TRES ENFOQUES PARA ENSEÑAR LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL SÉPTIMO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA

ADRIANA LUCÍA PÉREZ SCHMALBACH

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA AVANZADA

CARTAGENA

2011

TRES ENFOQUES PARA ENSEÑAR LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL SÉPTIMO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA

TRABAJO DE GRADO PARA OBTRNER EL TÍTULO DE ESPECIALISTA EN MATEMÁTICA AVANZADA

ADRIANA LUCÍA PÉREZ SCHMALBACH

ALFONSO GOMEZ MULETT

ASESOR

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA AVANZADA

CARTAGENA

2011

3

RECTOR

VICE-RECTOR

SECRETARIA GENERAL

DIRECTOR DE POSTGRADO

Dr. Boris Jhonson Restrepo

Cartagena (Bolívar), 2011

ÍNDICE

	pág
INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO I: CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES	7
1.1. Antecedentes históricos	7
1.2.Construcción de los Números Racionales a partir de clases de equivalencia de los Números Enteros	13
1.3.Los Números Racionales según las cortaduras de Dedekind	16
1.4.Los números racionales en el discurso actual	18
CAPÍTULO II: ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES	22
2.1. Enfoque parte-todo	24
2.2. Enfoque como operador	25
2.3. Enfoque como medida	27
2.4. Números racionales, estándares y competencias	28
CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE RESULTADOS	33
3.1. El proceso	33
3.2. Resultados	34
CONCLUSIONES	46
BIBLIOGRAFÍA	51

INTRODUCCION

El interés del presente trabajo estuvo centrado en el análisis de los problemas que emergen en la enseñanza de los sistemas numéricos, en particular en el sistema de los números racionales en el séptimo grado de la educación básica de acuerdo con los enfoques: parte-todo, operador y medida. Debido a que a pesar de existir muchas investigaciones al respecto, los problemas aún persisten, y por lo menos, en nuestro medio es importante averiguar qué está pasando en donde desarrollamos nuestra labor pedagógica cuando se utilizan los enfoques relacionados.

La comprensión del concepto de fracción es uno de los objetivos fundamentales que se deben alcanzar desde los primeros años de la educación básica. Según los estándares básicos de competencias en Matemática del Ministerio de educación Nacional, de primero a tercero se encuentra el estándar: describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes; de cuarto a quinto, se encuentra el estándar: Interpreta las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones y utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono éstas dos notaciones con la de los porcentajes; y según éstos estándares básicos de competencias en Matemática, al terminar el séptimo grado, el estudiante debe estar en capacidad de utilizar números racionales en sus distintas expresiones(fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida; además, reconocer y generalizar propiedades de las relaciones entre números racionales(simétrica, transitiva, etc.), y de las operaciones entre ellos(conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos. Por ésto es innegable la gran importancia que tiene que el estudiante de séptimo grado logre la comprensión del concepto de número racional y esté en capacidad de resolver situaciones de la vida cotidiana en las que éstos se involucren; y por tanto, el docente como facilitador, debe contribuir, para que el alcance de éste logro, se de por parte del estudiante; motivo por el cual se decidió hacer un estudio de la situación con el fin de elaborar, en un futuro cercano, propuestas que contribuyan a solucionarla.

Investigaciones sobre el estudio y la comprensión de las fracciones son muchas, entre algunas de ellas se pueden citar las de Díaz (1998), Morcote (1999) y Gallardo (2010), quienes coinciden en afirmar que algunos estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de número racional; además de esto, es de amplio conocimiento, que los textos escolares y las creencias de los profesores sobre la matemática repercuten en los procesos de enseñanza y aprendizaje hasta el punto de determinar el currículo de matemática.

Éste trabajo se enmarcó en la didáctica de la matemática; mediante él se hizo un acercamiento a la comprensión del concepto de número racional a partir de los tres enfoques mencionados, y se exploró las concepciones que sobre los números racionales tenían un grupo de docentes, y la forma como debían ser enseñados según ellos y se averiguó a través de los libros de texto, la enseñanza que se da de estos conceptos.

