1

ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL ESPACIO DE SEÑALES

Trabajo de Tesis
Presentado al
Programa de Matemáticas

por

JAIDER ENRIQUE BLANCO GAMARRA

Como requisito parcial para optar al Título de
Matemático

Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Cartagena
Abril 2008

ESTRUCTURA ALGEBRAICA DEL ESPACIO DE SEÑALES

Aprobado por:

Bernardo Orozco

Ph.D Ana Magnolia Marín ,Asesor.

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero aprovechar este espacio para nombrar a algunas personas que de una forma u otra han contribuido para alcanzar esta meta.

En primer lugar debo mencionar a mi advisor, la profesora Ana Magnolia Marín por la oportunidad, apoyo y orientación brindada, aspectos sin los cuales esta tesis seguiría siendo un logro por alcanzar.

Quiero agradecer al profesor Bernardo Orozco por su indispensable participación en la corrección de estas notas.

A los profesores Ruben Ortíz, y Rafael Galeano por el apoyo ofrecido.

A mi amigos Jose Marrugo y William fajardo por sus orientaciones academicas y respaldo de siempre.

A Sixta vivanco y Mariela Peréz por la colaboración brindada.

A Stella C. por la gentileza de siempre en atender mis inquietudes.

A Gauss, a Euler... ¡y a Fourier!, por engrandecer el espiritu humano.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos principales de este trabajo es crear un ambiente algebraico asociado a un ambiente computacional que permita plantear nuevas metodologias para el estudio de algunas aplicaciones tales como el fenómeno de la interferometria.

Se muestra aqui que el espacio de señales unidimensionales es un álgebra con las operaciones binarias de la convolución cíclica y el producto de Hadamard,también se analiza este mismo espacio con otras operaciones, como es el caso de correlación cíclica Θ_N el cual hace que el espacio $l^2(Z_N)$ sea un álgebra no conmutativa usando la correlación cíclica como multiplicación.

El principal resultado de este trabajo establece que la transformada de Fourier discreta es un isomorfismo de álgebras entre $(l^2(Z_N), \otimes_N)$, el álgebra de señales unidimensionales con la convolución cíclica ,y el mismo espacio de señales unidimensionales con el producto de Hadamard $(l^2(Z_N, \odot_N)$,también se muestra que la transformada de Fourier discreta relaciona el algebra de señales unidimensionales con la convolución cíclica ,y el mismo espacio de señales unidimensionales con el correlación cíclica $(l^2(Z_N, \Theta_N)$ por medio del operador de reflexión $\Re_N$.

En este orden se desarrolla la tesis, teniendo como partida el capítulo uno en el cual nos dedicamos a presentar algunos conceptos matemáticos básicos para el entendimiento del trabajo desarrollado en los capítulos posteriores

En el capítulo dos se ànalizan las propiedades de las matrices circulantes las cuales son de gran importancia en este trabajo.

El capítulo tres presenta formalmente un marco teórico computacional de álgebra de señales para el modelamiento y simulación del procesamiento de señales en aplicaciones de interferometría.Los aportes o contribuciones de esta tesis están referidos al àlgebra de señales presentada en el capítulo tres, a los once teoremas formulados con sus respectivas demostraciones de los diecinueve presentados en dicho capítulo a la tabla de identidades de los operadores del álgebra de señales.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Definiciones básicas

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es un conjunto pero al igual que ocurre con otros conceptos de la Matemática elemental (número, punto, etc) es realmente difícil encontrar una definición adecuada y rigurosa.Esta dificultad se resuelve normalmente en Matemáticas enunciando algunos axiomas y diciendo que los objetos que queremos definir son "algo"que guarda las relaciones indicadas en dichos axiomas.

La formulación axiomática de la teoría de conjunto es bastante complicada(quizá porque el concepto de conjunto es uno de los más básicos), por ello no consideraremos en este trabajo más que la idea intuitiva de conjunto.

Un *conjunto* es una colección de objeto,y a dichos objetos se le llaman *elementos del conjunto.*

Normalmente los conjuntos se designa con letras mayusculas y los elementos con letras minuscula. Asi cuando un elemento a pertezca a un conjunto P, se dice que el conjunto P contiene al elemento a y utilizamos la notación $a \in P$.

Algunos importates conjuntos numericos se presentan a modo de ejemplo

1. $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$,El conjunto de los números enteros.
2. $R = \{x$: x es un número real $\}$,El conjunto de los números reales.
3. $Q = \left\{\frac{x}{y} : x, y \in Z, y \neq 0\right\}$,El conjunto de los números racionales.
4. $C = \{\alpha = a + ib : a, b \in R, i^2 = -1\}$,El conjunto de los números complejos.

Definición 1.1.1.(*Subconjunto*) Sean A y B dos conjuntos arbitrarios.Si todo elemento de A es tambien elemento de B,entonces se dice que A es un **subconjunto** de B y se denota esta relación escribiendo $A \subset B$.

Definición 1.1.2.(*Producto Cartesiano*) Sean A y B dos conjuntos arbitrarios.El **Producto Cartesiano** de A y B se define como el conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b),con $a \in A$ y $b \in B$.Cuando decimos pareja ordenada queremos decir que $(a, b) \neq (b, a)$.El producto cartesiano es denotado por $A \times B$,entonces

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Definición 1.1.3.(*Relación*) Una **Relación** entre dos conjuntos dados A y B es cualquier subconjunto α del producto cartesiano $A \times B$.

Se acostumbra a denotar la relación como $\alpha : A \longrightarrow B$ y se dice que α es una relacion de A en B. Si $a \in A$ y $b \in B$ son tal que $(a, b) \in \alpha$ entonces decimos que a está relacionado con b por la relación α.

Definición 1.1.4.(*Función*) Una **Función** $f : A \longrightarrow B$,del conjunto A en el conjunto B es una relación entre los conjuntos tales que si $(a, b) \in f$ entonces no puede existir otra pareja con la primea componente a, para toda $a \in A$.

En otras palabras una función del conjunto A en el conjunto B es una relación que asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $b \in B$.Una notación muy comunmente usada para las funciones es la siguiente

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) = b, \end{aligned}$$

y se dice que b es la imagen de a mediante la función f.El conjunto A se llama dominio de f y B es llamado el codominio de f.

Diremos que una función es compleja (real) si su codominio es subconjunto de los numeros complejos (reales).

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Se dice que f es:

◊ **Inyectiva** Si dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas de B.

◊**Sobreyectiva** Si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.

Si la función f es inyectiva y sobreyectiva entonces decimos que f es **biyectiva.**

Definición 1.1.5.(*Operación Binaria*) Una operación binaria sobre un conjunto no vacío Hes una función cuyo dominio es el producto cartesiano $H \times H$ y codominio es el mismo conjunto H.

Definición 1.1.6.(*Señal Discreta*) Una función cuyo dominio es un conjunto discreto será llamada una **función discreta**. En este trabajo llamaremos **señal discreta** a toda función discreta.

Ejemplo 1.1.1(*Función coseno discreta*) El conjunto de los números enteros es un conjunto discreto. Definimos la **señal coseno discreta** como

$$x : Z \longrightarrow R$$
$$n \longmapsto x[n] \doteq cos[2\pi f_0 n T_s]$$

donde f_0 es la frecuencia fundamental de la señal y $T_s \in R$ es la región o periodo fundamental de la señal. Se acostumbra a utilizar paréntesis cuadrados para encerrar los valores del dominio de la señal.

El conjunto

$$Z_N = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$$

será llamado **conjunto finito de idexación**.

Definición 1.1.8 (*señal digital*) Una función cuyo codominio sea un conjunto finito discreto será llamada una **señal digital** .

◊ (**señal digital discreta**).El siguiente es un ejemplo de una señal digital discreta

$$y : Z \longrightarrow Z_N$$
$$k \longmapsto y[k] = < k >_N$$

donde $< k >_N$ es el resto de dividir k entre N y Z es el conjunto de los números enteros.

1.2 Estructuras algebraicas básicas

Definición 1.2.1 (*Grupo*) Se dice que un conjunto no vacío G forma un **grupo** si en G está definida una operación binaria $\star$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $a \star b \in G$,para cualesquiera $a, b \in G$

2. $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$,para cualesquiera $a, b, c \in G$

3. Existe un único elemento $e \in G$,llamado el elemento identidad,tal que para todo $a \in G, a \star e = e \star a = a$.

4. Para cada $a \in G$, existe un único elemento $b \in G$ tal que

$a \star b = b \star a = e$.

Si además,para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene que

$a \star b = b \star a$,entonces se dice que G es un **grupo abeliano**.

Definición 1.2.1 (*Subgrupo*) Se dice que un subconjunto H de un grupo G es un **subgrupo** de G si con respecto a la operación en G ,H mismo es un grupo.

Definición 1.2.2 (*Anillo*) Un Sea R un conjunto no vacio ,Se dice que R es un **anillo** si en él se tienen definidas dos operaciones,denotadas por $+$ y $\cdot$,respectivamente,tales que para cualesquiera $a, b, c \in R$ se satisfacen las siguientes propiedades

1. $a + b \in R$.

2.$a + b = b + a$.

3.$(a + b) + c = a + (b + c)$.

4. $(\exists! 0 \in R)$ tal que $(\forall a \in R)$, $a + 0 = 0 + a = a$.

5.$(\forall a \in R)$, $(\exists! (-a) \in R)$ tal que $a + (-a) = 0$.

5.$(\forall a \in R)$, $(\exists!(-a) \in R)$ tal que $a + (-a) = 0$.

6. $a \cdot b \in R$.

7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

8. $a \cdot b \in R$.

9.$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

10.$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Si ademas

$(\exists 1 \in R)$ tal que $(\forall a \in R), a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

entonces R es llamado un **anillo con elemento unitario.**Si la multiplicación en R es tal que para cualesquiera $a, b \in R$ se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$, se dice que R es un **anillo conmutativo**.

Definición 1.2.3 (*Cuerpo*) Un **Cuerpo** es un anillo conmutativo con unidad, tal que cada elemento diferente de cero tiene un inverso multiplicativo.

En el conjunto de los números enteros , definamos la siguiente relación: "Sean m un entero positivo y $a, b \in Z$. Decimos que a es congruente con b modulo m si y solo si $a - b$ es un multiplo de m". Simbolicamente esto se escribe como

$$a \equiv b(mod\, m)$$

La **relación de congruencia** expresada por el enunciado inmediatamente anterior es equivalente a la expresión

$$a = b + km, \text{ donde } k \text{ es un entero.}$$

Decir que dos números a y b son congruente módulo m es equivalente a decir que ellos dejan el mismo residuo al dividir por m . LLamaremos la clase residual de n, y la denotamos por $\underline{n}$, al conjunto formado por todos los números enteros que son congruente con n módulo m. por ejemplo ,bajo la relación de congruencia módulo 4, las cinco clases residuales constan de los enteros de la forma $0 + 4k, 1 + 4k, 2 + 4k, 3 + 4k,$ respectivamente, donde k es un entero, esto es, las cuatro clases residules son

$$\underline{0} = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$$
$$\underline{1} = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$$
$$\underline{2} = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$$
$$\underline{3} = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$$

Asi, el conjunto de todas las clases residuales módulo 4 es $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$.

Por ejemplo, $\underline{11} = \underline{-1} = \underline{3}$.

En general,hay m clases residuales módulo m.Denotamos el conjunto de todas las clases residuales módulo m por Z_m:

$$Z_m = \{\underline{0}, \underline{1}, ..., \underline{m-1}\}.$$

Si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son dos clases residuales módulo m,definimos las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\otimes$ por

$$\underline{a} \oplus \underline{b} = \underline{a+b}$$
$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \underline{a \cdot b}$$

si p es un número primo,entonces con estas operaciones se puede observar que Z_p es un cuerpo.(*ver [4]*)

Observesión:Analizemos un poco la señal digital discreta

$$y : Z \longrightarrow Z_N$$
$$t \longmapsto y[k] = < k >_N$$

donde $< k >_N$ es el resto de dividir k entre N y Z es el conjunto de los números enteros.Esto es,$< k >_N = k - qN$ para algún $q \in (Z^+ \cup \{0\})$ o denota el residuo despues de la división(p/N),por ejemplo $< 5 >_4 = 1$.

$Residuo(\frac{p+qN}{N}) = Residuo(\frac{p}{N}) + Residuo(\frac{qN}{N}) = Residuo\frac{p}{N}$ con $q \in Z$.

por ejemplo ;$< -1 >_4 \equiv (-1)\ mod4$ así

$\cdots = < -1 + 4(-2) >_4 = < -1 + 4(-1) >_4 = < -1 >_4 = < -1 + 4 >_4 = \cdots$

$\cdots < -7 >_4 = < -5 >_4 = < -1 >_4 = < 3 >_4 = < 7 >_4 = < 11 >_4 = 3 = ...$

Sea $H = \{p \in \underline{k}_{mod\ N} : p \in (Z^+ \cup \{0\})\}$ entonces $< k >_N = \min_{p \in H} p$;

Si $0 \leq a < N$, $a \in Z$ entonces $< a >_N = a$,

Si $-N < a < 0$, $a \in Z$ entonces $< a >_N = < N + a >_N = N + a$.Ver [7,8]

Por tanto , podemos establecer la siguiente tabla de residuos de los números enteros en el intervalo $(-N, N)$ al ser divididos por N.

