1

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO IRROTACIONAL

ALEXANDER MANUEL LEONES PINO

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

CARTAGENA D.T.C

2008

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO IRROTACIONAL

ALEXANDER MANUEL LEONES PINO

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA

OPTAR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ASESOR DE TESIS:

RUBEN DARÍO ORTIZ

DOCTOR EN MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

CARTAGENA D.T.C

2008

DEDICATORIA

Dedico este trabajo con mucho cariño a mis padres, a mis hermanos, a mi esposa, a mi hija Valeria, y a mis sobrinos Daniel, Salomé, Luisa y Liz Gabriela por todo su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por darme fuerzas y sabiduría, a todos mis familiares por su enorme apoyo, a la Universidad de Cartagena, a todos los profesores que de una u otra forma contribuyeron en mi formación, en especial al Dr. Ruben Darío Ortíz por su gran dedicación, a Pedro Pablo Ortega un gran amigo, y a todos mis compañeros de estudio.

Índice general

Introducción

El problema de ondas guiadas para superficies acuáticas aparecen a mediados de 1950. La posibilidad de la existencia de una onda guiada en el caso de ondas de superficies lineales de un fluido pesado fue demostrado por Munk y Artur [2]. Sus estudios se basaron en la aplicación del principio de geometría óptica en aproximación acústica. En 1957 Lavrent´ev observó que puede existir una propagación de onda a lo largo de una sierra submarina que se diferencia de una propagación de ondas sobre una región de agua profunda; en otras palabras las ecuaciones de Euler de un fluido incomprensible ideal admite soluciones que son periódicas o cercanas a las periódicas en la dirección de

8

la sierra y decrecen rapidamente en la dirección perpendicular. Parcialmente, esta conjetura se sigue de observaciones de ondas Tsunámi. Sum´Tsao experimentalmente estudio la influencia de una sierra submarina sobre ondas de superficie e hizo algunos cálculos. El reveló desviaciones cuantitativas y cualitativas de los cálculos de Munk y Arthur. Sum´Tsao observó una propagación casi estacionaria de una onda a lo largo de una sierra que no se sigue de la teoría acústica. Sobre aquellos temas, el concluyó que los principios de geometría óptica son poco útiles para ondas como Tsunámi y otras ondas de agua grandes con poca profundidad.

En los año 60 Garipov estudió el problema a fondo de onda guiada lineal no estacionaria. El obtuvo una expansión asintótica para una solución en tiempos grandes y demostró que hay una propagación de ondas a lo largo de irregularidades del fondo.

Efectos no lineales de este problema fueron estudiados primero por Bichenkov usando aproximaciones no lineales de teorías de ondas largas. El demostró que para alguna forma del fondo se pueden observar una propagación estacionaria de una onda solitaria por encima de una sierra submarina.

En los 70 el problema de ondas gravitacionales capilares por encima de una sierra submarina fue estudiado por Nalimov y Plotnikov . En aproximación lineal, el problema representa un problema de valores propios irregulares. Nalimov y Plotnikov demostraron un teorema de existencia para una solución en espacios pesados de funciones continuamente diferenciables, por lo tanto establece el decaimiento en potencia de la amplitud en la dirección perpendicular a la sierra.

En este trabajo se hace uso de la teoría de fluidos como el potencial de velocidad, ecuación de continuidad para fluidos irrotacionales e incomprensible los cuales nos ayudan a determinar las dos condiciones de frontera (cinemática y dinámica).

Para el desarrollo de este trabajo se hace uso de las dos condiciones de frontera así también como el problema mixto de valor frontera para hallar los operadores.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo veremos algunos conceptos básicos del cálculo vectorial extendido a los campos escalares y vectoriales para el desarrollo analítico de las representaciones del movimiento de un fluido.

Los campos escalares y vectoriales definidos en subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se representan con frecuencia en las aplicaciones de la Matemática a las Ciencias Naturales y a la ingeniería. En problemas de física que tratan con conceptos escalares o vectoriales es importante saber como varía el campo al pasar de un punto

12

a otro. En el caso uni-dimencional la derivada es el instrumento matemático utilizado para estudiar tales cambios. Describir primero las propiedades de esta, especialmente su velocidad, y las fuerzas relevantes que actuan sobre las particulas del fluido. En consecuencia, invocaremos las leyes físicas que expresan las leyes de conservación de la masa y momentum, en términos de esta descripción, obtendremos las ecuaciones que gobiernan el movimiento.