El presente trabajo está estructurado en tres capítulos que resumidos tratan lo siguiente: parte teórica de la construcción de los números racionales desde el punto de vista matemático; enfoques para la enseñanza de los números racionales, desde lo teórico de la matemática y desde la enseñanza; metodología aplicada y resultados que se obtuvieron del análisis de los libros de texto y de las concepciones de los profesores. Finalmente se presentan conclusiones y la bibliografía.

CAPÍTULO I

CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

1.1. Antecedentes históricos

La idea de número como elemento de un conjunto no existe en el siglo XVIII. Por la misma razón, un segmento no puede "separarse" de sus extremos y siempre los incluye. Los números eran interpretados como medidas. En *Arithmetica universalis* (1707) Newton escribe:

> *Por* número *entendemos no tanto una multitud de cantidades, como la razón abstracta de cualquier cantidad a otra cantidad de la misma clase que tomamos por unidad. Un entero es lo que es medido por la unidad, una fracción, aquello a lo que una parte submúltiplo de la unidad mide, y un surd, aquello que es inconmensurable con la unidad.*

Esta interpretación de los números se corresponde con la consideración de la matemática en los siglos XVII y XVIII como una Ciencia de la Naturaleza y, en consecuencia, los objetos matemáticos deben estar vinculados, directa o indirectamente, con la realidad física. Por ello, solamente se consideran como "verdaderos números" los que representan el resultado de una medida: los enteros y los racionales positivos. Los demás números (negativos, el 0 y los imaginarios) son necesarios y útiles para los cálculos, pero no son considerados "verdaderos números" son "ficticios". Los racionales e irracionales positivos son llamados "números reales" en oposición a los números imaginarios.

Babilonios y griegos desarrollaron elevados conocimientos de matemática, para poder realizar importantes obras agrícolas y arquitectónicas, los babilonios tuvieron que desarrollar, hacia el siglo XXII a. de C., un sistema de numeración útil, se sabe que su sistema de numeración era de base 60 (a diferencia del actual, que es de base 10); es decir, dividían la unidad en 60 partes (de forma similar a como dividimos una hora en 60 minutos). Los sumerios también utilizaban este sistema de numeración, y realizaban complicados cálculos aritméticos.

Las fracciones eran conocidas desde La Antigüedad, pero recibieron notaciones complicadas a falta de un sistema de numeración bien concebido, y eran inadecuadas para realizar operaciones. En un principio, las fracciones no eran consideradas como auténticos números, no eran más que relaciones entre números enteros. Era debido a que en muchas civilizaciones se considerara a la unidad como un dios, y por tanto no podía ser dividido. Cuando se desarrolló la aritmética y el cálculo, se vio que estaban sometidas a las mismas reglas que el resto de los números y podían considerarse como tales.

El origen histórico de los números racionales se encuentra en la necesidad de medir, lo que lleva a proponer expresiones numéricas para llevar a cabo la operación. Al indagar sobre la historia y el origen de los números racionales, se encuentra que en sus inicios se hablaba de fracciones. Los números fraccionarios surgen a partir de la comparación que se hace de cantidades enteras, es decir, de las razones. Cuando se determina una razón y se halla el cociente de los enteros que la forman, no siempre es posible obtener otro entero. En éste caso el resultado es un número fraccionario.

Cuando se debía realizar una repartición exacta, no se presentaban problemas de cálculo; sin embargo, si había que dividir 42 panes entre 10 personas, la operación se complicaba. En estos casos, los babilonios utilizaban el número decimal (4,2), mientras que los egipcios, con un sistema de numeración más primitivo, necesitaban de las fracciones para expresar estas divisiones no exactas. Conocían las fracciones de numerador 1 y de denominador 2, 3, 4, etc., además de las fracciones 2 / 3 y 3 / 4. Según Heródoto los egipcios son los padres de la Geometría.

