas . En efecto $(ABA)^* = A^*B^*A^* = ABA$
Existe $\sqrt{A}$ y $(\sqrt{A})^* = \sqrt{A}$, entonces $\sqrt{A}B\sqrt{A} = (\sqrt{A})^*B\sqrt{A}$ es definida positiva pues B finalmente $ABA = \sqrt{A}(\sqrt{A}B\sqrt{A})\sqrt{A} = (\sqrt{A})^*(\sqrt{A}B\sqrt{A})(\sqrt{A})$, así ABA es definida positiva. De manera análoga para BAB

□

Definición 1.13 (Soporte de una función). *Sea $g : \gamma \to C$ una función. Definimos el soporte de g como la clausura de todos los $x \in \gamma$ tal que su imagen es distinta de cero , donde γ es un subconjunto de los reales, esto es:*

$$supp(g) = \overline{\{x \in \gamma / g(x) \neq 0\}}$$

Definición 1.14 (Producto de Shur). *El producto de shur de dos matrices se define así; Si A y B son dos matrices del mismo tamaño el producto de shur es la matriz cuya ij-ésima componente es el producto de ij-ésima componente de A por la ij-ésima componente de B.*

Definición 1.15 (Topologia Discreta). *Si X es cualquier conjunto y Γ es la familia formada por todas los subconjunto obtenido de X entonces Γ es una topología llamada la topología discreta. En particular todo punto de X es un conjunto abierto en la topología discreta.*

Definición 1.16 (Grupo topológico). *Un grupo topológico G es un grupo que es también un espacio topológico tal que la multiplicación del grupo $G * G \to G$ y la operación inversión $G \to G * G$ son aplicaciones continuas. Aquí $G * G$ se ve como un espacio topológico con la topología producto.*

Definición 1.17 (Medida de Haar.). *La medida de Haar izquierda (derecha) μ_G de un grupo G es una medida sobre los borelianos del grupo finito en compactos e invariantes por traslaciones a izquierda (derecha); esto es*

$$\mu_G(xA) = \mu_G(A)$$

para todo boreliano A y todo $x \in G$.

En un grupo topológico localmente compacto siempre es posible definir una medida de Haar (ver [12]).

Definición 1.18 (El Grupo Dual.). *El conjunto de todos los caracteres continuos de G forman un grupo Γ , llamado **"Grupo Dual"** de G donde se define la adición por*

$$(Y_1 + Y_2)(x) = Y_1(x)Y_2(x)$$

Para todo $x \in G$; $Y_1, Y_2 \in \Gamma$

Definición 1.19 (Transformada de Fourier.). *Para todo $f \in L'(G)$, el funcional $\widetilde{f}$ definido sobre $\mathbf{\Gamma}$ por*

$$\widetilde{f}(y) = \int_G f(x)(-x, y)dx \qquad (y \in \Gamma)$$

se llama la transformada de Fourier de f.

El conjunto de todas las funciones $\widetilde{f}$ así obtenidas serán denotadas por $\mathbf{A}(\mathbf{\Gamma})$

2. TEOREMAS PREVIOS.

Definición 2.1 (Funcional Lineal.). *Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, una **transformación lineal** f que va desde V al campo escalar F se llama un funcional lineal sobre V, esto es que f es una **función** de V en F tal que: $f(c\alpha+\beta)=cf(\alpha)+f(\beta)$ para todo vector α,β en V y todo escalar c en F.*

Teorema 2.1 (TEOREMA DE RIESZ-FRECHET.). *Dada una forma $w \in V^*$ existe un único vector $w \in V$ tal que*

$$w(y)=X(w,y), \qquad \forall y \in V$$

Demostración: Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base ortonormal de V entonces:

$$\begin{aligned} w(y)=w(\Sigma_{i=1}^{n}(u_i,y)u_i) &= \Sigma_{i=1}^{n}(u_i,y)w(u_i) \\ &= \Sigma_{i=1}^{n}(\overline{w(u_i)}u_i,y) \end{aligned}$$

y por lo tanto el vector $Xw=\Sigma_{i=1}^{n}(\overline{w(u_i)}u_i,y)$ verifica el teorema.

Veamos que es único, aunque en la expresión anterior parezca depender de la base elegida. Supongamos que,

$$w(y)=(x,y)-(x',y),\forall y \in V$$

entoces $(x-x',y)=0,\forall y \in V$ pero el único vector ortogonal a todo el espacio es el vector 0, por tanto $x=x'$.
La correspondencia

$$\Psi : V \to V$$

$$x \to w_x$$

Es un isomorfismo de espacios vectoriales reales.

$$\Psi(x+y)(z)=(z,x+y)=(z,x)+(z,y)=\Psi(x)(z)+\Psi(y)(z)$$

además

$$\Psi(\lambda x)(z)=(z,\lambda x)=\lambda(z,x)=\lambda\Psi(x)(z)$$

así queda demostrado el teorema. □

Ejemplo 2.1. *Si F es un campo y $a_1,\ldots,a_n$ son escalares en F. Definiremos una función f sobre F^n por $f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ entonces f es un funcional lineal sobre F^n*

Ejemplo 2.2. *Si n es un entero positivo y F es un campo, si A es una matriz de orden $n\times n$ con entradas en F y la traza de A es el escalar*

$$TraA=A_{11}+\cdots+A_{nn}$$

la función traza es un funcional lineal de la matriz en el espacio $F^{n\times n}$ por que

$$\begin{aligned} Tra(CA+B) &= \sum_{i=1}^{n}(CA_{ii}+B_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(CA_{ii})+\sum_{i=1}^{n}(B_{ii}) \\ &= C\sum_{i=1}^{n}A_{ii}+\sum_{i=1}^{n}B_{ii} \\ &= CTra(A)+Tra(B) \end{aligned}$$

Teorema 2.2 (TEOREMA DE HAHN-BANACH.). *Si M es un subespacio de un espacio vectorial normado X y si f es un funcional lineal acotado en M, entonces f se puede extender a un funcional lineal acotado F en X de forma que $\|F\|=\|f\|$; M no es necesariamente cerrado.*

Demostración: Supongamos en primer término que X es un espacio vectorial normado real, y consecuentemente que f es un funcional lineal real acotado en M. Si $\|f\|=0$, la extensión deseada es $F=0$.

