1

ONDAS ESTACIONARIAS LINEALES SOBRE UNA SIERRA SUBMARINA

ELIECER CARDOZA ROBLES

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMATICAS

CARTAGENA

2008

ONDAS ESTACIONARIAS LINEALES SOBRE UNA SIERRA SUBMARINA

ELIECER CARDOZA ROBLES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el titulo de Matemático Asesor Ruben Dario Ortiz

Profesor asociado

Programa de Matemáticas

Universidad de Cartagena

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMATICAS

CARTAGENA

2008

Dedico este trabajo con todo cariño a mi hermana Genara

Doy gracias a Dios en primer lugar,
a mis padres Libardo y Ana , a mis hermanos,
a mi gran compañero del alma Ronald,
a los Doctores Ana M. Marín y Rubén D. Ortiz,
a los profesores del programa por su apoyo
Incondicional durante mi carrera,
y a todos los amigos que me apoyaron de un modo u
otro y que es imposible enumerar aquí .

Índice general

Introducción

Desde el primer trabajo de F.Ursell en [12], se conoce que en el caso de sierras submarinas ocurre el fénomeno de ondas guiadas para ondas de agua.

Jones en el periodo inicial del desarrollo del análisis funcional moderno, usando análisis espectral para el operador de Laplace en dominios no acotados con varias condiciones de frontera, mostró unos resultados extraordinarios en la teoría de ondas de gravedad, como son la existencia de un número finito de modos guiados para un cierto valor de κ, donde κ es el número de ondas en la dirección de la sierra.

Dentro del marco de la teoría espectral, Garipov en 1965, mostró que para κ suficientemente grande, en el caso de las sierras submarinas, existe una onda guiada bajo el único supuesto que la funcion $h(x)$ (fondo) presenta un mínimo local estricto. Este modo, conocido como el modo fundamental, fue estudiado con más detalle por Grimshaw en 1974 con particular atención a bajas frecuencias.

Debido a los diferentes teoremas dados por Jones, Grimshaw obtuvo cotas superiores e inferiores para la relación de dispersión de este modo y una condición necesaria para la existencia de estas ondas, para cualquier valor de κ.

También obtuvo la relación de dispersión de ondas guiadas para el caso del escalón, usando ecuaciones integrales.

Este caso específico, fue tratado para profundidades grandes por Evans y McIver, usando una aproximación ligeramente diferente, demostrarón que el modo fundamental fue el único para pequeños y grandes valores de κ. Más aún, en relación al trabajo inicial de Jones, ellos con ayuda de resultados numéricos, lograron mejores estimaciones para el número de onda guiada, para determinado valor de κ. En 1987, Ursell con argumentos más sencillos, logro los mismos resultados que Jones y Garipov. Para describir un problema en términos matemáticos hay que hacer uso de las leyes que rigen los elementos del problema. En hidrodinámica son las leyes de conservación de la masa y el momentum.

Este trabajo se desarrolla en tres capitulos primordiales, en el primero damos unos conceptos y notaciones básicas para un mayor entendimiento del trabajo, en el segundo capítulo tratamos los fundamentos teóricos y las notaciones primordiales en hidrodinámica que llevan el mayor interés en nuestro trabajo, en el ultimo utilizamos ciertas condiciones de hidrodinámica, y llegamos a un problema de valor de frontera (ecuaciones del modelo) y aun, probaremos que cierta función es solución a dicho problema, calculamos un operador utilizando transformada de Fourier y convolución de un operador y por ultimo utilizando la ecuación de Bernoulli llegamos a una condición en $z = 0$.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capitulo se establecen algunas definiciones y notaciones básicas, necesarias para la comprensión de este trabajo.

Definición 1.0.1 (Diferenciabilidad infinita). *Una función $u\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice infinitamente diferenciable si sus derivadas de todos los ordenes existen y son continuas.*

Definición 1.0.2 (Soporte compacto). *Una funcion $u\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de soporte compacto en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si u se anula cerca la frontera de Ω.*

Definición 1.0.3 (Transformada de Fourier). *La transformada de Fourier de una función infinitamente diferenciable u, de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, es*

$$\widehat{u}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ u(x)dx\ ,\ u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{u}(\xi)\ d\xi.$$

Definición 1.0.4 (Operadores pseudodiferenciales). *Surgen en varias áreas de las matemáticas, en particular, en el estudio de las EDP cuando se tratan de invertir los operadores diferenciales. Para su análisis estos se representan utilizando la transformada de Fourier, lo cual conduce al estudio del símbolo del operador.*

Definición 1.0.5 (Liquido ideal e incomprensible). *Se entiende que un líquido es incomprensible si su densidad es constante e ideal si no es viscoso.*

Definición 1.0.6 (Convolucion de un operador). *La convolución del operador* $K(D_x)$*con símbolo* $\kappa(\xi)$ *esta definido via transformada de Fourier de una función* $u(x)$ *por la fórmula*

$$\widehat{Ku(\xi)} = \kappa(\xi)\widehat{u}(\xi).$$

Capítulo 2

Hidrodinámica básica

En este capítulo presentaremos como es derivada la teoria básica hidrodinámica para fluidos incomprensibles no viscosos, esto es, el movimiento de una partícula en el agua (o en el aire) el cual es de tal naturaleza como hacerlo innecesario tomarlo a causa de los efectos de viscosidad y compresibilidad.

