1

UN INVARIANTE DE MATRICES 2×2

ROBERTO CARLOS DIAZ MARTINEZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA D.T Y C
ABRIL DE 2007

UN INVARIANTE DE MATRICES 2×2

ROBERTO CARLOS DIAZ MARTINEZ

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ASESOR
PEDRO PABLO ORTEGA PALENCIA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA D.T Y C
ABRIL DE 2007

Índice

AGRADECIMIENTOS

*Agradezco, ante todo a mi **Dios padre** por guiarme y enseñarme lo hermoso de la vida.*

*A mi **madre querida** que ilumina mi vida y me impulsa todos los días a seguir adelante, aquella que con un beso en la mejilla hace que mi vida se llene completamente, esa que es incomparable, que merece todo en la vida y que nunca olvidaré " TE AMO ".*

*A mi **padre** que es mi amigo incondicional, ese que con esfuerzo y dedicación ha sacado a su familia adelante, aquel que con sus buenos consejos me hace ver las cosas mas fáciles y que ha dejado muchas enseñansas en mi vida " TE ADORO ".*

*A mis **hermanos** que son una alegría en mi vida.*

*A mi **novia** que es lo mejor que ha llegado a mi vida.*

*Al profesor **Pedro Pablo Ortega** por siempre estar dispuesto a ayudarme en lo concerniente al trabajo.*

A esas personas que siempre me abrieron las puertas de su corazón y hacer que mi carrera se desarrollara más fácil.

*Por último dedico este trabajo a mis abuelas " **EVI** " y " **TATA** "que son una bendición de Dios. Mi " TATA "que aunque no está conmigo físicamente siempre quiso que saliera adelante, " ABUE "siempre vivirán en mi corazón.*

1. CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN.

El **espacio de las matrices** puede ser considerado uno de los espacios más fascinantes en el mundo matemático.
La aspiración que se tiene en este trabajo es la de dar a conocer a un lector interesado, un resultado existente en las matrices cuadradas de orden 2×2, en el cual se involucran muchos conceptos del álgebra lineal y del álgebra abstracta.

En realidad, se tiene mucha motivación de realizar un trabajo que sirva de aporte y sea de gran aceptación; ya que se darán diversas pruebas a un resultado principal, en las que en cada una de ellas se aplican diferentes conceptos y propiedades conocidas, para hacer el resultado un poco más familiar y así, cualquier lector interesado en el tema pueda sentirse a gusto en todas estas pruebas.

Con lo anterior como introducción, se enuncia el resultado principal así:

Sea $\mathbf{W}$ el espacio de las matrices cuadradas de orden 2×2 y sea $\mathbf{S}$ el conjunto de las funciones lineales que anulan matrices escalares;
esto es:

$$\mathfrak{f} \in \mathbf{S} \textit{ si y solo si } \mathfrak{f} \textit{ es lineal y satisface } \mathfrak{f}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

para cada $\lambda \in \mathbb{K}$.

Tomando $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$ y $\mathfrak{f} \in \mathbf{S}$, se denota $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}^k)$. Si $\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces lo que se afirma como resultado es que $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A})$ es $\mathbb{G}$-invariante, donde $\mathbb{G}$ es el grupo de las matrices invertibles de orden 2×2 y además $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}$, donde $\mathbf{S}^k\mathbf{A}$ define la k-ésima potencia simétrica de $\mathbf{A}$.

Brevemente lo que se realiza en primera instancia es definir todos los términos que se requieren. Después se dan tres pruebas (independientes) del resultado principal para el caso en que la función $\mathfrak{f}$ es la función coordenada sobre la entrada (1,2) ó sobre la entrada (2,1) de cualquier matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$;
Por último, se realiza la prueba del resultado principal para cualquier función $\mathfrak{f} \in \mathbf{S}$ y se da una aplicación del teorema principal de este trabajo.

Este resultado ha sido estudiado recientemente por el doctor **Jose Luis Cisneros Molina** en su artículo titulado **An- Invariant of Matrices** 2×2, en los años 2004-2005.

2. CAPÍTULO 2 PRELIMINARES.

En este primer capítulo se dan algunas definiciones y se da una construcción de la matriz principal que se utilizará a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1. *Un campo es un conjunto* $\mathbb{K}$ *junto con dos operaciones definidas por:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longrightarrow a + b \end{aligned}$$

llamada adición y

$$\begin{aligned} * : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

llamada multiplicación, las cuales satisfacen:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$, *para todo* $a, b, c \in \mathbb{K}$;
2. $a + b = b + a$ *para todo* $a, b \in \mathbb{K}$;
3. *Existe un único elemento nulo* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + 0 = a$, *para todo* $a \in \mathbb{K}$;
4. *Para cada elemento* $a \in \mathbb{K}$, *existe un único elemento* $-a \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + (-a) = 0$;
5. $a * (b * c) = (a * b) * c$ *para todo* $a, b, c \in \mathbb{K}$;
6. $a * b = b * a$ *para todo* $a, b \in \mathbb{K}$;
7. *Existe un único elemento identidad* $1 \neq 0$ *in* $\mathbb{K}$ *tal que* $1 * a = a$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$;
8. *Para cada elemento* $a \neq 0$ *existe un único elemento* $a^{-1} \in \mathbb{K}$ *tal que* $a * a^{-1} = 1$.

Definición 2.2. *Sean* $\mathbf{V}$ *un conjunto no vacío de objetos, llamados* ***elementos*** *y* $\mathbb{K}$ *un campo. El conjunto* $\mathbf{V}$ *se llama* ***espacio vectorial sobre el campo*** $\mathbb{K}$ *si se satisfacen los siguientes axiomas:*

Axiomas de clausura
Axioma 1. ***Clausura respecto de la adición.*** *A todo par de elementos x e y de $\mathbf{V}$ corresponde un único elemento $x+y$ de $\mathbf{V}$.*

Axioma 2. ***Clausura respecto de la multiplicación escalar.*** *A todo x de $\mathbf{V}$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ corresponde un único elemento $\lambda.x$ de $\mathbf{V}$.*

Axiomas para la adición
Axioma 3. ***Ley conmutativa.*** *Para todo x, y en $\mathbf{V}$, se tiene que $x+y=y+x$.*

Axioma 4. ***Ley asociativa.*** *Cualesquiera que sean x, y, z de $\mathbf{V}$, se tiene que $(x+y)+z=x+(y+z)$.*

Axioma 5. ***Existencia de elemento cero.*** *Existe un elemento en $\mathbf{V}$, designado con el símbolo O, tal que*

$$x+O=x$$

para todo x de $\mathbf{V}$.

Axioma 6. ***Existencia de opuestos.*** *Para todo x de $\mathbf{V}$, el elemento $(-1)x$ satisface:*

$$x+(-1)x=O.$$

Axiomas para la multiplicación por escalares
Axioma 7. ***Ley asociativa.*** *Para todo x de $\mathbf{V}$ y todo par de escalares λ y β en $\mathbb{K}$, se tiene que:*

$$\lambda(\beta.x)=(\lambda.\beta)x.$$

Axioma 8. ***Ley distributiva para la adición en $\mathbf{V}$.*** *Para todo x, y en $\mathbf{V}$ y todo escalar λ en $\mathbb{K}$ se cumple:*

$$a(x+y)=ax+ay.$$

Axioma 9. ***Ley distributiva para la adición escalar.*** *Para todo x de $\mathbf{V}$ y todo par de escalares λ y β en $\mathbb{K}$, se tiene:*

$$(\lambda+\beta)x=\lambda x+\beta x.$$

Axioma 10. ***Existencia de elemento idéntico.*** *Para todo x de $\mathbf{V}$, se cumple que:*

$$1x=x.$$

Definición 2.3. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y considerese el conjunto*

$$I_{m,n} = \{(i,j): \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n; \ i,j \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Se define una matriz $\mathbf{A}$ como una función cuyo dominio es $I_{m,n}$ la cual se dice de orden $m \times n$. El valor de la función $\mathbf{A}(i,j)$ el cual es denotado por a_{ij} es llamado elemento ij de $\mathbf{A}$. Ordinariamente se disponen los valores a_{ij} en un rectángulo que consta de m filas y n columnas. Además, si $m = n$ se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada.

Por otra parte , sea $\mathbf{W}$ el espacio de las matrices cuadradas de orden 2×2 sobre un campo $\mathbb{K}$. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$, puesto que $\mathbb{K}^2 \cong \mathbf{M}_{1\times 2}(\mathbb{K})$ (donde $\mathbf{M}_{1\times 2}(\mathbb{K})$ denota el espacio de las matrices de orden 1×2 sobre el campo $\mathbb{K}$) , ya que al definir

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbf{M}_{1\times 2} \\ (x,y) &\longrightarrow \varphi(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

se obtiene que φ es una biyección, entonces se puede definir para cada $z = (x,y) \in \mathbb{K}^2$ el producto

$$\begin{aligned} z \cdot \mathbf{A} &:= (x,y) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax + cy & bx + dy \end{bmatrix} \\ &\simeq (ax + cy, bx + dy) \in \mathbb{K}^2. \end{aligned}$$

Nota 2.1. *Observese que lo que se hace es desarrollar el producto de matrices y luego se regresa al espacio $\mathbb{K}^2$, lo que es posible porque las entradas a, b, c y d de la matriz $\mathbf{A}$ pertenecen a $\mathbb{K}$.*

Definición 2.4. *Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathbf{V}$ un espacio vectorial n-dimensional sobre el campo $\mathbb{K}$. Se dice que $\mathbb{P} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un* **polinomio en n variables** *si es de la forma:*

$$\mathbb{P}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_1,\cdots,i_n \geq 0}}^{n} a_{i_j} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \ ,$$

para cada $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{V}$ y $a_{i_j} \in \mathbb{K}$, para todo $j = 1, 2, \cdots, n$.
Además, $\mathbb{P}$ se dice **polinomio homogéneo de grado k** *si $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$ en todos los términos de la suma dada para $\mathbb{P}$.*

Ejemplo 2.1. *El polinomio*

$$\mathbb{P}(x,y,z) = 3x^3y^2z^4 + 2xy^3z^5 - x^5yz^3$$

es homogéneo de grado 9.

Definición 2.5. *Sea $\mathbb{K}$ un campo. Se define la* **k-ésima potencia simétrica** $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ *como el espacio de los polinomios homogéneos de grado k en dos variables "x" y "y" de $\mathbb{K}$, esto es*

$$\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2 = \{\mathbb{P} : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} : \ \mathbb{P} \text{ es homogéneo de grado } k\}. \tag{1}$$

Observación 1. *Claramente $\beta := \{\mathbb{P}_j(x,y) = x^{k-j}y^j$: con "x" y "y" en $\mathbb{K}$ y $0 \leq j \leq k\}$, denota una base para $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ ya que todo elemento $\mathbb{P} \in \mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ puede ser escrito en la forma*

$$\mathbb{P}(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_j \mathbb{P}_j(x,y)$$

para ciertos escalares $a_j \in \mathbb{K}$, con $j = 0, 1, \cdots, k$ y todo $(x,y) \in \mathbb{K}^2$.

Definición 2.6. *Se define la* **k-ésima potencia simétrica de A**, *denotada por $\mathbb{S}^k\mathbf{A}$, como la matriz asociada a la acción lineal de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ cuya acción está dada por:*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{A}} : \mathbb{S}^k\mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^k\mathbb{K}^2 \\ \mathbb{P}(z) &\longrightarrow \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}(z)) = (\mathbf{A} * \mathbb{P})(z) = \mathbb{P}(z \cdot \mathbf{A}), \end{aligned} \tag{2}$$

donde $z = (x,y) \in \mathbb{K}^2$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $z \cdot \mathbf{A} = (ax + cy, bx + dy)$.

Nota 2.2. *Obsérvese que $\varphi_{\mathbf{A}}$ es lineal pues, si $\mathbb{P}(z)$ y $\mathbb{Q}(z)$ pertenecen a $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ entonces:*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}(z) + \mathbb{Q}(z)) &= \varphi_{\mathbf{A}}((\mathbb{P} + \mathbb{Q})(z)) \\ &= (\mathbb{P} + \mathbb{Q})(z \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbb{P}(z \cdot \mathbf{A}) + \mathbb{Q}(z \cdot \mathbf{A}) \\ &= \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}(z)) + \varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{Q}(z)). \end{aligned}$$

Nota 2.3. ***(Un aporte al trabajo)**: En virtud de la definición 2.6 y usando la base $\beta := \{\mathbb{P}_j(x,y) = x^{k-j}y^j \mid 0 \leq j \leq k\}$, dada para el espacio $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ se puede calcular la matriz asociada a $\varphi_{\mathbf{A}}$ con respecto a dicha base β, la cual se denotará por $\mathbb{S}^k\mathbf{A}$. En efecto:*

para $j = 0$, $\mathbb{P}_0(x, y) = x^k \in \mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$, *Luego*

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_0(z)) &= \mathbb{P}_0(z \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbb{P}_0(ax + cy, bx + dy) \\ &= (ax + cy)^k \\ &= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^{k-n} c^n x^{k-n} y^n \qquad \textit{(fórmula binomial de Newton)} \\ &= \sum_{n=0}^{k} \lambda_n x^{k-n} y^n,\end{aligned}$$

esta última igualdad surge debido a que $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_0(z)) \in \mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$ *por tanto, es combinación lineal de los elementos de la base* β *de* $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$.

De las dos últimas sumas se tiene que $\lambda_n = \binom{k}{n} a^{k-n} c^n$, *para* $0 \leq n \leq k$ *con* $n \in \mathbb{Z}$.