A continuación analizaremos como pequeños desplazamientos asociados con el flujo irrotacional de un fluido incomprensible perfecto son llevados por ecuaciones que no son más que consecuencias de la linealización de las ecuaciones dinámicas de un fluido clásico.

1.1. *Definición de gradientes*

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar de tres variables, su gradiente

denotado por ∇f,

es el vector

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}). \qquad (1.1)$$

Donde el operador ∇ se define como :

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}). \qquad (1.2)$$

Aqui ∇ no es un vector, es un operador.

Si ϕ es un campo escalar, entonces:

- $\phi\nabla$ es un operador.
- $\nabla\phi$ es una función vectorial llamada gradiente.

De igual manera si $\overrightarrow{V}$ es un campo vectorial $\overrightarrow{V} \cdot \nabla$ es un operador, mientras que $\nabla \cdot \overrightarrow{V}$ es una función escalar.

Algebra de los gradientes

1. $\nabla(kf) = k\nabla f$.

2. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

3. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$.

4. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

1.2. *Definición de divergencia*

Dado un campo vectorial $\overrightarrow{f} = f\,\widehat{i} + f\,\widehat{j} + f\,\widehat{k}$.

La divergencia de f tiene importantes interpretaciones físicas, si $f = \overrightarrow{v}$ representa el campo de velocidades de un fluido, entonces $div\overrightarrow{v}$ representa la expansión por unidad de volumen del fluido.

Propiedades

1. $\nabla \cdot (\overrightarrow{v}) < 0$ el fluido se esta comprimiendo.

2. $\nabla \cdot (\overrightarrow{v}) > 0$ el fluido se esta expandiendo.

3. $\nabla \cdot (\overrightarrow{v}) = 0$, es un fluido incompresible.

1.3. *Ecuación de Laplace*

Sea

$$F = graf = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{k}.$$

Luego

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{k}.$$

Por tanto

$$\nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\widehat{i} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\widehat{j} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\widehat{k}.$$

De donde

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\widehat{i} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\widehat{j} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\widehat{k}. \tag{1.3}$$

Cuando $\nabla^2 f$=0, la función f se llama armónica y la ecuación (1.3) se llama ecuación de Laplace.

1.4. *Espacios de Banach*

Sea X un R-espacio vectorial.

Definición 1.4.1. *Una función* $||\cdot|| : X \longrightarrow [0, +\infty)$ *se dice una norma si*

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todos los* $x, y \in X$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $x \in X, \lambda \in R$.

3.$\|x\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

Definición 1.4.2. *Una sucesión* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *se dice de Cauchy si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $k_0 > 0$ *tal que* $\|x_k - x_l\| < \epsilon$ *para todo* $k, l \geq k_0$.

Definición 1.4.3. X *se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir si para toda sucesión* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *de Cauchy, existe* $x \in X$ *tal que* $x_k \longrightarrow x$.

Definición 1.4.4. *Un espacio se dice que es de Banach si es un espacio vectorial normado y completo.*

Capítulo 2

Hidrodinámica básica

2.1. *Flujos irrotacionales*

Definición 2.1.1. *Un fluido se dice que posee movimiento **irrotacional** si*

$$\nabla \times \mathrm{V} = 0, \tag{2.1}$$

o en componentes cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

*Además, se dice que el fluido es **incompresible** si su densidad es constante e **ideal** si no es viscoso. La circulación de un fluido*

Γ se define como la velocidad tangencial integrada a lo largo de cualquier contorno cerrado C del fluido, esto es;

$$\Gamma = \int_{C} \sum \mu_i dx_i. \tag{2.2}$$

Donde μ_i es la viscocidad del fluido.

Entonces se tiene que

$$\Gamma(t) = \oint_{C} v_s ds. \tag{2.3}$$

En el cual v_s es la componente de la velocidad tangencial del fluido en C, y ds es el elemento de la longitud de arco de C.

En el caso de que $\Gamma = 0$ se dice que el flujo del fluido es irrotacional.