LOS NÚMEROS ENTEROS s EN EL INTERVALO $(-N, N)$	$< s >_N$
0	0
1	1
2	2
$\vdots$	$\vdots$
$N-2$	$N-2$
$N-1$	$N-1$
-1	$N-1$
-2	$N-2$
$\vdots$	$\vdots$
$-(N-2)$	2
$-(N-1)$	1

tabla No 1.

Definición 1.2.4 (*Espacio Vectorial*) Se dice que un conjunto no vacío V es un **espacio vectorial** sobre un cuerpo F si V es un grupo abeliano respecto a una operación suma $+$, y tal que para todo $\alpha \in F$ y todo $v \in V$, esta definido un elemento $\alpha v \in V$ con las siguientes propiedades:

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w; \alpha \in F$ y $v, w \in V$.
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \quad \alpha, \beta \in F$ y $v \in V$.
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v; \quad \alpha, \beta \in F$ y $v \in V$.

4. $1v = v; \quad v \in V$

El producto αv de los elementos del cuerpo F con los elementos del espacio vectorial V es llamado **producto escalar**,los elementos del espacio vectorial son llamados vectores.

Como ejemplo de un espacio vectorial podemos considerar el espacio F^n de todas las n-uplas con componentes en F, es decir

$$F^n = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) : \alpha_i \in F, \forall i = 1, 2, ..., n\}$$

Este es un espacios vectoriales sobre F y las operaciones correspondientes son

1. Suma: $(\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$,
2. Producto por un escalar; $\alpha(\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha\beta_1, ..., \alpha\beta_n)$.

Los espacios vectoriales usados en este trabajo son del tipo en que el cuerpo de escalares son los números reales o los números complejos. Estos espacios vectoriales son llamados, respectivamente, espacio vectoriales reales y espacios vectoriales complejos.

Definición 1.2.5 (*Subespacio vectorial*) Un conjunto W de un espacio vectorial V es llamado un **subespacio vectorial** de V si el mismo W también es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V.

Definición 1.2.6 (*Combinación lineal*) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F, y sean $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ vectores en V. Entonces un vector β de V se dice **combinación lineal** de los vectores α_i en V,si existen escalares $c_0, ...c_{n-1}$ de F tales que

$$\beta = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 \cdots + c_{n-1}\alpha_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha_i \ , \ c_i \in F$$

Si $\alpha_1, ..., \alpha_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los u_i es un subespacio vectorial de V. Este subespacio lo denotamos por $gen\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ y lo llamaremos el **subespacio gene-**

$$gen\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} = \left\{\sum_{i=1}^{k} c_i\alpha_i : c_i \in F, \alpha_i \in V, i = 1, ..., k\right\}.$$

Definición 1.2.7 (*Linealidad independiente*) Sean $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$ elementos de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F.Decimos que los vectores $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$ son **linalmente independientes** , si y solo si , la ecuación

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_i\alpha_i = O$$

implica que $c_i = 0$, para todo $i = 0, 1, ..., k-1$.

Note que el simbolo O en la derecha dę la ecuación es el elemento cero en el espacio vectorial V y no es el elemento cero de el cuerpo F.

Definición 1.2.8 (*Base*) Sea V un espacio vectorial y $\Omega = \{\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}\}$ un conjunto de vectores en V:Entonces Ω es llamado una **base** para V si es linealmente independiente y además genera a V.

Por ejemplo, para el espacio vectorial F^n definido en la ecuación (8), una base natural que podemos considerar es el conjunto

$\{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}$.

Esta base es llamada la **base canónica** para F^n.

Definición 1.2.9 (*Transformación lineal*) Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo F.Una **transformación lineal** u **homomorfismo** de V en W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

1.$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$,$\forall c \in F$.

Si T es

$\diamondsuit$ *inyectiva* , se dice que que T es un **monomorfismo**.

$\diamondsuit$ *sobreyectiva* , se dice que que T es un **epimorfismo**.

$\diamondsuit$ *biyectiva* , se dice que que T es un **isomorfismo**.

$\diamondsuit$ *biyectiva* , se dice que que T es un **isomorfismo**.

El conjunto de todos lo homomorfismo entre los espacios V y W es simbolizado por $Hom(V, W)$.Este conjunto tieneestructura de espacio vectorial y las operaciones correspondientes son la suma de funciones y el producto por un escalar (elementos de F). Más presisamente, se definen por

1.$(T_1 + T_2)v = T_1(v) + T_2(v), T_1, T_2 \in Hom(V, W)$ y $v \in V$.

2.$(\alpha T)v = \alpha(T(v))$, para $T \in Hom(V, W), \alpha \in F$ y $v \in V$.

1.3 Álgebras

Definición 1.2.10 (*Algebra*) Un **Álgebra** sobre un cuerpo F es un espacio vectorial V sobre F con una operación adicional , llamada **multiplicación de vectores** ,la cual asocia a cada par de vectores $v_0, v_1 \in V$ un vector $v_0 \cdot v_1 \in V$ llamado el **producto de** v_0 **y** v_1. Esta nueva operación en V debe cumplir las siguientes propiedades para cuales quiera $v_0, v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in F$:

1.$v_0 \cdot (v_1 \cdot v_2) = v_0 \cdot (v_1 \cdot v_2)$

2.$v_0 \cdot (v_1 + v_2) = v_0 \cdot v_1 + v_0 \cdot v_2$ y $(v_0 + v_1) \cdot v_2 = v_0 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_2$

3.$\alpha(v_0 \cdot v_1) = (\alpha v_0) \cdot v_1 = v_0 \cdot (\alpha v_1)$.

si existe un elemento 1 en V tal que $1 \cdot v_0 = v_0 \cdot 1 = v_0$, para todo vector $v_0 \in V$,entonces V es llamado un **álgebra con unidad** sobre F, y 1 es llamado el elemento identidad de V.Se dice que el algebra V es **conmutativa** si $v_0 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_0$ para todo $v_0, v_1 \in V$.

El conjunto de todas las matrices $n \times n$, con entradas en un cuerpo F con la operaciones de suma de matrices y multiplicación por escalar usuales. El producto de matrices usual convierte este espacio vectorial en un álgebra no conmutativa para $n \geq 2$.

El conjunto de todos los homomorfismos de un espacio vectorial V en sí mismo, $Hom(V, V)$, es un álgebra con identidad,y la operación correspondiente es la composición de funciones. Más presisamente , la operación se define para cada par de

$(T_1 \circ T_2)v = T_1(T_2(v)), T_1, T_2 \in Hom(V, V)$.

el elemento identidad de esta álgebra es la función idéntica.

Definición 1.2.11 (*Isomorfismo de álgebras*) sea F un cuerpo y sean V y W dos álgebras sobre F.Un **isomorfismo** entre las álgebras V y W es una función biyectiva $T : V \longrightarrow W$ tal que :

1.$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$,

2.$T(v_1 \cdot v_2) = T(v_1) \cdot T(v_2)$

para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$ y cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

1.4 Transformada de Fourier discreta

Definición 1.2.12 (*La transformada de Fourier discreta*) Dada una sucesión finita $x[n]$,con $0 \leq n \leq N-1$,**La Transformada de Fourier Discreta** de $x[n]$ se define como la sucesión dada por

$$x^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

donde $0 \leq k \leq N-1$.

Es común llamar $W_N = e^{-2j\pi/N}$ y escribir la transformada de Fourier discreta de $x[n]$ como

$$x^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad , \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

Para una sucesión finita $y[k]$,con $0 \leq k \leq N-1$,**La Transformada de Fourier Inversa** esta dada por

$$y^\smile[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y[k] W_N^{-kn}, . \qquad 0 \leq n \leq N-1.$$

Definición 1.2.13 (*Producto de Kronecker*) Sea A y B matrices de tamaño $m \times n$ y $p \times q$ respectivamente.El **producto de kronecker**, o **producto tensorial**,o **producto directo** de A con Bes una matriz de tamaño $mp \times nq$ definida y denotada como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1\,1}B & a_{1\,2}B & \dots & a_{1\,n}B \\ a_{2\,1}B & a_{2\,2}B & \dots & a_{2\,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1}B & a_{m\,2}B & \dots & a_{m\,n}B \end{pmatrix}$$

Es decir, el producto tensorial de matrices se define para matrices de cualquier tamaño.

Propiedades del producto de Kronecker

(i) $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$, α es un escalar.

(ii) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ (siempre y cuando A y B tengan el mismo tamaño).

(iii) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$(siempre y cuando B y C tengan el mismo tamaño).

(iv) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes C) \otimes B$

(v) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ (Asumiendo que los productos que aparecen se pueden realizar)

(vi) $\overline{A \otimes B} = \overline{A} \otimes \overline{B}$ (donde la barra sinifica conjugada)

(vii) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T; (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ (T significa transpuesta y $*$ significa transpuesta conjugada)

$(viii)$ $tr(A \otimes B) = tr(A) \otimes tr(B)$ (A y B cuadradas de orden m y n respectivamente)

(ix) Si A y B son matrices no singulares entonces

$(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$

(x) si A y B son matrices como en (vii) entonces

$det(A \otimes B) = det^n(A) \otimes det^m(B)$.

Capitulo 2
MATRICES CIRCULANTES

En este capitulo estudiaremos algunas propiedades fundamentales de las matrices circulantes,algunas conocidas otras no muy conocidas.

Las matrices circulantes son un tópico fascinante que han venido siendo estudiado por algún tiempo .Recientemente estas matrices han sido usadas para estudiar la controlabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales con control [6].

Consideremos ahora un número $N \in Z^+$ fijo y definamos

$w_N = exp(\frac{2\pi i}{N})$ es decir , w_N es la raiz $N-esima$ primitiva de la unidad.Entonces las siguientes propiedades se verifican

◇ $w_N^N = 1$; $w_N w_N^* = 1$; $w_N^* = w_N^{-1}$.

◇ $(w_N^*)^K = w_N^{-k} = w_N^{N-k}; \sum_{j=0}^{N} w_N^{j-1} = 0$

veamos que $\sum_{j=0}^{N} w_N^{j-1} = 0$,En efecto;

$$\sum_{j=1}^{N} w_N^{j-1} = w^{-1}\sum_{j=1}^{N} w_N^{j} = w^*\sum_{j=1}^{N} w_N^{j} = w^*\sum_{j=1}^{N} e^{\frac{2\pi ij}{N}}$$

hagamos $\theta = \frac{\pi}{N}$.Si $x \neq 1$,las sumas parciales de la serie geométrica vinen dadas por

$$\sum_{k=1}^{N} x^k = x\frac{x^N - 1}{x - 1}$$

Entonces, poniendo $x = e^{2i\theta}$ en esta fórmula, donde $\theta = \frac{\pi}{N}$, encontramos

$$\sum_{j=1}^{N} e^{2ij\theta} = e^{2i\theta}\frac{e^{2iN\theta} - 1}{e^{2i\theta} - 1} = \frac{e^{iN\theta} - e^{-iN\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{senN\theta}{sen\theta}e^{i(N+1)\theta}$$

por tanto al sustituir el valor de θ en la formula anterior obtenemos que $\sum_{j=1}^{N} w_N^{j-1} = 0$.

Definición 2.1.1 (*Matriz de Fourier*) La **matriz de fourier** de orden N se define como aquella F tal que

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & \dots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & \dots & w_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

donde ($*$ significa transpuesta conjugada).

La sucesión $\{w_N^k\}_{k=1}^{+\infty}$ es periodica de periodo N,es decir,

$w_N^{k+N} = w_N^k \ \forall k \in Z^+$ de tal manera que hay solo N elementos diferentes en F. Mas aún , para $1 \leq j \leq N-1$ se tiene

$$w_N^{j(N-1)} = w_N^{Nj-j} = w_N^{-Nj} = w_N^{N-j}$$

de tal manera que que la expresión F^* dada en la definición puede reescribirse tambien como

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N & \dots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & \dots & w_N \end{pmatrix}$$

Algunas de las propiedades de la matriz de fourier son:

(1) F y F^* son simetricas, es decir $F = F^T, F^* = \overline{F}, F = \overline{F^*}$

(2) F es unitaria. En realidad,$FF^* = F^*F = I_N$, o mejor dicho , $F^* = F^{-1}$. En efecto, si $(FF^*)_{kl}$ es el $kl-$elemento del producto FF^* entonces se puede observar que

$(FF^*)_{kl} = \sum_{r=0}^{N-1}(w_N^{(l-k)})^r = n$ si $l = k$

$(FF^*)_{kl} = \sum_{r=0}^{N-1}(w_N^{(l-k)})^r = 0$ si $l \neq k$.

(3) los autovalores de F son $\pm 1, \pm i$ con sus apropiadas multiplicidades.esto se deduce del hecho que F es una matriz unitaria y todo autovalor λ de una matriz unitaria satisface $|\lambda| = 1$

Las matrices de uso común en la teoria de las matrices circulantes son

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ambas de orden N.Estas matrices satisfacen las siguientes propiedades

$\Pi^N = I_N, \Pi^T = \Pi^* = \Pi^{-1} = \Pi^{N-1}$

y

$\Psi^2 = I, \Psi^* = \Psi^T = \Psi = \Psi^{-1}$

Definición 2.1.2 (*Matriz de Vandermonde*) Por **matriz de vandermonde** $v(z_1, z_2, ..., z_N)$ entendemos la matriz de orden N

$$\mathbf{v(z_1, z_2, ..., z_N)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

entonces $v(1, w_N, w_N^2 ..., w_N^{N-1}) = NF^*$ y $v(z_1, z_2, ..., z_N)$.Ademas $det\, v(z_1, z_2, ..., z_N) = \prod_{k \neq l}(z_k - z_l)$ luego si $z_k \neq z_l$ para $k \neq l$,la matriz de vandermonde es no singular.ver [6,7]

Definición 2.1.3 (*Matriz circulante*) Dados $N \in Z^+$ y $(c_1, ..., c_N)$, la matrix de tamaño $N \times N$ definida como

$$C = \mathbf{Circ(c_1, c_2, ..., c_N)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & c_N \\ c_N & c_1 & \cdots & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_N & \cdots & c_{N-3} & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_N & c_1 \end{pmatrix}$$

es la llamada **matriz circulante** de orden N.