Para el desarrollo analítico de las representaciones para el movimiento de un fluido, es necesario describir primero las propiedades de esta, especialmente su velocidad, y las fuerzas relevantes que actuan sobre las particulas del fluido.

Subsecuentemente, invocaremos las leyes físicas que expresan las leyes de conservación de la masa y momentum, en términos de esta descripción, derivaremos las ecuaciones que gobiernan el movimiento.

2.1. leyes de Conservación de momentum y de masa

La ecuación del movimiento de una partícula de fluido puede ser obtenida en base a las leyes de Newton's de conservación de momentum, como sigue:

Consideremos un pequeño elemento rectangular con la presión actuando sobre la cara normal al eje x. Por las leyes de Newton's en la dirección x, tenemos

$$[-(p + p_x \delta x) + p]\delta y \delta z + X\varrho \delta x \delta y \delta z = \varrho a_{(x)} \delta x \delta y \delta z.$$

En donde X es el conjunto de componentes de fuerza por unidad de masa y $a_{(x)}$ es la componente de la aceleración ambas en la dirección x, y ϱ es la densidad, además las cantidades p, X y $a_{(x)}$ son en general funciones de x, y, z, y t.

Aquí, como siempre, usaremos subíndices de letras para denotar diferenciación, y el simbolo $a_{(x)}$ denota la componente del vector **a** en la dirección x.

Considerando el límite de δx, δy, δz aproximarse a cero obtenemos la ecuación del movimiento para la dirección x en la forma - $p_x + \varrho X = \varrho a_{(x)}$ y expresiones análogas para las otras dos direcciones. Así tenemos las ecuaciones de movimiento

$$(I) \quad \begin{cases} -\frac{1}{\varrho}p_x + X = a_{(x)}, \\ -\frac{1}{\varrho}p_y + Y = a_{(y)}, \\ -\frac{1}{\varrho}p_z + Z = a_{(z)}. \end{cases}$$

o en forma vectorial

$$-\frac{1}{\varrho} grad p + \mathbf{F} = \mathbf{a}. \tag{2.1}$$

Los principales hechos de la teoría están totalmente condicionados por la presencia de la fuerza gravitacional $\mathbf{F} = (0, -g, 0)$, en lo cual g representa la aceleración de la gravedad.

El campo de la velocidad, con componentes u, v, w, debe estar determinado como una función del espacio de variables y el tiempo. Después, el movimiento de las partículas individuales puede ser obtenido integrando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$, $\dot{z} = w$, en donde el punto sobre las cantidades x, y, z significa diferenciación con respecto al tiempo en lo que sigue al movimiento de una partícula.

Supongamos que $\mathbf{F}(\ x,\ y,\ z;\ t)$ es una función asociada con una partícula que sigue la trayectoria dada por el vector

$$\mathbf{x} = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}} = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) = (u, v, w),$$

es el vector velocidad asociado con las componentes x, y, z son funciones de t que caracterizan el movimiento de la partícula;

como consecuencia tenemos

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{F}_x\dot{x} + \mathbf{F}_y\dot{y} + \mathbf{F}_z\dot{z} + \mathbf{F}_t = u\mathbf{F}_x + v\mathbf{F}_y + w\mathbf{F}_z + \mathbf{F}_t,$$

luego d/dt se define como sigue:

$$\frac{d}{dt}() = u()_x + v()_y + w()_z + ()_t. \tag{2.2}$$

Como la aceleración $\mathbf{a}$ de una partícula esta determinada por $\mathbf{a}=(du/dt,\, dv/dt,\, dw/dt\,)$ en donde (u,v,w) son las componentes de la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula, se tiene de (2.2) que la componente $a_x = du/dt$ es dado por

$$\frac{du}{dt} = uu_x + vu_y + wu_z + u_t,$$

con una expresión similar para las otras componentes.

Las ecuaciones de movimiento (I) estan dadas en términos de las variables de Euler como sigue:

$$(II) \quad \begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\varrho}p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\varrho}p_y - g, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\varrho}p_z, \end{cases}$$

18

las ecuaciones (II) forman un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales para las cinco cantidades u, v, w, ϱ y p. Como el fluido se supone incomprensible, la densidad ϱ puede tomar una constante conocida. Al mismo tiempo, la suposición de incomprensibilidad nos conduce a una ecuación diferencial simple expresando la ley de conservación de la masa, y esta ecuación da una cuarta ecuación para la determinación de las componentes de la velocidad y la presión.