2.2. *Ecuación de continuidad*

Definición 2.2.1. *En la mecánica de fluidos, la ecuación de continuidad es la ecuación diferencial que expresa la conser-*

vación de la masa; y esta dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{V}) = 0. \qquad (2.4)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, y V es el vector velocidad.

Pero si se tiene en cuenta que el fluido es ideal e incompresible, entonces; la densidad es constante y por tanto la ecuación (1.3) se reduce a:

$$\nabla^2 \phi = 0. \qquad (2.5)$$

Esta es la llamada **Ecuación de Laplace**, la cual expresa la conservación de la masa del fluido para fluidos con potencial y provee la ecuación diferencial parcial que gobierna este modelo para la función ϕ.

2.3. *Potencial de velocidad*

Definición 2.3.1. *Si el movimiento del fluido es irrotacional, el vector velocidad V puede ser representado por el gradiente de un potencial escalar ϕ llamado el potencial de la velocidad.*

En lo consecuente de nuestro trabajo, nos referiremos al flujo irrotacional de fluidos, salvo que se haga mención contraria por alguna salvedad. Entonces el potencial de velocidad no es mas que una integral independiente del camino de integración entre un punto arbitrario x_0 y un punto x:

$$\phi(x,t) = \int_{x_0}^{x} \sum \mu_i dx_i. \tag{2.6}$$

Donde $V = \nabla\phi$.

2.4. *Ecuación de Navier-Stokes*

Definición 2.4.1. *Para fluidos incompresibles,* $\nabla \times V$*=0, la ecuación de Navier-Stokes viene dada por*

$$\rho g = vp + \mu\nabla^2 V = \rho\frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V\cdot\nabla)V. \tag{2.7}$$

Sea h la elevación local del fluido, ahora supongamos que h se mide en la dirección vertical (positiva hacia arriba), las componentes de la aceleración debida a la gravedad son

$$g_x = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad g_y = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad g_z = -g\frac{\partial h}{\partial z}.$$

El signo menos se debe a que la aceleración de la gravedad actua en la dirección negativa de h. En componentes cartesianas la ecuación de Navier-Stokes estan dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}]$$

22

Capítulo 3

Ecuaciones para el movimiento irrotacional

3.1. *Condiciones de frontera*

Ejemplos de condiciones de frontera para superficie son muy importantes para nuestro trabajo en el cual S es la superficie de un cuerpo rígido en contacto con el fluido, ejemplo de ello el fondo del mar ó la superficie libre del agua en contacto con el aire.

Dada una superficie S por ejemplo por una ecuación $\eta(x, y, z, t)$=0, de donde

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z = 0. \tag{3.1}$$

El vector $(\frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial z})$ es un vector normal en S, la ecuación (3.1) puede ser escirta de la forma

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\eta_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} = v_n, \tag{3.2}$$

donde v_n denota la velocidad común del fluido.

Un caso importante es en el cual S es la superficie libre, esto es, una superficie en el cual la presión p es prescrita pero la forma de la superficie no es prescrita apriori.

Asumamos en general que la superficie esta dada por la ecuación

$$z = \zeta(x, y, t). \tag{3.3}$$

Luego

$$\eta = z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

Por tanto

$$\frac{d}{dt}\eta(x, y, z, t) = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = 0,$$

24

Luego

$$\frac{d}{dt}\eta(x,y,z,t) = -\zeta_x\frac{\partial x}{\partial t} - \zeta_y\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} - \zeta_t\frac{\partial t}{\partial t} = 0,$$

además

$$\frac{d}{dt}\eta(x,y,z,t) = -\zeta_x\phi_x - \zeta_y\phi_y + \phi_z - \zeta_t = 0.$$

De las ecuaciones inmediatamente anteriores se desprende que

$$\phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y - \phi_z + \zeta_t = 0 \qquad en \qquad S. \tag{3.4}$$

Pero

$$\zeta_t = -a\zeta_y,$$

En efecto

$$\frac{d}{dt}\zeta(x,y,t) = \zeta_x\frac{\partial x}{\partial t} + \zeta_y\frac{\partial y}{\partial t} + \zeta_t\frac{\partial t}{\partial t} = \zeta_y\frac{\partial y}{\partial t} + \zeta_t\frac{\partial t}{\partial t} = 0$$

Donde $\frac{\partial y}{\partial t}$=$a$ es la velocidad de la onda.