Los números fraccionarios son utilizados desde la antigüedad, tal como lo muestra el papiro de Rhind, el documento más antiguo que existe de las matemáticas egipcias, fue escrito bajo el reinado del rey Ekenenre Apopi, hacia el 1600 a. de C., y al parecer, es una transcripción de un escrito más antiguo, que se remontaría al reinado de Amenemhat o Amenemes III (XII dinastía, 1850-1800 a. de J. C.). En este papiro se observan unas reglas para realizar sumas y restas de fracciones; también en él aparecen operaciones aritméticas que incluyen fracciones unitarias. En el Antiguo Egipto ya se calculaba utilizando aquellas cuyos denominadores son enteros positivos, como: cualquier fracción que escribimos con un numerador no unitario, los egipcios la escribían como suma de fracciones unitarias distintas, de ahí que las sumas de fracciones unitarias se conozcan como fracción egipcia. Éste papiro de Rhind también contiene una tabla de conversión de partes de la unidad a las fracciones egipcias. Es el equivalente con más de 3000 años de antigüedad de nuestras tablas de multiplicar, sólo que para trabajar con fracciones.

El jeroglífico de una boca abierta () denotaba la barra de fracción (-) y significaba parte o partido; y un jeroglífico numérico escrito debajo de la boca abierta, denotaba el denominador de la fracción. El numerador no se ponía por ser siempre 1.

Los chinos también conocían las fracciones, y sabían reducir a común denominador. Llamaban "hijo" al numerador, y "madre" al denominador. Pero tenían preferencia por su escritura decimal. Pero, entre todos los pueblos de la antigüedad, fueron los griegos los que realizaron las aportaciones más valiosas al desarrollo del concepto de número. Para los griegos, los números tenían un claro significado geométrico, iban asociados a medidas (longitud de un segmento, área de una superficie, volumen de un cuerpo). Para los Pitagóricos (S.VI a.C.) todo era explicable en términos de los números naturales y sus razones, los números racionales.

Los egipcios utilizaban sumas de fracciones unidad (ŏ), junto con la fracción, para expresar todas las fracciones; mientras que ellos usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1, alrededor del año 1000 a.C, los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60 y los romanos aquellas cuyo denominador era 12. Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval.

En el siglo XIII Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, famoso, entre otras cosas por la serie de Fibonacci y autor de la obra Liber Abaci (Libro del ábaco) publicada en 1.202, después de viajar al norte de África y a Oriente, donde aprendió el manejo del sistema de numeración indoarábigo, introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones.

Con respecto a la escritura de los números racionales encontramos que se expresan de dos formas diferentes, en forma de fracción, y con notación decimal. Hacia el año 900, los matemáticos árabes ampliaron el sistema indio de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales. La escritura en forma de fracción tiene para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes, como el tiempo, da lugar a la notación decimal (Centeno, 1988).

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. La matemática árabe da pasos importantes en el manejo de los números racionales, introduciendo una notación parecida a la actual. Simon Stevin (1548-1620), ingeniero y matemático nacido en Brujas; en el siglo XVI establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal, dando un fuerte empuje a su aceptación generalizada. Desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada; así para 456,765 escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3); fue precisamente así como se franqueó el paso decisivo hacia nuestra notación actual escribiendo los números decimales sin denominador, sino que encerraba en un círculo, a continuación de cada dígito, la potencia de 10 que debía llevar como divisor.

El suizo *Jost Bürgi* simplificó la notación señalada, eliminando la mención al orden de las cifras y sustituyéndolo por un circulito situado en la parte superior de las unidades: 237°941. Y poco tiempo después, el cartógrafo italiano *Magini* (1555-1617), sustituyó el redondelito por el punto situado entre las unidades y las décimas, que ha perdurado hasta nuestros días. En cuanto a la coma, el primero que la utilizó fue el holandés *Willebrod Snellius*, a comienzos del siglo XVII. A través de su obra De Die Thiende (1585)(El arte del décimo), Stevin divulgó el método que permite escribir las fracciones como razones de números enteros, con denominadores potencias de diez. Así mismo, en su obra *L'Arithmetique* (1585) escribió que "no hay números inexplicables, irregulares, irracionales, Surds o absurdos", indicando con esto que todos los números debían ser tratados por igual y no hacer distinciones entre ellos como si fueran de distinta naturaleza.