Quizás la forma más sencilla para derivar la conservación de la masa es empezar de la relación

$$\int_S \int \varrho v_n dS = 0, \tag{2.3}$$

donde v_n es la componente de la velocidad que es positiva en la dirección normal exterior a la superficie. Una aplicación del teorema de divergencia de Gauss´s

$$\int_S \int \varrho v_n dS = \int \int_R \int div(\varrho \mathbf{v}) d\tau.$$

La integral anterior nos conduce a la relación

$$\int\int_R\int div(\varrho\mathbf{v})d\tau = 0,$$

para cualquier región R, por lo tanto *div* ($\varrho\mathbf{v}$)= 0, y como ϱ es constante, tenemos finalmente

$$div\mathbf{v} = u_x + v_y + w_z = 0, \tag{2.4}$$

como la expresión de la ley de conservación de la masa. Esta ecuación es frecuentemente llamada la ecuación de continuidad.

2.2. Teorema de Helmholtz's

Antes de debatir condiciones de frontera es preferible formular algunas leyes adicionales de conservación como consecuencia de las suposiciones hechas hasta ahora, en particular de la suposición que la fricción interna del fluido es nula.

La primera de las leyes para discutirse es la ley de *conservación.*

La noción de circulación es definida como sigue:

Consideremos una curva cerrada C que se mueve con el fluido (Esto es, C consiste siempre de la misma partícula del fluido). La circulación $\Gamma = \Gamma(t)$ alrededor de una curva C es definida por la integral de línea

$$\Gamma(t) = \oint_C udx + vdy + wdz = \oint_C v_s ds,$$

donde v_s es la componente de la velocidad de el fluido tangente a C, y ds es el elemento de longitud de arco de C. La curva C es considerada dada por el vector $\mathbf{x}(\sigma, t)$ con σ un parámetro sobre C tal que $0 \leq \sigma \leq 1$ y $\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{x}(1,t)$. Podemos escribir $\Gamma(t) = \int \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_\sigma d\sigma$ en donde $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}_\sigma$ define un producto escalar y $\mathbf{x}_\sigma$ es la derivada de $\mathbf{x}$ con respecto a σ. Derivando Γ con respecto al tiempo tenemos

$$\dot{\Gamma}(t) = \int_0^1 \left(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_\sigma + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\sigma\right) d\sigma.$$

21

De las ecuaciones de movimiento (2.1) con $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{F} = (0, -g, 0) = -grad(gy)$, y de $\dot{\mathbf{x}_\sigma} = \mathbf{v}_\sigma$, la ultima ecuación nos queda

$$\dot{\Gamma}(t) = \int_0^1 \Big[-\frac{1}{\varrho}\mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{grad}p - g\mathbf{x}_\sigma \cdot \mathbf{grad}y + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\sigma \Big] d\sigma.$$

De allí que

$$\dot{\Gamma}(t) = \int_0^1 \Big[-\frac{1}{\varrho}p_o - gy_\sigma + \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})_\sigma \Big] d\sigma = 0,$$

como los valores de p, y, y $\mathbf{v}$ coinciden en $\sigma = 0$ y $\sigma = 1$, ϱ y g son constantes. La ultima ecuación nos dice que en un fluido no viscoso la circulación alrededor de cualquier curva cerrada de una partícula de fluido es constante con el tiempo. Este es el teorema de Helmholtz.

Nosotros estamos interesados en el caso especial en donde la circulación para toda curva cerrada es cero.

Supongamos que Γ se anula para toda curva cerrada, la primera conclusión de $\Gamma \equiv 0$ se tiene inmediatamente del teorema de Stokes´s:

$$\Gamma = \oint_C v_s ds = \int_S \int (curl\mathbf{v})_n d\mathbf{A}. \qquad (2.5)$$

22

Si $\Gamma = 0$ para toda curva C, tenemos

$$curl\ \mathbf{v} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = 0, \tag{2.6}$$

y el flujo se dice que es irrotacional.

2.3. Potencial de flujo y leyes de Bernoulli's

El hecho de que curl $\mathbf{v}$= 0, garantiza la existencia de un potencial de velocidad $\Phi(x,\ y,\ z;\ t)$ en donde la velocidad puede ser representado por el gradiente del potencial escalar Φ, esto es,

$$\mathbf{v} = grad\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z). \tag{2.7}$$

o en términos de las componentes de $\mathbf{v}$:

$$u = \Phi_x, v = \Phi_y, w = \Phi_z. \tag{2.8}$$

De la ecuación de continuidad divΦ=0, y de (2.8) vemos que el potencial de velocidad Φ es una solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \tag{2.9}$$

así Φ es una función armónica. Otra consecuencia importante de el flujo irrotacional fueron obtenidas de las ecuaciones de movimiento (II). Haciendo uso de (2.6), es fácil verificar que las ecuaciones de movimiento (II) pueden ser escritas en la siguiente forma vectorial:

$$grad\Phi_t + \frac{1}{2}grad(u^2+v^2+w^2) = -grad\frac{p}{\varrho} - grad(gy), \quad (2.10)$$

donde ϱ es constante.

La integración de esta relación nos conduce a una importante ecuación llamada ley de Bernoulli´s

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \frac{p}{g} + gy = C(t), \quad (2.11)$$

en donde $C(t)$ puede depender de t, pero no de todo el espacio de variables; sin pérdida de generalidad podemos tomar $C(t) \equiv 0$.