Note que los elementos de cada fila de C son identicos a los de la fila anterior, pero han sido movidos una posicion hacia la derecha y luego enrollados. Es fácil ver que la suma de matrices circulantes es de nuevo una matriz circulante; lo mismo ocurre cuando se multiplica por un escalar. Note también que la matriz Π definida anteriormente es una matriz circulante,de hecho que $\Pi = Circ(0, 1, 0, ..., 0)$.

Tambien puede suceder que la entradas de la matriz circulen hacia arriba,en este caso la matriz tiene la forma

$$\mathbf{H_N} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-2} & h_{N-1} & \cdots & h_{N-3} \\ h_{N-1} & h_0 & \cdots & h_{N-2} \end{pmatrix}$$

En este proyecto tambien se usan matrices de bloques circulantes con bloques circulantes, los cuales representamos en la forma

$$\mathbf{C_N} = \begin{pmatrix} C_{[0]} & C_{[1]} & \cdots & C_{[N-1]} \\ C_{[1]} & C_{[2]} & \cdots & C_{[0]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{[N-2]} & C_{[N-1]} & \cdots & C_{[N-3]} \\ C_{[N-1]} & C_{[0]} & \cdots & C_{[N-2]} \end{pmatrix}$$

donde cada $C_{[i]}$ es una matriz circulante.

Sea A una matriz de tamño $N \times N$ y Π la matriz definida anteriormente entonces A es circulante si y solo si $\Pi A = A\Pi$.En efecto; Sea $A = (a_{i\,j})$.entonces $\Pi A \Pi^* = \Pi A \Pi^{-1} = a_{(i+1)(j+1)}$ (donde los indices son tomados modulo N)y esta matriz es igual a $A = (a_{i\,j})$ si y solo si A es circulante.

Obsérvese que las potencias $\Pi^k (k = 0, ..., N-1)$ consisten en las permutaciones de las filas de Π.se puede ver que

$C = Circ(c_1, c_2, ..., c_N) = c_1 I + c_2 \Pi + \cdots + c_N \Pi^{N-1}$

y si $P(Z) = \sum_{k=1}^{N} c_k Z^{k-1}$ entonces $Circ(c_1, c_2, ..., c_N) = P(\Pi)$.

El polinomio P dado arriba es llamado **representante de la circulante** C y algunas veces es denotado como P_C.

♣ propiedades de las matrices circulantes

◇ Como polinomios en la misma matriz conmutan (respecto al producto),entonces el producto de matrices conmutan,mas aún l producto de circulantes es de nuevo una circulante.En efecto Si $C = P_C(\Pi)$ y $D = P_D(\Pi)$ entonces $CD = P_C(\Pi) P_D(\Pi) = p_{CD}(\Pi)$.

◇ como C y C^* conmutan entonces toda matriz circulante es **normal**.

◇ De los item inmediatamente anteriores se obtiene que si A es una matriz circulante y $k \in Z^+$ entonces A^k tambien es circulante.

Definición 2.1.4 (*Matriz de Toeplitz*) ,La matriz cuadrada $T = (t_{i\,j})$,de orden N, se llama **matriz de Toeplitz**

si $t_{i\,j} = t_{(i+1)\,(j+1)}\ \forall i, j = 1, ..., N$.

Entonces Una matriz de toeplitz es aquella que es constante a lo largo de sus diagonales palalelas a la diagonal principal.

Ejemplo

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}$$

Observación. Toda matriz circulante es toeplitz pero el reciproco no es cierto.

Si $C = Circ(c_1, ..., c_N)$ entonces $detC = \prod_{j=1}^{N} h(w_k)$,donde $h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x^{j-1}$ y w_k son las diferentes raices de la $N-$ésima unidad.En efecto ; Sea

$$\mathbf{V_N} = \mathbf{v}(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, ..., \mathbf{w_N}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{N-1} & w_2^{N-1} & \dots & w_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

la matriz de vondermonde de orden N en las N raices distintas de la unidad primero notamos que

$$CV_N = V_N diag(h(w_k)_{k=1}^{N})$$

En efecto;

$$\mathbf{CV_N} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_N \\ c_N & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{N-1} & w_2^{N-1} & \dots & w_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j-1} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j-1} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j-1} \\ \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j-2} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j-2} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j-1} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j-1} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j-1} \\ \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j+n-2} & \sum_{j=1}^{N} c_j w_2^{j+n-2} & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j+n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{N-1} & w_2^{N-1} & \dots & w_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} c_j w_1^{j-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j=1}^{N} c_j w_N^{j-1} \end{pmatrix}$$

$=V_N \cdot \; diag(h(w_k)_{k=1}^N)$.

Pero entonces

$det\, C \cdot V_N = det\, V_N \cdot diag(h(w_k)_{k=1}^N) = det\, V_N \cdot det\, diag(h(w_k)_{k=1}^N)$

y como $w_k \neq w_l$ si $k \neq l$, $detv_N \neq 0$; por tanto

$det\, C = det\, diag(h(w_k)_{k=1}^N) = \prod_{k=1}^N h(w_k)$.

De esta afirmación se deduce que los autovalores y autovectores de $C = Circ(c_1, ..., c_N)$ estan dados por

$$\lambda_k = h(w_k) \quad \text{y} \quad V_{\lambda_k} = (1, w_k, ..., w_k^{N-1})^T \; k = 1, ...,, N.$$

Pero entonces tambien hemos probado un resultado más general ,a saber: *Toda matriz circulante es diagionalizable.*

Sean $C = Circ(c_1, ..., c_N)$ y $D = Circ(d_1, ..., d_N)$ matrices circulantes, $w_1, ..., w_N$ las distintas raices N-esima de la unidad,V_N la matriz de vandermonde dada más arriba y

$h(w_k) = \sum_{j=1}^N c_j w_k^{j-1}$, $\qquad q(w_k) = \sum_{j=1}^N d_j w_k^{j-1}$

Entonces

$C = V_N diag(h(w_k))_{k=1}^N V_N^{-1} \qquad D = V_N diag(q(w_k))_{k=1}^N V_N^{-1}$

y por tanto

$$CD = V_N diag(h(w_k)q(w_k))_{k=1}^N V_N^{-1}$$

sean C y D como anteriormente definidas,entonces $C = h(\Pi)$.

Si $C \neq 0$ y asumiendo que $h(x) = \sum_{j=1}^r c_j x^{j-1}, 1 \leq r \leq N$, $c_r \neq 0$

y si

$$h(x) = c_r \prod_{j=1}^{r-1}(x - \alpha_j)$$

entonces

$$C = h(\Pi) = c_r \prod_{j=1}^{r-1}(\Pi - \alpha_j I)$$

y tenemos asi una factorización de cualquier matriz circulante en un producto de circulantes de la forma $\Pi - \alpha_k I$,que son de un tipo muy particular.

Definición 2.1.5 (*Bloque circulante*) Sean $A_1, ..., A_M$ matrices cuadradas de orden N. Por **bloque circulante** de tipo (M,N) y oreden MN entendemos la matriz de tamaño $MN \times MN$

$$\mathbf{Circ(A_1, A_2, ..., A_M)} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{M-1} & A_M \\ A_M & A_1 & \dots & A_{M-2} & A_{M-1} \\ A_{M-1} & A_M & \dots & A_{M-3} & A_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ A_2 & A_3 & \dots & A_M & A_1 \end{pmatrix}.$$

es decir; son matrices circulantes donde cada elemento es una matriz.Denotaremos el conjunto de matrices circulante por bloques de tipo (M,N) por $\mathsf{V}_{(M,N)}$

$\diamondsuit$ $A \in \mathsf{V}_{(M,N)}$ si y solo si $A(\Pi_M \otimes I_N) = (\Pi_M \otimes I_N)A$;En efecto; sea $A = (A_{i\,j})$, $(\Pi_M \otimes I_N) \in \mathsf{V}_{(M,N)}$ y está dada por

$$\mathbf{\Pi_M \otimes I_N} = \begin{pmatrix} O_N & I_N & \dots & O_N \\ O_N & O_N & \dots & O_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_N & O_N & \dots & I_N \\ I_N & O_N & \dots & O_N \end{pmatrix}_{MN \times MN}$$

;

Por otro lado $A \in \mathsf{V}_{(M,N)}$ si y solo si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{M-1} & A_M \\ A_M & A_1 & \dots & A_{M-2} & A_{M-1} \\ A_{M-1} & A_M & \dots & A_{M-3} & A_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ A_2 & A_3 & \dots & A_M & A_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{A}(\mathbf{\Pi_M}\otimes\mathbf{I_N}) = \begin{pmatrix} A_{1\,1} & A_{2\,2} & \dots & A_{1\,M} \\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & \dots & A_{2\,M} \\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & \dots & A_{3\,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M\,1} & A_{M\,2} & \dots & A_{M\,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_N & I_N & \dots & O_N \\ O_N & O_N & \dots & O_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_N & O_N & \dots & I_N \\ I_N & O_N & \dots & O_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1\,M} & A_{1\,1} & \dots & A_{1\,M-1} \\ A_{2\,M} & A_{2\,1} & \dots & A_{2\,M-1} \\ A_{3\,M} & A_{3\,1} & \dots & A_{3\,M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M\,M} & A_{M\,1} & \dots & A_{M\,M-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{2\,1} & A_{2\,2} & \dots & A_{2\,M} \\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & \dots & A_{3\,M} \\ A_{4\,1} & A_{4\,2} & \dots & A_{4\,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1\,1} & A_{1\,2} & \dots & A_{1\,M} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O_N & I_N & \dots & O_N \\ O_N & O_N & \dots & O_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_N & O_N & \dots & I_N \\ I_N & O_N & \dots & O_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1\,1} & A_{2\,2} & \dots & A_{1\,M} \\ A_{2\,1} & A_{2\,2} & \dots & A_{2\,M} \\ A_{3\,1} & A_{3\,2} & \dots & A_{3\,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M\,1} & A_{M\,2} & \dots & A_{M\,M} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{\Pi_M}\otimes\mathbf{I_N})\mathbf{A}$$

si y solo si

$A_{ij} = A_{(i+1)(j+1)}$;$A_{1\,M} = A_{2\,1}$; $A_{M\,1} = A_{1\,2}$ $\forall i,j = 1,2,...,M$. si y solo si A es una matriz circulante.

Como

$I_M \otimes A_1 = diag(A_1, A_1, ..., A_1)$

$\Pi_M \otimes A_2 = Circ(0, A_2, ..., 0)$

$\Pi_M^2 \otimes A_3 = Circ(0, 0, A_3, ..., 0)$,...

podemos escribir $Circ(A_1, A_2, ..., A_M)$ como

$$Circ(A_1, A_2, ..., A_M) = \sum_{j=0}^{M-1} (\Pi_M^j \otimes A_{j+1})$$

Ahora veremos la condición suficiente y necesaria para el cual los bloques circulante del mismo tipo conmutan.

◇ Sean $A = Circ(A_1, A_2, ..., A_M)$, $B = Circ(B_1, B_2, ..., B_M)$ en $\mathsf{V}_{(M,N)}$.Si $A_jB_k = B_kA_j$ para $k, j = 1, ..., N$,entonces $AB = BA$.

En efecto;Usaremos la representación dada anteriormente

$$A = \sum_{j=0}^{M-1} (\Pi_M^j \otimes A_{j+1}),\ B = \sum_{k=0}^{M-1} (\Pi_M^k \otimes A_{k+1})$$

luego

$$AB = \sum_{k,j=0}^{M-1} (\Pi_M^j \otimes A_{j+1})(\Pi_M^k \otimes B_{k+1}) = BA.$$

Capitulo 3
ÁLGEBRA DE SEÑALES

3.1 Introducción

En este capitulo se dará una formulación inicial del marco teorico de álgebra de señales,en el caso de las señales unidimensionales ,para el modelamiento y simulación de las mismas.

a continuación introducimos el espacio de señales unidimensionales presentando su estructura algebraica y los operadores que actuan sobre este espacio.

3.2 Espacio de Señales Unidimensionales

Definición 3.2.1 (*Señal unidimensional*) Una **Señal Unidimensional** es una función

$$x : Z_N \longrightarrow C$$

$$n \longmapsto x[n],$$

tal que

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n] < \infty$$

donde C es el conjunto de los números complejos.

Una forma equivalente de ver una señal es como una secuencia de números complejo $x[0], ..., x[N-1]$.Tambien se acostumbra a escribir una señal como un vector columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

Denotamos por $l^2(Z_N)$ **El Espacio de Señales Unidimensionales** .

Teorema 3.1 *El espacio de las señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.*

Demostración. Veamos que este espacio tiene una estructura de espacio vectorial sobre los números complejos con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un escalar.Para ello; verifiquemos que en este espacio se cumplen las propiedades descritas en la definición de espacio vectorial.