Por tanto

$$\zeta_t = -a\zeta_y,$$

25

Por tanto la ecuación (3.4) puede ser escrita como

$$\phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y - \phi_z - a\zeta_y = 0 \qquad en \qquad S. \qquad (3.5)$$

3.2. *Función potencial de la velocidad*

Sea $\phi(x, y, z)$ cualquier función escalar con primera y segunda derivada continuas, entonces

$$rot(\nabla\phi) = V \times (\nabla\phi) = 0 \qquad (3.6)$$

Por tanto, en un flujo irrotacional, donde $\nabla \times V$=0, existira una función escalar ϕ cuyo gradiente es igual al vector velocidad V. Es conveniente definir la dirección positiva del flujo, en la dirección en la cual la función escalar decrece, entonces

$$\overrightarrow{V} = -\nabla\phi(x, y, z, t). \qquad (3.7)$$

Ya que el gradiente negativo de ϕ es igual al vector velocidad, ϕ es conocida como la función potencial de la velocidad, y el flujo irrotacional es frecuentemente llamado un flujo potencial. Los fluidos, ya sean compresibles o incompresibles, pueden estar en un movimiento irrotacional, y, en tal caso, existirá siempre una función potencial para ellos.

En un fluido incompresible, de acuerdo con la ecuación (2.1) se requiere que

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{3.8}$$

Por lo tanto

$$v \cdot (-\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = 0 \tag{3.9}$$

Esta es la ecuación de Laplace, y el operador ∇^2 es conocido como el Laplaciano. En coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.10}$$

Si las componentes cartesianas de la ecuación (2.1) se sustituyen en las componentes cartesianas de la ecuaciones de Navier-Stokes (2.7) para fluidos incompresibles se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones (usando la componente x)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}],$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{2})=-g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}).$$

Entonces ya que

$$V^2=u^2+v^2+w^2,$$

y de la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{V^2}{2})=-g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Agrupando términos con respecto al operador $\frac{\partial}{\partial x}$, tendremos

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\frac{V^2}{2}+gh+\frac{p}{\rho}]=0 \qquad (3.11)$$

Haciendo un procedimiento análogo obtendremos las ecuaciones para y y z.

En efecto

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}=-g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{2})=-g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}).$$

Entonces ya que

$$V^2=u^2+v^2+w^2,$$

y de la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot V=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{V^2}{2})=-g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Agrupando términos con respecto al operador $\frac{\partial}{\partial y}$, tendremos

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{V^2}{2}+gh+\frac{p}{\rho}]=0, \qquad (3.12)$$

similarmente con respecto a z, obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}],$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}) = -g\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}).$$

Entonces ya que

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

y de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{V^2}{2}) = -g\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Agrupando términos con respecto al operador $\frac{\partial}{\partial z}$, tendremos

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[\frac{V^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho}] = 0. \tag{3.13}$$

Usando el potencial de velocidad, podemos substituir las igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi^2}{\partial t \partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \phi^2}{\partial t \partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi^2}{\partial t \partial z}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.11),(3.12) y (3.13), y efectuando la integración obtenemos

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = F(t). \qquad (3.14)$$

Podemos tomar la cantidad $F(t)=0$, como producto de la condición de superficie libre, por tanto la ecuación (3.14) puede tomar la forma

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = 0. \qquad (3.15)$$

Que es la conocida ecuación de Bernoulli.

Donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a\phi_y, \qquad gh = \zeta, \qquad V = \nabla \phi. \qquad (3.16)$$

Luego la ecuación (3.15) puede ser escrita como

$$\zeta - a\phi_y + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 = 0. \qquad (3.17)$$

3.3. *Operadores* $H(q,\xi)\varphi$ *y* $J(q,\xi,\varphi)$

Aqui y en lo que sigue los operadores ∇ y Δ actuan con respecto a las variables (x, y, z), a es la velocidad de la onda, p es el número capilar, y $\frac{1}{\rho}$ es la curvatura media sobre la superficie libre. La cantidad $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, donde R_1 y R_2 son los radios de la curvatura principal, admiten la representación $\frac{1}{\rho} = \Delta\zeta + \frac{1}{\rho}_1(\zeta)$, donde $\frac{1}{\rho}_1(\zeta)$ es una función analítica en las derivadas de primer y segundo orden de la función $\zeta(x, y)$; más aún, la expansión en serie de potencias de $\frac{1}{\rho}$ comienza con términos cuadrados.