2.4. Condiciones de frontera

Supongamos el fluido bajo consideraciones de superficie de frontera S, si tal superficie S está dada por ejemplo; por una ecuación

$\zeta(x, y, z; t) = 0$, se tiene de (2.2) que la condición

$$\frac{d\zeta}{dt} = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z + \zeta_t = 0, \tag{2.12}$$

se cumple sobre S. De (2.8) y del hecho que $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_y)$ es un vector normal a S, se tiene que la condición anterior puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}} = v_n,$$

en donde $\partial/\partial n$ denota la diferenciación en la dirección de la normal a S y v_n significa la velocidad común del fluido y la superficie de frontera en la dirección normal a la superficie. El caso donde la superficie de frontera S es fija (estacionaria), es decir, es independiente del tiempo t, tenemos la condición

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \qquad en \quad S.$$

Esta es la condición de frontera adecuada en el fondo del mar. Otro caso importante es donde S es una superficie libre del liquido, es decir, una superficie sobre la cual la presión p es establecida pero la forma de la superficie no es establecida apriori. En general asumamos que tal superficie libre es dada por la ecuación:

$$y = \eta(x, z; t).$$

sobre tal superficie $\zeta = y - \eta(x, z; t) = 0$ para cualquier partícula. Por tanto de (2.12) se cumple la condición:

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \Phi_z \eta_z + \eta_t = 0, \qquad sobre \quad S. \tag{2.13}$$

Además, asumamos que la presión p es dada sobre S, como una consecuencia de la ley de Bernoulli (2.11) cumple la condición:

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{p}{\varrho} = 0, \qquad sobre \quad S. \tag{2.14}$$

(Podemos tomar la cantidad C$(t) = 0$ en (2.11)).

2.5. Formulación de un problema de superficie de onda

La situación física está indicada en la figura 1; que es pensado como cualquier situación sobre cualquier playa del océano.

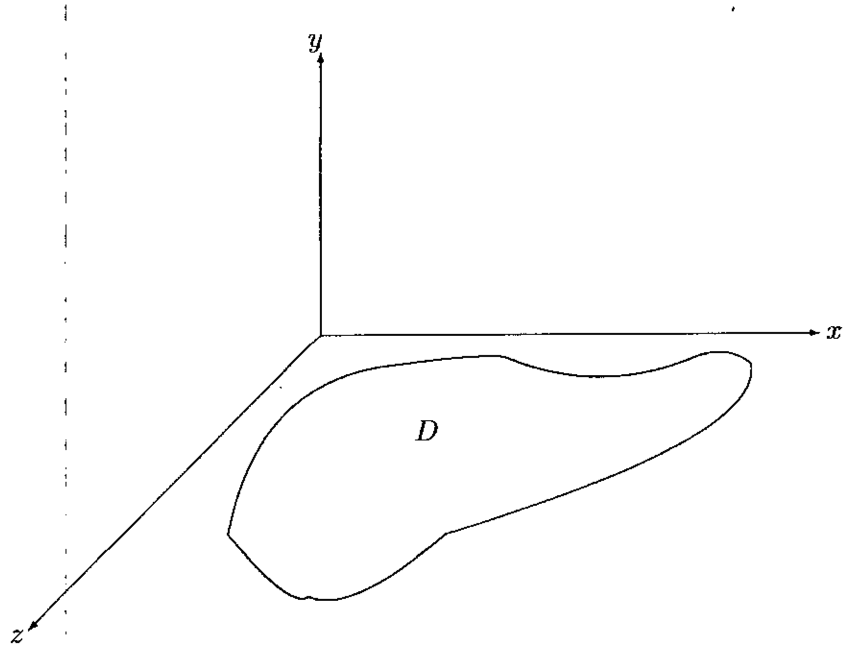

Fig. 1

Se asume que el agua esta inicialmente en reposo y para ocupar el espacio R definido por

$$-h(x,z) \leqq y \leqq 0, \qquad -\infty < z < \infty,$$

y extendido en la dirección x a $+\infty$.

En el tiempo $t = 0$, una determinada perturbación es creada sobre la superficie del agua sobre una región D (por el viento, tal vez), y se desea terminar matemáticamente el movimiento posterior del agua; en particular, la forma de la superficie libre es determinada por y $= \eta\ (x,\ z\ ;\ t)$.