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

Dando muestra de la importancia de las representaciones gráficas en la matemática, encontramos que los griegos desarrollaron una geometría basada en comparaciones (proporciones) de segmentos sin hacer referencia a valores numéricos; dado que las longitudes que expresan los números podían ser obtenidas mediante procesos geométricos sencillos, esto originó que durante 2000 años la teoría de los números reales fuese esencialmente geométrica, identificando a partir del siglo XX los números reales con los puntos de la recta, un poco después de la construcción de los reales de Dedekind.

Nuevos avances en el concepto de número real esperaron hasta los siglos XVI y XVII, con el desarrollo de la notación algebraica, lo que permitió la manipulación y operación de cantidades sin hacer referencia a segmentos y longitudes. Sin embargo, no existía aún un concepto formal de número y se seguía dando primacía a la geometría como elemento organizador del concepto de número. Incluso con el desarrollo de la geometría analítica este punto de vista se mantenía vigente, pues Descartes rechazaba la idea que la geometría pudiera fundamentarse en números, puesto que para él la nueva área era simplemente una herramienta para resolver problemas geométricos

Durante los siglos XVI y XVII el cálculo avanzó mucho aunque carecía de una base rigurosa, puesto que en el momento no se consideraba necesario el formalismo de la actualidad, y se usaban expresiones como "pequeño", "límite", "se acerca" sin una definición precisa. Esto llevó a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidente la necesidad de crear una base rigurosa para la matemática, la cual consistió de definiciones formales (aunque ciertamente técnicas) del concepto de número.

En el siglo XVIII, en el cálculo se utilizaba un conjunto de números reales sin una definición concisa, cosa que finalmente sucedió con la definición rigurosa hecha por George Cantor y su teoría de conjuntos (encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos) en 1871, por un lado, y el análisis matemático de Richard Dedekind (vecindades, entornos y cortaduras de Dedekind). Ambos matemáticos lograron la sistematización de los números reales en la historia, no de manera espontánea, sino utilizando todos los avances previos en la materia: desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weiestrass.

Desde el punto de vista didáctico metodológico, se logra hacer una clasificación de los números para ver la posición de los racionales dentro de los números reales, la cual podemos visualizar mediante el siguiente esquema:

- $\mathbb{R}$ Reales
  - $\mathbb{Q}$ Racionales
    - $\mathbb{Z}$ Enteros
      - $\mathbb{N}$ Naturales
      - Cero
      - Enteros negativos
    - Fraccionarios
  - Irracionales

Al buscar una justificación práctica para la construcción de los números racionales, se tiene que al estudiar la operación de multiplicar en los números enteros, se observa que la operación inversa, la división, no es siempre posible. Por ejemplo, $4 \div 5$ carece de sentido en los enteros. Surge, por tanto, la necesidad de extender el sistema de los números enteros, a un nuevo sistema en el que tengan sentido tales operaciones. Este nuevo sistema recibió el nombre de sistema de los números racionales, y se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$.

Se sabe que los egipcios y babilónicos hacían uso de fracciones (números racionales) en la resolución de problemas prácticos. Sin embargo, fue con el desarrollo de la matemática griega cuando se consideró el aspecto filosófico de número. Los pitagóricos descubrieron que las relaciones armónicas entre las notas musicales correspondían a cocientes de números enteros, lo que les inspiró a buscar proporciones numéricas en todas las demás cosas, y lo expresaron con la máxima "todo es número"; pero la misma escuela pitagórica (siglo V a. de C.) descubrió que sólo con los números naturales y las fracciones no pueden realizarse todas las medidas posibles. Existían pares de segmentos, como la diagonal y el lado de un pentágono regular, o la diagonal y el lado de un cuadrado, cuyo cociente de longitudes no es una fracción. Creyeron que el caos entraba en su mundo ordenado, y llamaron a tal razón "alogos" o irracional; Surgió entonces un dilema, ya que de acuerdo al principio pitagórico: todo número era racional, mas la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles no era conmensurable con los catetos, lo cual implicó que en adelante las magnitudes geométricas y las cantidades numéricas tendrían que tratarse por separado, hecho que tuvo consecuencias en el desarrollo de la matemática durante los dos milenios siguientes.