Así entonces, la matriz columna de orden $(k+1) \times 1$ *asociada a* $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_0(z))$ *respecto a la base ordenada* β *está dada por:*

$$\begin{bmatrix} \binom{k}{0} a^k \\ \binom{k}{1} a^{k-1} c \\ \binom{k}{2} a^{k-2} c^2 \\ \vdots \\ \binom{k}{k-1} a c^{k-1} \\ \binom{k}{k} c^k \end{bmatrix}.$$

Para $j=1$, $\mathbb{P}_1(x,y)=x^{k-1}y\in \mathbf{S}^k\mathbb{K}^2$. *Luego,*

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_1(z)) &= \mathbb{P}_1(z\cdot \mathbf{A})\\
&= \mathbb{P}_1(ax+cy,bx+dy)\\
&= (ax+cy)^{k-1}(bx+dy)\\
&= \left[\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}a^{k-n-1}c^n x^{k-n-1}y^n\right](bx+dy)\\
&= \sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}a^{k-n-1}bc^n x^{k-n}y^n+\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n}a^{k-n-1}c^n dx^{k-n-1}y^{n+1}\\
&= \binom{k-1}{0}a^{k-1}bx^k+\sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-1}{n}a^{k-n-1}bc^n x^{k-n}y^n+\\
&+\sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1}a^{k-n}c^{n-1}dx^{k-n}y^n\\
&= \binom{k-1}{0}a^{k-1}bx^k+\sum_{n=1}^{k-1}\left[\binom{k-1}{n}a^{k-n-1}bc^n+\binom{k-1}{n-1}a^{k-n}c^{n-1}d\right]x^{k-n}y^n+\\
&+\binom{k-1}{k-1}c^{k-1}dy^k\\
&= \binom{k-1}{0}a^{k-1}bx^k+\sum_{n=1}^{k-1}\left[\sum_{i=n-1}^{n}\binom{k-1}{i}\binom{1}{n-i}a^{(k-1)-i}b^{i-(n-1)}c^i d^{n-i}\right]x^{k-n}y^n+\\
&+\binom{k-1}{k-1}c^{k-1}dy^k\\
&= \sum_{n=0}^{k}\lambda_n x^{k-n}y^n=\lambda_0x^k+\sum_{n=1}^{k-1}\lambda_n x^{k-n}y^n+\lambda_k y^k,
\end{aligned}
$$

con lo cual:

$$
\lambda_n=\begin{cases}
\binom{k-1}{0}a^{k-1}b, & \textit{si } n=0,\\[2ex]
\sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{k-1}{i}\binom{1}{n-i}a^{(k-1)-i}b^{i-(n-1)}c^i d^{n-i} & \textit{si } 1\le n\le k-1,\ \textit{con } n\in\mathbb{Z},\\[2ex]
\binom{k-1}{k-1}c^{k-1}d, & \textit{si } n=k.
\end{cases}
$$

Así entonces, la matriz columna de orden $(k+1)\times 1$ *asociada a* $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_1(z))$ *respecto a la base ordenada* β *está dada por:*

$$\begin{bmatrix} \binom{k-1}{0}a^{k-1}b \\ \sum_{i=0}^{1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{1-i}a^{(k-1)-i}b^{i}c^{i}d^{1-i} \\ \sum_{i=1}^{2}\binom{k-1}{i}\binom{1}{2-i}a^{(k-1)-i}b^{i-1}c^{i}d^{2-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=k-2}^{k-1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{(k-1)-i}a^{(k-1)-i}b^{i-(k-2)}c^{i}d^{(k-1)-i} \\ \binom{k-1}{k-1}c^{k-1}d \end{bmatrix}.$$

Para $j=2$, $\mathbb{P}_2(x,y)=x^{k-2}y^2\in\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$. *por tanto,*

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbb{A}}(\mathbb{P}_2(z)) &= \mathbb{P}_2(z\cdot\mathbb{A})\\
&= \mathbb{P}_2(ax+cy,bx+dy)\\
&= (ax+cy)^{k-2}(bx+dy)^2\\
&= \Big[\sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}c^nx^{k-n-2}y^n\Big](bx+dy)^2\\
&= \Big[\sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}c^nx^{k-n-2}y^n\Big](b^2x^2+2bdxy+d^2y^2)\\
&= \sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}b^2c^nx^{k-n}y^n+2\sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}bc^ndx^{k-n-1}y^{n+1}+\\
&+\sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}c^nd^2x^{k-n-2}y^{n+2}\\
&= \sum_{n=0}^{k-2}\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}b^2c^nx^{k-n}y^n+2\sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-2}{n-1}a^{k-n-1}bc^{n-1}dx^{k-n}y^n+\\
&+\sum_{n=2}^{k}\binom{k-2}{n-2}a^{k-n}c^{n-2}d^2x^{k-n}y^n\\
&= \binom{k-2}{0}a^{k-2}b^2x^k+\Big[\binom{k-2}{1}a^{k-3}b^2c+2\binom{k-2}{0}a^{k-2}bd\Big]x^{k-1}y+\\
&+\sum_{n=2}^{k-2}\Big[\binom{k-2}{n}a^{k-n-2}b^2c^n+2\binom{k-2}{n-1}a^{k-n-1}bc^{n-1}d+\binom{k-2}{n-2}a^{k-n}c^{n-2}d^2\Big]x^{k-n}y^n+\\
&+\Big[2\binom{k-2}{k-2}bc^{k-2}d+\binom{k-2}{k-3}ac^{k-3}d^2\Big]xy^{k-1}+\binom{k-2}{k-2}c^{k-2}d^2y^k+\\
&= \binom{k-2}{0}a^{k-2}b^2x^k+\Big[\sum_{i=0}^{1}\binom{k-2}{i}\binom{2}{1-i}a^{(k-2)-i}b^{i+1}c^id^{1-i}\Big]x^{k-1}y+\\
&+\sum_{n=2}^{k-2}\Big[\sum_{i=n-2}^{n}\binom{k-2}{i}\binom{2}{2-i}a^{(k-2)-i}b^{i-(n-2)}c^id^{n-i}\Big]x^{k-n}y^n+\\
&+\Big[\sum_{i=k-3}^{k-2}\binom{k-2}{i}\binom{2}{(k-1)-i}a^{(k-2)-i}b^{i-(k-3)}c^id^{(k-1)-i}\Big]xy^{k-1}+\\
&+\binom{k-2}{k-2}c^{k-2}d^2y^k\\
&= \sum_{n=0}^{k}\lambda_nx^{k-n}y^n \;=\; \lambda_0x^k+\lambda_1x^{k-1}y+\sum_{n=2}^{k-2}\lambda_nx^{k-n}y^n+\lambda_{k-1}xy^{k-1}+\lambda_ky^k,
\end{aligned}
$$

con lo cual se tiene que:

$$\lambda_n = \begin{cases} \binom{k-2}{0} a^{k-2} b^2, & \text{si } n=0, \\ \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{k-2}{i} \binom{2}{1-i} a^{(k-2)-i} b^{i+1} c^i d^{i-i}, & \text{si } n=1, \\ \sum\limits_{n-2}^{n} \binom{k-2}{i} \binom{2}{2-i} a^{(k-2)-i} b^{i-(n-2)} c^i d^{n-i}, & \text{si } 2 \leq n \leq k-2, \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ \sum\limits_{i=k-3}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{2}{(k-1)-i} a^{(k-2)-i} b^{i-(k-3)} c^i d^{(k-1)-i}, & \text{si } n=k\text{-}1, \\ \binom{k-2}{k-2} c^{k-2} d^2, & \text{si } n=k. \end{cases}$$

Así entonces, la matriz columna de orden $(k+1) \times 1$ *asociada a* $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathbb{P}_2(z))$ *respecto a la base ordenada* β *está dada por:*

$$\begin{bmatrix} \binom{k-2}{0} a^{k-2} b^2 \\ \sum\limits_{i=0}^{1} \binom{k-2}{i} \binom{2}{2-i} a^{(k-2)-i} b^{i+1} c^i d^{1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{k-2}{i} \binom{2}{2-i} a^{(k-2)-i} b^i c^i d^{2-i} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=k-3}^{k-2} \binom{k-2}{i} \binom{2}{(k-1)-i} a^{(k-2)-i} b^{i-(k-3)} c^i d^{(k-1)-i} \\ \binom{k-2}{k-2} c^{k-2} d^2 \end{bmatrix}.$$

Así sucesivamente se calculan las matrices columnas asociadas a φ_{A} *cuando* $j=3, 4, \cdots, (k-2)$*; con respecto a la base* β *dada para* $\mathbb{S}^k\mathbb{K}^2$.

Se calculan por último las matrices columnas para $j = k-1$ *y* $j = k$.

Para j=k − 1, $\mathbb{P}_{k-1}(x,y) = xy^{k-1} \in \mathbf{S}^k\mathbb{K}^2$*. Luego,*

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_{k-1}(z)) &= \mathbb{P}_{k-1}(z\cdot \mathbf{A})\\
&= \mathbb{P}_{k-1}(ax+cy, bx+dy)\\
&= (ax+cy)(bx+dy)^{k-1}\\
&= (ax+cy)\Big[\sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n} b^{k-n-1}d^n x^{k-n-1}y^n\Big]\\
&= \sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n} ab^{k-n-1}d^n x^{k-n}y^n + \sum_{n=0}^{k-1}\binom{k-1}{n} b^{k-n-1}cd^n x^{k-n-1}y^{n+1}\\
&= \binom{k-1}{0} ab^{k-1}x^k + \sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-1}{n} ab^{k-n-1}d^n x^{k-n}y^n + \sum_{n=1}^{k}\binom{k-1}{n-1} b^{k-n}cd^{n-1}x^{k-n}y^n\\
&= \binom{k-1}{0} ab^{k-1}x^k + \sum_{n=1}^{k-1}\Big[\binom{k-1}{n} ab^{k-n-1}d^n + \binom{k-1}{n-1} b^{k-n}cd^{n-1}\Big].x^{k-n}y^n +\\
&+ \binom{k-1}{k-1} cd^{k-1}y^k\\
&= \binom{k-1}{0} ab^{k-1}x^k + \sum_{n=1}^{k-1}\Big[\sum_{i=n-1}^{n}\binom{k-1}{i}\binom{1}{n-i} a^{i-(n-1)}b^{(k-1)-i}c^{n-i}d^i\Big].x^{k-n}y^n +\\
&+ \binom{k-1}{k-1} cd^{k-1}y^k\\
&= \sum_{n=0}^{k}\lambda_n x^{k-n}y^n = \lambda_0 x^k + \sum_{n=1}^{k-1}\lambda_n x^{k-n}y^n + \lambda_k y^k,
\end{aligned}
$$

por consiguiente:

$$
\lambda_n = \begin{cases}
\binom{k-1}{0} ab^{k-1}, & \text{si } n=0,\\[2ex]
\sum\limits_{i=n-1}^{n}\binom{k-1}{i}\binom{1}{n-i} a^{i-(n-1)}b^{(k-1)-i}c^{n-i}d^i, & \text{si } 1\le n\le k-1, \text{ con } n\in\mathbb{Z},\\[2ex]
\binom{k-1}{k-1} cd^{k-1}, & \text{si } n=k.
\end{cases}
$$

Así entonces, la matriz columna de orden $(k+1)\times 1$ *asociada a* $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_{k-1}(z))$ *respecto a la base ordenada* β *es:*

16

$$\begin{bmatrix} \binom{k-1}{0}ab^{k-1} \\ \sum_{i=0}^{1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{1-i}a^ib^{(k-1)-i}c^{1-i}d^i \\ \sum_{i=1}^{2}\binom{k-1}{i}\binom{1}{2-i}a^{i-1}b^{(k-1)-i}c^{2-i}d^i \\ \vdots \\ \sum_{i=k-2}^{k-1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{(k-1)-i}a^{i-(k-2)}b^{(k-1)-i}c^{(k-1)-i}d^i \\ \binom{k-1}{k-1}cd^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para $j=k$, $\mathbb{P}_k(x,y)=y^k\in \mathrm{S}^k\mathbb{K}^2$, por tanto

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_k(z)) &= \mathbb{P}_k(z\cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbb{P}_k(ax+cy, bx+dy) \\ &= (bx+dy)^k \\ &= \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}b^{k-n}d^nx^{k-n}y^n \qquad \textit{(fórmula binomial de Newton)} \\ &= \sum_{n=0}^{k}\lambda_n x^{k-n}y^n,\end{aligned}$$

así, de la última igualdad se llega a que $\lambda_n=\binom{k}{n}b^{k-n}d^n$ para $0\le n\le k$ con $n\in\mathbb{Z}$.
Así entonces, la matriz columna de orden $(k+1)\times 1$ asociada a $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_k(z))$ respecto a la base ordenada β está dada por:

$$\begin{bmatrix} \binom{k}{0}b^k \\ \binom{k}{1}b^{k-1}d \\ \binom{k}{2}b^{k-2}d^2 \\ \vdots \\ \binom{k}{k-1}bd^{k-1} \\ \binom{k}{k}d^k \end{bmatrix}.$$

Colocando una junto a otra las matrices columnas asociadas a $\varphi_{\mathbf{A}}(\mathbb{P}_j(z))$ para cada $0\le j\le k$ con $j\in\mathbb{Z}$, se obtiene la matriz de orden $(k+1)\times(k+1)$

$$\mathbf{S}^k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \binom{k}{0}a^k & \binom{k-1}{0}a^{k-1}b & \cdots & \binom{k}{0}b^k \\ \binom{k}{1}a^{k-1}c & \sum_{i=0}^{1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{1-i}a^{(k-1)-i}b^ic^id^{1-i} & \cdots & \binom{k}{1}b^{k-1}d \\ \binom{k}{2}a^{k-2}c^2 & \sum_{i=1}^{2}\binom{k-1}{i}\binom{1}{2-i}a^{(k-1)-i}b^{i-1}c^id^{2-i} & \cdots & \binom{k}{2}b^{k-2}d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{k}c^k & \binom{k-1}{k-1}c^{k-1}d & \cdots & \binom{k}{k}d^k \end{bmatrix} \tag{3}$$

Definición 2.7. *La matriz dada en (3) se define como la* ***k-ésima potencia simétrica de*** $\mathbf{A}$ *asociada a la acción lineal dada en (2) y será la matriz principal que se usará en este trabajo.*

Observación 2. *La función* $\mathbf{S}^k : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbb{M}_{(k+1)\times(k+1)}(\mathbb{K})$*, satisface las siguientes propiedades:*

a) $\mathbf{S}^k(\mathbb{I}_{2\times 2}) = \mathbb{I}_{(k+1)\times(k+1)}$*, donde* $\mathbb{I}_{2\times 2}$ *denota la matriz idéntica de* $\mathbf{W}$ *y* $\mathbb{I}_{(k+1)\times(k+1)}$ *denota la matriz idéntica de* $\mathbb{M}_{(k+1)\times(k+1)}(\mathbb{K})$.

b) $\mathbf{S}^k(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda^k \cdot \mathbf{S}^k\mathbf{A}$*, para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$.

c) $\mathbf{S}^k(\mathbf{A} \cdot \mathbb{B}) = \mathbf{S}^k\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^k\mathbb{B}$*, para cualesquiera* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbb{B}$ *en* $\mathbf{W}$.

d) $\mathbf{S}^k(\mathbb{B}^{-1}) = (\mathbf{S}^k\mathbb{B})^{-1}$*, siempre que* $\mathbb{B}$ *sea invertible.*

Las propiedades a) y b) dadas en la ***(Observación 2.)*** *surgen inmediatamente al tener en cuenta la matriz dada en (3).*

La propiedad c) se obtiene realizando simplemente los cálculos elementales que surgen y listo!