Omitiendo este caso, no hay perdida de generalidad si suponemos que $\|f\|=1$. Elijamos un $x_0\in X, x_0\notin M$ y sea M_1 el espacio vectorial generado por M y x_0. Entonces M_1 esta formado por todos los vectores de la forma $x+\lambda x_0$, donde $x\in M$ y λ es un escalar diferente de cero. Si definimos

$$f_1(x+\lambda x_0)=f(x)+\lambda\alpha$$

donde α es un número real fijo, es trivial comprobar que se obtiene una extensión de F a un funcional lineal en M_1. El problema es elegir α de manera que el funcional extendido también tenga norma 1, es decir, si podemos encontar α tal que se satisface

$$|f(x)+\lambda\alpha|\leq\|x+\lambda x_0\|, x\in M, \lambda\in R \qquad (1)$$

Sustituyendo x por λx y dividiendo ambos miembros de (1) por λ, se obtiene la siguiente condición, equivalente (1):

$$|\lambda f(x)-\lambda x|\leq\|\lambda x+\lambda x_0\|$$

equivalente

$$|\lambda||f(x)-\alpha|\leq|\lambda|\|x-x_0\|$$

como $\lambda\neq 0$ podemos definir por$|\lambda|$ y obtener

$$|f(x)+\alpha|\leq\|x+x_0\|, x\in M \qquad (2)$$

es decir , que $Ax\leq\alpha\leq Bx$ para todo $x\in M$, donde

$$Ax=f(x)-\|x+x_0\| \;\; y \;\; Bx=f(x)+\|x+x_0\| \qquad (3)$$

existe un tal α si y solo si todos los intervalos $[A_x,B_x]$ tienen un punto en común, es decir, si y solo si $A_x\leq B_x$ (4), para todo $x,y\in M$, pero

$$f(x)-f(y)=f(x-y)\leq\|x-y\|\leq\|x-x_0\|+\|y-x_0\|$$

así se deduce de (4) y (3).

Así hemos probado que existe una extensión f_1 de F definido en M_1, que conserva la norma.

Sea $\mathcal{P}$ la colección de todos los pares ordenados (M', f') donde M' es un subespacio de X que contiene a M y f' es una extensión lineal real de F a M', con $\|f'\| = 1$. Dotamos a $\mathcal{P}$ de un orden parcial definiendo la siguiente relación entre sus elementos:

$$(M', f') \leq (M'', f'')$$

si $M' \subset M''$ y $f''(x) = f'(x)$ para todo $x \in M'$. Claramente se verifican los axiomas de orden parcial, pero $\mathcal{P}$ es no vacía, ya que contiene a (M, f) , en consecuencia el teorema de maximalidad de Hausdorff asegura la existencia de una subcolección de todos los M' tales que $(M', f') \in \Omega$. Entonces Φ está totalmente ordenada por inclusión, y en consecuencia la unión $\widetilde{M}$ de todos los elementos de Φ es un subespacio de X.

Si $x \in \widetilde{M}$, entonces $x \in M'$ para algún $M' \in \Phi$; definamos $F(x) = f'(x)$, donde f' es la función que aparece en el par $(M', f') \in \Omega$. Nuestra definición del orden parcial en Ω, muestra que no importa que $M' \in \Phi$ elijamos para definir $F(x)$ siempre que M' contenga a x

Ahora es fácil comprobar que F es un funcional lineal en $\widetilde{M}$, con $\|F\| = 1$. Si $\widetilde{M}$ fuese un subespacio propio de X, la primera parte de la demostración nos daría la existencia de una extensión de F a un subespacio mas grande y esto contradice la maximalidad de Ω, en consecuencia, $\widetilde{M} = X$ y así se demuestra el teorema para el caso de escalares reales.
Ahora si f es un funcional lineal complejo definido en el subespacio M del espacio vectorial normado complejo X, sea u la parte real de f. Utilicemos el teorema de Hahn-Banach real para extender a un funcional lineal real U en X, con $\|U\| = \|u\|$ y definamos

$$F(x) = U(x) - iU(ix), \qquad x \in X$$

□

Definición 2.2. *Sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0_Γ, Γ es un grupo ordenado, si existe un conjunto $\Gamma_+ \subset \Gamma$ tal que:*

i)$\Gamma_+ + \Gamma_+ \subseteq \Gamma_+$

ii)$\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{0_\Gamma\}$

iii)$\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma$

Un ejemplo que visualiza esta definición es el siguiente.

Tomando $(\Gamma,+)$ como $(Z,+), \Gamma_+ = Z \geq 0, -\Gamma_+ = Z \leq 0$ vemos que se cumple las tres condiciones

i $)Z^+ + Z^+ \subseteq Z^+$

ii $)Z^+ \cap (-Z^+) = \{0\}$

iii $)Z^+ \cup (-Z^+) = Z$

Ahora vamos a decir que para dos elementos cualesquiera $x, y \in \Gamma$ escribimos $x \leq y$ si $y - x \in \Gamma_+$, y escribiremos ,$x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$. De esta forma tenemos que

$$\Gamma_+ = \{y \in \Gamma : y \geq 0_\Gamma\}$$

Definición 2.3 (Intervalo Generalizado.). *Si Γ es un grupo ordenado, un conjunto J distinto de vacío, contenido en Γ, es un intervalo generalizado si tiene la siguiente propiedad, para $a, b \in J$, con $a < b$ implica que $(a, b) \subset J$*

si no hay posibilidades de confusión usaremos 0 en vez de 0_Γ.