◇ **Superposición**

Sean $x_1, x_2 \in l^2(Z_N)$, entonces

$$\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)[0] \\ (x_1+x_2)[1] \\ \vdots \\ (x_1+x_2)[N-2] \\ (x_1+x_2)[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1[0]+x_2[0] \\ x_1[1]+x_2[1] \\ \vdots \\ x_1[N-2]+x_2[N-2] \\ x_1[N-1]+x_2[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-2] \\ x_1[N-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2[0] \\ x_2[1] \\ \vdots \\ x_2[N-2] \\ x_2[N-1] \end{pmatrix} \in l^2(Z_N).$$

◇ **Homogeneidad**

Sean $\alpha \in C, x \in l^2(Z_N)$

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\alpha x)[0] \\ (\alpha x)[1] \\ \vdots \\ (\alpha x)[N-2] \\ (\alpha x)[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x[0] \\ \alpha x[1] \\ \vdots \\ \alpha x[N-2] \\ \alpha x[N-1] \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{pmatrix} \in l^2(Z).$$

◇ **Asociatividad**

Sean $x, y, z \in l^2(Z_N)$,entonces

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \begin{pmatrix} ((x+y)+z)[0] \\ ((x+y)+z)[1] \\ \vdots \\ ((x+y)+z)[N-2] \\ ((x+y)+z)[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)[0]+z[0] \\ (x+y)[1]+z[1] \\ \vdots \\ (x+y)[N-2]+z[N-2] \\ (x+y)[N-1]+z[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x[0]+y[0])+z[0] \\ (x[1]+y[1])+z[1] \\ \vdots \\ (x[N-2]+y[N-2])+z[N-2] \\ (x[N-1]+y[N-1])+z[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0]+(y[0]+z[0]) \\ x[1]+(y[1]+z[1]) \\ \vdots \\ x[N-2]+(y[N-2]+z[N-2]) \\ x[N-1]+(y[N-1]+z[N-1]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0]+(y+z)[0] \\ x[1]+(y+z)[1] \\ \vdots \\ x[N-2]+(y+z)[N-2] \\ x[N-1]+(y+z)[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}).$$

◇ **Conmutatividad**

Sean $x_1, x_2 \in l^2(Z_N)$, entonces

$$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)[0] \\ (x_1+x_2)[1] \\ \vdots \\ (x_1+x_2)[N-2] \\ (x_1+x_2)[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1[0]+x_2[0] \\ x_1[1]+x_2[1] \\ \vdots \\ x_1[N-2]+x_2[N-2] \\ x_1[N-1]+x_2[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2[0]+x_1[0] \\ x_2[1]+x_1[1] \\ \vdots \\ x_2[N-2]+x_1[N-2] \\ x_2[N-1]+x_1[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2+x_1)[0] \\ (x_2+x_1)[1] \\ \vdots \\ (x_2+x_1)[N-2] \\ (x_2+x_1)[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x_2} + \mathbf{x_1}$$

◇ **Existencia del elemento neutro aditivo**

Existe un único elemento neutro aditvo ϕ en $l^2(Z_N)$ el cual tiene la siguiente forma

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi[0] \\ \phi[1] \\ \vdots \\ \phi[N-2] \\ \phi[N-1] \end{pmatrix}$$

donde $\phi[i] = 0, \forall i = 0, ..., N-1$

tal que para todo x en $l^2(Z_N)$,

$$\mathbf{x} + \phi = \begin{pmatrix} x[0]+\phi[0] \\ x[1]+\phi[1] \\ \vdots \\ x[N-2]+\phi[N-2] \\ x[N-1]+\phi[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

◇ **Existencia del elemento inverso aditivo**

para cada $x \in l^2(Z_N)$,Existe un único elemento inverso aditivo $(-x)$ en $l^2(Z_N)$ tal que ,

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{1})\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x[0]-x[0] \\ x[1]-x[1] \\ \vdots \\ x[N-2]-x[N-2] \\ x[N-1]-x[N-1] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \phi[0] \\ \phi[1] \\ \vdots \\ \phi[N-2] \\ \phi[N-1] \end{pmatrix}=\phi.$$

◇ **Distribución respecto a el escalar**

Sean $x_1, x_2 \in l^2(Z_N)$ y $\alpha \in C$ entonces

$$\alpha(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2})=\begin{pmatrix} \alpha(x_1+x_2)[0] \\ \alpha(x_1+x_2)[1] \\ \vdots \\ \alpha(x_1+x_2)[N-2] \\ \alpha(x_1+x_2)[N-1] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1[0]+\alpha x_2[0] \\ \alpha x_1[1]+\alpha x_2[1] \\ \vdots \\ \alpha x_1[N-2]+\alpha x_2[N-2] \\ \alpha x_1[N-1]+\alpha x_2[N-1] \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\mathbf{x_2}+\alpha\mathbf{x_1}.$$

◇ **Distribución respecto a la señal**

Sean $x_1(Z_N)$ y $\alpha, \beta \in C$ entonces

$$(\alpha+\beta)\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1[0] \\ (\alpha+\beta)x_1[1] \\ \vdots \\ (\alpha+\beta)x_1[N-2] \\ (\alpha+\beta)x_1[N-1] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1[0]+\beta x_1[0] \\ \alpha x_1[1]+\beta x_1[1] \\ \vdots \\ \alpha x_1[N-2]+\beta x_1[N-2] \\ \alpha x_1[N-1]+\beta x_1[N-1] \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\mathbf{x_1}+\beta\mathbf{x_1}$$

◇ **Asociatividad respecto a los escalares**

Sean $x \in l^2(Z_N)$ y $\alpha, \beta \in C$,entonces

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x[0] \\ (\alpha\beta)x[1] \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x[N-2] \\ (\alpha\beta)x[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x)[0] \\ \alpha(\beta x)[1] \\ \vdots \\ \alpha(\beta x)[N-2] \\ \alpha(\beta x)[N-1] \end{pmatrix} = \alpha(\beta\mathbf{x})$$

◇ **Existencia del elemento neutro multiplicativo**

para cada $x \in l^2(Z_N)$,Existe un único elemento neutro multiplicatio 1 en C tal que ,

$$\mathbf{1}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1\cdot x[0] \\ 1\cdot x[1] \\ \vdots \\ 1\cdot x[N-2] \\ 1\cdot x[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{1}.$$

Por tanto,El espacio de las señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.

Una base para el espacio de señales es el conjunto

$$\triangle_N = \{\delta_{\{k\}} : k = 0, 1, ..., N-1\},$$

donde las funciones $\delta_{\{k\}}$ son definidas por

$$\delta_{\{k\}}[j] = 1 \text{ si } j = k,\ \delta_{\{k\}}[j] = 0 \text{ si } j \neq k.$$

afirmamos que el conjunto $\triangle_N$ es linealmente independiente;Con el fin de probar este enunciado,supongase que existen $c_i \in C$ $i = 0, ..., N-1$. tales que

$c_0\delta_0 + c_1\delta_1 + \cdots + c_{N-1}\delta_{N-1} = O_{1\times(N-1)} = \phi$

$$\mathbf{c_0}\begin{pmatrix}\delta_0[0]\\ \delta_0[1]\\ \vdots\\ \delta_0[N-2]\\ \delta_0[N-1]\end{pmatrix}+\cdots+\mathbf{c_{N-1}}\begin{pmatrix}\delta_{N-1}[0]\\ \delta_{N-1}[1]\\ \vdots\\ \delta_{N-1}[N-2]\\ \delta_{N-1}[N-1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi[0]\\ \phi[1]\\ \vdots\\ \phi[N-2]\\ \phi[N-1]\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\c_{N-1}\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\ \vdots\\c_{N-2}\\c_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}$$

de lo anterior se deduce ,$c_i = 0 \ \forall i = 0, ..., N-1$. y como para cualquier x en $l^2(Z_N)$,se tiene

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x[0]\\x[1]\\ \vdots\\x[N-2]\\x[N-1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x[0]\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\x[N-1]\end{pmatrix}=x[0]\delta_0+\cdots+c_{N-1}\delta_{N-1}$$

entonces $\triangle_N$ genera a el espacio vectorial $l^2(Z_N)$.Por tanto $\triangle_N$ es una base para el espacio de señales $l^2(Z_N)$.

Esta base es llamada **Base Estandar** de $l^2(Z_N)$.

♣ La Convolución Ciclíca

Definición. 3.2.2 Definimos la operación de **Convolución cíclica** sobre el espacio de señales unidimensionales como

$$\begin{aligned}\otimes_N : l^2(Z_N)\times l^2(Z_N) &\longrightarrow l^2(Z_N)\\ (x,y) &\longmapsto x\otimes_N y,\end{aligned}$$

donde $x \otimes y$ se define por

$$(x \otimes_N y)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< n-k >_N].$$

Teorema 3.2 *El espacio de las señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un álgebra conmutativa usando la convolución cíclica $\otimes_N$ como multiplicación.*

Demostración. Para demostrar que $(l^2(Z_N), \otimes_N)$ es un álgebra conmutativa debemos verificar que esta nueva operación debe cumplir las siguientes propiedades cualesquiera $x, y, z \in l^2(Z_N)$ y todo $\alpha \in C$:

(I) $x \otimes_N y = y \otimes_N x.$

(II) $(x \otimes_N y) \otimes_N z = x \otimes_N (z \otimes y).$

(III) $x \otimes_N (y+z) = x \otimes_N y + x \otimes_N z$

(IV) $\alpha(x \otimes_N y) = (\alpha x) \otimes_N y = x \otimes_N (\alpha y).$

Prueba de (I) : Consideremos dos señales $x, y \in l^2(Z_N)$,

$$\begin{aligned}
(x \otimes_N y)[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< n-k >_N] \\
&= \sum_{n\geq k} x[k]y[< n-k >_N] + \sum_{n<k} x[k]y[< n-k >_N] \\
&= \sum_{n\geq k} x[k]y[< n-k >_N] + \sum_{n<k} x[k]y[< N+(n-k) >_N] \\
&= \sum_{n\geq k} x[k]y[< n-k >_N] + \sum_{n<k} x[k]y[N+(n-k)]
\end{aligned}$$

llamaremos $m = n-k$ y $s = N+(n-k)$ en la parte derecha y izquierdad de la igualdad inmediatamente anterior respectivamente.Obteniendo así,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq m\geq 0} y[m]x[< n-m >_N] + \sum_{n<s} y[s]x[N+(n-s)] \\
&= \sum_{n\geq m\geq 0} y[m]x[< n-m >_N] + \sum_{n<s} y[s]x[< N+(n-s) >_N] \\
&= \sum_{n\geq m} y[m]x[< n-m >_N] + \sum_{n<s\leq N-1} y[s]x[< n-s >_N] \\
&= \sum_{n\geq m} y[m]x[< n-m >_N] + \sum_{n<m\leq N-1} y[m]x[< n-m >_N] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} y[m]x[< n-m >_N] = (y \otimes_N x)[n].
\end{aligned}$$

Prueba de (II): Veamos ahora que la convolución cíclica es una operación asociativa. Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

Llamemos $s = (x \otimes_N y)$ y $t = (y \otimes_N z)$;entonces,

$$(\mathbf{x} \otimes_\mathbf{N} \mathbf{y}) \otimes_\mathbf{N} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} ((x \otimes_N y) \otimes_N z)[0] \\ ((x \otimes_N y) \otimes_N z)[1] \\ \vdots \\ ((x \otimes_N y) \otimes_N z)[N-2] \\ ((x \otimes_N y) \otimes_N z)[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z \otimes_N (x \otimes_N y))[0] \\ (z \otimes_N (x \otimes_N y))[1] \\ \vdots \\ (z \otimes_N (x \otimes_N y))[N-2] \\ (z \otimes_N (x \otimes_N y))[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z[0](x \otimes_N y)[< 0 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< -(N-1) >_N] \\ z[0](x \otimes_N y)[< 1 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< -(N-2) >_N] \\ \vdots \\ z[0](x \otimes_N y)[< N-1 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< 0 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z[0](x \otimes_N y)[< 0 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< 1 >_N] \\ z[0](x \otimes_N y)[< 1 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< 2 >_N] \\ \vdots \\ z[0](x \otimes_N y)[< N-1 >_N] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[< 0 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z[0](x \otimes_N y)[0] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[1] \\ z[0](x \otimes_N y)[1] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[2] \\ \vdots \\ z[0](x \otimes_N y)[N-1] + \cdots + z[N-1](x \otimes_N y)[0] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z[0] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< -m >_N] + \cdots + z[N-1] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< 1-m >_N] \\ z[0] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< 1-m >_N] + \cdots + z[N-1] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< 2-m >_N] \\ \vdots \\ z[0] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< N-1-m >_N] + \cdots + z[N-1] \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< -m >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z[0]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<-m>_N] + \cdots + z[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<1-m>_N] \\ z[0]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<1-m>_N] + \cdots + z[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<2-m>_N] \\ \vdots \\ z[0]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<N-1-m>_N] + \cdots + z[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[<-m>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<-m>_N] + \cdots + x[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<1-m>_N] \\ x[0]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<1-m>_N] + \cdots + x[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<2-m>_N] \\ \vdots \\ x[0]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<N-1-m>_N] + \cdots + x[N-1]\sum_{m=0}^{N-1} z[m]y[<-m>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0](z \otimes_N y)[<0>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<1>_N] \\ x[0](z \otimes_N y)[<1>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<2>_N] \\ \vdots \\ x[0](z \otimes_N y)[<N-1>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<0>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0](z \otimes_N y)[<0>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<-(N-1)>_N] \\ x[0](z \otimes_N y)[<1>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<-(N-2)>_N] \\ \vdots \\ x[0](z \otimes_N y)[<N-1>_N] + \cdots + x[N-1](z \otimes_N y)[<0>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x \otimes_N (z \otimes_N y))[0] \\ (x \otimes_N (z \otimes_N y))[1] \\ \vdots \\ (x \otimes_N (z \otimes_N y))[N-2] \\ (x \otimes_N (z \otimes_N y))[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x \otimes_N (y \otimes_N z)[0] \\ (x \otimes_N (y \otimes_N z)[1] \\ \vdots \\ (x \otimes_N (y \otimes_N z)[N-2] \\ (x \otimes_N (y \otimes_N z)[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x} \otimes_\mathbf{N} (\mathbf{y} \otimes_\mathbf{N} \mathbf{z})$$