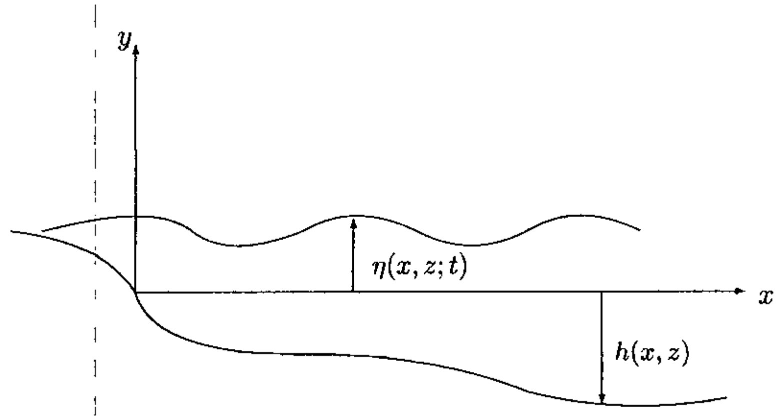

Fig. 2

En base de estas suposiciones las siguientes condiciones deben ser satisfechas : en primer lugar, la ecuación diferencial que debe cumplir Φ es, por supuesto, la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \qquad (2.15)$$

para

$$\begin{cases} x^s(z;t) \leqq x < \infty, \\ -h(x,z) \leqq y \leqq \eta(x,z;t), \\ -\infty < z < \infty \end{cases} \tag{2.16}$$

Cabe señalar que $x^s(z;t)$ es la abscisa de la línea de agua en tierra, y $\eta(x,\ z;\ t)$ es la superficie de elevación.

Como condición de frontera para satisfacer el fondo del mar tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \qquad para \qquad y = -h(x\ ,z).$$

Mientras que las condiciones de superficie libre son la condición cinemática (2.13)

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \Phi_z \eta_z + \eta_t = 0, \qquad para \qquad y = \eta(x, z\ ; t).$$

y la condición de dinámica

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = \mathbf{F}(x\ , z; t), \qquad sobre \quad y = \eta(x, z; t).$$

Capítulo 3

Ondas lineales

Consideremos un problema (linealizado) de ondas de agua que corren a lo largo de una sierra submarina.

Sea Ω el dominio de flujo, el cual está en el espacio de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y es acotado por encima por la superficie libre $z = 0$ y por debajo por el fondo $z =$ -1 + $qh(\mathrm{x})$, con q >0 un parámetro pequeño.

Supongamos que la función $h(\mathrm{x})$, $x \in \mathbb{R}$, define la forma del fondo, es infinitamente diferenciable y de soporte compacto.

Para un liquido ideal, incomprensible, libre de vórtices, entonces el problema lineal de ondas de agua de amplitud pequeña con velocidad constante$a$ es formulado en términos del potencial del flujo $\Phi(x, y, z)$ y dimensiones variables como sigue en [10].

Sea Φ en Ω una función armónica, entonces $\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 0$, esto es

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{3.1}$$

que cumpla la condición de impermeabilidad ($\boldsymbol{n}$ es la normal exterior a la frontera sólida Ω)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \qquad z = -1 + qh(x\ ). \tag{3.2}$$

y la condición de frontera en la superficie libre

$$(1 - \Delta)\Phi_z + a^2\Phi_{yy} = 0, \qquad z = 0. \tag{3.3}$$

Aquí a es la constante de velocidad de la onda. La aceleración en caída libre g, la densidad ρ del liquido, y el coeficiente de la tensión superficial σ son tomados como la unidad.

Como las ondas estacionarias son soluciones periódicas en una dirección, nos interesamos solo en soluciones periódicas en y, escribimos Φ en la forma $\Phi = e^{i\omega y}\,\varphi(x,z)$, donde ω es la frecuencia de la onda, porque es adecuada al medio fisico que estamos trabajando nos da periodicidad con $e^{i\omega y}$ y amplitud con $\varphi(x,z)$, aplicando la condición de impermeabilidad (3.2) tenemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \Phi_z + \Phi_x z_x = 0,$$

pero $\Phi_x = \mathrm{e}^{iwy}\varphi_x$, $\Phi_z = \mathrm{e}^{iwy}\varphi_z$, $z_x = qh_x$, como consecuencia tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{n}} = e^{iwy}\varphi_x q h_x + e^{iwy}\varphi_z = e^{iwy}(\varphi_x q h_x + \varphi_z) = 0.$$

Como la exponencial nunca se anula, $\varphi_x q \mathrm{h}_x + \varphi_z = 0$, por lo tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0. \tag{3.4}$$

Por otro lado si utilizamos la ecuación de Laplace (3.1) con $\Phi = e^{i\omega y}\,\varphi(x,z)$ tenemos los siguientes cálculos:

$$\Phi_x = e^{iwy}\varphi_x, \quad \Phi_{xx} = e^{iwy}\varphi_{xx}, \quad \Phi_y = iwe^{iwy}\varphi, \quad \Phi_{yy} = -w^2 e^{iwy}\varphi,$$

y además

$$\Phi_z = e^{iwy}\varphi_z, \quad \Phi_{zz} = e^{iwy}\varphi_{zz}.$$

Luego de la ecuación de Laplace (3.1), tenemos

$$e^{iwy}\varphi_{xx} - w^2 e^{iwy}\varphi + e^{iwy}\varphi_{zz} = 0.$$

Factorizando e^{iwy} nos queda

$$e^{iwy}(\varphi_{xx} - w^2\varphi + \varphi_{zz}) = 0,$$

ya que la exponencial nunca se anula, tenemos

$$\varphi_{xx} - w^2\varphi + \varphi_{zz} = 0, \quad -1 < z < 0.$$

Por otro lado, $\Delta\Phi_z = \nabla^2\Phi_z = \Phi_{zxx} + \Phi_{zyy} + \Phi_{zzz}$, entonces, tenemos los siguientes cálculos de Φ_z