Γ sea un grupo topológico vamos a suponer que Γ_+ es cerrado.

De esta forma vamos a definir los intervalos de la siguiente manera;

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

Si consideramos Z^2 con el orden lexicográfico y tomando dos puntos de Z^2, (m_1, n_1) y (m_2, n_2) y teniendo en cuenta este orden veamos que Z^2 es un intervalo generalizado y sin embargo no es un intervalo, en efecto:

Sea **N** un entero positivo entonces el conjunto $\{(m,n) \in Z^2 : |n| \leq N\}$ el cual llamaremos G. Veamos que es un intervalo generalizado el cual es un intervalo:

En efecto considerando a $J = \{(m,n) \in Z^2 : |n| \leq N\}$ y sea $a, b \in J$ con $a < b$, veamos que $(a, b) \subset J$.
si $a = (m_1, n_1)$ y $b = (m_2, n_2)$ entonces tenemos que para un $x \in (a, b)$ con $x = (m_3, n_3)$ entonces debe cumplirse que $a < x < b$ esto es ;

$$(m_1, n_1) < (m_3, n_3) < (m_2, n_2).$$

asi $(m_1, n_1) < (m_3, n_3)$ entonces se tiene que $n_1 < n_3$, o $n_1 = |n_3|$ y $m_1 < m_3$.

Si ocurre el primer caso entonces $|n_1| < |n_3| \leq N$ por hipótesis de donde concluimos que $|n_3| \leq N$.
ahora si $n_1 = |n_3|$ entonces $|n_1| = |n_3| < N$ así $|n_3| \leq N$ y observando la otra desigualdad tenemos

$$(m_3, n_3) < (m_2, n_2).$$

entonces $n_3 < n_2$ o $n_3 = n_2$ y $m_3 < m_2$, de donde $|n_3| < |n_2| < N$ o si $n_3 = n_2$ entonces $|n_3| = |n_2| < N$ por hipótesis; así si $n_1 < n_3 < n_2$, $|n_1| \leq N$; $|n_2| \leq N$ de donde $|n_3| \leq N$, de lo cual podemos concluir que $(a, b) \in J$, esto es que J es un intervalo generalizado el cual no es un intervalo.

En nuestro teorema principal que vamos a demostrar, debemos tener claro ciertas definiciones que vimos en el capítulo anterior como cuasi-triangulo. Es bueno visualizar cuando un conjunto es un cuasi-triangulo.

Si tomamos $N = 3$ entonces el conjunto **S** formado por el producto cartesiano $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ es

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Tomando un subconjunto $A \subset S$ definido de la siguiente forma:

$$A = \{(k, \ell) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} / k \leq \ell\}$$

entonces $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ y tomando un $Q \subset A$ con $Q = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$ veamos que Q es un cuasi-triangulo.

$\ell_1 = max\{\ell : 1 \leq \ell \leq 3, (k, \ell) \in Q\} = max\{1, 3\} = 3 \geq 1$ esto es $\ell_1 = 3 \geq 1$

$\ell_2 = max\{\ell : 2 \leq \ell \leq 3, (k, \ell) \in Q\} = max\{2, 3\} = 3 \geq 2$ así $\ell_2 = 3 \geq 2$

$\ell_3 = max\{\ell : 1 \leq \ell \leq 2, (k, \ell) \in Q\} = max\{1, 2\} = 2 \geq 1$ esto es $\ell_3 = 2 \geq 1$

así $\ell_k \geq k \forall, 1 \leq k \leq 3$

Ahora como

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 3 \text{ entonces } (1,1) \in Q.$$
$$1 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \text{ entonces } (2,3) \in Q.$$
$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \text{ entonces } (2,3) \in Q.$$

así que Q es un cuasi-triángulo.

Proposición 2.3. *Γ es un grupo ordenado abeliano $\Delta \in \Gamma$ donde Δ es un intervalo generalizado simétrico. $f : \Delta \to C$ es una función definida positiva, sea $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \Gamma$ tal que $y_1 \leq \cdots \leq y_n$ entonces existe una matriz positiva*

$A = (A_{k\ell})^n, k\ell = 1 \in C^{n\times n}$ esto es:

$A = [f(y_\ell - y_k)]^n, k\ell = 1 \in C^{n\times n}$ con $y_\ell - y_k \in \Delta$; escribiendo A en forma matricial se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} f(0) & f(y_1 - y_2) & \cdots & f(y_1 - y_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(y_n - y_1) & f(y_n - y_2) & \cdots & f(0) \end{pmatrix}$$

Demostración: debemos mostrar que A es positiva.

Sea $E = \{(k,\ell)/1 \leq k \leq \ell \leq n \;\; y \;\; y_1 - y_k \in \Delta\}$, probemos que E es cuasi-triangulo, en efecto;

i) $0 \in \Delta$ ya que para todo $x \in \Delta$, entonces $-x \in \Delta$ esto es que $(-x, x) \subset \Delta$, así $0 \in \Delta$

ii) Es claro que $(-k, k) \in E$ ya que $1 \leq k \leq K \leq n \;\; y \;\; y_K - y_k \in \Delta, \quad \forall 1 \leq k \leq n$

iii) $\ell_k \geq k$ $(\ell_k = max\{\ell/k \leq \ell \leq N/(k,\ell) \in E\})$ y $(k,k) \in E$ entonces $\ell_k \geq k$

Supongamos ahora que $k \leq k' \leq \ell' \leq \ell_k$ con $1 \leq k \leq n$ y probemos que $(k, \ell') \in E$ en efecto;