Prueba de (III): Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

$$\mathbf{x} \otimes_{\mathbf{N}} (\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} (x \otimes_N (y+z))[0] \\ (x \otimes_N (y+z))[1] \\ \vdots \\ (x \otimes_N (y+z))[N-2] \\ (x \otimes_N (y+z))[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<-k>_N] \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<1-k>_N] \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<N-2-k>_N] \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<N-1-k>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y[<-k>_N] + z[<-k>_N]) \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y[<1-k>_N] + z[<1-k>_N]) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y[<N-2-k>_N] + z[<N-2-k>_N]) \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} x[k](y[<N-1-k>_N] + z[<N-1-k>_N]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<-k>_N] + x[k]z[<-k>_N]) \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} (x[k](y[<1-k>_N] + x[k]z[<1-k>_N]) \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<N-2-k>_N] + x[k]z[<N-2-k>_N]) \\ \sum\limits_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<N-1-k>_N] + x[k]z[<N-1-k>_N]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<-k>_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<1-k>_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<1-k>_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<N-2-k>_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<N-2-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<N-1-k>_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<N-1-k>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<1-k>_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<N-2-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<N-1-k>_N] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<1-k>_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<N-2-k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[<N-1-k>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x \otimes_N y)[0] \\ (x \otimes_N y)[1] \\ \vdots \\ (x \otimes_N y)[N-2] \\ (x \otimes_N y)[N-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x \otimes_N z)[0] \\ (x \otimes_N z)[1] \\ \vdots \\ (x \otimes_N z)[N-2] \\ (x \otimes_N z)[N-1] \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \otimes_\mathbf{N} \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \otimes_\mathbf{N} \mathbf{z})$$

Prueba de (IV): Consideremos dos señales $x, y \in l^2(Z_N)$ y $\alpha \in C$,

$$\begin{aligned} \alpha(x \otimes_N y)[n] &= \alpha \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[<n-k>_N] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha x[k]y[<n-k>_N] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha x)[k] y[< n-k >_N]$$

$$= ((\alpha x) \otimes_N y)[n], \; 0 \leq n \leq N-1.$$

Vamos ahora a escribir la convolución cíclica en forma de un operador sobre el mismo espacio de señales $l^2(Z_N)$.Consideremos $x, h \in l^2(Z_N)$ y llamaremos $y = x \otimes_N h$;entonces,si para cada n hacemos la expansión dc la sumatoria,

$$y[n] = (x \otimes_N h)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[< n-k >_N],$$

obtenemos

$$y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[N-1] + x[2]h[N-2] + \cdots + x[N-1]h[1],$$

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[N-1] + \cdots + x[N-1]h[2],$$

$$\vdots$$

$$y[N-1] = x[0]h[N-1] + x[1]h[N-2] + \cdots + x[N-1]h[0],$$

Si escribimos esto matricialmente tenemos

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-2] \\ y[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h[0] & h[N-1] \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] \cdots & h[2] \\ \vdots & \vdots \; \cdots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] \; \cdots & h[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

Obsérvese que si fijamos h, podemos pensar la convolución cíclica como un operador lineal actuando sobre el espacio de señales, el cual será llamado **operador de convolución cíclica**. Denotaremos este operador por $\otimes_N^h$ y escribimos

$$\otimes_N^h : l^2(Z_N) \longrightarrow l^2(Z_N)$$

$$x \longmapsto \otimes_N^h x = x \otimes_N h,$$

y la matriz de este operador es

$$\mathbf{H_N} = \begin{pmatrix} h[0] & h[N-1]\cdots & h[1] \\ h[1] & h[0]\cdots & h[2] \\ \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] \quad \cdots & h[0] \end{pmatrix}$$

De donde,inmediatamente,observamos que la matriz del operador de convolución cíclica es una matriz circulante.

Estudiarenmos ahora otra operación importante en el espacio de señales,la correlación cíclica.

♣ La Correlación Cíclica

Definición. 3.2.3 Definimos la operación de **Correlación cíclica** sobre el espacio de señales unidimensionales como

$$\Theta_N : l^2(Z_N) \times l^2(Z_N) \longrightarrow l^2(Z_N)$$

$$(x, y) \qquad \longmapsto x\Theta_N y,$$

donde $x\Theta_N y$ se define por

$$(x\Theta_N y)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< n + k >_N].$$

Teorema 3.3 *El espacio de las señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un álgebra usando la correlación cíclica Θ_N como multiplicación.*

Demostración.Para demostrar que $(l^2(Z_N), \Theta_N)$ es un álgebra debemos verificar que esta nueva operación debe cumplir las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in l^2(Z_N)$ y todo $\alpha \in C$:

(I) $(x\Theta_N y)\Theta_N z = x\Theta_N(z\Theta_N y)$.

(II) $x\Theta_N(y + z) = x\Theta_N y + x\Theta_N z$

(III) $\alpha(x\Theta_N y) = (\alpha x)\Theta_N y = x\Theta_N(\alpha y)$.

Prueba de (II): Veamos ahora que la correlación cíclica es una operación asociativa. Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

Llamemos $s = (x \otimes_N y)$ y $t = (y \otimes_N z)$;ehtonces,

$$(\mathbf{x\Theta_N y})\mathbf{\Theta_N z} = \begin{pmatrix} ((x\Theta_N y)\Theta_N z)[0] \\ ((x\Theta_N y)\Theta_N z)[1] \\ \vdots \\ ((x\Theta_N y)\Theta_N z)[N-2] \\ ((x\Theta_N y)\Theta_N z)[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\Theta_N y)[0]z[< 0 >_N] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[< N-1 >_N] \\ (x\Theta_N y)[0]z[< 1 >_N] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[< N >_N] \\ \vdots \\ (x\Theta_N y)[0]z[< N-1 >_N] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[< 2N-2 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\Theta_N y)[0]z[0] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[N-1] \\ (x\Theta_N y)[0]z[1] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[0] \\ \vdots \\ (x\Theta_N y)[0]z[N-1] + \cdots + (x\Theta_N y)[N-1]z[N-2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< m >_N])z[0] + \cdots + (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< N-1+m >_N])z[N-1] \\ (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< m >_N])z[1] + \cdots + (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< N-1+m >_N])z[0] \\ \vdots \\ (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< m >_N])z[N-1] + \cdots + (\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[< N-1+m >_N])z[N-2] \end{pmatrix}$$

Reagrupando e igualando terminos modulo N obtenemos,

$$= \begin{pmatrix} \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<m>_N]\right)x[0] + \cdots + \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<N-1+m>_N]\right)x[N-1] \\ \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<m+1>_N]\right)x[0] + \cdots + \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<m>_N]\right)x[N-1] \\ \vdots \\ \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<m+N-1>_N]\right)x[0] + \cdots + \left(\sum_{m=0}^{N-1} y[m]z[<N-2+m>_N]\right)x[N-1] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0](y\Theta_N z)[0] + \cdots + z[N-1](y\Theta_N z)[N-1] \\ x[0](y\Theta_N z)[1] + \cdots + x[N-1](y\Theta_N z)[0] \\ \vdots \\ x[0](y\Theta_N z)[N-1] + \cdots + x[0](y\Theta_N z)[N-2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0](y\Theta_N z)[<0>_N] + \cdots + x[N-1](y\Theta_N z)[<N-1>_N] \\ x[0](y\Theta_N z)[<1>_N] + \cdots + x[N-1](y\Theta_N z)[<N>_N] \\ \vdots \\ x[0](y\Theta_N z)[<N-1>_N] + \cdots + x[N-1](y\Theta_N z)[<2N-2>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\Theta_N(y\Theta_N z)[0] \\ (x\Theta_N(y\Theta_N z)[1] \\ \vdots \\ (x\Theta_N(y\Theta_N z)[N-2] \\ (x\Theta_N(y\Theta_N z)[N-1] \end{pmatrix} = \mathbf{x} \otimes_{\mathbf{N}} (\mathbf{y}\Theta_{\mathbf{N}}\mathbf{z}).$$

Prueba de (III): Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

$$\mathbf{x}\Theta_{\mathbf{N}}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} (x\Theta_N(y+z))[0] \\ (x\Theta_N(y+z))[1] \\ \vdots \\ (x\Theta_N(y+z))[N-2] \\ (x\Theta_N(y+z))[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<1+k>_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<N-2+k>_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y+z)[<N-1+k>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y[<k>_N] + z[<k>_N]) \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y[<1+k>_N] + z[<1+k>_N]) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y[<N-2+k>_N] + z[<N-2+k>_N]) \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k](y[<N-1+k>_N] + z[<N-1+k>_N]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<k>_N] + x[k]z[<k>_N]) \\ \sum_{k=0}^{N-1} (x[k](y[<1+k>_N] + x[k]z[<1+k>_N]) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<N-2+k>_N] + x[k]z[<N-2+k>_N]) \\ \sum_{k=0}^{N-1} (x[k]y[<N-1+k>_N] + x[k]z[<N-1+k>_N]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< k >_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< 1 + k >_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< 1 + k >_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< N-2+k >_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< N-2+k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< N-1+k >_N] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< N-1+k >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< +k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< 1 + k >_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< N-2+k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< N-1+k >_N] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< 1 + k >_N] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< N-2+k >_N] \\ \sum_{k=0}^{N-1} x[k]z[< N-1+k >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x\Theta_N y)[0] \\ (x\Theta_N y)[1] \\ \vdots \\ (x\Theta_N y)[N-2] \\ (x\Theta_N y)[N-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x\Theta_N z)[0] \\ (x\Theta_N z)[1] \\ \vdots \\ (x\Theta_N z)[N-2] \\ (x\Theta_N z)[N-1] \end{pmatrix} = (\mathbf{x\Theta_N y}) + (\mathbf{x\Theta_N z})$$

Prueba de (IV): Consideremos dos señales $x, y \in l^2(Z_N)$ y $\alpha \in C$,

$$\alpha(x\Theta_N y)[n] = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< n+k >_N]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha x[k]y[< n+k >_N]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha x)[k]y[< n + k >_N]$$

$$= ((\alpha x)\Theta_N y)[n],\ 0 \leq n \leq N-1.$$

Por lo tanto ,El espacio de señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un álgebra con la correlación cíclica como multiplicación. Pero no es cierto que la correlación cíclica sea conmutativa.Por ejemplo, si tomamos dos señales,

$$\mathbf{x}= \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{y}= \begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculando directamente la correlación cíclica de estas señales obtenemos

$$\mathbf{x}\Theta_{\mathrm{N}}\mathbf{y}= \begin{pmatrix} x\Theta_N y[0] \\ x\Theta_N y[1] \\ x\Theta_N y[2] \\ x\Theta_N y[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{3} x[k]y[< k >_N] \\ \sum_{k=0}^{3} x[k]y[< k+1 >_N] \\ \sum_{k=0}^{3} x[k]y[< k+2 >_N] \\ \sum_{k=0}^{3} x[k]y[< k+3 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x[0]y[< 0 >_N] + x[1]y[< 1 >_N] + x[2]y[< 2 >_N] + x[3]y[< 3 >_N] \\ x[0]y[< 1 >_N] + x[1]y[< 2 >_N] + x[2]y[< 3 >_N] + x[3]y[< 4 >_N] \\ x[0]y[< 2 >_N] + x[1]y[< 3 >_N] + x[2]y[< 4 >_N] + x[3]y[< 5 >_N] \\ x[0]y[< 3 >_N] + x[1]y[< 4 >_N] + x[2]y[< 5 >_N] + x[3]y[< 6 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y[< 0 >_N] - y[< 2 >_N] + 2y[< 3 >_N] \\ y[< 1 >_N] - y[< 3 >_N] + 2y[< 4 >_N] \\ y[< 2 >_N] - y[< 4 >_N] + 2y[< 5 >_N] \\ y[< 3 >_N] - y[< 5 >_N] + 2y[< 6 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y[<0>_N] - y[<2>_N] + 2y[<3>_N] \\ y[<1>_N] - y[<3>_N] + 2y[<0>_N] \\ y[<2>_N] - y[<0>_N] + 2y[<1>_N] \\ y[<3>_N] - y[<1>_N] + 2y[<2>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y[0] - y[2] + 2y[3] \\ y[1] - y[3] + 2y[0] \\ y[2] -] y[0] + 2y[1] \\ y[3] - y[1] + 2y[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2+0 \\ 1-0-2 \\ 2+1+2 \\ 0-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mientras que

$$\mathbf{y\Theta_N x} = \begin{pmatrix} (y\Theta_N x)[0] \\ (y\Theta_N x)[1] \\ (y\Theta_N x)[2] \\ (y\Theta_N x)[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{3} y[k]x[<k>_N] \\ \sum_{k=0}^{3} y[k]x[<k+1>_N] \\ \sum_{k=0}^{3} y[k]x[<k+2>_N] \\ \sum_{k=0}^{3} y[k]x[<k+3>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y[0]x[<0>_N] + y[1]x[<1>_N] + y[2]x[<2>_N] + y[3]x[<3>_N] \\ y[0]x[<1>_N] + y[1]x[<2>_N] + y[2]x[<3>_N] + y[3]x[<4>_N] \\ y[0]x[<2>_N] + y[1]x[<3>_N] + y[2]x[<4>_N] + y[3]x[<5>_N] \\ y[0]x[<3>_N] + y[1]x[<4>_N] + y[2]x[<5>_N] + y[3]x[<6>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x[<0>_N] + x[<1>_N] + 2x[<2>_N] \\ -x[<1>_N] + x[<2>_N] + 2x[<3>_N] \\ -x[<2>_N] + x[<3>_N] + 2x[<4>_N] \\ -x[<3>_N] + x[<4>_N] + 2x[<5>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x[<0>_N] - x[<1>_N] + 2x[<2>_N] \\ -x[<1>_N] - x[<2>_N] + 2x[<3>_N] \\ -x[<2>_N] - x[<3>_N] + 2x[<0>_N] \\ -x[<3>_N] - x[<0>_N] + 2x[<1>_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x[0] + x[1] + 2x[2] \\ -x[1] + x[2] + 2x[3] \\ -x[2] + x[3] + 2x[0] \\ -x[3] + x[0] + 2x[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 \\ 0-1+4 \\ -(-1)+2+2 \\ -2+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,El espacio de señales unidimensionales $l^2(Z_N)$ es un algebra no conmutaiva con la correlación cíclica como multiplicación.