Nota 2.4. *Por simplicidad no se realizan los cálculos de c) pero la afirmación es válida.*

Ahora bien, la propiedad d) se satisface puesto que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{(k+1)\times(k+1)} &= \mathbf{S}^k(\mathbb{I}_{2\times 2}) && \textit{(por a).)} \\ &= \mathbf{S}^k(\mathbb{B} \cdot \mathbb{B}^{-1}) && \textit{(siempre que } \mathbb{B} \textit{ sea invertible)} \\ &= \mathbf{S}^k\mathbb{B} \cdot \mathbf{S}^k(B^{-1}) && \textit{(por c).)} \end{aligned}$$

18

Luego, de la última igualdad y en virtud de que el elemento inverso es único se tiene la afirmación de d).

19

3. CAPÍTULO 3 DEFINICIONES Y PROPOSICIÓN PRINCIPAL.

En el presente capítulo se dan algunas definiciones básicas que serán de utilidad para desarrollar las distintas pruebas dadas para la proposición principal de este trabajo.

Definición 3.1. *Considérese un conjunto* $\mathbb{G} \neq \emptyset$ *con una operación binaria* $* : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$ *dada por* $*(x, y) := x * y$. *Si se satisfacen las condiciones:*

- $(x * y) * z = x * (y * z)$ *para todo x,y,z en* $\mathbb{G}$,
- ***Existe un único elemento neutro*** $e \in \mathbb{G}$ *tal que* $e * x = x * e = x$ *para todo* $x \in \mathbb{G}$,
- *Para cada* $x \in \mathbb{G}$ ***existe un único elemento inverso*** $x^{-1} \in \mathbb{G}$ *tal que* $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$,

entonces se dice que $(\mathbb{G}, *)$ *es un* ***Grupo****.*
Si además $(\mathbb{G}, *)$ *satisface:*

- $x * y = y * x$ *para todo x,y en* $\mathbb{G}$,

entonces el grupo $(\mathbb{G}, *)$ *se dice* ***Abeliano****.*

Definición 3.2. *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial. Toda aplicación* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *la cual sea biyectiva se dice un* ***automorfismo*** *de* $\mathbf{V}$.

Definición 3.3. *Sea* $\mathbf{V}$ *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$. *Un conjunto* $\mathbb{G}$ *de automorfismos de* $\mathbf{V}$ *se llama* ***grupo de transformaciones lineales*** *sobre* $\mathbf{V}$ *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\mathbb{I} \in \mathbb{G}$,
- *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{G}$, *entonces* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{G}$,
- *Si* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}$, *entonces* $\mathbf{A} * \mathbf{B} \in \mathbb{G}$, *donde* $*$ *denota la operación del grupo.*

Nota 3.1. *En este trabajo se usará un ejemplo de grupo de transformaciones conocido como* ***grupo lineal general*** *"* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$*", (el cual se define como:* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{ \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : det(\mathbf{A}) \neq 0\}$*), para el caso en que* $n = 2$. *En este caso "* $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*" denota el espacio de las matrices cuadradas de orden* $n \times n$ *sobre el campo* $\mathbb{K}$.

Definición 3.4. *Una acción u operación de un grupo* $\mathbb{G}$ *en un conjunto* $\mathbf{X}$ *es una aplicación*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{G} \times \mathbf{X} &\longrightarrow \mathbf{X} \\ (g, x) &\longrightarrow \phi(g, x) := g * x, \end{aligned}$$

tal que:

1. $\phi(e, x) = e * x = x$, *para cada* $x \in \mathbf{X}$;
2. $\phi(g_1 g_2, x) = (g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) = g_1 * (\phi(g_2, x)) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$, *para todo* g_1, g_2 *en* $\mathbb{G}$ *y todo* $x \in \mathbf{X}$.

Bajo estas propiedades se dice que $\mathbf{X}$ *es un* $\mathbb{G}$*-conjunto.*

Observación 3. *En este trabajo siempre que se diga* $\mathbb{G}$*-invariante, se hace referencia al grupo* $\mathbb{G} := \mathbb{GL}(2, \mathbb{K})$*, definido en la nota (2.1)(para* $n = 2$*) y siempre,* $\mathbf{W}$ *denotará el espacio de las matrices cuadradas de orden* 2×2. *Luego, teniendo en cuenta la definición anterior y definiendo la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G} \times \mathbf{W} &\longrightarrow \mathbf{W} \\ (g, \mathbf{A}) &\longrightarrow \varphi(g, \mathbf{A}) := g\mathbf{A}g^{-1}, \end{aligned}$$

se puede decir que $\mathbf{W}$ *es un* $\mathbb{G}$*-conjunto, es decir* $\mathbb{G}$ *actúa sobre* $\mathbf{W}$.

Definición 3.5. *Sea* $\mathbb{G}$ *un grupo que actúa sobre* $\mathbf{X}$*, donde* $\mathbf{X}$ *es un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$. *Una función*

$$\mathfrak{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$

se dice $\mathbb{G}$*-invariante si se satisface que:*

$$\mathfrak{f}(g * x) = \mathfrak{f}(x),$$

(donde $*$ *denota la operación del grupo* $\mathbb{G}$ *sobre el conjunto* $\mathbf{X}$*) para todo* $g \in \mathbb{G}$ *y todo* $x \in \mathbf{X}$. *En la siguiente proposición cuando se diga* $\mathbb{G}$*-invariante se está diciendo que* $*$ *denota la operación conjugación; esto es que*

$$\mathfrak{f}(gxg^{-1}) = \mathfrak{f}(x),$$

para todo $g \in \mathbb{G}$ *y todo* $x \in \mathbf{X}$.

21

Proposición 3.1. *(PROPOSICIÓN PRINCIPAL)*

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{W}$ *y considérese la función* $\mathfrak{b} : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbb{K}$, *dada por* $\mathfrak{b}(\mathbf{A}) = b$, *donde "b"es la entrada (1,2) de* $\mathbf{A}$. *Se denota* $\mathfrak{b}_k(\mathbf{A}) = \mathfrak{b}(\mathbf{A}^k)$. *Sean* $\mathfrak{c}$ *y* $\mathfrak{c}_k$ *las funciones correspondientes para la entrada (2,1). Entonces:*

(1) $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ *es* $\mathbf{G}$*-invariante.*

(2) $\mathfrak{b}_{k+1}(\mathbf{A})/\mathfrak{b}(\mathbf{A}) = T_r\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}$.

Nota 3.2. *En los siguientes capítulos se dan distintas pruebas de la proposición principal en las cuales se han dado muchos aportes para que sean más claras y de mayor aceptación para un lector interesado en el tema.*

4. CAPÍTULO 4 PRIMERA PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN PRINCIPAL.

En este capítulo se da la primera prueba de la **proposición 3.1**, en la cual sólo se demuestra que $(\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbf{A}) = T_r\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}$, donde $k \in \mathbf{Z}^+$ y por consiguiente, $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ será $\mathbb{G}$-invariante, ya que si se elige $g \in \mathbb{G}$ y $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(g \cdot \mathbf{A} \cdot g^{-1}) &= T_r\ \mathbf{S}^k(g\ \mathbf{A}\ g^{-1}) \\
&= T_r\ (\mathbf{S}^k g\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}\ (S^k g)^{-1}) \quad \textit{(en virtud de la observación 2.)} \\
&= T_r\ (\mathbf{S}^k g\ (S^k g)^{-1}\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}) \quad \textit{(propiedad de la función traza)} \\
&= T_r\ \mathbf{S}^k\mathbf{A} \\
&= (\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbf{A}).
\end{aligned}
$$

Antes de realizar esta prueba, se desarrollan dos Lemas que ayudan a obtener el objetivo:

Lema 4.1. *Sea* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Entonces,*

$$
T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{\min\{k-j,j\}} \binom{k-j}{i}\binom{j}{j-i} a^{k-j-i} b^i c^i d^{j-i} \tag{4}
$$

Demostración. De la matriz $\mathbf{S}^k\mathbf{A}$ dada en (3) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} = \ & \underbrace{\binom{k}{0}a^k}_{\text{entrada (1,1) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{1}\binom{k-1}{i}\binom{1}{1-i}a^{k-1-i}b^i c^i d^{1-i}}_{\text{entrada (2,2) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \\
& + \underbrace{\sum_{i=0}^{2}\binom{k-2}{i}\binom{2}{2-i}a^{k-2-i}b^i c^i d^{2-i}}_{\text{entrada (3,3) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \cdots + \\
& + \underbrace{\sum_{i=0}^{1}\binom{k-(k-1)}{i}\binom{k-1}{(k-1)-i}a^{k-(k-1)-i}b^i c^i d^{(k-1)-i}}_{\text{entrada (k-1,k-1) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \\
& + \binom{k}{k}d^k.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Observación 4.

- *En la entrada (2,2) de* $\mathbf{S}^k\mathbf{A}$, $i = 0,1$; *entonces* $k-1 \geq 1$ *(para que tenga sentido* $\binom{k-1}{i}$*). Por tanto,* $min\{k-1,1\} = 1$.

- *En la entrada (3,3) de* $\mathbf{S}^k\mathbf{A}$, $i = 0,1,2$; *entonces* $k-2 \geq 2$ *(para que tenga sentido* $\binom{k-2}{i}$*). Luego,* $min\{k-2,2\} = 2$.

- *En la entrada (k-1,k-1) de* $\mathbf{S}^k\mathbf{A}$, $i = 0,1$; *además se debe cumplir que* $i \leq k-1$ *(para que tenga sentido* $\binom{k-1}{(k-1)-i}$*). Luego,* $1 \leq k-1$ *con lo cual,* $min\{1,k-1\} = min\{k-(k-1),k-1\} = 1$.

La observación anterior hace que (5) se convierta en:

$$
\begin{aligned}
T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} = {} & \underbrace{\binom{k}{0}a^k}_{\text{entrada (1,1) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{min\{k-1,1\}} \binom{k-1}{i}\binom{1}{1-i} a^{k-1-i}b^ic^id^{1-i}}_{\text{entrada (2,2) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \\
& + \underbrace{\sum_{i=0}^{min\{k-2,2\}} \binom{k-2}{i}\binom{2}{2-i} a^{k-2-i}b^ic^id^{2-i}}_{\text{entrada (3,3) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \cdots + \\
& + \underbrace{\sum_{i=0}^{min\{k-(k-1),k-1\}} \binom{k-(k-1)}{i}\binom{k-1}{(k-1)-i} a^{k-(k-1)-i}b^ic^id^{(k-1)-i}}_{\text{entrada (k-1,k-1) de } \mathbf{S}^k\mathbf{A}} + \\
& + \binom{k}{k}d^k \\
= {} & \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{min\{k-j,j\}} \binom{k-j}{i}\binom{j}{j-i} a^{k-j-i}b^ic^id^{j-i},
\end{aligned}
$$

lo cual completa la prueba del lema 4.1. ∎

Lema 4.2. *Sea* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Se denota por* a_n, b_n, c_n *y* d_n, *como las entradas correspondientes de la matriz* $\mathbf{A}^n$; *es decír,* $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$. *Entonces:*

1. $a_n = a^n + \sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s} \binom{n-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{n-2s-m} b^s c^s d^m,$

2. $b_n = \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s-1} \binom{n-s-m-1}{s} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m-1} b^{s+1} c^s d^m,$

3. $c_n = \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s-1} \binom{n-s-m-1}{s} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m-1} b^s c^{s+1} d^m,$

4. $d_n = d^n + \sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s} \binom{n-s-m-1}{s-1} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m} b^s c^s d^m,$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Nota 4.1. *Sólo se demostrará el resultado 1, puesto que las demostraciones de los resultados 2, 3 y 4 son análogas. Se desarrolla esta prueba por inducción sobre n, en la cual se utiliza una fórmula de recurrencia y se supone cierta la afirmación 2 del lema, para el caso en que $n = k - 1$. Antes de realizar la prueba de (1.) se dan unas definiciones que serán útiles para el desarrollo de tal prueba.*

Definición 4.1. *Se define* ***la función parte entera****(denotada por $[x]$) como el mayor entero menor o igual que "x", la cual satisface las siguientes propiedades:*

a). $[x+n] = [x] + n$ *para cada entero n,*

b). $[-x] = \begin{cases} -[x], & \textit{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -[x]-1, & \textit{en otro caso.} \end{cases},$

c). $[x+y] = [x] + [y]$ *ó* $[x+y] = [x] + [y] + 1.$

Definición 4.2. *Dado $0 \leq k \leq n$, se define el coeficiente binomial (denotado por $\binom{n}{k}$) como: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ donde $n! = \prod_{j=1}^{n} j$, el cual satisface la propiedad $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ conocida como* ***Ley del triángulo de Pascal.***

25

Demostración. (Resultado (1.) del Lema 4.2)

Para $n = 1$, $a_1 = a$ y asi el resultado se satisface.

Para $n = 2$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$. pero, $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$. luego,

$a_2 = a^2 + bc = a^2 + \sum_{s=1}^{[\frac{2}{2}]} \sum_{m=0}^{2-2s} \binom{2-s-m}{s}\binom{m+s-1}{m} a^{2-2s-m} b^s c^s d^m.$

así, para $n = 2$ se satisface la afirmación del lema.

Ahora, supóngase que los resultados 1 y 2 del lema se satisfacen para $n = k - 1$. Demostremos el resultado (1.) para el caso en que $n = k$.