Para este trabajo, introduciremos el operador tomando la derivada normal por la regla

$$K(q, \zeta)\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \qquad para \qquad z = \zeta(x, y).$$

Donde ϕ es una solución del problema mixto de valor de frontera

$$(I) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ \phi(x, y, \zeta(x, y)) = \varphi(x, y), & \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & z = -1 + \epsilon h(x) \end{cases}$$

Los operadores H y J estan definidos por

$$H(q,\zeta)\varphi = \varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)K(q,\zeta)\varphi \tag{3.18}$$

y

$$J(q,\zeta,\varphi) = -\frac{p}{\rho_1}(\zeta)+\frac{1}{2}(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2, \tag{3.19}$$

respectivamente.

Teorema 3.3.1. *Dada la superficie libre siempre se cumple que*

$$\phi_x = \varphi_x - \zeta_x K(q,\zeta)\varphi, \quad y \quad \phi_y = \varphi_y - \zeta_y K(q,\zeta)\varphi. \tag{3.20}$$

Demostración. Por la condición de frontera sobre la superficie libre, se tiene que

$$\phi(x,y,\zeta(x,y)) = \varphi(x,y).$$

Derivando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y,\zeta(x,y))) = \phi_x\frac{\partial x}{\partial x} + \phi_y\frac{\partial y}{\partial x} + \phi_z\zeta_x = \varphi_x.$$

Pero

$$\phi_x \frac{\partial x}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial x} + \phi_z \zeta_x = \phi_x + \phi_z \zeta_x.$$

Luego

$$\phi_x + \phi_z \zeta_x = \varphi_x. \tag{3.21}$$

Por hipotesís se tiene que

$$\phi_z = K(q,\zeta)\varphi. \tag{3.22}$$

Remplazando (3.22) en (3.21), obtenemos:

$$\phi_x = \varphi_x - \zeta_x K(q,\zeta)\varphi. \tag{3.23}$$

Analogamente se obtiene ϕ_y.

En efecto, por la condición de frontera sobre la superficie libre,

se tiene que

$$\phi(x, y, \zeta(x, y)) = \varphi(x, y).$$

derivando con respecto a y, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi(x, y, \zeta(x, y))) = \phi_x \frac{\partial x}{\partial y} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial y} + \phi_z \zeta_y = \varphi_y.$$

34

Pero

$$\phi_x \frac{\partial x}{\partial y} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial y} + \phi_z \zeta_y = \phi_y + \phi_z \zeta_y.$$

Luego

$$\phi_y + \phi_z \zeta_y = \varphi_y. \tag{3.24}$$

Por hipotesis se tiene que

$$\phi_z = K(q,\zeta)\varphi. \tag{3.25}$$

Remplazando (3.25) en (3.24), obtenemos:

$$\phi_y = \varphi_y - \zeta_y K(q,\zeta)\varphi. \tag{3.26}$$

□

Teorema 3.3.2. *La condición* $\phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y - \phi_z - a\zeta_y = 0$, *implica*

$$a\zeta_y + K(q,\zeta)\varphi = H(q,\zeta)\varphi. \tag{3.27}$$

Demostración. Por hipotesis, vemos que

$$\phi_x\zeta_x + \phi_y\zeta_y - \phi_z - a\zeta_y = 0,$$

Remplazando ϕ_x, y ϕ_y del teorema (3.20), en la ecuación inmediatamente anterior se obtiene

$$[(\varphi_x - \zeta_x K(q,\zeta)\varphi)\zeta_x + (\varphi_y - \zeta_y K(q,\zeta)\varphi)\zeta_y - \phi_z - a\zeta_y] = 0,$$

$$[\varphi_x\zeta_x - \zeta_x^2 K(q,\zeta)\varphi + \varphi_y\zeta_y - \zeta_y^2 K(q,\zeta)\varphi - \phi_z - a\zeta_y] = 0,$$

$$[\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - \zeta_x^2 K(q,\zeta)\varphi - \zeta_y^2 K(q,\zeta)\varphi - \phi_z - a\zeta_y] = 0,$$

$$[\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)K(q,\zeta)\varphi - \phi_z - a\zeta_y] = 0.$$