Así como el caso de la convolución cíclica, la correlación cíclica tambien se puede ver como un operador sobre el espacio $l^2(Z_N)$. Para ver esto fijamos una señal $g \in l^2(Z_N)$, y definimos **el operador de correlación cíclica** como

$$\Theta_N^g : l^2(Z_N) \longrightarrow l^2(Z_N)$$
$$x \longmapsto \Theta_N^g\{x\} = x\Theta_N g.$$

Para calcula la matriz C_N del operador correlación cíclica usamos $\triangle_N = \{\delta_{\{k\}} : k = 0, 1, ..., N-1\}$ la base estándar de $l^2(Z_N)$.Entonces,

$$\mathbf{C_N} = \begin{pmatrix} \Theta_N^g\{\delta_{\{0\}}\} & \Theta_N^g\{\delta_{\{1\}}\} \cdots \Theta_N^g\{\delta_{\{N-1\}}\} \end{pmatrix}$$

calculamos cada columna y obtenemos

$$\Theta_N^g\{\delta_{\{k\}}\} = \sum_{m=0}^{N-1} \delta_{\{k\}}[m] g[<n+m>_N] = g[<n+k>_N].$$

Así,

$$[(\Theta_N^g\{\delta_{\{0\}}\})[n]] = [g[< n >_N]] = \begin{pmatrix} g[0] \\ g[1] \\ \vdots \\ g[N-2] \\ g[N-1] \end{pmatrix}$$

$$[(\Theta_N^g\{\delta_{\{1\}}\})[n]] = [g[< n+1 >_N]] = \begin{pmatrix} g[< 1 >_N] \\ g[< 1+1 >_N] \\ \vdots \\ g[< (N-2)+1 >_N] \\ g[< (N-1)+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g[< 1 >_N] \\ g[< 2 >_N] \\ \vdots \\ g[< N-1 >_N] \\ g[< N >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g[1] \\ g[2] \\ \vdots \\ g[N-1] \\ g[0] \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[(\Theta_N^g\{\delta_{N-1}\})[n]] = [g[< n+(N-1) >_N]] = \begin{pmatrix} g[< N-1 >_N] \\ g[< 1+(N-1) >_N] \\ \vdots \\ g[< (N-2)+(N-1) >_N] \\ g[< (N-1)+(N-1) >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g[< N-1 >_N] \\ g[< N >_N] \\ \vdots \\ g[< 2N-3 >_N] \\ g[< 2N-2 >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g[N-1] \\ g[0] \\ \vdots \\ g[N-3] \\ g[N-2] \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz del operador de correlación cíclica es

$$\mathbf{c_N} = \begin{pmatrix} g[0] & g[1] & \dots & g[N-1] \\ g[1] & g[2] & \dots & g[0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g[N-2] & g[N-1] & \dots & g[N-3] \\ g[N-1] & g[0] & \dots & g[N-2] \end{pmatrix}$$

Obsérvese que,así como en el caso del operador de convolución cíclica, la matriz del operador de correlación cíclica tambien es una matriz circulante.

♣ Operador de Reflexión

Definición 3.2.4 (*Operador de Reflexión*) El **operador de reflexión** sobre el espacio de señales unidimensionales se define por

$$\Re_N : l^2(Z_N) \longrightarrow l^2(Z_N)$$

$$x \longmapsto \Re\{x\} \doteq x^{(-)}$$

donde

$$(\Re\{x\})[k] = x^{(-)}[k] = x[< N - k >_N] = x[< -k >_N].$$

Calulemos la matriz R_N del operador de reflexión con respecto a la base estándar, esto es

$$\mathbf{R_N} = \left(\; R_N\{\delta_{\{0\}}\} \quad R_N\{\delta_{\{1\}}\} \cdots R_N\{\delta_{\{N-1\}}\} \; \right).$$

Ahora,

$$[(R_N\{\delta_{\{0\}}\})[n]] = [\delta_{\{0\}}[< -n >_N]] = \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[< -0 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< -1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[< -N+2 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< -N+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[< 0 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< N-1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[< 2 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< 1 >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[0] \\ \delta_{\{0\}}[N-1] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[2] \\ \delta_{\{0\}}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[(R_N\{\delta_{\{1\}}\})[n]] = [\delta_{\{1\}}[< -n >_N]] = \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[< -0 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< -1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[< -N+2 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< -N+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[< 0 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< N-1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[< 2 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< 1 >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[0] \\ \delta_{\{1\}}[N-1] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[2] \\ \delta_{\{1\}}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$[(R_N\{\delta_{\{N-1\}}\})[n]] = [\delta_{\{N-1\}}[< -n >_N]] = \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[< -0 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< -1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[< -N+2 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< -N+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[< 0 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< N-1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[< 2 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< 1 >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[0] \\ \delta_{\{N-1\}}[N-1] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[2] \\ \delta_{\{N-1\}}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, que la matriz del operador de reflexión es

$$\mathbf{R_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \Psi$$

la cual nuevamente vemos que es circulante.

Una interesante propiedad que relaciona la convolución cíclica propiedad,la correlación cíclica y el operador de reflexión es la siguiente:

Teorema 3.4 Si $x., y \in l^2(Z_N)$, entonces

$$x\Theta_N y = (\Re_N\{x\}) \otimes_N y.$$

Demostración.

$$(x\Theta_N y)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[< n+k >_N];$$

haciendo $m = n + k$ esta suma se convierte en

$$(x\Theta_N y)[n] = \sum_{m=n}^{N+n-1} x[m-n]y[< m >_N] =$$

$=x[0]y[< n >_N] + x[1]y[< n+1 >_N] + x[2]y[< n+2 >_N] + \cdots$

$+x[N-n-1]y[< N-1 >_N] + x[N-n]y[< N >_N]+$

$x[N-n+1]y[< N+1 >_N] + \cdots$

$+x[N-2]y[< N+n-2 >_N] + x[N-1]y[< N+n-1 >_N],$

$=x[0]y[< n >_N] + x[1]y[< n+1 >_N] + x[2]y[< n+2 >_N] + \cdots$
$+x[N-(n+1)]y[< N-1 >_N] + x[N-n]y[< 0 >_N]+$
$x[N-(n-1)]y[< 1 >_N] + \cdots$
$+x[N-2]y[< n-2 >_N] + x[N-1]y[< n-1 >_N],$

$y[0]x[< N-n >_N] + y[1]x[< N-(n-1) >_N] + \cdots$
$+y[n-1]x[< N-1 >_N] + y[n]x[< 0 >_N]+$
$y[n+1]x[< 1 >_N] + \cdots$
$+y[N-1]x[< N-(n+1) >_N].$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned}(x\Theta_N y)[n] &= \textstyle\sum_{j=0}^{N-1} y[j]x[< N-(n-j) >_n],\\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{N-1} y[j](\Re_N\{x\})[n-j],\\ &= (y \otimes_N \Re_N\{x\})[n],\\ &= (\Re_N\{x\} \otimes y)[n].\end{aligned}$$

♣ Operador de Desplazamiento Cíclico

Definición 3.2.5 (*Operador de Desplazamiento Cíclico*).

El **Operador de desplazamiento cíclico** sobre el espacio de señales unidimensionales se define por

$$\begin{aligned}\partial_N : l^2(Z_N) &\longrightarrow l^2(Z_N)\\ x &\longmapsto \partial_N\{x\}\end{aligned}$$

donde

$$(\partial_N\{x\})[n] = x[< n+1 >_N].$$

Calculemos la matriz S_N del operador de desplazamiento cíclico con respecto a la base estándar, esto es

$$\partial_{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} S_N\{\delta_{\{0\}}\} & \partial_N\{\delta_{\{1\}}\} \cdots \partial_N\{\delta_{\{N-1\}}\} \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$[(S_N\{\delta_{\{0\}}\})[n]] = [\delta_{\{0\}}[< n+1 >_N]] = \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[< 0+1 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< 1+1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[< (N-2)+1 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< (N-1)+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[< 1 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< 2 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[< N-1 >_N] \\ \delta_{\{0\}}[< N >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\{0\}}[1] \\ \delta_{\{0\}}[2] \\ \vdots \\ \delta_{\{0\}}[N-1] \\ \delta_{\{0\}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[(\partial_N\{\delta_{\{1\}}\})[n]] = [\delta_{\{1\}}[< n+1 >_N]] = \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[< 0+1 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< 1+1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[< (N-2)+1 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< (N-1)+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[< 1 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< 2 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[< N-1 >_N] \\ \delta_{\{1\}}[< N >_N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\{1\}}[1] \\ \delta_{\{1\}}[2] \\ \vdots \\ \delta_{\{1\}}[N-1] \\ \delta_{\{1\}}[N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$[(S_N\{\delta_{\{N-1\}}\})[n]] = [\delta_{\{N-1\}}[< n+1 >_N]]$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[< 0+1 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< 1+1 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[< (N-2)+1 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< (N+1)+1 >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[< 1 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< 2 >_N] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[< N-1 >_N] \\ \delta_{\{N-1\}}[< N >_N] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\{N-1\}}[1] \\ \delta_{\{N-1\}}[2] \\ \vdots \\ \delta_{\{N-1\}}[N-1] \\ \delta_{\{N-1\}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, que la matriz del operador de reflexión es

$$\mathbf{S_N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \Pi.$$

la cual nuevamente vemos que es circulante.

3.2.5 Producto de Hadamard

Definición 3.2.6 (*producto de Hadamard*) El **producto de hadamard** sobre el espacio $l^2(Z_N)$ de la señales unidimensionales se define como

$$\odot : l^2(Z_N) \longrightarrow l^2(Z_N)$$

$$x \longmapsto x \odot_N y$$

donde

$$(x \odot_N y)[n] = x[n]y[n].$$

es decir,que si

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x[0]y[0] \\ x[1]y[1] \\ \vdots \\ x[N-.1]y[N-1] \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5 *El espacio de señales unidimensionales es un álgebra con el producto de Hadamard como multiplicación.*

Demostración.Para demostrar que $(l^2(Z_N), \odot_N)$ es un álgebra conmutativa debemos verificar que esta nueva operación debe cumplir las siguientes propiedades cualesquiera $x, y, z \in l^2(Z_N)$ y todo $\beta \in C$:

(I) $x \odot_N y = y \odot_N x$.

(II) $(x \odot_N y) \odot_N z = x \odot_N (z \odot y)$.

(III) $x \odot_N (y + z) = x \odot_N y + x \odot_N z$

(IV) $\beta(x \odot_N y) = (\beta x) \odot_N y = x \odot_N (\beta y)$.

Prueba de (I) : Consideremos dos señales $x, y \in l^2(Z_N)$,

$(x \odot y)[n] = x[n]y[n] = y[n]x[n] = (y \odot x)[n]$, con $0 \leq n \leq N-1$.

Prueba de (II): Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

$$((x \odot y) \odot z)[n] = (x \odot y)[n]z[n] = (x[n]y[n])z[n] = x[n](y[n]z[n])$$
$$= x[n](y \odot z)[n] = x \odot (y \odot z), \text{ con } 0 \leq n \leq N-1.$$

Prueba de (III): Consideremos tres señales $x, y, z \in l^2(Z_N)$,

$$((x \odot (y+z))[n] = x[n](y+z)[n] = x[n](y[n]+z[n])$$
$$= x[n]y[n] + x[n]z[n] = (x \odot y) + (x \odot z), \text{con} \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Prueba de (IV): Consideremos dos señales $x, y \in l^2(Z_N)$ y $\beta \in C$,

$$\beta(x \odot_N y)[n] = \beta(x[n]y[n])$$
$$= \beta x[n]y[n]$$
$$= (\beta x)[n]y[n]$$
$$= ((\beta x) \odot_N y)[n], \text{ con } 0 \leq n \leq N-1.$$

A continuacin mostramos una propiedad que relaciona la operación de convolución cíclica y el producto de Hadamard, a través de la transformada de Fourier discreta.recordemos que si $S \in l^2(Z_N)$,entonces la transformada de Fourier discreta de S.la cual denotaremos en adelante como $S^\frown$,está dada por la sucesión

$$S^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} S[n]e^{-2j\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} S[n]W_N^{kn},$$

donde $W_N = e^{-2j\pi/N}$ y $0 \leq k \leq N-1$.