Como $y_1 \leq \cdots \leq y_k \leq \cdots \leq y_{k'} \leq \cdots \leq y_{\ell'} \cdots \leq y_{\ell_k}$ entonces $y_{\ell'} - y_{k'} \geq 0$ esto es $0 \leq y_{\ell'} - y_{k'}$ así $y_{\ell_k} \geq y_{\ell'}$ (1), ahora $y_k \leq y_{k'}$ entonces $y_{\ell_k} \geq y_{\ell'}$ y $-y_k \geq -y_{k'}$ (2) así de (1) y (2) tenemos que:

$$y_{\ell_k} - y_k \geq y_{\ell'} - y_{k'}$$

así, $0 \leq y_{\ell'} - y_{k'} \leq y_{\ell_k} - y_k$ y como $\ell_k \geq k$ entonces $\ell_k - y_k \in \Delta$, por hipótesis y como $0 \in \Delta$ entonces $(0, y_{\ell_k} - y_k) \subset \Delta$, asi $y_{\ell'} - y_{k'} \in \Delta$ y como $1 \leq k \leq K \leq n \;\; y \;\; y_K - y_k \in \Delta$ entonces $(k', \ell') \in E$ de donde se tiene que E es un cuasi-triangulo, entonces podemos decir que f es definida positiva y también toda matriz bloque de la forma:

$$(f(y_{\ell'} - y_{k'})), k \leq k' \leq \ell' \leq \ell_k$$

es positiva. □

Lema 2.4. *Si $g : \Gamma \to C$ es una función definida positiva con soporte finito en Δ entonces*

$$\sum_{y\in\Gamma} f(y)g(y) \geq 0$$

Demostración. Tenemos que $g : \Gamma \to \mathbf{C}$ es definida positiva y además

$$supp(g) = \overline{\{x \in \Gamma / g(x) \neq 0\}} \subset \Delta$$

dicho conjunto así definido es finito, veamos que

$$\sum_{y \in \Gamma} f(y)g(y) \geq 0$$

consideremos la función $\psi : \Gamma \to \mathbf{C}$ la cual definiremos de la siguiente manera :

$$\psi(y) = \begin{cases} f(y)g(y) & si \ \ y \in \Delta \\ 0 & si \ \ y \notin \Delta \end{cases}$$

Primero probemos que ψ es definida positiva, esto es que para cualquier $r_1, \cdots, r_n \in \Gamma$ la matriz $(\psi(r_\ell - r_k))^n, k, \ell = 1$ es definida positiva. En efecto, tenemos que Γ es ordenado, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ entonces por la proposición 2.3 existe una matriz

$$A = (A_{k\ell})_{k,\ell=1}^n \in C^{n \times n}$$

$A_{k\ell} = f(r_\ell - r_k)$ siempre que $(r_\ell - r_k) \in \Delta$ donde f es positiva.

Ahora como el producto Shur de dos matrices positivas sigue siendo positivo entonces se tiene que

$A_{k\ell}$ positiva y $(g(r_\ell - r_k))$ positiva, entonces

$(A_{k\ell}g(r_\ell - r_k))$ es positiva donde

$$A = \begin{pmatrix} f(0) & f(x_1 - x_2) & \cdots & f(x_1 - x_n) \\ f(x_2 - x_1) & f(0) & \cdots & f(x_2 - x_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(x_n - x_1) & f(x_n - x_2) & \cdots & f(0) \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} g(0) & g(x_1 - x_2) & \cdots & g(x_1 - x_n) \\ g(x_2 - x_1) & g(0) & \cdots & g(x_2 - x_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ g(x_n - x_1) & g(x_n - x_2) & \cdots & g(0) \end{pmatrix}$$

Además el soporte de g está contenido en Δ, así por el producto de Shur se tiene la matriz ψ definida así

$$\psi = \begin{pmatrix} f(0)g(0) & f(x_1 - x_2)g(x_1 - x_2) & \cdots & f(x_1 - x_n)g(x_1 - x_n) \\ f(x_2 - x_1)g(x_2 - x_1) & f(0)g(0) & \cdots & f(x_2 - x_n)g(x_2 - x_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(x_n - x_1)g(x_n - x_1) & f(x_n - x_2)g(x_n - x_2) & \cdots & f(0)g(0) \end{pmatrix}$$

es positiva. Así, si logramos probar que

$$(\psi(r_\ell - r_k)) = (A_{k\ell}g(r_\ell - r_k))$$

con $1 \le \ell \le n$ y $1 \le k \le n$ tendremos que ψ es positiva.

En efecto, si $(r_\ell - r_k) \in \Delta$ entonces

$$\psi(r_\ell - r_k) = f(r_\ell - r_k)g(r_\ell - r_k) = A_{k\ell}g(r_\ell - r_k)$$

Por definición y sí $r_\ell - r_k \notin \Delta$, entonces

$$\psi(r_\ell - r_k) = 0$$

por hipótesis, ya que

$$g(r_\ell - r_k) = 0$$

por consiguiente $\psi(r_\ell - r_k)$ es definida positiva .