De la definición de operador, se tiene

$$[\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - (\zeta_x^2 + \zeta_y^2)K(q,\zeta)\varphi] = H(q,\zeta)\varphi,$$

entonces

$$H(q,\zeta)\varphi - \phi_z - a\zeta_y = 0.$$

De donde

$$a\zeta_y + K(q,\zeta)\varphi = H(q,\zeta)\varphi. \tag{3.28}$$

□

Proposición 3.3.3. *Tenemos que*

$$-a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi = -(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y)K(q,\zeta)\varphi+\{1+\zeta_x^2+\zeta_y^2\}[K(q,\zeta)]^2. \tag{3.29}$$

Demostración. Del teorema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}-a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi &= (-H(q,\zeta)\varphi + K(q,\zeta)\varphi)K(q,\zeta)\varphi\\ &= -(H(q,\zeta)\varphi)K(q,\zeta)\varphi + (K(q,\zeta)\varphi)^2.\end{aligned}$$

Por la definición del operador $H(q,\zeta)\varphi$, se tiene que

$$\begin{aligned}-a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi &= -[(\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y - (\zeta_x^2+\zeta_y^2)K(q,\zeta)\varphi)K(q,\zeta)\varphi]+\\ &\qquad (K(q,\zeta)\varphi)^2\\ &= (-\varphi_x\zeta_x - \varphi_y\zeta_y + (\zeta_x^2+\zeta_y^2)K(q,\zeta)\varphi)K(q,\zeta)\varphi+\\ &\qquad (K(q,\zeta)\varphi)^2\\ &= (-\varphi_x\zeta_x - \varphi_y\zeta_y)K(q,\zeta)\varphi + [(\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2+\\ &\qquad (K(q,\zeta)\varphi)^2]\\ &= -K(q,\zeta)\varphi(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y) + (1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2.\end{aligned}$$

□

Proposición 3.3.4. *Se tiene que*

$$-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = -\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+K(q,\zeta)\varphi)(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y)-\frac{1}{2}(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2. \tag{3.30}$$

Demostración. Tenemos que

$$|\nabla\phi|^2 = \phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2.$$

Por el teorema (3.20), tenemos

$$\begin{aligned}|\nabla\phi|^2 &= (\varphi_x-\zeta_xK(q,\zeta)\varphi)^2+(\varphi_y-\zeta_yK(q,\zeta)\varphi)^2+(K(q,\zeta)\varphi)^2\\ &= \varphi_x^2-2\varphi_x\zeta_xK(q,\zeta)\varphi+\zeta_x^2(K(q,\zeta)\varphi)^2+\varphi_y^2\\ &\quad -2\varphi_y\zeta_yK(q,\zeta)\varphi+\zeta_y^2(K(q,\zeta)\varphi)^2+(K(q,\zeta)\varphi)^2\\ &= \varphi_x^2+\varphi_y^2-2K(q,\zeta)\varphi(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y)+(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2\\ &= |\nabla\varphi|^2-2K(q,\zeta)\varphi(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y)+(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2.\end{aligned}$$

Luego

$$-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = -\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+K(q,\zeta)\varphi)(\varphi_x\zeta_x+\varphi_y\zeta_y)-\frac{1}{2}(1+\zeta_x^2+\zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2.$$

□

Teorema 3.3.5. *De la condición de frontera en la superficie libre* $\zeta - a\phi_y + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = 0$ *siempre se cumple que*

$$\zeta - a\varphi_y + p\Delta\zeta = J(q,\zeta,\varphi) \tag{3.31}$$

Demostración. Remplazando ϕ_y en la condición de superficie libre, tenemos

$$\zeta - a(\varphi_y - \zeta_y K(q,\zeta)\varphi) + p(\Delta\zeta + \frac{1}{\rho_1}(\zeta)) + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = 0.$$

Luego

$$\zeta - a\varphi_y + a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi + p\Delta\zeta + \frac{p}{\rho_1}(\zeta) + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = 0.$$

Por lo tanto

$$\zeta - a\varphi_y + p\Delta\zeta = -a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi - \frac{p}{\rho_1}(\zeta) - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2. \tag{3.32}$$