En efecto: Puesto que $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{k-1} & b_{k-1} \\ c_{k-1} & d_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces:

$a_k = aa_{k-1} + cb_{k-1}$. Luego, usando la hipótesis de inducción se tiene que:

$$a_k = a \cdot \left[a^{k-1} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m-1}{s}\binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m-1} b^s c^s d^m \right]$$
$$+ c \cdot \left[\sum_{s=0}^{[\frac{k-2}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-2} \binom{k-s-m-2}{s}\binom{m+s}{m} a^{k-2s-m-2} b^{s+1} c^s d^m \right].$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición 4.1 se encuentra que:

$[\frac{k-1}{2}] = [\frac{k}{2}]$ ó $[\frac{k-1}{2}] = [\frac{k}{2}] - 1$, además $[\frac{k-2}{2}] + 1 = [\frac{k}{2}]$.

Por tanto,

sí $[\frac{k-1}{2}] = [\frac{k}{2}]$, entonces:

$$a_k = a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m-1}{s}\binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m +$$
$$+ \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s} \binom{k-s-m-1}{s-1}\binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m.$$

Ahora, se toma la última suma hasta el término $m = k - 2s - 1$ y se asocia con la primera, con lo cual se tiene:

$$a_k = a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \left[\binom{k-s-m-1}{s} + \binom{k-s-m-1}{s-1} \right] \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m +$$

$$+ \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-s-(k-2s)-1}{s-1} \binom{(k-2s)+s-1}{k-2s} a^{k-2s-(k-2s)} b^s c^s d^{k-2s}.$$

Ahora, usando la definición 4.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} a_k &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m + \\ &+ \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \binom{s-1}{s-1} \binom{(k-2s)+s-1}{k-2s} a^{k-2s-(k-2s)} b^s c^s d^{k-2s} \\ &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m + \\ &+ \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \binom{s}{s} \binom{(k-2s)+s-1}{k-2s} a^{k-2s-(k-2s)} b^s c^s d^{k-2s} \\ &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m, \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba del resultado (1.) para el caso en que $[\frac{k-1}{2}] = [\frac{k}{2}]$.

Sí $[\frac{k-1}{2}] = [\frac{k}{2}] - 1$, entonces:

$$\begin{aligned} a_k &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]-1} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m-1}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m + \\ &+ \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s} \binom{k-s-m-1}{s-1} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m. \end{aligned}$$

Luego, tomando la segunda suma con respecto a " s ", hasta $s = [\frac{k}{2}] - 1$ y con respecto a " m ", hasta $m = k - 2s - 1$ y después asociando con la primera suma se tiene que:

$$a_k = a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]-1} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \left[\binom{k-s-m-1}{s} + \binom{k-s-m-1}{s-1} \right] \cdot \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m +$$

$$+ \sum_{s=[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-s-(k-2s)-1}{s-1} \binom{(k-2s)+s-1}{k-2s} a^{k-2s-(k-2s)} b^s c^s d^{k-2s}.$$

Ahora, en virtud de la definición 4.1 y observando que $\binom{k-s-(k-2s)-1}{s-1} = \binom{s-1}{s-1} = \binom{s}{s} = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_k &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]-1} \sum_{m=0}^{k-2s-1} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m + \\ &+ \sum_{s=[\frac{k}{2}]}^{[\frac{k}{2}]} \binom{s}{s} \binom{(k-2s)+s-1}{k-2s} a^{k-2s-(k-2s)} b^s c^s d^{k-2s} \\ &= a^k + \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{k-2s-m} b^s c^s d^m, \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del resultado (1.) del lema 4.2. ■

Ahora si:

Demostración. **(Primera prueba de la proposición 3.1)**
En virtud de los lemas 4.1 y 4.2, se probará que $b_{k+1}/b = c_{k+1}/c = T_r \mathbf{S}^k \mathbf{A}$, donde por definición " b_{k+1} " y " c_{k+1} " denotan las entradas (1,2) y (2,1) de la matriz $\mathbf{A}^{k+1}$ respectivamente.
En efecto:
por lema 4.2 (resultado (2.)) se tiene que:

$$b_{k+1} = \sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{m=0}^{k-2s} \binom{k-s-m}{s} \binom{m+s}{m} a^{k-2s-m} b^{s+1} c^s d^m.$$

Ahora, sea $s = i$ y $m = j - i$, con lo cual:

$$b_{k+1} = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \sum_{j-i=0}^{k-2i} \binom{k-j}{i} \binom{j}{j-i} a^{k-j-i} b^{i+1} c^i d^{j-i}. \tag{6}$$

" Sólo falta probar que i y j toman los mismos valores que en el lema 4.1. "
En (6)

$$0 \leq i \leq [\frac{k}{2}], \tag{7}$$

$$0 \leq j - i \leq k - 2i, \tag{8}$$

donde $i, j \in \mathbb{Z}$.

Luego, de (7) se tiene que

$$0 \leq i, \tag{9}$$

y de (8) se tiene

$$i \leq j \tag{10}$$
$$i \leq k - j, \tag{11}$$

(puesto que $0 \leq j - i$ y $j - i \leq k - 2i$ respectivamente).

Así, de (9), (10) y (11) se obtiene que:

$$0 \leq i \leq min\{k - j, j\}. \tag{12}$$

Ahora bien, de (9) se tiene que:

$$j \leq i + j \tag{13}$$

y de (11)

$$i + j \leq k. \tag{14}$$

Luego,

$$j \leq i + j \leq k. \tag{15}$$

Por tanto, por (9),(10) y (15) se obtiene que:

$$0 \leq j \leq k. \tag{16}$$

Los resultados obtenidos en (12) y (16) transforman a (6) en:

$$b_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{min\{k-j,j\}} \binom{k-j}{i} \binom{j}{j-i} a^{k-j-i} b^{i+1} c^i d^{j-i}. \tag{17}$$

Al dividir el resultado dado en (17) por " b "se obtiene la afirmación dada por el lema 4.1, lo cual completa la prueba de la proposición 3.1. ■

Nota 4.2. *Demostrar que* $c_{k+1}/c = T_r \mathbf{S}^k \mathbf{A}$, *resulta de un razonamiento análogo al anteriormente realizado.*

5. CAPÍTULO 5 SEGUNDA PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN PRINCIPAL.

Nota 5.1. *En este capítulo se da la segunda prueba de la proposición 3.1. A diferencia de la primera prueba antes dada, en esta prueba primero se demuestra que* $(b_k/b = c_k/c)$ *es invariante y luego, se muestra que*
$b_{k+1}/b = T_r \mathbf{S}^k \mathbf{A}$*, donde* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *y*
b_{k+1} *denota la entrada (1,2) de la (k+1)-potencia de* $\mathbf{A}$.

Antes de realizar esta segunda prueba, se dan algunas definiciones y se desarrolla un lema importante, el cual será útil para obtener el resultado de la proposición 3.1.

Definición 5.1. *Sea* $(\mathbb{G}, *)$ *un* ***grupo*** *con elemento neutro " e" y sea* $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{G}$*, con* $\mathbf{X} \neq \emptyset$ *un conjunto. Si todo elemento de* $\mathbb{G}$ *diferente de " e" puede ser escrito en la forma* $x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$*, donde* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_i \in \mathbf{X}$ *y* $e_i \in \{\pm 1\}$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, n$*; entonces se dice que el conjunto* $\mathbf{X}$ ***genera*** *al grupo* $\mathbb{G}$.

Definición 5.2. *Sea* $(\mathbb{G}, *)$ *un* ***grupo****. Un subconjunto* $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{G}$ *se dice* ***subgrupo*** *de* $\mathbb{G}$ *si en si mismo satisface la definición 3.1.*
Esto se denota por $\mathbb{U} \leq \mathbb{G}$.

Definición 5.3. *Una matriz cuadrada* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *se dice* ***triangular inferior*** *si tiene nulos todos sus elementos situados por encima de la diagonal principal; esto es* $a_{ij} = 0$ *siempre que* $i < j$.
Así mismo, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *se dice* ***triangular superior*** *si tiene nulos todos sus elementos situados por debajo de la diagonal principal; esto es* $a_{ij} = 0$ *siempre que* $i > j$.

Lema 5.1. *Sea* $\mathbb{G} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ *como en la nota 3.1.*
Se denota por $\mathbb{B}$ *y* $\mathbb{B}^*$ *los subgrupos de* $\mathbb{G}$*, cuyos elementos son las matrices triangulares inferiores y superiores respectivamente.*
Entonces, el conjunto $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}^*$ *genera a* $\mathbb{G}$*, en otras palabras:*
Toda matriz invertible de orden 2×2 *puede ser escrita como producto finito de matrices triangulares inferiores o superiores invertibles.*

Demostración. Dada $g \in \mathbb{G}$, la prueba consiste en asignar descomposiciones para " g " en productos finitos de elementos de $\mathbb{B}$ ó $\mathbb{B}^*$ (Aunque estas descomposiciones no son únicas), esto asegura la afirmación del lema. En efecto:

- Si g es **diagonal ó triangular(superior ó inferior)**:

Es trivial, pues $g = g \cdot I$, donde I representa la matriz idéntica de $\mathbb{G}$. Obsérvese que la afirmación del lema se satisface pues, g estará en $\mathbb{B}$ ó $\mathbb{B}^*$ (según sea la forma de g) e I pertenece tanto a $\mathbb{B}$ como a $\mathbb{B}^*$.

- Si $g = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{G}$, entonces:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$$

(Donde " 0 " y " 1 "representan los elementos neutros del campo $\mathbb{K}$ bajo la suma y el producto respectivamente), forma una descomposición finita para " g " en elementos de $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}^*$.

- Sí $g = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{G}$, donde b, c y d no nulos, entonces:

$$g = \begin{bmatrix} -c/d & b/d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ c & d \end{bmatrix},$$

forma una descomposición finita para " g " en elementos de $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}^*$.

- Si $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{G}$, donde a, b y c son no nulos, entonces:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & -b/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

forma una descomposición finita para " g " en elementos de $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}^*$.

- Si $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{G}$, donde a, b, c y d son no nulos, entonces:

$$g = \begin{bmatrix} b/c & 0 \\ b/a & ad - bc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac/b & c \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

forma una descomposición finita para " g " en elementos de $\mathbb{B} \cup \mathbb{B}^*$. ∎

Nota 5.2. *Obsérvese que en la prueba del lema anterior se han analizado cada una de las formas que debe tener una matriz invertible de orden 2×2, para las cuales se dieron algunas descomposiciones en matrices triangulares superiores e inferiores invertibles. Esto hace suficiente la prueba del lema.*

Demostración. **(Segunda prueba de la proposición 3.1)**

Considérese a $\mathbf{W}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_k$ y $\mathbb{G} = \mathbb{GL}(2, \mathbb{K})$, como en el capítulo 3.

1. " Primero se demuestra que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es $\mathbb{G}$-invariante."

   Sea $\mathbb{B}$ el **subgrupo** de $\mathbb{G}$ ($\mathbb{B} \leq \mathbb{G}$), formado por las matrices triangulares inferiores, esto es:

   $$\mathbb{B} := \{\begin{bmatrix} r & 0 \\ m & s \end{bmatrix} : r, s \text{ } y \text{ } m \text{ } son \text{ } no \text{ } nulos\}.$$

   Sea $\mathbb{U} \leq \mathbb{B}$ dado por:

   $$\mathbb{U} := \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} : m \neq 0\}$$

   conocido como **Radical unipotente.**

   Para cada $u \in \mathbb{U}$, $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ para algún $m \in \mathbb{K}$ y además $u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{bmatrix}$.

   Ahora, sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y denótese $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$.

   Luego, $\mathfrak{b}_k(\mathbf{A}) = \mathfrak{b}(\mathbf{A}^k) = b_k$.

   Además, puesto que

   $$\begin{aligned}(u\mathbf{A}u^{-1})^k &= u\mathbf{A}^k u^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_k - mb_k & b_k \\ ma_k + c_k - m^2 b_k - md_k & mb_k + d_k \end{bmatrix},\end{aligned}$$

   entonces,

   $$\begin{aligned}\mathfrak{b}_k(u\mathbf{A}u^{-1}) &= \mathfrak{b}((u\mathbf{A}u^{-1})^k) \\ &= \mathfrak{b}(u\mathbf{A}^k u^{-1}) \\ &= b_k = \mathfrak{b}_k(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

   para todo $k \in \mathbf{N}$ y todo $u \in \mathbb{U}$. Esto muestra que $\mathfrak{b}_k$ y por tanto $\mathfrak{b}$ son

U-invariantes; y así, $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ también será U-invariante puesto que:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(u\mathrm{A}u^{-1}) &= \mathfrak{b}_k(u\mathrm{A}u^{-1})/\mathfrak{b}(u\mathrm{A}u^{-1}) \\ &= \mathfrak{b}_k(\mathrm{A})/\mathfrak{b}(\mathrm{A}) \qquad \text{(porque } \mathfrak{b}_k \text{ y } \mathfrak{b} \text{ son U-invariantes)} \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Por otra parte, sea $\mathbb{T} \leq \mathbb{B}$ dado por:

$$\mathbb{T} := \{\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} : rs \neq 0\}$$

conocido como **Toro diagonal**.

Para cada $t \in \mathbb{T}$, $t = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ para algunos r y s en $\mathbb{K}$ y además $t^{-1} = \begin{bmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$.

Luego,

$$\begin{aligned}(t\mathrm{A}t^{-1})^k &= t\mathrm{A}^k t^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_k & rs^{-1}b_k \\ r^{-1}sc_k & d_k \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{18}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_k(t\mathrm{A}t^{-1}) &= \mathfrak{b}((t\mathrm{A}t^{-1})^k) \\ &= \mathfrak{b}(t\mathrm{A}^k t^{-1}) \\ &= rs^{-1}b_k \\ &= rs^{-1}\mathfrak{b}_k(A),\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbf{N}$ y todo $t \in \mathbb{T}$. Luego,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(t\mathrm{A}t^{-1}) &= \mathfrak{b}_k(t\mathrm{A}t^{-1})/\mathfrak{b}(t\mathrm{A}t^{-1}) \\ &= rs^{-1}\mathfrak{b}_k(\mathrm{A})/rs^{-1}\mathfrak{b}(\mathrm{A}) \\ &= \mathfrak{b}_k(\mathrm{A})/\mathfrak{b}(\mathrm{A}) = (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ es $\mathbb{T}$-invariante.