La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, construyéndolo como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros.

1.2.Construcción de los Números Racionales a partir de clases de equivalencia de los Números Enteros

Una relación $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mediante:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{si y solo si} \quad a + d = b + c$$

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia que produce en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una partición en clases de equivalencia, cada una de las cuales puede ser asociada a un único número entero y viceversa. Por ejemplo:

$$[(4, 7)] = [(2, 5)] = [(5, 8)] = [(1, 4)] = -3$$

Si admitimos el cero como número natural, podemos definir:

$$\begin{cases} [(n, 0)] = n \\ [(0, n)] = -n \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Si no se acepta el cero como número natural, y se parte, en cambio, del 1, se define entonces

$$\begin{cases} [(n+1,1)] = n \\ [(1,n+1)] = -n \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Luego el cero puede definirse como:

$$0 = [(n,n)] \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

El escoger $(n,0)$ y $(0,n)$ (o $(n+1,1)$ y $(1,n+1)$ para cuando no se acepta $0 \in \mathbb{N}$), para las definiciones anteriores es una decisión completamente arbitraria que toma en cuenta la sencillez de estos pares ordenados. Nótese que, de cualquier forma,

$$\begin{cases} [(n+m,m)] = n \\ [(m,n+m)] = -n \end{cases} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Se define pues el conjunto de los números enteros como el conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{[(a,b)]_{\sim} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

de todas las clases de equivalencia producidas por la relación $\sim$ sobre el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Esto es, $\mathbb{Z}$ es el conjunto cociente:

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

La relación de equivalencia $\sim$ define subconjuntos disyuntos en K llamados **clases de equivalencia** de la siguiente manera: dado un elemento $a \in K$, al conjunto dado por todos los elementos relacionados con a

$$[a] = \{b \in K \mid b \sim a\}$$

se le llama la clase de equivalencia asociada al elemento a. Al elemento a se le llama **representante de la clase**.

A partir de esto decimos que: un número racional es toda clase de equivalencia determinada por la relación de equivalencia definida en $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$, (siendo $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de los $\mathbb{Z}$ menos el 0), es así que, el conjunto de los números racionales es el cociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, por la relación de equivalencia (a,b) ~ (c,d) si y solo si ad=bc. De esta manera, a/b=(a,b) y c/d= (c,d). Las clases de equivalencia del conjunto cociente
$\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*/\sim$ corresponden a cada número racional; esto se interpreta diciendo que dos fracciones son equivalentes si pertenecen a la misma clase de equivalencia. Los enteros son clases de equivalencia cuyo representante es (n,1), la fracción (a,b) es equivalente a la fracción (-a,-b), de allí que menos entre menos es mas; de manera similar, mas entre menos es lo mismo que menos entre mas ya que (-a,b)~(a,-b). El conjunto $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*/\sim$ se denota con la letra Q.
En el conjunto Q se definen las operaciones binarias suma (+) y producto (•) de la siguiente manera:
(a,b) + (c,d) = (ad+bc , bd) y (a,b)• (c,d) = (ac, bd), las cuales hacen que la estructura algebraica <Q; +, •> sea un campo o cuerpo ordenado pero no completo. La relación de orden en Q es la relación <, definida como (a,b)<(c,d) si y sólo si ad<bc.

En matemáticas, un número racional es un número que puede expresarse como cociente de dos números enteros (llamados comúnmente fracciones), se escriben generalmente como $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de cero, **a** se llama numerador y **b** denominador. Es decir:

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Teniendo en cuenta la construcción expuesta, hay que reconocer que un número racional puede ser representado por diferentes fracciones, las cuales son equivalentes entre si, esto es: cada familia de fracciones define un número racional y una fracción es un representante de dicha familia. Normalmente, para representar un número racional se utiliza una fracción irreducible, que es aquella cuyo numerador y denominador son números primos entre sí o primos relativos.