Reemplazando $-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2$, y $-a\zeta_y K(q,\zeta)\varphi$ de las proposiciones anteriores en la ecuación anterior obtenemos

$$\zeta - a\varphi_y + p\Delta\zeta = -K(q,\zeta)\varphi(\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y) + (1 + \zeta_x^2 + \zeta^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2$$

$$-\frac{p}{\rho_1}(\zeta) - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + K(q,\zeta)\varphi(\varphi_x\zeta_x + \varphi_y\zeta_y) - \frac{1}{2}(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2)$$

$$= -\frac{p}{\rho_1}(\zeta) + \frac{1}{2}(1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2)(K(q,\zeta)\varphi)^2 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = J(q,\zeta,\varphi).$$

Por consiguiente

$$\zeta - a\varphi_y + p\Delta\zeta = J(q,\zeta,\varphi). \tag{3.33}$$

□

Capítulo 4

Espacios de funciones

La Transformada de Fourier

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx, \qquad u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

de una función de soporte compacto infinitamente diferenciable es una función analítica entera de variable compleja ξ con decrecimiento más rapido que cualquier potencia de $|\xi|^{-1}$ en la banda horizontal $|Im\xi| \leq \rho \leq \infty$ (El Teorema de Paley-Winer). Por lo tanto, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la cantidad

$$\|\varphi\|_{E^s(\rho)}^2 = \sup_{|Im\xi|\leq\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi)|^2 dR_e\xi \qquad (4.1)$$

es bien definida y finita para todo $s \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \rho < \infty$.

La clausura del conjunto de funciones de test en la norma (4.1) es el espacio de Banach $E^s(\rho)$.

La familia $E_n^s(\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, dados los espacios $E^s(\rho)$ los cuales son dotados con la siguiente norma equivalente a (4.1)

$$\|u\|^2_{E_n^s(\rho)} = \sup_{|Im\xi| \leq \rho} \|\hat{u}(\xi)\lambda_n^s(\xi)\|^2_\rho, \quad n \in Z$$

Donde $\lambda_n(\xi) = (1+\xi^2+n^2)^{\frac{1}{2}}$. Aquí y en lo que sigue, denotamos por $\|\cdot\|_p$ la norma en el espacio correspondiente $L_p(R)$ y usamos los parentesis $(\cdot,\cdot)$ para el producto interno en $L_2(R)$. El espacio $L_2(R)$ es denotado por L_2.

4.1. *Normas Equivalentes*

Definición 4.1.1. *Una norma $\|\cdot\|$ sobre un espacio vectorial X se dice que es equivalente a la norma $\|\cdot\|_0$ sobre X, si existen* *números positivos a y b tales que para todo $x \in X$ se tiene*

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

Proposición 4.1.1. *Veamos que las normas*

$$\|\cdot\|_{E^s(\rho)} \quad y \quad \|\cdot\|_{E^s_n(\rho)} \quad son \quad equivalentes$$

Demostración. En efecto, como $|1+\xi^2| \leq |1+\xi^2+n^2|$, entonces

$|1+\xi^2|^{\frac{s}{2}} \leq |1+\xi^2+n^2|^{\frac{s}{2}}$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)|^2 dR_e\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2+n^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)|^2 dR_e\xi$$

por tanto

$$\|\varphi\|^2_{E^S(\rho)} = \sup_{|Im\xi|\leq\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)|^2 dR_e\xi \leq$$

$$\sup_{|Im\xi|\leq\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |(1+\xi^2+n^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)|^2 dR_e\xi = \|\varphi\|^s_{E_n}(\rho)$$

por consiguiente

$$\|\varphi\|_{E^s(\rho)} \leq \|\varphi\|_{E^s_n(\rho)}$$

$\square$

4.2. Los Espacios V^s

Definición 4.2.1. *El espacio V^s es el conjunto de funciones de la forma*

$$f(x,y) = \sum_{n\in z} e^{inwy} f_n(x)$$

sobre R^2, con la norma finita $\|f\|^2_{V^s} = \sum\limits_{n\in z} \|f_n(x)\|^2_{E^s_n(\rho)}$

Proposición 4.2.1. *La completitud de $E^s_n(\rho)$ y l_2 (espacio de filas) implican que V^s es un espacio de Banach, de periodicidad $\frac{2\pi}{w}$.*

Demostración. El hecho de que V^s es un espacio vectorial es inmediato solo basta demostrar que es completo.