$$\Phi_{zx} = e^{iwy}\varphi_{zx}, \quad \Phi_{zxx} = e^{iwy}\varphi_{zxx},$$

$$\Phi_{zy} = iwe^{iwy}\varphi_z, \quad \Phi_{zyy} = -w^2 e^{iwy}\varphi_z,$$

$$\Phi_{zz} = e^{iwy}\varphi_{zz}, \quad \Phi_{zzz} = e^{iwy}\varphi_{zzz}.$$

Por lo tanto de la ecuación (3.1), tenemos

$$e^{iwy}\varphi_z - e^{iwy}\varphi_{zxx} + w^2 e^{iwy}\varphi_z - e^{iwy}\varphi_{zzz} - a^2 w^2 e^{iwy}\varphi = 0.$$

Esto es,

$$e^{iwy}(\varphi_z - \varphi_{zxx} + w^2\varphi_z - a^2 w^2 \varphi) = 0.$$

Como la exponencial no se anula, entonces:

$$(1 + \omega^2 - D_x^2)\varphi_z - a^2\omega^2\varphi = 0, \qquad z = 0. \tag{3.5}$$

Obtenemos el siguiente problema de valor de frontera para la función φ:

$$(III) \quad \begin{cases} \varphi_{xx} - w^2\varphi + \varphi_{zz} = 0, & -1 < z < 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, & z = -1 + qh(x), \\ (1 + \omega^2 - D_x^2)\varphi_z - a^2\omega^2\varphi = 0, & z = 0. \end{cases}$$

El problema de frontera (III) puede ser escrito como un único operador en la función $u(x)= \varphi(x, 0)$:

$$(1 + \omega^2 - D_x^2)Ku - a^2\omega^2 u = 0.$$

Donde el operador derivada normal K asigna a cada función u la cantidad $Ku = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ en $z = 0$. Aquí φ es una solución del problema auxiliar de valor de frontera:

$$(IV) \quad \begin{cases} \varphi_{xx} - w^2\varphi + \varphi_{zz} = 0, & -1 < z < 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, & z = -1 + qh(x) \\ \varphi = u\ , & z = 0. \end{cases}$$

Dada una función analítica f, el operador pseudodiferencial $f(|\nabla|)$ es definido por el símbolo $f(\theta\ (\xi))$, donde $\theta(\xi) = (\xi^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}$.

Proposición 3.0.1. : *Tenemos que la función*

$$\varphi_o(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi}\widehat{u}(\xi)\frac{\cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)}d\xi$$

es una solución del problema de valor de frontera (III) con q=0.

Demostración: Derivando la función φ_o tenemos los siguientes cálculos

$$\varphi_{ox} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (i\xi)e^{ix\xi}\widehat{u}(\xi)\frac{cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)}d\xi,$$

$$\varphi_{oxx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (i\xi)^2 e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)} d\xi,$$

$$\varphi_{oxx} = -\xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)} d\xi.$$

Por lo tanto

$$\varphi_{oxx} = -\xi^2 \varphi_o(x,z).$$

Por otro lado

$$\varphi_{oz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{sinh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)} \theta(\xi)\, d\xi,$$

$$\varphi_{ozz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)} \theta^2(\xi)\, d\xi,$$

$$-\omega^2 \varphi_o = \frac{-\omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)} d\xi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_{oxx} + \varphi_{ozz} - \omega^2 \varphi_o &= -\omega^2 \varphi_o + \theta^2(\xi)\varphi_o - \omega^2 \varphi_o \\
&= (-\xi^2 + \theta^2(\xi) - \omega^2)\varphi_o) \\
&= (-\xi^2 + \xi^2 + \omega^2 - \omega^2)\varphi_o = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\varphi_o(x,o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi = u(x)$$

$$\frac{\partial \varphi_o}{\partial \boldsymbol{n}} = \Phi_z + q h_x \Phi_x = 0.$$

Proposición 3.0.2. *Tenemos la igualdad*

$$\widehat{\mathrm{K}_o u}(\xi) = \widehat{u}(\xi) \tanh \theta(\xi), \quad o, \quad \mathrm{K}_o = |\nabla| \tanh |\nabla|$$

Demostración: Sabemos que

$$K_o u = \frac{\partial \varphi_o}{\partial z} \quad en \quad z = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_o u &= \frac{\partial \varphi_o}{\partial z}\Big|_{z=o} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \frac{\sinh[(z+1)\theta(\xi)]\theta(\xi)}{\cosh \theta(\xi)} d(\xi)\Big|_{z=o} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \theta(\xi) \frac{\sinh \theta(\xi)}{\cosh \theta(\xi)} d(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) \theta(\xi) \tanh \theta(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Entonces

$$\widehat{K_o u}(\xi) = K_o u(\xi) \widehat{u}(\xi) = \theta(\xi) \widehat{u}(\xi) \tanh \theta(\xi).$$