Sea $\underset{\sim}{1}$ el elemento del dual 0 de Γ que aplica todo elemento de Γ en $1 \in \mathbb{C}$

Sea $\widetilde{\psi}$ la transformada de Fourier de ψ, luego

$$\widetilde{\psi}(1) = \int_\Gamma \psi(x)1(-x)dx = \int_\Gamma \psi(x)dx$$

pero como la medida sobre Γ es la medida discreta tenemos que

$$\int_\Gamma \psi(x)dx = \sum_{y\in\Gamma} \psi(x) \ge \overline{0}$$

la ultima desigualdad se debe a que ψ es definida positiva, luego

$$\widetilde{\psi}(1) = \sum_{y\in\Gamma} \psi(x) = \sum_{y\in\Gamma} f(y)g(y) \ge 0.$$

□

Teorema 2.5. *Si V es un subconjunto abierto de un grupo localmente compacto G y si h es una función de valores complejos sobre G que tiende a cero. Si h es medible sobre V, entonces $h = 0$ localmente en casi todos los puntos sobre V.*

Demostración: Podemos asumir que h es real. Supongamos además que h existe localmente en casi todo V. Entonces existe una vecindad abierta simétrica W de e y $x_0 \in V$ tal que $W_{x_o} \in W \subset V$ y h no se anula sobre $x_o \subset W$. Así existe una función real $g \in C^r_{n_o}(G)$ tal que

$$Supp(g) \subset W^{-1}_{xo} \;\; y \;\; \int_{x_0 W} h(y)g(y^{-1})dy = 1$$

Definamos

$$h'(x) = \begin{cases} h(x), \; si \; x \in V, \\ 0, \; si \; x \notin V. \end{cases}$$

y consideremos las funciones continuas

$$h' * g(x) = \int_G h'(xy)g(y^{-1})dy$$

entonces $h' * g(e) = 1$, este es un conjunto abierto w' asi $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ y $x_1, \ldots, x_n \in W'$, así tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i h' * g(x_i) > \frac{1}{2}$$

entonces h converge a cero, escojamos los p_i y x_i talque la desigualdad

$$|\sum_{i=1}^{n} p_i h(x_i y)| < \varepsilon, \;\; con \;\; y \in G \;\; para \;\; todo \;\; \varepsilon > 0$$

tomemos $y \in x_o W$, tenemos que $x_i, x_o W \subset W_{x_o} W \subset V$ lo cual implica que

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & < & \sum_{i=1}^{n} p_i h' g(x_i) \\ & = & \int_G [\sum_{i=1}^{n} p_i h'(x_i y)] g(y^{-1}) dy \\ & \leq & \int_G |g(y^{-1})| dy - \sup_{y \in x_o W} |\sum_{i=1}^{n} p_i h(x_i y)| \\ & \leq & \int_G |g(y^{-1})| dy \end{array}$$

para todo $\varepsilon > 0$, esta contradicción completa la demostración .

□

Corolario 2.6. *Si f es una función definida positiva sobre un grupo topológico G y sea S un número real. Si K es un subconjunto compacto de G y V es una vecindad de S, entonces el conjunto $E_{K,Sf}$ puede ser cubierto por finitas traslaciones a la izquierda de los conjuntos*

$$S(f) \cap V$$

Demostración: Como K es compacto, este puede ser cubierto por finitas traslaciones de conjuntos abiertos V_i, tal que

$$V_i^{-1} V_i \subset V$$

entonces

$$E_{K,\delta} f \subset \bigcup_{i=1} E_{V,\delta} f$$

por ser f definida positiva tenemos que para cada $E_{Vi,\delta} f$ es un recubrimiento por finitas traslaciones de conjuntos abiertos

$$S(f) \cap (V_i^{-1} V_i)$$

ahora se nota finalmente que

$$S(f) \cap (V_i^{-1} V_i) \subset S(f) \cap V$$

□

Teorema 2.7. *Si $f \in P(G)$ (conjunto de todas las funciones continuas definidas positivas) donde G es localmente compacto y si $f = 0$ localmente en casi todos los puntos de una vecindad de e, entonces $f = 0$ en casi todo G.*

Demostración: Sea $K \subset G$ un subconjunto compacto arbitrario entonces por corolario 2.6 y la ecuación

$$S(f) \cap K = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_K, \frac{1}{n}f, \quad tal \quad que \quad \lambda(S(f) \cap K) = 0$$

asi $f = 0$ en casi todo G.

□

Teorema 2.8. *Sea $f \in P(G)$, donde G es localmente compacto y f es medible sobre una vecindad V de e, entonces f es medible sobre G.*

Demostración: En efecto sea

$$f = f_c + f_o$$

donde $f_c \in P^c(G), f_o \in P(G)$ y f_o tiende a cero, entonces

$$f_o = f - f_c$$

así la función f_o es medible sobre V y por teorema 2.7 y 2.5 vemos que $f_o = 0$ localmente en casi todo G, así

$$f \in P^m(G)$$

donde $P^m(G)$ es el conjunto de todas las funciones medibles sobre G □

Teorema 2.9. *Si Γ es un grupo localmente compacto y f es medible entonces cualquier extensión de f es medible .*

Demostración: f puede ser expresada como

$$f = f_c + f_o$$

donde $f_c \in P^c(G)$ (conjunto de todas las funciones continuas definidas positivas y $f_o \in P(G)$ conjunto de todas las funciones continuas sobre G) y $f_o \neq 0$,así

$$f_o = f - f_c$$

entonces f_o es medible sobre V por teorema 2.8. □

Antes del teorema principal enunciaremos unos teoremas que necesitaremos:

Definición 2.4. *Sea X un espacio topológico y $S(x)$ el conjunto de todas las funciones de X en X. Sobre $S(x)$ definimos la topología generada por los conjuntos de la forma:*

$$(U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{f \in S(x)/F(x_i) \in U_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Donde los U_i son abiertos en X y los x_i son puntos de X.
Esta topología es llamada la topología punto-convergente.

Lema 2.10. *Sea X un espacio topológico y H_c el subconjunto de $S(x)$ formado por las funciones continuas de X en X. Si $S(x)$ es 1-contable entonces H_c es cerrado.*

Demostración: Podemos proceder vía sucesiones.
En efecto, si $f \in H_c$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de H_c tales que $f_n \longrightarrow f$. Sea $x \in X$ y U abierto tal que $f(x) \in U$, luego como $f \in (U,x)$ y (U,x) es abicto en $S(x)$, existe $N \in R^+$ tal que $n \geq N$ implica que $f_n \in (U,x)$, es decir $f_n(x) \in U$ si $n \geq N$, por lo tanto $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ uniformemente, como cada f_n es continua, así mismo debe ser f y por tanto H_c es cerrado.