Hay valores que no se pueden expresar como números racionales, tal es el caso de $\sqrt{2}$. Sin embargo es claro que se puede aproximar $\sqrt{2}$ con números racionales tanto como desee.

Podemos entonces partir al conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A y B de manera que en el conjunto A se encuentran todos los números racionales $x<\sqrt{2}$ y en B todos los números racionales tales que $x < \sqrt{2}$.

1.3. Los Números Racionales según las cortaduras de Dedekind

Richard Dedekind, tal vez el último discípulo conocido de Gauss; sintió la necesidad de elaborar una teoría de los números reales, la cual publica en la obra "Continuidad y números irracionales" (1872), en cuyo prólogo dice que lo único que le quedaba para fundamentar rigurosamente el análisis era elaborar una teoría del número real partiendo de los números racionales y utilizando sólo la aritmética; en el capítulo 1, "Propiedades de los números racionales", Dedekind parte del cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales, resaltando dos propiedades:

1. Que si $a \neq b$ existen una infinidad de números racionales entre a y b, colocando así la propiedad topológica de la densidad de los números racionales en la base del Análisis.
2. Que cada $a \in \mathbb{Q}$ induce una partición (A1, A2) de $\mathbb{Q}$, llamada cortadura, de forma que cada elemento a1 de A1 verifica $a1 \leq a$ cada elemento a2 perteneciente a A2 cumple que $a \leq a2$. Él número a puede estar en A1 o en A2 indistintamente, debiendo considerar como no esencialmente diferentes, en palabras de Dedekind, las dos cortaduras que entonces resultan.

En el concepto de cortadura va a basar Dedekind su definición de número, que, por tanto, reposa sobre la idea de conjunto infinito; encontró así pues una adecuada definición para los números reales, a partir de los números racionales.

Es decir, una cortadura de Dedekind es un par ordenado (A,B) que hace precisamente esto. Conceptualmente, la cortadura es el "espacio" que hay entre *A* y *B*. De esta manera es posible definir a $\sqrt{2}$ como (A,B) tal que A={ $x \in \mathbb{Q}$: $x^2 < 2$ } y B={ $x \in \mathbb{Q}$: $x^2 > 2$ }.

De hecho, B queda unívocamente definido por A, así que la cortadura (A,B) se reduce simplemente a A.

Las cortaduras de Dedekind son unos conjuntos de números racionales que representan la primera construcción formal del conjunto de los números reales.

Un conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind (o simplemente una cortadura) si cumple las siguientes propiedades:

- $A \neq \varnothing$.
- $A \neq \mathbb{Q}$.
- Si $a \in A$ y $b < a$ entonces $b \in A$.
- A no tiene último elemento, es decir, para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $a < a'$.

El conjunto de todas las cortaduras es (por definición) el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Si tomamos un número racional arbitrario $r \in \mathbb{Q}$, entonces la cortadura $A_r := \{a \in \mathbb{Q} : a < r\}$ se denominará cortadura racional (asociada a r).

Es evidente que a todo número racional le corresponde una cortadura racional y solamente una. Podemos establecer así una aplicación inyectiva $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ que al número racional r le asocie la cortadura racional A_r.

Dedekind se vale de la densidad de $\mathbb{Q}$ en el orden de $\mathbb{R}$, así entre el "inexistente" número real y un racional menor que él, siempre hay otro racional, por lo que considera todos los racionales menores que el real para definirlo. También se encuentra en lo dicho por Dedekind, que: "en el hecho de que todas las cortaduras no sean engendradas por números racionales reside la incompletitud o discontinuidad del cuerpo de los números racionales". Dedekind prueba que la relación de orden de $\mathbb{Q}$ se extiende a $\mathbb{R}$, que es continuo, es decir, conexo con la terminología moderna.