Además $|\nabla| = \theta(\xi) = \sqrt{\omega^2+\xi^2}$, por lo tanto

$$K_o = |\nabla| \tanh |\nabla|.$$

Proposición 3.0.3. *Para q bastante pequeño, el operador lineal*

K *admite la representación*

$$K = K_o + qK_1 + O(q^2).$$

Donde $K_o = |\nabla| \tanh |\nabla|$, $K_1 = \mathrm{D}_x\overline{\Lambda}h\mathrm{D}_x\overline{\Lambda} + \mathrm{D}_y^2\overline{\Lambda}h\overline{\Lambda}$

Demostración : Omitimos la demostración de esta proposición debido a que es muy tedioso. Introducimos la función auxiliar

$$E(\xi\ , x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \frac{\cosh[(z+1)\theta(\xi)]}{\cosh\theta(\xi)}.$$

Tomando $\Sigma_q = \Big\{(x,z)|z \in \big(-1 + qh(x), 0\big)\Big\}$ y definiendo el operador $\overline{\Delta}$ por la formula $\overline{\Delta} = D_x^2 + D_z^2 - \omega^2$.

Entonces $\overline{\Delta}\mathrm{E} = 0$, en el dominio Σ_q para $q \geq 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}E &= (D_x^2 + D_z^2 - \omega^2)E \\ &= -\xi^2 E + \theta^2(\xi)E - \omega^2 E \\ &= (-\xi^2 + \theta^2(\xi) - \omega^2)E \\ &= 0.\end{aligned}$$

Proposición 3.0.4. *Condición de frontera sobre la superficie libre*

$$(1 - \Phi_{zz})\Phi_z + \Phi_{yy} = 0, \quad z = 0.$$

Demostración: Utilizando la ecuación de Bernoulli

$$-\frac{1}{\varrho}(p - p_a) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + gn \tag{3.6}$$

tomando $\varrho = g = 1$, (ϱ es la densidad de el liquido,g es la aceleración de caída libre, y p_a es la presión atmosférica), por lo tanto la ecuación anterior nos queda

$$-(p - p_a) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n.$$

Llamemos a p_t y p_w la presión total y la presión del agua respectivamente. Ahora $p_t = p_a$ - p_w, pero $p_w = p_a$ - $\frac{1}{R}\sigma$, donde σ es el coeficiente de superficie de tensión y $\frac{1}{R}$ es la curvatura gaussiana que se define así

$$\frac{1}{R} = \frac{\eta_{zz}}{(1+\eta_z^2)^{3\backslash 2}}.$$

Ahora $\frac{\sigma}{R} = p_a - p_w$, por lo tanto de la ecuación (3.6) llegamos a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + n = \sigma \frac{\eta_{zz}}{(1+\eta_z^2)^{3\backslash 2}}.$$

Supongamos que $\sigma = 1$, luego la ecuación anterior nos queda

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + n = \frac{\eta_{zz}}{(1+\eta_z^2)^{3\backslash 2}}. \tag{3.7}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \eta_y = \frac{(1+\eta_z^2)^{3\backslash 2}\eta_{zzy} - 3(1+\eta_z^2)^{1\backslash 2}\eta_z\eta_{zz}}{(1+\eta_z^2)^3}.$$

Utilizando la condición de dinámica

$$\eta_y = \Phi_z,$$

tenemos entonces

$$\eta_{zzy} = \Phi_{zzz}.$$

Además

$$\eta_z = 0, \qquad z = 0.$$

Por lo tanto la ecuación (3.7) nos queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Phi_z - \Phi_{zzz} = 0, \tag{3.8}$$

Esta ecuación es equivalente

$$(1 - \Phi_{zz})\Phi_z + \Phi_{yy} = 0, \quad z = 0.$$

Capítulo 4

Comentarios y sugerencias

- Este trabajo esta muy relacionado a el problema de ondas de agua atrapadas por una sierra submarina de pequeña altura, el cual es tratado en Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems, Amer. Match. Soc (P. Zhevandrov and A. Merzon en el 2003), donde una cercanía al problema de ondas de agua y pequeñas perturbaciones de la ecuación de Schrödinger en dimensión uno es establecida.