Puesto que se ha mostrado que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ es a la vez U y $\mathbb{T}$-invariante, entonces se obtiene que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ es también $\mathbb{B}$-invariante;

pues, si $z \in \mathbb{B}$, $z = \begin{bmatrix} r & 0 \\ m & s \end{bmatrix}$, para algunos r, s y m no nulos. Entonces, $z = t \cdot u$, donde $t = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \mathbb{T}$ y $u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m/s & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{U}$. Así pues,

$$\begin{aligned} z\mathbf{A}z^{-1} &= (tu)\mathbf{A}(tu)^{-1} \\ &= t(u\mathbf{A}u^{-1})t^{-1} \\ &= t\mathbb{H}t^{-1}, \qquad\qquad (\text{donde } \mathbb{H} = u\mathbf{A}u^{-1} \in \mathbb{W}) \end{aligned}$$

Luego, para cada $z \in \mathbb{B}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(z\mathbf{A}z^{-1}) &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(t\mathbb{H}t^{-1}) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathbb{H}) \qquad (\text{porque } \mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} \text{ es } \mathbb{T}\text{-invariante}) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(u\mathbf{A}u^{-1}) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathbf{A}) \qquad (\text{porque } \mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} \text{ es } \mathbb{U}\text{-invariante}) \end{aligned}$$

Así las cosas, $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ es $\mathbb{B}$-invariante.

Análogamente, denótese $\mathbb{B}^*$ como el **subgrupo** de $\mathbb{G}$ ($\mathbb{B}^* \leq \mathbb{G}$), formado por las matrices triangulares superiores, esto es:

$$\mathbb{B}^* := \{\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix} : r, s \text{ y } m \text{ son no nulos}\}.$$

Sea $\mathbf{U}^* \leq \mathbb{B}^*$ dado por:

$$\mathbf{U}^* := \{\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : m \neq 0\}.$$

Para cada $u \in \mathbf{U}^*$, $u = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para algún $m \in \mathbb{K}$ y además $u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora, sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}$.

Luego, por hipótesis $\mathfrak{c}_k(\mathbf{A}) = \mathfrak{c}(\mathbf{A}^k) = c_k$.

Además, puesto que

3'

$$\begin{aligned}(u\mathbf{A}u^{-1})^k &= u\mathbf{A}^k u^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -m\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_k + mc_k & md_k + b_k - m^2c_k - ma_k\\ c_k & d_k - mc_k\end{bmatrix},\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_k(u\mathbf{A}u^{-1}) &= \mathfrak{c}((u\mathbf{A}u^{-1})^k)\\ &= \mathfrak{c}(u\mathbf{A}^k u^{-1})\\ &= c_k = \mathfrak{c}_k(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbf{N}$ y todo $u \in \mathbf{U}^*$. Esto muestra que $\mathfrak{c}_k$ y por tanto $\mathfrak{c}$ son $\mathbf{U}^*$-invariantes; y así, $\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ también será $\mathbf{U}^*$-invariante puesto que:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(u\mathbf{A}u^{-1}) &= \mathfrak{c}_k(u\mathbf{A}u^{-1})/\mathfrak{c}(u\mathbf{A}u^{-1})\\ &= \mathfrak{c}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{c}(\mathbf{A}) \qquad \text{(porque } \mathfrak{c}_k \text{ y } \mathfrak{c} \text{ son } \mathbf{U}^*\text{-invariantes)}\\ &= (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Observando la matriz dada en (18), $\left((t\mathbf{A}t^{-1})^k = t\mathbf{A}^k t^{-1} = \begin{bmatrix}a_k & rs^{-1}b_k\\ r^{-1}sc_k & d_k\end{bmatrix}\right)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_k(t\mathbf{A}t^{-1}) &= \mathfrak{c}((t\mathbf{A}t^{-1})^k)\\ &= \mathfrak{c}(t\mathbf{A}^k t^{-1})\\ &= r^{-1}sc_k\\ &= r^{-1}s\mathfrak{c}_k(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbf{N}$ y todo $t \in \mathbb{T}$. Luego,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(t\mathbf{A}t^{-1}) &= \mathfrak{c}_k(t\mathbf{A}t^{-1})/\mathfrak{c}(t\mathbf{A}t^{-1})\\ &= rs^{-1}\mathfrak{c}_k(\mathbf{A})/rs^{-1}\mathfrak{c}(\mathbf{A})\\ &= \mathfrak{c}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{c}(\mathbf{A}) = (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es $\mathbb{T}$-invariante.

Puesto que se ha mostrado que $\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es a la vez $\mathbf{U}^*$ y $\mathbb{T}$-invariante, entonces se obtiene que $\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es también $\mathbb{B}^*$-invariante;

pues, si $z \in \mathbb{B}^*$, $z = \begin{bmatrix} r & m \\ 0 & s \end{bmatrix}$, para algunos r, s y m no nulos. Entonces, $z = t \cdot u$, donde $t = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \mathbb{T}$ y $u = \begin{bmatrix} 1 & m/r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{U}^*$. Así pues,

$$\begin{aligned} z\mathbf{A}z^{-1} &= (tu)\mathbf{A}(tu)^{-1} \\ &= t(u\mathbf{A}u^{-1})t^{-1} \\ &= t\mathbb{H}t^{-1}, \qquad \text{(donde } \mathbb{H} = u\mathbf{A}u^{-1} \in \mathbf{W}) \end{aligned}$$

Luego, para cada $z \in \mathbb{B}^*$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(z\mathbf{A}z^{-1}) &= (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(t\mathbb{H}t^{-1}) \\ &= (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(\mathbb{H}) \qquad \text{(porque } \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c} \text{ es } \mathbb{T}\text{-invariante)} \\ &= (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(u\mathbf{A}u^{-1}) \\ &= (\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c})(\mathbf{A}) \qquad \text{(porque } \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c} \text{ es } \mathbb{U}^*\text{-invariante)} \end{aligned}$$

Así las cosas, $\mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es $\mathbb{B}^*$-invariante.

Ahora, veamos que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$, para así tener que dicho cociente entre tales funciones es a la vez $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}^*$-invariante.

" Se verifica esto por inducción sobre k ".

- Si $k = 1$, no hay nada que probar.
- Supóngase que la proposición se satisface para $k = n - 1$ y verifiquemos el caso $k = n$.

En virtud de la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\mathfrak{b}_{n-1}/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_{n-1}/\mathfrak{c}, \tag{19}$$

es decir,

$$b_{n-1}/b = c_{n-1}/c.$$

Puesto que $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{20}$$

De (20) se tiene que:

$$b_n = a_{n-1}b + b_{n-1}d \tag{21}$$

y

$$c_n = c_{n-1}a + d_{n-1}c. \tag{22}$$

Así también, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{n-1}$, entonces

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

de (23) se tiene que:

$$b_n = ab_{n-1} + bd_{n-1} \tag{24}$$

y

$$c_n = ca_{n-1} + dc_{n-1}. \tag{25}$$

Luego, dividiendo (21) y (24) por " b "se tiene que:

$$b_n/b = a_{n-1} + (b_{n-1}/b)d = a(b_{n-1}/b) + d_{n-1} \tag{26}$$
$$= a_{n-1} + (c_{n-1}/c)d = a(c_{n-1}/c) + d_{n-1}, \tag{27}$$

(usando la hipótesis de inducción (19))

$$= c_n/c, \tag{28}$$

(la última igualdad surge al dividir (22) y (25) por " c ").

Así, se ha mostrado que el cociente $b_k/b = c_k/c$ para todo $k \in \mathbf{N}$ es a la vez $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}^*$-invariante.
Ahora bien, dada $g \in \mathbb{G}$, se tiene en virtud del lema (4.1) que

$$g = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{R}_i,$$

6245.

donde $\mathfrak{R}_i$ denota una matriz de orden 2×2 la cual es triangular inferior ó superior(invertible) para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.
Entonces,

$$g^{-1} = \prod_{i=n}^{1} \mathfrak{R}_i^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(g\mathbf{A}g^{-1}) &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})\left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{R}_i \ \mathbf{A} \ \prod_{i=n}^{1} \mathfrak{R}_i^{-1}\right) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathfrak{R}_1\left(\prod_{i=2}^{n} \mathfrak{R}_i \ \mathbf{A} \ \prod_{i=n}^{2} \mathfrak{R}_i^{-1}\right)\mathfrak{R}_1^{-1}) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\prod_{i=2}^{n} \mathfrak{R}_i \ \mathbf{A} \ \prod_{i=n}^{2} \mathfrak{R}_i^{-1}),\end{aligned}$$

(Esto último resulta puesto que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}$ es $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}^*$-invariante y $\mathbb{R}_1$ pertenece a $\mathbb{B}$ ó $\mathbb{B}^*$)

$$\begin{aligned}&= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathfrak{R}_2\left(\prod_{i=3}^{n} \mathfrak{R}_i \ \mathbf{A} \ \prod_{i=n}^{3} \mathfrak{R}_i^{-1}\right)\mathfrak{R}_2^{-1}) \\ &= (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\left(\prod_{i=3}^{n} \mathfrak{R}_i \ \mathbf{A} \ \prod_{i=n}^{3} \mathfrak{R}_i^{-1}\right).\end{aligned}$$

Así sucesivamente, aplicando $(n-2)$ pasos análogos a los realizados anteriormente se obtiene que:

$$(\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(g\mathbf{A}g^{-1}) = (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})(\mathbf{A}),$$

para cada $g \in \mathbb{G}$; lo cual asegura que $\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_k/\mathfrak{c}$ es $\mathbb{G}$-invariante.

2. Se verifica ahora que $\mathfrak{b}_{k+1}(\mathbf{A})/\mathfrak{b}(\mathbf{A}) = Tr\mathbf{S}^k(\mathbf{A})$, cuando $\mathfrak{b}(\mathbf{A})$ es no nulo.

En efecto: considérese $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{W}$ con $\mathfrak{b}(\mathbf{A}) = b \neq 0$.

Puesto que $\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b}$ es $\mathbb{G}$-invariante se toma una matriz $g \in \mathbb{G}$ tal que $g\mathbf{A}g^{-1} = \mathbb{T} = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ para ciertos escalares r y s en el campo $\mathbb{K}$ que dependen de las entradas a, b, c y d de la matriz $\mathbf{A}$.

(Esta matriz $g \in \mathbf{G}$ siempre existe, puesto que si

$$g^{-1}\mathbf{A}\, g = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A}\, g = g \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix};$$

esto es,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Pero esto implica los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} ax + bz = rx \\ cx + dz = rz \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} ay + bw = x + ys \\ cy + dw = z + ws \end{cases},$$

los cuales siempre tienen solución).

Luego,

$$(g\mathbf{A}^{k+1}g^{-1}) = (g\mathbf{A}g^{-1})^{k+1} = \left(\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)^{k+1}.$$

Ahora, se verifica por inducción sobre k que

$$\left(\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)^{k+1} = \begin{bmatrix} r^{k+1} & \sum_{i=0}^{k} r^i s^{k-i} \\ 0 & s^{k+1} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

Asi: Si $k = 1$,

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)^{1+1} &= \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^2 & r+s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{1+1} & \sum_{i=0}^{1} r^i s^{1-i} \\ 0 & s^{1+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

así, la identidad (29) se satisface para $k = 1$. Se supone que el caso $k = n$ se cumple y se verifica el caso $k = n + 1$.

$$\left(\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)^{(n+1)+1} = \left(\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right)^{n+1} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{n+1} & \sum_{i=0}^{n} r^i s^{n-i} \\ 0 & s^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

(En virtud de la hipótesis de inducción.)

$$= \begin{bmatrix} r^{(n+1)+1} & r^{n+1} + \left(\sum_{i=0}^{n} r^i s^{n-i}\right) s \\ 0 & s^{(n+1)+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r^{(n+1)+1} & r^{n+1} s^0 + \sum_{i=0}^{n} r^i s^{(n+1)-i} \\ 0 & s^{(n+1)+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r^{(n+1)+1} & \sum_{i=0}^{n+1} r^i s^{(n+1)-i} \\ 0 & s^{(n+1)+1} \end{bmatrix}.$$

Esto asegura la afirmación (29). Por consiguiente:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbf{A}) &= (\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(g\mathbf{A}g^{-1}) \\ &= (\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbb{T}) = \mathfrak{b}_{k+1}(\mathbb{T})/\mathfrak{b}(\mathbb{T}) \\ &= \mathfrak{b}(\mathbb{T}^{k+1})/\mathfrak{b}(\mathbb{T}) && \text{(Por definición)} \\ &= \mathfrak{b}(\mathbb{T}^{k+1}) && \text{(Puesto que } \mathfrak{b}(\mathbb{T}) = 1\text{)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} r^i s^{k-i} && \text{(En virtud de (29))} \\ &= T_r \mathbf{S}^k \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Pero por observación (2), se tiene que si $g\mathbf{A}g^{-1} = \mathbb{T}$, entonces $T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} = T_r\mathbf{S}^k\mathbb{T}$.
Por consiguiente, $(\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}$, con lo cual se completa la segunda prueba para la proposición principal 3.1.

∎

6. CAPÍTULO 6 TERCERA PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN PRINCIPAL.

En este capítulo se da otra prueba de la proposición principal la cual restringe la prueba sólo a matrices diagonalizables. Además, al igual que en la primera prueba, esta sólo demuestra que $(\mathfrak{b}_{k+1}/\mathfrak{b})(\mathbf{A}) = T_r\mathbb{S}^k\mathbf{A}$.

Tercera prueba de la proposición principal

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{W}$ diagonalizable. Luego, existe una matriz $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ invertible tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1},$$

donde $\mathbb{D}$ representa una matriz diagonal cuyos escalares en la diagonal principal son los autovalores de $\mathbf{A}$. Luego,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{xw - yz} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix} \tag{30}$$

donde $\mathbb{P}^{-1} = \frac{1}{xw-yz} \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$.

Ahora, al denotar

$$\mathbf{A}^{k+1} = \begin{bmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{bmatrix}$$

se tiene que:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{xw - yz} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{k+1} & 0 \\ 0 & q^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Al realizar los cálculos de multiplicación de matrices y al usar la definición de igualdad de matrices en (30) y (31), se tiene que:

$$b = \frac{1}{xw - yz}((q - p)xy) \tag{32}$$

y

$$b_{k+1} = \frac{1}{xw - yz}((q^{k+1} - p^{k+1})xy). \tag{33}$$

Luego, al dividir (33) con (32) se llega a que:

$$\begin{aligned} b_{k+1}/b &= \frac{q^{k+1} - p^{k+1}}{q - p} \\ &= \sum_{i=0}^{k} q^{k-i} p^{i} \\ &= T_r \mathbb{S}^k \mathbb{D} = T_r \mathbb{S}^k \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Esta última igualdad surge en virtud de la observación 2.[c).] ya que se tiene que $\mathbf{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}$.