Teorema 3.6. *Si S_0 y S_1 son señales unidimensionales,entonces se cumple que*

$$(S_0 \otimes_N S_1)^\frown = (S_0)^\frown \odot_N (S_1)^\frown$$

Demostración.

$$(S_0 \otimes_N S_1)^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (S_0 \otimes_N S_1)[n]W_N^{nk},$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} S_0[m]S_1[< n-m >_N]W_N^{nk},$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] \sum_{n=0}^{N-1} S_1[< n-m >_N] W_N^{nk}.$$

Si hacemos $p = n - m$, entonces

$$= \sum_{n=0}^{N-1} S_1[< n-m >_N] W_N^{nk} = \sum_{p=-m}^{N-1-m} S_1[< p >_N] W_N^{(p+m)k},$$

$$= \sum_{p=-m}^{N-1-m} S_1[< p >_N] W_N^{pk} W_N^{mk},$$

$$= W_N^{mk} \sum_{p=-m}^{N-1-m} S_1[< p >_N] W_N^{pk},$$

$$= W_N^{mk} \sum_{p=0}^{N-1} S_1[< p >_N] W_N^{pk},$$

$$= W_N^{mk} \sum_{p=0}^{N-1} S_1[p] W_N^{pk},$$

$$= W_N^{mk} \widehat{S_1}[k].$$

Sustituyendo arriba tenemos

$$\sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] \sum_{n=0}^{N-1}]S_1[< n-m >_N] W_N^{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] \widehat{S_1}[k] W_N^{mk}$$

$$= \widehat{S_1}[m] \sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] W_N^{mk} = \widehat{S_1}[k] \widehat{S_0}[k]$$

$$= (\widehat{S_1} \odot \widehat{S_1})[k] = (\widehat{S_0} \odot \widehat{S_1})[k].$$

Como consecuencia de este teorema podemos deducir que si $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$,entonces

$$(S_0 \otimes_N S_1) = ((S_0)^\frown \odot_N (S_1)^\frown)^\smile$$

Teorema 3.7 *El espacio de señales unidimensionales con la operación de convolución cíclica $(l^2(Z_N), \otimes_N)$ es isomorfo como un àlgebra al mismo espacio de señales unidimensionales con el producto de Hadamard $(l^2(Z_N), \odot_N)$.*

Demostración. Observemos que la transformada de Fourier discreta es un homomorfismo de espacios vectoriales, o equivalentemente una transformación lineal, del espacio de señales unidimensionales en si mismo.

$$\begin{aligned} \frown : l^2(Z_N) &\longrightarrow l^2(Z_N) \\ S &\longmapsto S^\frown \end{aligned}$$

Puesto que cumple las siguientes propiedades

$(\star)$ $(S_0 + S_1)^\frown = S_0^\frown + S_1^\frown$, para todo $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$

$(\star\star)$ $(\alpha S_0)^\frown = \alpha S_0^\frown$, para todo $S_0 \in l^2(Z_N)$ y $\alpha \in C$.

En efecto; Consideremos $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$ y $\alpha \in C$ entonces

$$\begin{aligned} ((\alpha S_0) + S_1)^\frown[k] &= \sum_{n=0}^{N-1}((\alpha S_0) + S_1)[n]W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(\alpha S_0)[n] + S_1[n]W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(\alpha S_0)[n]W_N^{kn} + S_1[n]W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\alpha S_0[n]W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1}S_1[n]W_N^{kn} = \alpha S_0^\frown + S_1^\frown. \end{aligned}$$

Adicionalmente,la transformada de Fourier discreta es una función inyectiva puesto que señales distintas tienen transformadas distintas, esto es

$$S_0^\frown = S_1^\frown \Longrightarrow S_0 = S_1.$$

y como el espacio $l^2_(Z_N)$ es de dimensión finita podemos concluir que la transformada discreta de Fourier en realidad es biyectiva. El teorema anterior muestra que la transformada discreta de Fourier es un homomorfismo de álgebras entre $(l^2(Z_N), \otimes_N)$ el espacio de señales unidimensionales con la operación de convolución cíclica, $(l^2(Z_N), \odot_N)$ el espacio de la señales unidimensionales con la operación producto de Hadamard.

presentamos a continuación una serie de propiedades del álgebra de señales unidimensionales

Teorema 3.8 *Si* $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$*, entonces*

$$(S_0 \odot_N S_1)^\frown = \frac{1}{N}(S_0)^\frown \otimes_N (S_1)^\frown.$$

Demostración. Por definición tenemos que

$$(S_0 \odot_N S_1)^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1}(S_0 \odot_N S_1)[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} S_0[n]S_1[n]W_N^{nk}.$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa tenemos

$$S_0[n] = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}(S_0)^\frown[r]W_N^{-nr};$$

entonces, substituyendo en la ecuación inicial,

$$\begin{aligned}(S_0 \odot_N S_1)^\frown[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}(S_0)^\frown[r]W_N^{-nr}S_1[n]W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}(S_0)^\frown[r]\sum_{n=0}^{N-1} S_1[n]W_N^{(k-r)n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}(S_0)^\frown[r]S_1^\frown[k-r] \\ &= \frac{1}{N}(S_0)^\frown \otimes_N (S_1)^\frown.\end{aligned}$$

De este resultado se deduce que si $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$,entonces

$$(S_0 \odot_N S_1) = [\frac{1}{N}(S_0)^\frown \otimes_N (S_1)^\frown]^\smile.$$

Teorema 3.9. *Si* S_0 *y* S_1 *son señales, entonces*

$$(S_0 \Theta_N S_1)^\frown = (\Re_N\{S_0\})^\frown \odot_N (S_1)^\frown.$$

Demostración. Una aplicación directa de los teoremas 2 y 4 nos da

$$\begin{aligned}(S_0 \Theta_N S_1)^\frown &= (\Re_N\{S_0\} \otimes_N S_1)^\frown \\ &= (\Re_N\{S_0\})^\frown \odot_N (S_1)^\frown.\end{aligned}$$

De est teorema se deduce que si $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$, entonces

$$(S_0 \Theta_N S_1) = [(\Re_N\{S_0\} \otimes S_1)^\frown]^\smile$$

Teorema 3.10. Si $S \in l^2(Z_N)$,entonces

$$(\Re_N\{S^*\}) = (S^\frown)^*.$$

Demostración.

$$(\Re_N\{S^*\}) = \sum_{n=0}^{N-1} (\Re\{S^*\})[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} S^*[< -n >_N] W_N^{nk}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[< -n >_N] W_N^{k(-n)}\right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[< N-n >_N] W_N^{k(N-n)}\right)^*$$
$$= (S[< N >_N] W_N^{k(N)} + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)}$$
$$+ S[< N-2 >_N] W_N^{k(N-2)} + \cdots + S[< N-(N-2) >_N] W_N^{k(N-(N-2))}$$
$$+ S[< N-(N-1) >_N] W_N^{k(N-(N-1))})^*$$

$$= (S[< 0 >_N] W_N^{k(0)} + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)}$$
$$+ S[< N-2 >_N] W_N^{k(N-2)} + \cdots + S[< 2 >_N] W_N^{k(2))}$$
$$+ S[< 1 >_N] W_N^{k(1)})^*$$

$$= (S[0] W_N^{k(0)} + S[1] W_N^{k(1)} + S[2] W_N^{k(2)} + \cdots + S[N-2)] W_N^{k(N-2)}$$
$$+ S[(N-1)] W_N^{k(N-1)})^*$$
$$= \left(\sum_{m=0}^{N-1} S[m] W_N^{k(m)}\right)^* = (S^\frown[k])^* = (S^\frown)^*[k].$$

Teorema 3.11 *Si S_0 y S_1 son señales,entonces*

$$(S_0 \otimes_N \Re\{S_1^*\})^\frown = (S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*.$$

Demostración.

$$(S_0 \otimes_N \Re\{S_1^*\})^\frown = (S_0)^\frown \odot (\Re_N\{S_1^*\}) = (S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*.$$

Así, aplicando transformada inversa de Fourier discreta, del teorema anterior obtenemos

$$S_0 \otimes_N \Re\{S_1^*\} = [(S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*]^\smile,$$

para $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$.

Teorema 3.12 *Si $S \in l^2(Z_N)$ entonces*

Demostración.

$$(\Re_N\{S^*\}) = \sum_{n=0}^{N-1} (\Re\{S^*\})[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} S^*[< -n >_N] W_N^{kn}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[< -n >_N] W_N^{k(-n)} \right)^*$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[< N-n >_N] W_N^{k(N-n)} \right)^*$$

$$= (S[< N >_N] W_N^{k(N)} + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)} +$$
$$\cdots + S[< N-(N-2) >_N] W_N^{k(N-(N-2))}$$
$$+ S[< N-(N-1) >_N] W_N^{k(N-(N-1))})^*$$

$$= (S[< 0 >_N] W_N^{k(0)} + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)} +$$
$$\cdots + S[< 2 >_N] W_N^{2))} + S[< 1 >_N] W_N^{k(1)})^*$$

$$= (S[< 0 >_N] W_N^{k(0)} + S[< 1 >_N] W_N^{k(1)} +$$
$$\cdots + S[< N-2 >_N] W_N^{N-2))} + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)})^*$$

$$= (S[0] W_N^{k(0)} + S[1] W_N^{k(1)} +$$
$$\cdots + S[N-2] W_N^{k(N-2)} + S[N-1] W_N^{k(N-1)})^*$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[m] W_N^{k(m)} \right)^* = (S^\frown[k])^* = (S^\frown)^*[k].$$

Teorema 3.13. *Si S_0 y S_1 son señales ,entonces*

$$(S_0 \otimes_N \Re_N\{S_1^*\})^\frown = (S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*.$$

Demostración.

$$(S_0 \otimes_N \Re_N\{S_1^*\})^\frown = (S_0)^\frown \odot_N (\Re_N\{S_1^*\})^\frown$$
$$= (S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*.$$

Así, aplicando la transformada inversa de Fourier discreta ,del teorema anterior obtenemos

$$S_0 \otimes_N \Re_N\{S_1^*\} = [(S_0)^\frown \odot_N (S_1^\frown)^*]^\smile$$

para toda $S_0, S_1 \in l^2(Z_N)$.

Teorema 3.14. *Si* $S \in l^2(Z_N)$, *entonces*

$$(S^*)^\frown = \Re_N\{(S^\frown)^*\}$$

Demostración. Recordemos que

$$S^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} S[n] W_k^{nk}$$

tomado el conjugado tenemos

$$(S^\frown)^*[k] = (S^\frown[k])^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} S[n] W_k^{nk}\right)^*$$

Ahora, aplicando el operador de reflexión,

$$\begin{aligned}
\Re_N\{(S^\frown)^*\}[k] = (S^\frown)^*[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} S^*[n] W_k^{-n(N-k)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} S[n] W_k^{-nN+nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} S^*[n] W_N^{nk} \\
&= (S^*)^\frown[k].
\end{aligned}$$

Teorema 3.15. *Si* S_0 *y* S_1 *son señales, entonces*

$$(S_0 \odot_N S_1^*)^\frown = \frac{1}{N}(S_1^\frown)^* \Theta_N (S_0)^\frown.$$

Demostración. $(S_0 \odot_N S_1^*) = \frac{1}{N}(S_0)^\frown \otimes_N (S_1^*)$

$$= \frac{1}{N}(S_0)^\frown \otimes_N \Re\{(S_1^\frown)^*\} = \frac{1}{N}\Re\{(S_1^\frown)^*\} \otimes_N (S_0)^\frown = \frac{1}{N}(S_1^\frown)^* \Theta_N (S_0)^\frown$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier discreta , del teorma anterior obtenemos

$S_0 \odot_N S_1^* = [\frac{1}{N}(S_0^\frown \Theta_N (S_1)^\frown)^*]^\smile.$

El siguiente resultado muestra que las transformada de Fourier discreta y el operador de reflexión conmutan.

Teorema 3.16 *Si* $S \in l^2(Z_N)$*, entonces*

$$(\Re_N\{S\})^\frown = \Re_N\{S^\frown\}.$$

Demostración.