18

Para definir los números racionales positivos Weierstrass (1.815-1.897), introduce las partes exactas de la unidad ([1/n], que verifican que n[1/n] = 1) de forma similar a como lo había hecho Martín Ohm, e introduce los agregados finitos que son colecciones finitas de partes exactas de la unidad en la que las partes exactas pueden repetirse. Un ejemplo de agregado finito es {1/4,1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 1/2}. Dice que dos agregados finitos son iguales si tienen la misma suma. En otras redacciones de su teoría, y tal vez para evitar la suma, se considera que dos agregados finitos son iguales si se pueden deducir uno del otro por un número finito de las siguientes transformaciones elementales:

1. Sustituir la unidad por n números racionales de la forma 1/n, y recíprocamente, sustituir *n* números racionales de la forma 1/n por la unidad.
2. Sustituir una parte exacta 1/p por n partes exactas 1/pn, *y* recíprocamente.

Siendo reiterativos ambos criterios de igualdad. El cociente del conjunto de agregados finitos respecto a esta relación de equivalencia es el conjunto de los números racionales no negativos.

El fisico matemático Hamilton (1.833-1.835), influido por Newton, sugiere la idea de la partición de los racionales en dos clases y asegura que existe un conjunto infinito de números racionales entre dos de ellos. Observa que si partimos el conjunto de números racionales en dos clases A y B de forma que todo elemento de *A* sea menor que todo elemento de B, puede ocurrir que no exista ningún número racional entre A *y B.* A partir de una intuición de la continuidad del tiempo.

1.4. Los números racionales en el discurso actual

Revisando las notaciones de los números racionales en diferentes textos de enseñanza secundaria encontramos las siguientes:

- **Los números enteros en Q:** Si *p* es un número entero entonces existe el número $\frac{p}{1}$ que equivale a *p* y mantiene todas sus propiedades de entero; luego cualquier número entero es también racional.

- **Fracciones mixtas:** Cada número racional $\frac{p}{q}$ se puede expresar de forma única como $u\,(A+\frac{a}{b})$ donde:

- **A** es un entero no negativo, es decir $A \in \mathbb{Z},\ \ A \geq 0$
- $\frac{a}{b}$ es un racional irreducible no negativo menor que uno. Se expresa como $\mathrm{mcd}(a,b) = 1, \quad 0 \leq a < b$
- ***u*** es una unidad. Es decir $u = \pm 1$

La notación es muy sencilla, las reglas son:

- $A\frac{a}{b}$ denota a $A + \frac{a}{b}$
- $-A\frac{a}{b}$ denota a $-A - \frac{a}{b}$ Por ejemplo $-2\frac{5}{7} = -\frac{19}{7}$

- **El conjunto de los números decimales en Q:** Un número decimal es un número racional de la forma $\frac{a}{10^n}$.

Los números racionales se caracterizan por tener un desarrollo decimal cuya expresión sólo puede ser de tres tipos:

- **Exacta:** la parte decimal tiene un número finito de cifras. Ejemplo:

  $\frac{8}{5} = 1{,}6$

- **Periódica pura:** toda la parte decimal se repite indefinidamente. Ejemplo:

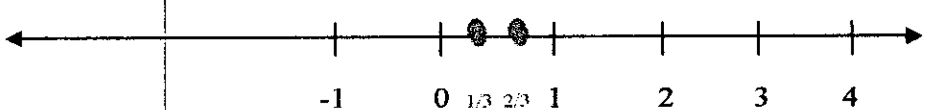
  $\frac{1}{7} = 0{,}142857\overline{142857}\ldots$

- **Periódica mixta:** no toda la parte decimal se repite. Ejemplo: $\frac{1}{60} = 0{,}01666\ldots = 0{,}01\overline{6}$

Recíprocamente, todo número con un desarrollo decimal puede expresarse en fracción de la siguiente manera:

- **Decimales exactos o finitos**: Se escribe en el numerador la expresión decimal sin la coma (como un número entero), y en el denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales. Ejemplo: $34{,}65 = \frac{3465}{100}$
- **Decimales periódicos puros**: La fracción de un número decimal periódico tiene como numerador la diferencia entre el número escrito sin la coma, y la parte anterior al periodo; y como denominador, tantos "9" como cifras tiene el periodo. Ejemplo: $15{,}3434\ldots = \frac{1534-15}{99}$
- **Decimales periódicos mixtos**: Tendrá como numerador la diferencia entre *a* y *b*, donde *a* es el número escrito sin la coma, y *b* es el número sin la parte decimal periódica, escritos ambos como números enteros. El denominador tendrá tantos "9" como cifras tiene el periodo y otros tantos "0" como cifras decimales no periódicas haya. Ejemplo: Sea el número 12,345676767…entonces a=1234567 y b=12345, por lo que el número buscado será $\frac{1234567-12345}{99000}$.