7. CAPÍTULO 7 DEFINICIONES Y TEOREMA PRINCIPAL.

En este capítulo se dan algunas definiciones básicas, se demuestra en una observación un resultado a utilizar y por último se hace notar que la afirmación del teorema principal es una consecuencia inmediata de la observación mostrada.

Definición 7.1. *Un **anillo** $(\mathfrak{R},+,*)$ es un conjunto $\mathfrak{R}$ junto con dos operaciones binarias $+:\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\longrightarrow\mathfrak{R}$ y $*:\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\longrightarrow\mathfrak{R}$ definidas por $+(x,y)=x+y$ y $*(x,y)=x*y$ respectivamente; para todo $(x,y)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ tal que:*

- *$(\mathfrak{R},+)$ es un grupo abeliano, (ver definición 3.1)*
- *$(x*y)*z=x*(y*z)$, para todo x, y, z en $\mathfrak{R}$ (Un conjunto con esta propiedad se dice que es un semigrupo),*
- *$x*(y+z)=x*y+x*z$ y $(x+y)*z=x*z+y*z$, para todo x, y, z en $\mathfrak{R}$.*

Definición 7.2. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial n-dimensional sobre un campo $\mathbb{K}$. Considérese una base $x_1,x_2,\cdots,x_n$ para $\mathbf{V}$. Una función $\mathfrak{f}:\mathbf{V}\longrightarrow\mathbb{K}$ se dice **polinomial** en $\mathbf{V}$ si dado $\mathbf{X}=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$ en $\mathbf{V}$, donde $\lambda_i\in\mathbb{K}$ para cada $i=1,2,\cdots,n$; se tiene que $\mathfrak{f}(\mathbf{X})$ es un polinomio en $\mathbb{K}^n$; esto es $\mathfrak{f}(\mathbf{X})$ denota un polinomio en n-variables con coeficientes en $\mathbb{K}$.*

Definición 7.3. *Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial n-dimensional sobre un campo $\mathbb{K}$. Elegido un sistema de coordenadas $x_1,x_2,\cdots,x_n$ para $\mathbf{V}$, se denota:*

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[\mathbf{V}]:&=\mathbb{K}[x_1,x_2,\cdots,x_n]\\&=\{\mathfrak{f}:\mathbf{V}\longrightarrow\mathbb{K}:\mathfrak{f}\text{ es una función polinomial}\}.\end{aligned}\tag{34}$$

*Se sabe que si $\mathbb{K}$ es un anillo, entonces $\mathbb{K}[x]$(el conjunto de los polinomios en una indeterminada x) es también un anillo; así mismo $\mathbb{K}[x,y]:=(\mathbb{K}[x])[y]$ será un anillo y así sucesivamente $\mathbb{K}[\mathbf{V}]=\mathbb{K}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ será un anillo, el cual se llama **anillo de las funciones polinomiales** sobre $\mathbf{V}$.*

Definición 7.4. *Sea* $\mathbb{G}$ *un grupo. Una función* $\mathfrak{f} \in \mathbb{K}[\mathbf{V}]$ *se dice* $\mathbb{G}$*-invariante si* $\mathfrak{f}(gv) = \mathfrak{f}(v)$ *para todo* $g \in \mathbb{G}$ *y* $v \in \mathbf{V}$*. El conjunto de todas las funciones* $\mathfrak{f} \in \mathbb{K}[\mathbf{V}]$ *que son* $\mathbb{G}$*-invariantes, se denota por* $\mathbb{K}[\mathbf{V}]^{\mathbb{G}}$*.*

Definición 7.5. *Sea* $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ *en la definición anterior,(espacio de las matrices cuadradas de orden* 2×2*) el cual es de dimensión 4. En este caso* $\mathfrak{f} \in \mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *se dice* $\mathbb{G}$*-invariante por conjugación si* $\mathfrak{f}(g\mathbf{A}g^{-1}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A})$ *para toda* $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$ *y* $g \in \mathbb{G}$*. El conjunto de todas las funciones* $\mathbb{G}$*-invariantes por conjugación será denotado por* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]^{\mathbb{G}}$*.*

Nota 7.1. *Se recuerda que un subconjunto* $\mathbb{U}$ *de* $\mathbb{R}$ *(donde* $\mathbb{R}$ *denota un anillo), se dice que es un* ***subanillo*** *de* $\mathbb{R}$ *sí y sólo sí:*

- $O \in \mathbb{U}$,
- *Siempre que* x, y *estén en* $\mathbb{U}$*; se tiene que* $-x$*,* $x+y$*, y* $x * y$ *están en* $\mathbb{U}$*.*

Es fácil ver con esto que $\mathbb{K}[\mathbf{W}]^{\mathbb{G}}$ *es un subanillo de* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *el cual se llama* ***anillo de invariantes****.*

Observación 5. *Sea* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *como en las definiciones anteriores y* $\mathbb{G} = \mathbb{GL}(2, \mathbb{K})$*. Teniendo en cuenta la (definición 3.4) y al definir la aplicación:*

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{G} \times \mathbb{K}[\mathbf{W}]) &\longrightarrow \mathbb{K}[\mathbf{W}] \\ (g, \mathfrak{f}) &\longrightarrow \varphi(g, \mathfrak{f}) : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbb{K}, \end{aligned}$$

dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(g, \mathfrak{f})(\mathbf{A}) &:= (g * \mathfrak{f})(\mathbf{A}) \\ &= \mathfrak{f}(g^{-1}\mathbf{A}g), \end{aligned}$$

se prueba que $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *es un* $\mathbb{G}$*-conjunto.*
En efecto:

1. *Existe* $\mathbb{I}_{2\times 2} \in \mathbb{G}$ *tal que:*
   $\varphi(\mathbb{I}_{2\times 2}, \mathfrak{f})(\mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A})$*, para cada* $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$*; luego, por definición de igualdad de funciones se tiene que* $\varphi(\mathbb{I}_{2\times 2}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$*.*

2. *Para $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ y toda $\mathfrak{f} \in \mathbb{K}[\mathbf{W}]$ se tiene que:*

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 g_2, \mathfrak{f})(\mathbf{A}) &= \mathfrak{f}((g_1 g_2)^{-1}\mathbf{A}(g_1 g_2)) \\ &= \mathfrak{f}(g_2^{-1} g_1^{-1} \mathbf{A} g_1 g_2) \\ &= \mathfrak{f}(g_2^{-1}(g_1^{-1}\mathbf{A} g_1) g_2) \\ &= \varphi(g_2, \mathfrak{f})(g_1^{-1}\mathbf{A} g_1) \qquad \textit{(definición)} \\ &= \varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathfrak{f}))(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Esto último surge por definición; además nótese que $\varphi(g_2, \mathfrak{f}) \in \mathbb{K}[\mathbf{W}]$. Así, se ha mostrado que $\varphi(g_1 g_2, \mathfrak{f})(\mathbf{A}) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathfrak{f}))(\mathbf{A})$, para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$. Luego, $\varphi(g_1 g_2, \mathfrak{f}) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, \mathfrak{f}))$ en virtud de la definición de igaldad de funciones. Esto muestra que $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ es un $\mathbb{G}$-conjunto.

Definición 7.6. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo y $\mathbf{X}$ un conjunto tal que $\mathbf{X}$ sea un $\mathbb{G}$-conjunto; es decir, $\mathbb{G}$ actúa sobre $\mathbf{W}$. Dado $x \in \mathbf{X}$, se define*

$$\mathbb{G} * x := \{g * x : g \in \mathbb{G}\}, \tag{35}$$

*(donde $*$ denota la acción de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbf{X}$) como el conjunto de todos los puntos de $\mathbf{X}$ para los cuales " x " puede ser movido por elementos de $\mathbb{G}$. Este conjunto se conoce con el nombre de **órbita ó trayectoria** de " x ".*

Nota 7.2. *Es claro en virtud de la acción de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ dada en la observación (5), que toda $\mathbb{G}$-traslación de $(\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b})$, satisface la proposición principal; es decir, todo elemento en el conjunto*

$$\mathbb{G} * (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}) = \{g * (\mathfrak{b}_k/\mathfrak{b}) : g \in \mathbb{G}\},$$

(donde $\mathfrak{b}$ denota la función coordenada sobre la entrada (1.2)) satisface la proposición principal (3.1).

Definición 7.7. *Sea $\mathbb{H}$ un subconjunto no vacío de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre un campo $\mathbb{K}$. Un elemento $x \in \mathbf{V}$ de la forma*

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i,$$

*en donde $x_1, x_2, \cdots, x_k$ pertenecen todos a $\mathbb{H}$ y $c_1, c_2, \cdots, c_k$ pertenecen todos a $\mathbb{K}$, se denomina **combinación lineal** de elementos de $\mathbb{H}$. Es fácil verificar que el conjunto*

$$\mathbf{L}(\mathbb{H}) := \{\sum_{i=1}^{k} c_i x_i : c_i \in \mathbb{K} \text{ y } x_i \in \mathbb{H} \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, k\}, \tag{36}$$

*satisface los axiomas de clausura citados en la definición 2.2. Como además $\mathbf{L}(\mathbb{H}) \subseteq \mathbf{V}$ se dice que $\mathbf{L}(\mathbb{H})$ es un subespacio de $\mathbf{V}$, el cual es generado por $\mathbb{H}$ y se conoce como la **envolvente lineal** de $\mathbb{H}$. Además, si $\mathbb{H} = \varnothing$ se define $\mathbf{L}(\mathbb{H}) = \{\mathbf{O}\}$.*

Observación 6. *Sea* $\mathbf{G} = \mathbb{GL}(2, \mathbb{K})$ *y* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *como en las definiciones anteriores. Sea* $\mathbf{S}$ *el subconjunto de* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]$ *que consiste en las funciones que son lineales y anulan matrices escalares esto es:*

$$\mathbf{S} := \{\mathfrak{f} \in \mathbb{K}[\mathbf{W}] : \mathfrak{f} \text{ es lineal y satisface } \mathfrak{f}\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right) = 0.\} \tag{37}$$

Considérese el conjunto

$$\begin{aligned}\mathbb{T} :=\{&\mathfrak{b}, \mathfrak{c} : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbb{K} : \mathfrak{b} \text{ y } \mathfrak{c} \text{ son las funciones coordenadas sobre}\\ &\text{la entrada } (1,2) \text{ y } (2,1) \text{ respectivamente}\} \cup (\mathbb{G} * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})),\end{aligned}$$

donde $\mathbb{G} * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ *esta dada como en (35) para cuando* $x = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

Es claro que $\mathbb{T} \subseteq \mathbf{S}$. *Luego, por (36) se tiene que*

$$\mathbf{L}(\mathbb{T}) \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}. \tag{38}$$

(la igualdad surge debido a que $\mathbf{S}$ *es un espacio vectorial)*

Ahora bien, puesto que $\{\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ g * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\}$ *es linealmente independiente para todo* $g \in \mathbf{G}$, *entonces se tendrá que* $dim(\mathbb{L}(\mathbb{T})) > 2$; *además se puede ver que* $dim(\mathbf{S}) = 3$, *puesto que toda* $\mathfrak{f} \in \mathbf{S}$ *es tal que*

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(\mathbf{A}) &= \alpha_1(a - d) + \alpha_2 b + \alpha_3 c\\ &= \alpha_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{d})(\mathbf{A}) + \alpha_2\mathfrak{b}(\mathbf{A}) + \alpha_3\mathfrak{c}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

y el conjunto $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ *forma una base para* $\mathbf{S}$, *donde*

$$\mathfrak{a}_i(\mathbf{A}) = \begin{cases}(\mathfrak{a} - \mathfrak{d})(\mathbf{A}) & si\ i=1,\\ \mathfrak{b}(\mathbf{A}) & si\ i=2,\\ \mathfrak{c}(\mathbf{A}) & si\ i=3.\end{cases}$$

Por consiguiente, en virtud de (38) se tiene que:

$$2 < dim(\mathbb{L}(\mathbb{T})) \leq dim(\mathbf{S}) = 3,$$

con lo cual se tendrá que

$$dim(\mathbb{L}(\mathbb{T})) = 3. \tag{39}$$

(porque $dim(\mathbb{L}(\mathbb{T}))$ *siempre denota un número entero positivo)*

Así de (38) y (39) se concluye que

$$\mathbf{L}(\mathbb{T}) = \mathbf{S}.$$

Con lo obtenido en la observación 6, se deduce inmediatamente el teorema principal, el cual se enuncia así:

Teorema 7.1. *(TEOREMA PRINCIPAL)*

Sean $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$ *y* $\mathfrak{f} \in \mathbb{S}$ *(donde* $\mathbb{S}$ *es exactamente el conjunto definido en la* ***observación 6.****). Denótese* $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}^k)$. *Si* $\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \neq 0$ *entonces se satisfacen los siguientes resultados:*

(1) $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A})$ *es* $\mathbb{G}$*-invariante; es decír,* $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A})$ *pertenece al anillo de invariantes* $\mathbb{K}[\mathbf{W}]^{\mathbf{G}}$. *(dado en la* ***definición 7.5****)*

(2) $\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}$.