$(\Re_N\{S\})^\frown[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (\Re_N\{S\})[n] W_N^{nk}$

$= \sum_{n=0}^{N-1} S[< N - n >_N] W_N^{nk}$

$= S[< N >_N] W_N^{0k} + S[< N - 1 >_N] W_N^{1k} + S[< N - 2 >_N] W_N^{2k} + \cdots + S[< N - (N-2) >_N] W_N^{(N-2)k} + S[< N - (N-1) >_N] W_N^{(N-1)k}$

$= S[< 0 >_N] W_N^{0k} + S[< N - 1 >_N] W_N^{1k} + S[< N - 2 >_N] W_N^{2k} + \cdots + S[< 2 >_N] W_N^{(N-2)k} + S[< 1 >_N] W_N^{(N-1)k}$

$= S[< 0 >_N] W_N^{0k} + S[< 1 >_N] W_N^{-k} + S[< 2 >_N] W_N^{-2k} + \cdots + S[< N - 2 >_N] W_N^{-(N-2)k} + S[< N - 1 >_N] W_N^{-(N-1)k}$

$= S[0] W_N^{0k} + S[1] W_N^{-k} + S[2] W_N^{-2k} + \cdots + S[N-2] W_N^{-(N-2)k} + S[N-1] W_N^{-(N-1)k}$

$= \sum_{m=0}^{N-1} S[m] W_N^{-mk} = \sum_{m=0}^{N-1} S[m] W_N^{m(-k)} = (S^\frown)[-k] = \Re_N\{S^\frown\}[k].$

Como consecuencia del anterior resultado,tenemos el siguiente

Teorema 3.17.*Si* S_0 *y* S_1 *son señales, entonces*

$$(S_0 \Theta_N S_1^*)^\frown = \Re_N\{S_0^\frown\} \odot_N (S_1^*)^\frown$$

Demostración.

$$(S_0\Theta_N S_1^*)^\frown = (\Re_N\{S_0^\frown\}) \odot_N (S_1)^\frown = \Re_N\{S_0^\frown\} \odot_N (S_1^*)^\frown.$$

Teorema 3.18. Si S_0 y S_1 son señales, entonces

$$(S_0^*\Theta_N S_1)^\frown = \Re_N\{S_0^*\} \odot_N (S_1)^\frown$$

Demostración. Dada $S_0 \in l^2(Z_N)$,veamos que $(S_0^\frown)^* = \Re_N\{(S_0^*)^\frown\}$.En efecto;

$$\begin{aligned}(S_0^\frown)^*[k] = ((S_0^\frown)[k])^* &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S_0[n]W_N^{nk}\right)^* \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} S_0^*[n]W_N^{-nk} = \sum_{n=0}^{N-1} S_0^*[n]W_N^{n(-k)} \\ &= (S_0^*)^\frown[-k] = \Re_N\{(S_0^*)^\frown\}\end{aligned}$$

Así,tenemos que

$$\begin{aligned}(S_0^*\Theta_N S_1)^\frown &= (\Re_N\{S_0^*\})^\frown \odot_N (S_1)^\frown \\ &= (S_0^\frown)^* = \Re_N\{S_0^*\} \odot_N (S_1)^\frown.\end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier discreta obtenemos

$$S_0^*\Theta_N S_1 = [\Re_N\{S_0^*\} \odot_N (S_1)^\frown]^\frown$$

Teorema 3.19. *Si $S_0 \in l^2(Z_N)$; entonces*

$$(S_0[< n - n_0 >_N])^\frown = W_N^{kn_0}(S_0)^\frown, \quad \text{con } 0 \le n_0 \le N-1$$

Demostración. Observese que

$$(S_0[< n - n_0 >_N])^\frown = \sum_{n=0}^{N-1} S_0[< n - n_0 >_N]W_N^{kn}$$

Haciendo $m = n - n_0$, tenemos

$$\begin{aligned}(S_0[< n - n_0 >_N])^\frown &= \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N]W_N^{k(m+n_0)} \\ &= \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N]W_N^{km}W_N^{kn_0}\end{aligned}$$

$$= W_N^{kn_0} \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km}$$

como $0 \leq n_0 \leq N-1$, entonces

Cuando

$$n_0 = 0 \quad , \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km}$$

$$= S_0[< 0 >_N] W_N^{k(0)} + S_0[< 1 >_N] W_N^{k(1)}] + \cdots + S[< N-1 >_N] W_N^{k(N-1)}$$

$$= S_0[0] W_N^{k(0)} + S_0[1] W_N^{k(1)}] + \cdots + S_0[N-1] W_N^{k(N-1)}$$

$$n_0 = 1 \quad , \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km}$$

$$= S_0[< -1 >_N] W_N^{k(-1)} + S_0[< 0 >_N] W_N^{k(0)}] + \cdots + S[< N-2 >_N] W_N^{k(N-2)}$$

$$= S_0[< N-1 >_N] W_N^{k(0)} + S_0[< 0 >_N] W_N^{k(0)}] + \cdots + S[< N-2 >_N] W_N^{k(N-2)}$$

$$= S_0[N-1] W_N^{k(0)} + S_0[0] W_N^{k(0)}] + \cdots + S_0[N-2] W_N^{k(N-2)}$$

$$= S_0[0] W_N^{k(0)} + S_0[1] W_N^{k(1)}] + \cdots + S_0[N-1] W_N^{k(N-1)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n_0 = N-1 \quad , \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km}$$

$$= S_0[< -(N-1) >_N] W_N^{k(-(N-1))} + S_0[< -(N-1)+1 >_N] W_N^{k(-(N-1)+1)}] + \cdots + S_0[< 0 >_N] W_N^{k(0)}$$

$$= S_0[< 1 >_N] W_N^{k(1)} + S_0[< 2 >_N] W_N^{k(2)}] + \cdots + S[< 0 >_N] W_N^{k(0)}$$

$$= S_0[0] W_N^{k(0)} + S_0[1] W_N^{k(1)}] + \cdots + S_0[N-1] W_N^{k(N-1)}$$

por consiguiente, $\sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] W_N^{km}$

Así,
$$W_N^{n_0 k} \sum_{m=-n_0}^{N-1-n_0} S_0[< m >_N] W_N^{km} = W_N^{n_0 k} \sum_{m=0}^{N-1} S_0[m] W_N^{km} = W_N^{n_0 k} S^{\frown}$$

por tanto

$$(S_0[< n - n_0 >_N])^{\frown} = W_N^{kn_0} (S_0)^{\frown}, \quad \text{con } 0 \leq n_0 \leq N-1.$$

Finalmente, presentamos una tabla en la que se consignan todas las identidades probadas del álgebra de señales, las cuales se cumplen para el caso del espacio de señales unidimensionales.

IDENTIDADES DE LOS OPERADORES DEL ÁLGEBRA DE SEÑALES	
$S_0 \Theta_N S_1$	$\Re_N\{S_0\} \otimes_N S_1$
$(S_0 \otimes_N S_1)^{\frown}$	$(S_0)^{\frown} \odot_N (S_1)^{\frown}$
$(S_0 \odot_N S_1)^{\frown}$	$\frac{1}{N}(S_0^{\frown}) \otimes_N (S_1)^{\frown}$
$(S_0 \Theta_N S_1)^{\frown}$	$(\Re_N\{S_0\})^{\frown} \odot_N (S_1)^{\frown}$
$(\Re\{S^*\})^{\frown}$	$(S^{\frown})^*$
$(S_0 \otimes_N \Re_N\{S_1^*\})^{\frown}$	$(S_0)^{\frown} \odot_N (S_1^{\frown})^*$
$\Re_N\{(S^{\frown})^*\}$	$(S^*)^{\frown}$
$(S_0 \odot_N S_1)^{\frown}$	$\frac{1}{N}(S_1^{\frown})^* \Theta_N (S_0)^{\frown}$
$(\Re_N\{S\})^{\frown}$	$\Re\{S^{\frown}\}$
$(S_0 \Theta_N S_1^*)^{\frown}$	$\Re_N\{S_0^{\frown}\} \odot_N (S_1^*)^{\frown}$
$(S_0^* \Theta_N S_1)^{\frown}$	$(\Re\{S_0^*\}) \odot_N S_1^{\frown}$
$(S[< n - n_0 >_N])$	$W_N^{kn_0}(S_0)^{\frown}$
$S_0 \otimes_N S_1$	$[(S_0)^{\frown} \odot_N (S_1)^{\frown}]^{\smile}$
$S_0 \odot_N S_1$	$[\frac{1}{N}(S_0^{\frown}) \otimes_N (S_1)^{\frown}]^{\smile}$
$S_0 \Theta_N S_1$	$[(\Re_N\{S_0\})^{\frown} \odot_N (S_1)^{\frown}]^{\smile}$

tabla No 2.

3.3 Conceptos Basicos de Detección de Cambios

Sea $g[n]$ una señal cualquiera compleja y $G(w)$ la señal resultante luego de aplicarle la transformada de Fourier de una señal discreta .Su representación en coordenadas ó rectangulares y polares en el plano cartesiano ,son como lo muestra la figura 1

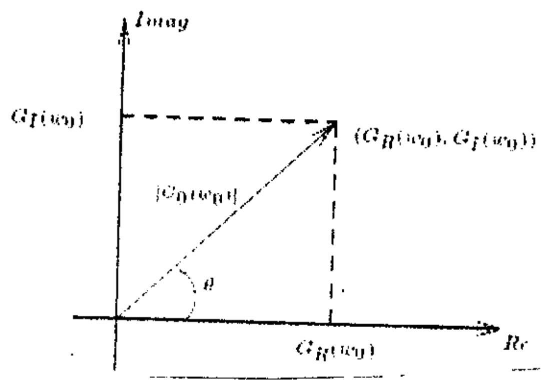

figura 1. Representación gráfica de una señal

Para obtener la representación gráfica de la región fundamental de la señal tendremos en cuenta que para relacionar la transformada discreta de Fourier con la transformada de Fourier de una señal causal finita de longitud N, se establece que:$w = \frac{2\pi k}{N}$, done $k \in Z$ y $w_k = \frac{2\pi k}{N}$ representa las muestras tomadas. Por lo anterior podemos denotar a $G(w)$,como $G(w)|_{w=w_k=\frac{2\pi k}{N}}$.La resolución espectral se define como el cociente $\frac{2\pi k}{N}$,Finalmente graficamos la región fundamental de la señal en el intervalo $0 \leq w \leq 2\pi$. tal como aparece en la figura 2.

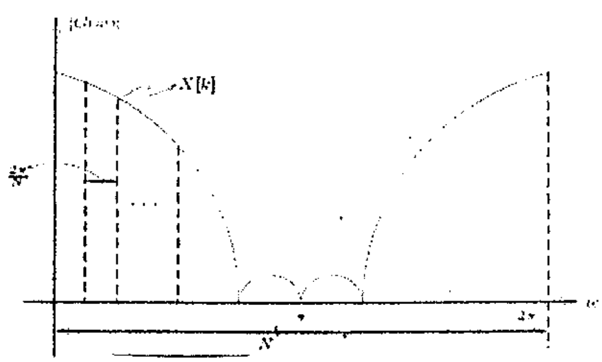

figura 2.Representacin gráfica de la región fundamental de una señal

La señal $G(w)$ escrita en coordenadas rectangulares equivale a

$$G(w) = G_R(w) + iG_I(W) \text{ ,donde } i^2 = -1$$

y en coordenadas polares podemos escribirlas como

$$G(w) = |G(w)|e^{+i\theta(w)}$$

La relación entre estas dos representaciones es posible determinarse ya sea teniendo en cuenta la relación de ***Euler***,

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

o bien graficando en el plano complejo como se muestra en la figura 1.

La magnitud de la señal esta dada por:

$$|G(w)|^2 = (G_R^2(w) + G_I^2(w))^{\frac{1}{2}}$$

y su fase correspondiente es :

$$\theta = arctan\left(\frac{G_I(w)}{G_R(w)}\right)$$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos plantear la siguiente equivalencia:

$$DTTF\{g[n]\} \Longrightarrow G(w) = |G(w)|e^{+i\theta(w)} \quad (3,1)$$

Ahora si la señal es desplazada en el tiempo, obtenemos lo siguiente, haciendo uso del teorema 3.19 presentado en el la sección anterior:

$$\begin{aligned} DTTF\{g[n-n_0]\} &= e^{-iwn_0}H(w) \\ &= e^{-i\theta(w)n_0}|G(w)|e^{+i\theta(w)} = e^{i(\theta(w)-wn_0)}|G(w)| \end{aligned} \quad (3,2)$$

En las expresiones 3.1 y 3.2 puede observarse que la magnitud es la misma, es $|G(w)|$ es la misma para ambos casos,esto significa que en la magnitud no se registran los cambios, es ajena a cualquier variación que pudiera darse en las señales objeto de estudio. Por tanto, nos ocuparemos del análisis de las fases, esto es:

$$\phi(w) = \theta(w)$$

corresponde a la fase de la señal original y

$$\phi'(w) = \theta(w) - wn_0$$

que corresponde a la fase de la señal desplazada con respecto a la original.

Si calculamos la diferencia entre ellas obtenemos:

$$\Delta\phi = \phi'(w) - \phi(w) = (\theta(w) - wn_0) - \theta(w) = -wn_0$$

de donde puede decirse que la diferencia de fases es una linea recta con pendiente n_0 unidades. n_0 es el desplazamiento de la segunda señal con respecto a la primera. La grafica correspondiente a la diferencia de fases se presenta en la figura 3.

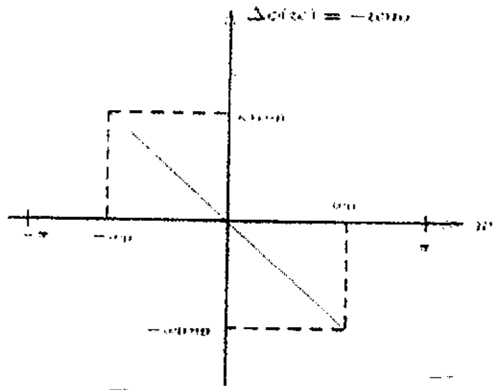

figura 3.Representación grafica de la diferencia de fases de dos señales dadas.