$\square$

Lema 2.11. *En un espacio con producto interno $(V, <>)$, el complemento ortogonal de cualquier subconjunto de V es cerrado.*

Demostración: Sea $A \subseteq V$, veamos que el complemento ortogonal de A, A^c, es cerrado. En efecto sea $x \in A^c$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A^c tales que $x_n \longrightarrow x$. Sea $a \in A$, así $< x_n, a >= 0$. Ahora por la continuidad del producto interno tenemos que

$$< x, a >=< \lim_{n \to \infty} x_n, a >= \lim_{n \to \infty} < x_n, a >= 0$$

Así $x \in A^c$, por tanto $\overline{A^c} = A$ y A^c es cerrado. $\square$

Teorema 2.12. *Sea G un grupo localmente compacto y $f \in P^m(G)$ entonces $f = f_c + f_0$ donde $f_c \in P^c(G)$ es definida positiva y f_0 es medible. Además, idénticamente cero en casi todas partes.*

Demostración: Sea G en grupo topológico localmente compacto y sea $f \in P^m(G)$, denotemos por H_c al conjunto de las funciones continuas en $H(f)$ y por H_o su complemento ortogonal, entonces es claro que H_c y H_o son cerrados, por los lemas 2.10 y 2.11 ; consideremos U_x el subespacio invariante de $H(f)$ donde $H(f) = H_c + H_o$; ahora $f = f_c + f_o$ donde $f_c \in P^c(G) \cap H_c$ y $f_o \in P(G) \cap H_o$, asi para todo $h \in L^1(G)$ se tiene que $h_\alpha f_0 \in H_0$, esto es $h_\alpha f_0$ es continua, donde $h_\alpha f_0 \in H_c$, entonces se tiene que $h_\alpha f_0 = 0$ para todo $h \in L_1(G)$ esto es $f_0 = 0$ en casi todas partes. $\square$

Teorema 2.13 (TEOREMA DE BOCHNER - HERGLOTZ-WEIL- RAIKOV). *Sea f funcional lineal sobre un algebra de Banach conmutativo, semi-simple, semi-adjunto, positivo y extensible si y solo si existe una medida μ positiva de Baire sobre el maximal ideal de A tal que*

$$f(x) = \int \widehat{x} dx$$

para todo x en A

Demostración: Supongamos que ϕ es continua y definida positiva. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\phi(0) = 1$, si $f \in C_c(G)$ y tiene soporte K, entonces, $f(x)f(y)\phi(x-y)$ es uniformemente continua sobre $K \times K$ y K puede ser particionado en conjuntos disjuntos $E_1 \dots E_n$ tal que la suma

$$\sum_{i,j}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j)m(E_i)m(E_j)$$

para todo $x_i \in E_i$ y $x_j \in E_j$, es diferente a la integral

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)dxdy$$

luego ϕ es definida positiva, es decir ϕ es no negativa, esto es $C_c(G)$ es denso en $L'(G)$ teniendo que $C_c(G)$ es no negativa para todo $f \in L'(G)$ luego

$$\Gamma\phi(f) = \int_G f(x)dx \tag{2.1}$$

para todo $f \in L'(G)$ y tomando

$$[f, g] = \Gamma\phi(f \times \widetilde{g}), \qquad (f, g \in L'(G))$$

donde llamamos $\widetilde{g}(x) = g(-x)$ se tiene que

$$[f, g] = \int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)dxdy$$

es lineal en f y $[g, f]$ es el conjugado de $[f, g]$, luego $[f, f] \geq 0$. Esta propiedad es la de los espacios de Hilbert con el producto interno el cual necesitamos en esta prueba.
Ahora de la desigualdad de Schwarz que en nuestro caso es:

$$\mid [f, g] \mid^2 \leq [f, f][g, g] \tag{2.2}$$

tomando g la función característica de una vecindad simétrica V de O dividida por $m(v)(G)$ se tiene que

$$[f, g] - \Gamma\phi(f) = \int_G f(x)\frac{1}{m(v)}\int_V [\phi(x-y) - \phi(x)]dxdy$$

$$[g, g] - 1 = \frac{1}{m(v)}\int_V \int_V [\phi(x-y) - 1]dxdy$$

entonces es uniformemente continua.
Esta afirmación puede ser arbitraria ahora de (2.2) se tiene la desigualdad

$$\mid \Gamma\phi(f) \mid^2 \leq [f, f] = \Gamma\phi(f \times \widetilde{f}) \tag{2.3}$$

(con $f \in L'(G)$) pero $h = f = \widetilde{f}$ y $h^n = h^{n-1} \times h$, para $n = 2, 3, \ldots$, entonces $\|\phi\|_\infty = 1$, tenemos $\|\Gamma\phi\| = 1$ y aplicando (2.3) con $h, h^2, h^4, \ldots$ en lugar de f obtenemos:

$$| \Gamma\phi(f) |^2 \leq \Gamma\phi(h) \leq \{\Gamma\phi(h)^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq \{\Gamma\phi(h)^{2^n}\}^{2^{-n}} \leq \| (h)^{2^n} \| 1^{2^{-n}}$$

donde $n \longrightarrow \infty$, entonces la expresión converge al radio espectral de h, esto es