Nota 7.3. *Es suficiente probar la afirmación dada en* (2), *puesto que si*

$$(\mathfrak{f}_{k+1}/\mathfrak{f})(\mathbf{A}) = \mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A},$$

para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$ *y todo* $k \in \mathbf{N}$, *entonces para cada* $g \in \mathbb{G}$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{f}_{k+1}/\mathfrak{f})(g\ \mathbf{A}\ g^{-1}) &= T_r\ \mathbf{S}^k(g\ \mathbf{A}\ g^{-1}) \\
&= T_r\ (\mathbf{S}^k g\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}\ (S^k g)^{-1}) \quad \textit{(en virtud de la observación 2.)} \\
&= T_r\ (\mathbf{S}^k g\ (S^k g)^{-1}\ \mathbf{S}^k\mathbf{A}) \quad \textit{(propiedad de la función traza)} \\
&= T_r\ \mathbf{S}^k\mathbf{A} \\
&= (\mathfrak{f}_{k+1}/\mathfrak{f})(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Así se tendrá que $\mathfrak{f}_k(\mathbf{A})/\mathfrak{f}(\mathbf{A})$ *es* $\mathbb{G}$*-invariante.*

Demostración. **Afirmación (2) del teorema principal.**
Puesto que $\mathfrak{f} \in \mathbb{S}$, entonces por lo obtenido en la observación 6, se tendrá que $\mathfrak{f} \in \mathbf{L}(\mathbb{T})$. Luego, $\mathfrak{f}$ es de la forma

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}) = \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}) + \lambda\ g * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathbf{A}),$$

para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{W}$ y algunos α, β y λ en $\mathbb{K}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(\mathbf{A}^{k+1}) &= \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda\ g * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathbf{A}^{k+1}) \\
&= \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda\ (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(g\ \mathbf{A}^{k+1}\ g^{-1}) \\
&= \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda\mathfrak{b}(g\ \mathbf{A}^{k+1}\ g^{-1}) + \lambda\mathfrak{c}(g\ \mathbf{A}^{k+1}\ g^{-1}) \\
&= \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda\ g * \mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda\ g * \mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) \\
&= \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1}) + \lambda(\ g * \mathfrak{b}(\mathbf{A}^{k+1}) + g * \mathfrak{c}(\mathbf{A}^{k+1})\ )
\end{aligned}$$

lo cual, por notación será

$$\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A}) = \alpha\mathfrak{b}_{k+1}(\mathbf{A}) + \beta\mathfrak{c}_{k+1}(\mathbf{A}) + \lambda(\ g * \mathfrak{b}_{k+1}(\mathbf{A}) + g * \mathfrak{c}_{k+1}(\mathbf{A})).$$

Pero ahora bien, en virtud de la proposición principal se tendrá que

$$\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A}) = \alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A})T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A})T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} + \lambda(\, g * \mathfrak{b}(\mathbf{A})T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A} + g * \mathfrak{c}(\mathbf{A})T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}\,),$$

esto es

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A}) &= T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}(\alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}) + \lambda(\, g * \mathfrak{b}(\mathbf{A}) + g * \mathfrak{c}(\mathbf{A})) \\ &= T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}(\alpha\mathfrak{b}(\mathbf{A}) + \beta\mathfrak{c}(\mathbf{A}) + \lambda\, g * (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathbf{A})),\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}\ \mathfrak{f}(\mathbf{A}),$$

con lo que

$$\mathfrak{f}_{k+1}(\mathbf{A}) /\ \mathfrak{f}(\mathbf{A}) = T_r\mathbf{S}^k\mathbf{A}.$$

Esto completa la prueba del teorema principal. ■

8. APLICACIÓN

A continuación se da una aplicación del teorema principal de este trabajo.

Antes de proponer la aplicación se dan algunas definiciones de utilidad para el propósito a desarrollar.

Definición 8.1. *Se define el **grupo unitario** en dimensión $n \times n$ como*

$$\mathbf{U}(n) := \{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n} : \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}\},$$

donde $\mathbf{A}^*$ denota la adjunta de la matriz $\mathbf{A}$; esto es, $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^t$, es decir, la transpuesta de la conjugada de $\mathbf{A}$.
*Así también, se define el **grupo especial unitario** en dimensión $n \times n$ como:*

$$\mathbf{SU}(n) := \{\mathbf{A} \in \mathbf{U}(n) : det\mathbf{A} = 1\}.$$

Definición 8.2. *Sea $\mathbb{H}$ un grupo finito, entonces se define el orden $|\mathbb{H}|$ de $\mathbb{H}$ como el número de elementos en $\mathbb{H}$.*
Así también se define el orden de un elemento $g \in \mathbb{H}$, como el menor entero positivo m tal que $g^m = e$, donde " e " denota el elemento identidad del grupo $\mathbb{H}$. Además $g^n = e$ sí y sólo sí n es un múltiplo de m.

Definición 8.3. *Una aplicación $\mathfrak{f} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ entre dos grupos se llama **homomorfismo de grupo** si*

$$\mathfrak{f}(x \bullet y) = \mathfrak{f}(x) * \mathfrak{f}(y),$$

donde $(\bullet)$ denota la operación del grupo $\mathbb{G}$ y $(*)$ la operación del grupo $\mathbb{H}$.

Definición 8.4. *Sea $\mathbf{G}$ un grupo y sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathbf{V})$ se dice **representación** del grupo $\mathbb{G}$ sobre el espacio representación $\mathbf{V}$.*

Ahora bien, para $k = 0$, se denota por $\mathbf{E}_0 = \mathbb{C}$ a la representación trivial de $\mathbf{SU}(2)$ sobre $\mathbb{C}$.

Para $k = 1$, $\mathbf{E}_1 = \mathbb{C}^2$ concida como representación estandar de $\mathbf{SU}(2)$ sobre $\mathbb{C}$.

Para $k \geq 2$, se denota $\mathbf{E}_k : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathbf{S}^k\mathbf{E}_1)$ como una representación de $\mathbf{SU}(2)$ sobre el espacio representación $\mathbf{S}^k\mathbf{E}_1$, donde $\mathbf{S}^k\mathbf{E}_1$ denota la k-ésima potencia simétrica definida como en (1).

Sobre estas representaciones para $\mathbf{SU}(2)$ se tiene lo siguiente:

Sea Γ un subgrupo finito de **SU**(2).($\Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$, recuérdese la definición (5,2))

Considérese la restricción $\mathbb{E}_k\mid_\Gamma$ y sea

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{E}_k} &: \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longrightarrow \chi_{\mathbb{E}_k}(g) := T_r\mathbf{S}^k(g), \end{aligned}$$

(conocida como el carácter de $\mathbb{E}_k$) para todo $g \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$.

Se denota c_Γ como el **mínimo común múltiplo** de los distintos ordenes de elementos g de Γ; esto es $c_\Gamma := m.c.m\{|g| : g \in \Gamma\}$ (donde, $|g|$ denota el orden de un elemento $g \in \Gamma$). Nótese que c_Γ es un número finito por ser Γ un grupo finito. c_Γ se conoce como **exponente** del grupo Γ. El teorema principal de este trabajo puede ser usado para mostrar que no siempre que aumente la k- ésima potencia simétrica de una matriz aumenta su traza; esto se expresa así:

Proposición 8.1. *Sea Γ un subgrupo finito de* SU(2). *Sea $g \in \Gamma$ con $g \neq \pm\mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ denota el elemento idéntico de $\Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$.*

Si $k \equiv m \mod c_\Gamma$, entonces

$$\chi_{\mathbb{E}_k}(g) = \chi_{\mathbb{E}_m}(g),$$

para cada $g \in \Gamma$.

Demostración. Sea $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$, con $g \neq \pm\mathbb{I}$ y orden $|g| < +\infty$. Para demostrar la afirmación de la proposición (8.1) se hace lo siguiente:

1. Supóngase que $b \neq 0$ ó $c \neq 0$. Se demuestra la afirmación con $b \neq 0$. (el caso $c \neq 0$ es análogo)

   En efecto: Supongase que $k \equiv m \mod c_\Gamma$. Entonces,

   $$c_\Gamma \mid k - m. \tag{40}$$

   Pero ahora bien, por la forma como se ha definido c_Γ se tiene que

   $$|g| \mid c_\Gamma, \tag{41}$$

   para cada $g \in \Gamma$. (40) y (41) implican que

   $$|g| \mid k - m.$$

Esto último significa que existe un $z \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$k - m = |g|z,$$

o bien,

$$k = |g|z + m. \tag{42}$$

Ahora, por definición, para cada $g \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$ se cumple que:

$$\mathfrak{b}_{k+1}(g) = \mathfrak{b}(g^{k+1}),$$

Luego, por (42) se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{k+1}(g) &= \mathfrak{b}(g^{k+1})\\ &= \mathfrak{b}(g^{|g|z+(m+1)})\\ &= \mathfrak{b}((g^{|g|})^{z} g^{m+1})\\ &= \mathfrak{b}(\mathbb{I}\ g^{m+1})\end{aligned}$$

(puesto que $g^{|g|} = \mathbb{I} \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$)

$$\begin{aligned}&= \mathfrak{b}(g^{m+1})\\ &= \mathfrak{b}_{m+1}(g).\end{aligned} \tag{43}$$

Por tanto, en virtud del teorema principal, para el caso en que $\mathfrak{f}$ es la función coordenada sobre la entrada (1,2) se tiene que:

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{E}_k}(g) &= T_r\mathbf{S}^k(g) && \text{definición}\\ &= \mathfrak{b}_{k+1}(g)/\mathfrak{b}(g) && \text{por el teorema principal}\\ &= \mathfrak{b}_{m+1}(g)/\mathfrak{b}(g) && \text{en virtud de (43)}\\ &= T_r\mathbf{S}^m g && \text{nuevamente, usando el teorema principal}\\ &= \chi_{\mathbf{E}_m}(g) && \text{definición.}\end{aligned}$$

2. Si $g = \begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix} \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$, entonces se considera una matriz $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix} \in \Gamma \leq \mathbf{SU}(2)$ que no sea diagonal tal que $\mathbb{P}^{-1}\ g\ \mathbb{P} = \mathbf{Q}$, donde $\mathfrak{b}(\mathbf{Q}) \neq 0$ ó $\mathfrak{c}(\mathbf{Q}) \neq 0$. Luego, como $\chi_{\mathbf{E}_k}$ es invariante por conjugación (por la forma como está definida), entonces

$\chi_{E_k}(\mathbb{P}^{-1}\ g\ \mathbb{P}) = \chi_{E_k}(g)$; esto es,

$$\chi_{E_k}(\mathbb{Q}) = \chi_{E_k}(g) \tag{44}$$

" Nótese que $\mathbb{Q} \in \Gamma \leq \mathbb{SU}(2)$ por ser Γ un grupo en sí mismo y $\mathbb{P}$, g pertenecen a Γ. Además, $|\mathbb{Q}| = |g|$. "

Así las cosas, supuesto que $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}) \neq 0$, (si $\mathfrak{c}(\mathbb{Q}) \neq 0$ es análogo) se tiene por la parte (1.) que

$$\chi_{E_k}(\mathbb{Q}) = \chi_{E_m}(\mathbb{Q}).$$

Esto último es equivalente por (44) a:

$$\chi_{E_k}(g) = \chi_{E_m}(g).$$

Así, se completa la prueba de la proposición (7.1) para cada $g \in \Gamma \leq \mathbb{SU}(2)$.

∎

Referencias

[1] APOSTOL. T . M, **Calculus Vol** I **y** II. Editorial Reverté, S.A.

[2] BROCKER, T y DIECK, T, Representation of Compact Lie Groups. Graduate Texts in Mathematics 98. Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] CISNEROS, JL, The η-invariant of twisted Dirac operators of S^3/Γ. Geom. Dedicata, 84:207-228, 2001. Larsen, An Introduction to the theory of multipliers, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] CISNEROS, JL, An invariant of matrices 2×2. Electronic Journal of Linear Algebra. Vol 13, pp 146-152, June 2005.

[5] KARLHEINZ,SPINDLER, Abstract algebra whit applications. ISBN 0-8247-9144-4(Vol I) y ISBN 0-8247-9159-2(Vol II).

53

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

AN INVARIANT OF 2×2 MATRICES*

JOSÉ LUIS CISNEROS-MOLINA†

Abstract. Let W be the space of 2×2 matrices over a field K. Let f be any linear function on W that kills scalar matrices. Let $A \in W$ and define $f_k(A) = f(A^k)$. Then the quantity $f_{k+1}(A)/f(A)$ is invariant under conjugation and moreover $f_{k+1}(A)/f(A) = \operatorname{trace} S^k A$, where $S^k A$ is the k-th symmetric power of A, that is, the matrix giving the action of A on homogeneous polynomials of degree k.

Key words. Matrix invariants, Power of a matrix, Trace, Symmetric Power of a Matrix.

AMS subject classifications. 15A72, 15A69.

1. Introduction. Given a matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ with $b \neq 0$, denote its k-th power by $A^k = \left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{smallmatrix}\right)$. The present paper proves that the quantity b_{k+1}/b is invariant under conjugation showing that it is equal to the invariant $\operatorname{trace} S^k A$, where $S^k A$ is the k-th symmetric power of A, that is, the matrix giving the action of A on homogeneous polynomials of degree k. This observation, although elementary, seems not to be in the literature or to be known.

The author originally proved this result by direct combinatorial computation of both quantities in terms of the coefficients $a, \dots, d$. This proof does not give any *a priori* reason why b_{k+1}/b is invariant.

Several people, after showing them the result, have given different proofs, in particular, Robert Guralnick and Alastair King. Robert Guralnick also pointed out to me that the result was also true for any linear function that kills the scalar matrices, as stated in Theorem 2.1 and in the abstract.

The natural question is to ask if this result can be generalized to $n \times n$ matrices, that is, given an $n \times n$ matrix A, can $\operatorname{trace} S^k A$ be written in terms of some coefficient of A^{k+1} and the corresponding coefficient in A? For an $n \times n$ matrix A, are there other invariant quantities given by coefficients of A^{k+1}?

In Section 2 we give some notation and state the main theorem (Theorem 2.1). We also state the result for the particular case when the function is the coordinate function on the 1,2 entry (Proposition 2.2) and we show that it has as a corollary the general case. In Section 3 we present several proofs of Proposition 2.2, the original one and the other proofs communicated to me, to show the different approaches. Finally in the last section we give an application.

2. The main result. Let W be the vector space of 2 x 2 matrices over a field K. Let $A \in W$, the matrix A acts naturally by matrix multiplication on K^2. The k-symmetric power $S^k K^2$ is isomorphic to the space of homogeneous polynomials of degree k in two variables x and y. The k-th symmetric power $S^k A$ of A is the matrix

*Received by the editors 23 August 2003. Accepted for publication 31 May 2005. Handling Editor: Robert Guralnick.

†Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Cuernavaca, A.P. 6-60, C.P. 62131, Cuernavaca, Morelos, Mexico (jlcm@matcuer.unam.mx).

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

of the linear action of A on S^kK^2 given by

$$(A \cdot P)(z) = P(zA), \tag{2.1}$$

where

$$P \in S^kK^2, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad z = (x, y) \quad \text{and} \quad zA = (ax + cy, bx + dy).$$

The monomials

$$\mathrm{P}_j(x, y) = x^{k-j}y^j, \quad 0 \leq j \leq k,$$

give a basis for the space S^kK^2.