En efecto. Sea f^n una sucesión de Cauchy en V^s, y sea $f^n(x,y) = \sum\limits_{k\in z} e^{ikwy} f^{(n)}_k(x)$, luego, dado $\epsilon > 0$, $\exists n \in N$, tal que si $n, m \geq N$, entonces

$\|f^n - f^m\|_{V^s} < \epsilon$

Esto es

$\|f^n - f^m\|_{V^s}^2 = \sum_{k\in z} \|(f^{(n)} - f^{(m)})_k(x)\|_{E_k^s(\rho)}^2 < \epsilon$

por tanto

$\|(f^{(n)} - f^{(m)})_k(x)\|_{E_k^s(\rho)}^2 < \epsilon$, como $\{f_k^{(n)}\}n \in k$ es sucesión de Cauchy en $E_k^s(\rho)$, y como este es completo, entonces $\{f_k^{(n)}\}_{n\in k}$ converge en $E_k^s(\rho)$.

Luego existe $f_k(x) \in E_k^s(\rho)$, tal que $f_k^{(n)} \longrightarrow f_x(k)$ cuando $n \longrightarrow \infty$, luego

$$\|f - f^{(n)})\|_{V^s} = \sum_{k\in z} \|f - f_k^{(n)}(x)\|_{E_k^s}^2$$

luego

$$\text{lím}\,\|f - f^{(n)})\|_{V^s} = \text{lím}\sum_{k\in z} \|f - f_k^{(n)}(x)\|_{E_k^s}^2 = \sum_{k\in z} \text{lím}\,\|f - f_k^{(n)}(x)\|_{E_k^s}^2$$

pero como $f_k^{(n)} \longrightarrow f_x(k)$ en $E_k^s(\rho)$, entonces

$\text{lím}\,\|f - f^{(n)})\|_{V^s} = 0$.

Por tanto $f_k^{(n)} \longrightarrow f$, cuando $n \longrightarrow \infty$ en V^s, por tanto f^n es una sucesión de Cauchy convergente en V^s, luego V^s es un espacio de Banach.

Veamos que es periódico:

En efecto, sea:

$$f(x,y)=\sum_{n\in z} e^{inwy} f_n(x), \quad y \quad f(x,y+2\frac{\pi}{w})=\sum_{n\in z} e^{inw(y+2\frac{\pi}{w})} f_n(x)$$

Luego

$$f(x,y+2\frac{\pi}{w})=\sum_{n\in z} e^{inw(y+2\frac{\pi}{w})} f_n(x)=\sum_{n\in z} e^{inwy} f_n(x)\cdot e^{in2\pi}$$

$$=\sum_{n\in z} e^{inwy} f_n(x)=f(x,y)$$

□

El espacio V^s para $\rho>0$ y $s>1$ es un algebra de Bananch: el producto $f,g\in V^s$ y satisfacen la desigualdad siguiente

$$\|fg\|_{V^s}\le C\|f\|_{V^s}\|g\|_{V^s}$$

Ejemplo 4.2.1. *La función* $E(\xi,x,z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi\frac{\cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)}}$

cumple con las propiedades de los espacios V^s

Bibliografía

[1] D.S. Kuznetsov.NONLINEAR STATIONARY SURFACE WAVES ABOVE AN UNDERWATER RIDGE. Siberian Mathematical Journal, Vol. 43, $N_o 4$, pp. 626-650, 2002.

[2] Munk W. H. and Arthur R. S.,Wave intensity along a refracted ray . Gravity Waves Nat. Bur Standarts, Circ 1-521 (1952).

[3] D. S. Kuznetsov , A spectrum perturbation problem and its applications to waves above an underwater ridge. Sibirsk. Mat Zh., 42 $N_o 4$, 796-814 (2001).

[4] J. J. Stoker , Water Waves. Mathematical Theory and

Applications. [Russian traslation], Izdat. Inostr. lit. Moscow (1959).

[5] W. James Daily y R. F. Donald Harleman, Dinámica de los Fluídos. Editorial Trillas. Mexico 1975.

[6] T. M. Apostol, CALCULUS, Volumen 2.