$\|\widehat{h}\|_\infty$ así$| \Gamma\phi(f) |^2 \leq \|\widehat{h}\|_\infty \leq \|\widehat{h}\|_\infty^2$ o $| \Gamma\phi(f) | \leq \|\widehat{h}\|_\infty$ con $f \in L'(G)$
Esto significa que $\Gamma\phi$ puede ser tomado como un funcional lineal acotado sobre $A(\Gamma)$ con respecto a la norma suprema podemos extender $\Gamma\phi$a un funcional lineal acotado sobre $C_0(\Gamma)$ preservando la norma y la representación de Riesz , entonces esto implica que existe $\mu \in M(\Gamma)$ con $\|\mu\| \leq 1$ tal que

$$\Gamma\phi(f) = \int_\Gamma [f^n(-y)] d\mu(y) = \int_G f(x)dx \int_\Gamma (x, y) d\mu(y) \tag{2.4}$$

comparando (2.1) y (2.4) se demuestra el teorema tomando $x = 0$, esto es

$$1 = \phi(0) = \int_\Gamma d\mu(y) = \mu(\Gamma) \leq \|\mu\| = 1$$

entonces, $\mu(\Gamma) = \|\mu\|$ y esto implica que $\mu \geq 0$ □

Teorema 2.14. *Si $y \in \Gamma$ y si*

$$\widetilde{f}(y) = \int_G f(x)(-x, y)dx$$

con $f \in L'(G)$ entonces la función $f \rightarrow \widetilde{f}(y)$ es un homomorfismo complejo de $L'(G)$, y no es idénticamente 0. Inversamente, todo homomorfismo complejo distinto de cero de $L'(G)$ es obtenido de esta misma forma, y de distinto carácter induce a distinto homomorfismo.

La demostración de este teorema aparece en [10], no se escribió por que se necesitan muchos factores previos.

Este teorema garantiza que la transformada de fourier es inversible y notemos con $\widehat{f}$ la inversa

Si la medida de se asume normalizada tenemos la siguiente relación de ortogonalidad.

$$\int_G r(x) = \begin{cases} 1, & si\ r = 0, \\ 0, & si\ r \neq 0. \end{cases}$$

Donde 0 es el neutro el grupo de caracteres, es decir la función que envía todo elemento de G en 1.

$$\int_G r(x)dx = \int_G dx = \mu(G) = 1$$

si $r \neq 0$ existe x_0 tal que $r(x_0) \neq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_G r(x)dx &= \int_G r(x_0)^{-1} r(x) r(x_0) dx \\
&= r(x_0) \int_G r(x - x_0) dx \\
&= r(x_0) \int_{G+x_0} r(x) dx \\
&= r(x_0) \int_G r(x) dx
\end{aligned}$$

como $r(x_0) \neq 1$ debe ser

$$\int_G r(x)dx = 0$$

3. TEOREMA PRINCIPAL.

Teorema 3.1. *Si $(\Gamma, +)$ es un grupo abeliano ordenado y $\Delta \subset \Gamma$ es un intervalo generalizado simétrico no trivial, es decir con mas de un punto y sea $f : \Delta \to C$ Es una función definida positiva entonces;*

a) *f tiene una extensión definida positiva a cualquier grupo Γ; esto es, que existe $g : \gamma \to C$ que es también una función definida positiva y que además $g/A = f$ esto es que $g(x) = f(x)$ para todo $X \in \Delta$*

b) *Si Γ es un grupo topológico y f es continua entonces cualquier extensión definida positiva de f es continua.*
Esto es $g : \Gamma \to C$ es continua definida positiva.

c) *Si Γ es un grupo localmente compacto y f es medible entonces cualquier extensión definida positiva de f es medible*

d)*Si Γ es un grupo localmente compacto y f es medible entonces existen dos funciones definidas positivas $f^c : \Delta \to C$ y $f^o : \Delta \to C$ tal que*

i) $f = f^c + f^o$

ii) f^c es continua

iii) f^o es cero localmente en casi todos los puntos

Demostración: a) Para esta parte consideraremos a Γ con la topología discreta.
Sea G el dual del grupo Γ
Si $F(\Delta)$ es el conjunto de las transformadas de Fourier $\widetilde{V}$ de la medida v sobre Γ con soporte finito contenido en Δ y si

$$F^r(\Delta) = \{p \in F(\Delta) : Ran\ \ k(p) \subset \mathbb{R}\}$$

$$F^+(\Delta) = \{p \in F^r(\Delta) : p \geq 0\}$$

Si $L : F^r(\Delta) \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(p) = \sum_{y \in \Gamma} F(y)\widetilde{p}(y)$$

tenemos que L es un funcional real lineal

$$L(p_1 + cp_2) = \sum_{y \in \Gamma} f(r)(p_1 + c_1 p_2)(r)$$

donde c_1 es un número complejo

$$\begin{aligned} L(p_1 + cp_2) &= \textstyle\sum_{y\in\Gamma} f(r)(\widetilde{p}_1(r) + c_1\widetilde{p}_2(r)) \\ &= \textstyle\sum_{y\in\Gamma} f(r)\widetilde{p}_1(r) + c_1 \sum_{y\in\Gamma} f(r)p_2(r) \\ &= L(p_1) + c_1 L(p_2) \end{aligned}$$

26

Si $p \leq q$ luego $(p-q) \leq 0$ luego

$$L(p-q) \leq L(0) \leq 0$$

así $L(p) - L(q) \leq 0$ es decir $L(p) \leq L(q)$, ahora por lema 1.5 se tiene que L es un funcional lineal positivo, entonces
$L(p) \leq L(q)$ si $p, q \in F^{r}(\Delta)$ y $p \leq q$.