Let $K[W]$ be the ring of polynomial functions on W. Denote by S the subset of $K[W]$ consisting of linear functions that kill scalar matrices, that is, $f \in S$ if and only if it is linear and $f((\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix})) = 0$ for any $\lambda \in K$. The group $G = \mathrm{PGL}(2, K)$ acts on W by conjugation and this action induces an action on $K[W]$ given by

$$(g \cdot f)(A) = f(g^{-1}Ag), \qquad A \in W \text{ and } g \in G.$$

The main result of the paper is the following

THEOREM 2.1. *Let $A \in W$ and $f \in S$. Put $f_k(A) = f(A^k)$. If $f(A) \neq 0$ then*

1. *$f_k(A)/f(A)$ is G-invariant. In other words, $f_k(A)/f(A)$ belongs to the invariant ring $K[W]^G$.*
2. *$f_{k+1}(A)/f(A) = \operatorname{trace} S^kA$.*

Theorem 2.1 is an immediate consequence of the following proposition for the case when f is the coordinate function on the 1,2 entry or on the 2,1 entry.

PROPOSITION 2.2. *Let b be the coordinate function on W on the 1,2 entry and $b_k(A) = b(A^k)$. Let c and c_k be the corresponding functions for the 2,1 entry. Then*

1. *$b_k/b = c_k/c$ is G-invariant.*
2. *$b_{k+1}(A)/b(A) = \operatorname{trace} S^kA$.*

Proof of Theorem 2.1. Once the proposition is proved for the coordinate functions b and c, the theorem is clearly true for any G-translate (and this is a linear condition), whence true for the span of that orbit that is precisely S. □

3. Four proofs. In this section we give four proofs of Proposition 2.2. The first one is the most efficient, is due to Jeremy Rickard and it was communicated to me by Alastair King. The second one is the original combinatorial proof. These two proofs show that b_{k+1}/b is equal to $\operatorname{trace} S^kA$ and therefore invariant, but they do not give any *a priori* reason why b_{k+1}/b is invariant.

The third one is an algebraic proof by Robert Guralnick, which is valid in all characteristics; the fourth one is by Alastair King, which is of a more geometrical nature. In both of the latter two proofs, it is first shown that b_{k+1}/b is invariant and afterward that $b_{k+1}/b = \operatorname{trace} S^kA$.

In the second part of the fourth proof it is not necessary to know that b_{k+1}/b is invariant, so it is in itself a proof of Proposition 2.2. It is due to M.S. Narasimhan and was communicated to me by Alastair King.

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

First proof of Proposition 2.2. Observe that by continuity is enough to prove the result for diagonalizable matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{xw - zy} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

Then, since A^{k+1} has eigenvalues p^{k+1} and q^{k+1} one easily computes that

$$b_{k+1}/b = \frac{q^{k+1} - p^{k+1}}{q - p},$$

which is well known to be trace $S^k A$ and therefore invariant.

Second proof of Proposition 2.2. In order to prove Proposition 2.2 we need the following lemmas. The first lemma, given the matrix A, expresses trace $S^k A$ in terms of the entries of A.

LEMMA 3.1. *Let* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. *Then*

$$\operatorname{trace} S^k A = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{\min\{k-j,j\}} \binom{k-j}{i} \binom{j}{j-i} a^{k-j-i} b^i c^i d^{j-i}.$$

Proof. Consider the basis of $S^k K^2$ given by the monomials P_j, $0 \le j \le k$. Use the action of A on P_j defined in (2.1) to compute the matrix of the automorphism of $S^k K^2$ given by the action of A and then take the trace. □

The second lemma expresses the n-th power of A in terms of its entries.

LEMMA 3.2. *Consider the matrix* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. *Denote by* a_n, b_n, c_n *and* d_n *the corresponding entries of the matrix* A^n, *i.e.* $A^n = \left(\begin{smallmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{smallmatrix}\right)$. *Then*

$$a_n = a^n + \sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s} \binom{n-s-m}{s} \binom{m+s-1}{m} a^{n-2s-m} b^s c^s d^m,$$

$$b_n = \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s-1} \binom{n-s-m-1}{s} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m-1} b^{s+1} c^s d^m,$$

$$c_n = \sum_{s=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s-1} \binom{n-s-m-1}{s} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m-1} b^s c^{s+1} d^m,$$

$$d_n = d^n + \sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{n-2s} \binom{n-s-m-1}{s-1} \binom{m+s}{m} a^{n-2s-m} b^s c^s d^m,$$

where $[x]$ *denotes the integral part of* x.

Proof. Since $A^n = A^{n-1}A = \left(\begin{smallmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ one gets the recursive equations

$$a_n = aa_{n-1} + cb_{n-1}, \qquad c_n = ac_{n-1} + cd_{n-1},$$
$$b_n = ba_{n-1} + db_{n-1}, \qquad d_n = bc_{n-1} + dd_{n-1}.$$

56

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA
www.math.technion.ac.il/iic/ela

Using this equations, one can find which kind of terms appear in the entries of A^n. Next, using elementary combinatorics one can count how many times each term appears and this is given by the binomial coefficients in the formulae. □

Proof of Proposition 2.2. Combining the formula in Lemma 3.1 and some of the formulae in Lemma 3.2 we show that $b_{k+1}/b = c_{k+1}/c = \text{trace}\, S^k A$. Just put $n = k+1$, $s = i$ and $m = j - i$ in the expression of b_n (or c_n) in Lemma 3.2 and compare with the formula in Lemma 3.1. To see that in both cases i and j take the same values, from the expression of b_n (or c_n) in Proposition 3.2 and taking $n = k+1$, $s = i$ and $m = j - i$ we have that

$$0 \le i \le [\frac{k}{2}], \tag{3.1}$$

$$0 \le j - i \le k - 2i, \tag{3.2}$$

From (3.1) we have

$$0 \le i. \tag{3.3}$$

From (3.2) we have

$$i \le j, \tag{3.4}$$

$$i \le k - j. \tag{3.5}$$

From (3.3), (3.4) and (3.5) we have that

$$0 \le i \le \min\{j, k-j\}.$$

From (3.3) and (3.5) we have that

$$j \le i + j \le k. \tag{3.6}$$

Finally, by (3.3), (3.4) and (3.6)

$$0 \le j \le k. \qquad \square$$

Third proof of Proposition 2.2. Let W, b, b_k, c, c_k and G as in Section 2.

1. Let B the Borel subgroup of G of lower triangular matrices with U the unipotent radical, i.e., matrices of the form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)$. It is easy to see by direct computation that $b_k(uAu^{-1}) = b_k(A)$ for every $u \in U$ and therefore b_k and b are each U-invariant.
   Let T be the diagonal torus, i.e. matrices of the form $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$. Then both b and b_k are eigenfunctions with eigenvalue $r^{-1}s$ (for the diagonal matrix $diag(r, s)$) and so b_k/b is T-invariant. Since b_k/b is both U-invariant and T-invariant it is also B-invariant.
   Similarly, c_k/c is invariant under the opposite Borel (upper triangular matrices). So it suffices to show that $b_k/b = c_k/c$ (for then these are invariant under both Borels which generate G).

57

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

We use induction on k. If $k = 1$, this is clear.
Write

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

and

$$A^j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

By induction, $b_{k-1}/b = c_{k-1}/c$ or $b_{k-1}c = bc_{k-1}$. So $A^k = A^{k-1}A$, hence $b_k = a_{k-1}b + b_{k-1}d$.
Also, $A^k = AA^{k-1}$, therefore $c_k = a_{k-1}c + c_{k-1}d$ so $b_k/b = a_{k-1} + d(b_{k-1}/b)$ and $c_k/c = a_{k-1} + d(c_{k-1}/c)$, whence the result by induction.

2. $b_{k+1}(A)/b(A) = \text{trace}(S^k(A))$ when $b(A)$ is nonzero.
Consider A with $b(A)$ nonzero. Since b_k/b is invariant, we can conjugate A and assume that it is upper triangular with $b(A) = 1$ and diagonal entries r, s say. It is easy to prove by induction that

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} r^{k+1} & \sum_{i=0}^{k} r^i s^{k-i} \\ 0 & s^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Hence we have that $b_{k+1}(A) = tr(S^k(A)) = \sum_{i=0}^{k} r^i s^{k-i}$. □

Fourth proof of Proposition 2.2.

1. Let V be a 2-dimensional vector space and identify W with $End(V)$. Let $A \in End(V)$. Then the natural interpretation of the off-diagonal entry b is as follows:
Let S be a subspace of V (spanned by the second basis element) $j: S \to V$ the inclusion and $q: V \to V/S$ the quotient. Then $b = qAj: S \to V/S$. Likewise $b_{k+1} = qA^{k+1}j: S \to V/S$, so the ratio is at least a well-defined scalar, but *a priori* depending on S.
Now globalize over the projective line $P(V)$ that parametrizes all such S.
Then j and q become $J: O(-1) \to V \otimes O$ and $Q: V \otimes O \to O(1)$, where $O(-1)$ is the tautological line bundle, O the trivial bundle and $O(1)$ the hyperplane bundle (dual to $O(-1)$).
Considering $A \in End(V \otimes O)$, we have sections $B = QAJ$ and $B_{k+1} = QA^{k+1}J$ of $O(2) \cong Hom(O(-1), O(1))$, which give b and b_{k+1} for each S. The zeros of these sections occur at the eigenspaces of A and A^{k+1}, but these are the same, thus B_{k+1} is a constant multiple of B. In other words, b_{k+1} is a constant multiple of b, independent of S. This shows that $b_k(A)/b(A)$ is invariant.
2. $b_{k+1}(A)/b(A) = \text{trace}(S^k A)$ when $b(A)$ is nonzero.
From Cayley-Hamilton one has that $A^{k+2} - (\text{trace}\, A)A^{k+1} + (\det A)A^k = 0$ hence

$$b_{k+2}(A)/b(A) - (\text{trace}\, A)b_{k+1}(A)/b(A) + (\det A)b_k(A)/b(A) = 0.$$

58

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

On the other hand, the symmetric powers of V satisfy the 'fusion rules'

$$V \otimes S^k V = S^{k+1} V \oplus \Lambda^2 V \otimes S^{k-1} V,$$

taking traces and remembering that $\det A = \operatorname{trace}(\Lambda^2 A)$, show that the quantity $\operatorname{trace}(S^k A)$ satisfies precisely the same recurrence as $b_{k+1}(A)/b(A)$; since they both start with $b_2(A)/b(A) = \operatorname{trace} A$ and $b_1(A)/b(A) = 1$, they must be equal. □

4. Application. The main result of the present paper was found computing the characters of some representations of finite subgroups of SU(2).

For each $k = 0, 1, \ldots$, there is a complex irreducible representation E_k of SU(2) of dimension $k + 1$. We can describe this representations as follows. Firstly, $E_0 = \mathbb{C}$ is the trivial representation and E_1 is the standard representation on $\mathbb{C}^2$ given by matrix multiplication. For $k \geq 2$, the representation space of the representation E_k is the k-th symmetric power $S^k E_1$. Let Γ be a finite subgroup of SU(2). Consider the restriction of E_k to Γ which we shall denote by $E_k|_\Gamma$ and let be $\chi_{E_k}: \Gamma \to \mathbb{C}$ its character given by

$$\chi_k(g) = \operatorname{trace}(S^k g)$$

for every $g \in \Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$.

Let c_Γ be the least common multiple of the different orders of the elements of Γ. The number c_Γ is called the **exponent** of the group Γ. Theorem 2.1 can be used to prove the following result.

PROPOSITION 4.1. *Let* Γ *be a finite subgroup of* SU(2). *Let* $g \in \Gamma$ *with* $g \neq \pm I$, *where* I *is the identity. If* $k \equiv l \mod c_\Gamma$, *then*

$$\chi_{E_k}(g) = \chi_{E_l}(g).$$

Proof. Let $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$ of finite order $|g|$ with $g \neq \pm I$. Without loss of generality suppose that g is not diagonal (if it is, conjugate by a non-diagonal matrix to get a non-diagonal matrix and since characters are constant on conjugacy classes we get the same result). If $k \equiv l \mod c_\Gamma$ we have that $k \equiv l \mod |g|$ and then $b_{k+1} = b_{l+1}$. Thus by Theorem 2.1

$$\chi_k(g) = b_{k+1}/b = b_{l+1}/b = \chi_l(g). \qquad \square$$

REMARK 4.2. Note that Proposition 4.1 is also a consequence of the following well-known formula $\chi E_k(g) = \sum_{l=0}^{k} e^{it(k-2l)}$ for the characters χ_{E_k} [1, p. 86] where $e^{\pm it}$ are the eigenvalues of g.

Some of the applications of Proposition 4.1 are the following. In first place, it was used in [2] to find an explicit formula for the inner product $\langle \chi_{E_k}, \chi_\alpha \rangle$ of χ_{E_k} with the character of any finite dimensional representation α of Γ. Such formula [2, Prop. 4.1] was used to compute the multiplicities of the eigenvalues of the Dirac operator of S^3/Γ twisted by α [2, Thm. 3.2]. On the other hand, the aforementioned formula

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 13, pp. 146-152, June 2005

ELA

can also be used for the question mentioned by Kostant [3, 4], in relation with the McKay correspondence, of decomposing $E_K|_\Gamma$ into Γ-irreducibles. More specifically, if $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ is the set of equivalence classes of irreducible representations of Γ, then $\mu_{tk} = \langle \chi_{E_k}, \chi_{\alpha_t} \rangle$ is the multiplicity of α_t in $E_k|_\Gamma$.

Acknowledgment. I want to thank Luis Felipe González, Paulo Sousa and Haydée Aguilar for the helpful conversations I had with them. I also want to thank Alastair King for his comments to improve the paper and for his proof of the result. Finally, I would like to thank Robert Guralnick for his comments, his interest in the paper and his proof of the result.

REFERENCES

[1] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics 98. Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] José Luis Cisneros-Molina. The η-invariant of twisted Dirac operators of S^3/Γ. *Geom. Dedicata*, 84:207–228, 2001.

[3] Bertram Kostant. On finite subgroups of $SU(2)$, simple Lie algebras, and the McKay correspondence. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 81:5275–5277, 1984.

[4] Bertram Kostant. The McKay correspondence, the Coxeter element and representation theory. In *Elie Cartan e le mathematique d'ajourd'hui*, volume hors série of *Astérisque*, pp. 209–255. Soc. Math. France, 1985.

59

6245