- Ondas de gravedad, investigamos las ondas que se producen en la frontera aire-agua bajo la influencia de la gravedad, como una idealización del movimiento superficial que se produce en un lago o en el mar. Nuestro volumen de agua se representa como un canal indefinido en la dirección x y confinado en la dirección vertical y entre dos superficies, el fondo en $y = 0$, y la superficie libre en $y = h$. Nos interesan aquí las ondas progresivas que se propagan en la dirección x, y que generan una oscilación vertical en el agua. Nuestro objetivo es encontrar la relación de dispersión, la velocidad de propagación de dichas ondas y el movimimiento del agua al pasar la onda. En la dirección vertical, las fuerzas que actúan sobre el fluido son la fuerza de gravedad y la fuerza originada por la variación de presión con la profundidad. Para un elemento de volumen dV y masa $dm{=}\rho dV$, situado entre las posiciones verticales y e $y{+}dy$ y sección horizontal

S, la ecuación de movimiento es

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}.$$

Como el agua es un fluido incompresible, esto quiere decir que la cantidad de agua que entra en una region debe ser la misma que la cantidad que sale de ella. En términos de flujo, el flujo neto de agua que atraviesa cualquier superficie cerrada debe ser cero. Matemáticamente,

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del agua y $\mathbf{n}$ es el vector unitario a la superficie S. Por el teorema de divergencia de esto es cierto cuando

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

que constituye la segunda ecuación fundamental para la resolución del problema. En coordenadas x , y se escribe

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Se busca una funcioón desconocida ϕ , que satisfaga simultaneamente

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

con lo cual la segunda ecuacion a resolver se transforma en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},$$

buscamos soluciones que sean ondas progresivas que se propaguen en la dirección x en la forma

$$\phi = A(y)\cos(kx - \omega t).$$

Introduciendo esta suposicion en la ecuación anterior, vemos que la funcion A satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 A}{dy^2} - k^2 A = 0.$$

Por lo tanto nuestra solucion al problema esta dado por la función

$$\phi = (Ce^{ky} + De^{-ky})\cos(kx - \omega t)$$

la función ϕ queda determinada una vez que apliquemos las condiciones de frontera que definen este modelo de propagación. La primera nos dice que la velocidad vertical debe anularse en el fondo. Es decir

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad en \qquad y = 0.$$

Entonces la solución puede escribirse en la forma

$$\phi = 2C \cosh ky \cos(kx - \omega t)$$

La condición de frontera en la superficie libre del agua corresponde a un valor de la presión igual a la presión atmosférica, valor constante en el tiempo. Por tanto, debemos obtener la relación directa entre la función ϕ y la presión P. De la ecuación de movimiento obtenemos

$$P = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g y + cte$$

De aquí, la condición de presión constante en el tiempo en la superficie libre se escribe

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \qquad en \quad y = h.$$

De la definicion de la velocidad del fluido ,

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

La segunda condición de frontera para la función ϕ queda finalmente

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

- Trabajar con soluciones periodicas en x o z, como ejemplo una de la forma $\Phi = e^{i\omega x}\ \varphi(y, z)$.

- Relacionar el artículo de ondas estacionarias lineales sobre una sierra submarina con el caso no lineal.

Conclusiones

Despues del desarrolo de este trabajo se concluye :

- Dada una función analítica $\Phi = e^{i\omega y}\ \varphi(x,z)$, hallamos las ecuaciones del modelo:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} - w^2\varphi + \varphi_{zz} = 0, & -1 < z < 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & z = -1 + qh(x), \\ (1 + \omega^2 - D_x^2)\varphi_z - a^2\omega^2\varphi = 0, & z = 0. \end{cases}$$

- El operador lineal k_o admite la representación

  $k_o = | \nabla | \tanh | \nabla |$

- Deducimos la condición sobre la superficie libre en $z = 0$

$$(1 - \Phi_{zz})\Phi_z + \Phi_{yy} = 0, \qquad z = 0.$$

Bibliografía

[1] D.S. Kuznetsov., A spectrum perturbation problem and its applications to waves above an underwater ridge.

[2] R.M. and S.B., Journal Methods of modern mathematical Physics.Vol.4[Russian translation], Mir, Moscow, (1982).

[3] V.I Nalimov and P.I Plotnikov, Irregular problems on eigen values and effect of waveguide, Dinamika Sploshn. Sredy,No.23, 132 - 150, (1975).

[4] W.H Munk and R.S Arthur, Wave intensity along a refracted ray, Gravity Waves Nat. Bur. Standarts,Circ.,521, (1952).

[5] R.M.Garipov. Unsteady waves above an underwater ridge, Doki. Akad. Nauk SSSR, 161, No. 3, 547 - 550, (1965).

[6] R.M.Garipov, Asymptotics of the Cauchy Poisson waves, in some problems of mathematics and mechanics [in Russian], Nauka, Leningrad, pp. 135 - 145, (1970).

[7] E.I.Bichenkov and R.M.Garipov, Propagation of waves on a surface of a heavy liquid in a rough-bottomed basin, Prikl. Mekh. i Mat. Fizika, No. 2, 21 - 26, (1969).

[8] L.Hörmander., Linear partial differential operators [Russian translation], Mir,Moscow, (1965).

[9] V.I Nalimov, Pseudodifferential operators with analytic symbols, Sibirsk. Mat. Zh., **38**, No. 3, 627 - 637, (1997).

[10] L.Bers.,F.John., and M.Schechter.,Partial differential equations [Russian translation],Mir, Moscow, (1966).

[11] J.J.Stoker, Water waves. Mathematical theory and applications [Russian translation], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1959).

[12] F.Ursell,Trapping modes in the theory of surface waves (1951).