Sea $\|\|$ es la norma uniforme en el espacio lineal $F^{r}(\Delta)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) = 1$. si $p \in F^{r}(\Delta)$ entonces

$$-\|p\| \leq p \leq \|p\|,$$

en efecto si suponemos que $f(0) \neq 1$ hagamos

$$f^{*}(x) = f(x) - f(0) + 1$$

Sería entonces

$$f^{*}(0) = f(0) - f(0) + 1 = 1$$

es claro que

$$-\|p\| \leq p \leq \|p\|,$$

luego

$$L(-\|p\|) \leq L(p) \leq L(\|p\|)$$

$$-\|p\|L(1) \leq L(p) \leq \|p\|L(1)$$

$$|L(p)| \leq \|p\|L(1)$$

luego $|L(p)| \leq \|p\|$ para todo p, es decir L es de norma 1 sobre $F^{r}(\Delta)$

Por el teorema de HAHN-BANACH se sigue que L puede ser extendida a un funcional lineal de norma 1 sobre el espacio de el valor real de las funciones continuas sobre G.

Por el teorema de LA REPRESENTACIÓN DE RIESZ se tiene que existe una medida finita μ sobre G de variación total 1 tal que

$$L(p) = \int_{G} p(\mathcal{Y}) d\mu(\mathcal{Y}) \quad \textit{para} \quad p \in F^{r}(\Delta) \tag{3.1}$$

Sea $\mathcal{Y} \in \Delta$, si tomamos $p(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}(y) + \mathcal{Y}(-y)$ en (2.1) obtenemos

$$f(y) + f(-y) = \widetilde{\mu}(y) + \widetilde{\mu}(-y)$$

ahora bien si

$$p(\mathcal{Y}) = i(\mathcal{Y}(y) - \mathcal{Y}(-y))$$

en la ecuación (2.1) obtenemos

$$f(y) - f(-y) = \widetilde{\mu}(y) - \widetilde{\mu}(-y)$$

entonces

$$f(y) = \widetilde{\mu}(y) \;\; para \;\; todo \;\; p \in F^{r}(\Delta)$$

luego

$$1 = L(1) = \mu(G) \leq \|\mu\| = 1$$

así tenemos que μ es una medida positiva y por el teorema de **BOCHNER - HERGLOTZ- WEIL- RAIKOV** tenemos que $F = \widetilde{\mu}$ es una extensión definida positiva de f.

b) Puesto que Δ es un intervalo simétrico generalizado no trivial el cual contiene un conjunto de la forma $(-a, a)$, donde $a > 0$, el conjunto $(-a, a)$, es una vecindad de 0 y como $b \subset \Gamma$ el cual es un grupo topológico se tiene que para toda función $f \in P(G)$ si f es continua en e entonces f es uniformemente continua sobre G (denotemos $P(G)$ el conjunto de las funciones positivas medibles), y como f es una función definida positiva sobre el grupo G entonces, se tiene que

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(e)[f(e) - Ref(x^{-1}y)]$$

para todo $x, y \in G$ y esto es equivalente a decir que $|f(x)| \leq f(e)$ para todo $x \in G$.
c) Si Γ es un grupo localmente y f es medible entonces cualquier extensión de f es medible .
En efecto f puede ser expresada como

$$f = f_c + f_0 \;\; donde \;\; f_c \in P^c(G) \;\; y \;\; f_0 \in P(G)$$

con $P^c(G)$, es el conjunto de las funciones continuas definidas positivas y $P(G)$, de las funciones positivas sobre G. y f_0 es distinto de cero así $f_0 = f - f_c$, entonces f_0 es medible sobre V. Ahora por teoremas **2.5** y **2.7** podemos ver que $f_0 = 0$ localmente sobre G, así $f \in P^m(G)$. ($P^m(G)$ es el conjunto de las funciones definidas positivas medibles.)

d) Se sigue del teorema 2.12 (ver [11])

□

4. CONCLUSIÓN

Se han demostrado teoremas de extensión continua para funciones medibles, continuas y definidas positivas. Note que todos los resultados han sido conseguidos en grupos abelianos, porque es aquí donde el concepto de grupo ordenado tiene sentido.

Hemos visto que toda función continua en un intervalo de un grupo topológico ordenado admite una extensión continua. También se probó un resultado análogo para funciones medibles y definidas positivas, pero para este último caso es necesario que el grupo sea localmente compacto. Además en este caso se probó que toda función medible se puede escribir como suma de una función medible y una función nula en casi todas partes.

29

Referencias

[1] Bruzual, R., and Domínguez M. On extension of scalar valued positive difinite functions on ordered groups, Divulgaciones Matemáticas. Vol 15, No 2(2007) pp. 115-122.

[2] Arocena, R. On the extension problem for a class of translation invariant positive forms, J. Oper. Theory 21, No.2, (1989) 323-347.

[3] Arsene, Gr., Ceausescu, Zoia, Constantinescu, T. Schur analysis of some completion problems, Linear Algebra Appl.109 (1988) 1-35.

[4] Crum, M. On positive desinite functions, Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 548-560.

[5] Devivatz, A. On extensions of positive definite functions, acta Math. 102 (1959), 109 - 134.

[6] Friedrich, J. , Klotz, L. On extensions of positive definite operator - valued functions. Rep. Math. Phys. 26, No.1, (1988) 45-65.

[7] Giroux A., Analyse III notes the cours. Departament the mathematiques et estastique.(Universite the montreal), 95.

[8] Krein, M.G. Sur le probleme du prolongement des fonctions hernitiennes positives et continues, Dokl. Akad, Nauk. SSSR 26 (1940) 17 - 22.

[9] Riesz, F. Uber satze vonStone und Bochner, Acta Univ. Szeged 6 (1933), 184 - 198.

[10] Rudin, W. Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[11] Rudin, W. The extension problem for positive definites, Illinois J. Math. 7 (1963) 532 - 539.

[12] Sasvari, Z. Positive definite and definitizable functions, Akademie Verlag, 1994.

62476