Los números racionales pueden ser representados en la recta; si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real**; y a las posiciones intermedias entre dos dos números enteros les corresponde un número racional.



Actualmente, los números racionales se usan para expresar la relación entre cantidades de la misma magnitud, la razón entre dos magnitudes diferentes, las partes de un todo o los porcentajes. Muchas de las actividades comerciales recurren a los números racionales para llevar la contabilidad, estableciendo relaciones entre las entradas y salidas, las pérdidas y ganancias, la inversión y la producción. En el campo de la ciencia, los números racionales son indispensables para expresar magnitudes como la longitud, la superficie, el volumen, el peso, la capacidad, etc. Además se usan para comparar magnitudes diferentes, por ejemplo, la distancia recorrida por un móvil con el tiempo empleado en recorrerla, el aumento o disminución del área de un cuadrado cuando varía la medida del lado.

CAPÍTULO II

ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El número racional amplía al número entero con la posibilidad de resolver todas las ecuaciones de la forma $ax+b=c$; Como también la posibilidad de la división, con ello se da la ruptura de la matemática discreta, para generar un conjunto denso, y como la densidad es una característica de muchas de las magnitudes, los números racionales permiten encarar la medida de magnitudes; pero éstos tienen su propia significación, que no siempre coincide con la de los números enteros y naturales, lo que nos lleva a reflexionar sobre la importancia de conocer éstas características y los enfoques utilizados para la comprensión de éstos números.

Haciendo una revisión de los planes de estudio de los diferentes grados de la educación básica se ve cómo se sitúa el estudio de las fracciones en los grados de primaria y el de los números racionales en el primer grado de la básica secundaria aunque se trabajen con diferentes enfoques. Mientras en las primeras etapas se trabaja la lectura, interpretación y utilización de los números fraccionarios, sus operaciones y su relación con la proporcionalidad de magnitudes y la probabilidad; en bachillerato se utilizarán los números racionales mediante estimaciones y aproximaciones de acuerdo al contexto.

Las fracciones (base para la construcción de $\mathbb{Q}$) aparecen en muchas ocasiones como la relación entre *una parte y un todo* que actúa como unidad de referencia. En otros casos aparecen como una *división sin realizar*. También puede indicar el *resultado de una medida*. En otros casos es un *operador*. En ocasiones se le da el sentido de *razón*, entendida como relación parte a parte, o como proporción. El número racional está, pues, en la base del razonamiento proporcional. Ligados a estos sentidos de uso de las fracciones, aparecen las equivalencias y las operaciones entre números racionales.

Revisando bibliografía relacionada con el tema (citada por Fandiño, 2005), se encuentra de 1990 a la actualidad investigaciones referidas a áreas más específicas (para estudiantes de entre 6 y 14 años de edad), tales como fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones como: fracciones y números racionales y fracciones y números decimales; se destacan los trabajos de Valdemoros, quien proporciona una amplia diversidad de perspectivas sobre el lenguaje de las fracciones, centrando su atención en la construcción del significado a través de diferentes sistemas simbólicos y referentes a los materiales y a los modelos concretos.

Por su parte Fandiño (2005) en su obra destaca, entre otros, los siguientes significados para la noción de número Racional:

1. Como parte de un todo; a veces continuo, a veces discreto.
2. Como cociente.
3. Como razón.
4. Como operador.
5. En probabilidad.
6. En los puntajes.
7. Como punto de una recta orientada.
8. Como medida.
9. Como indicador de una cantidad de elección en el todo.
10. Como porcentaje.

Por otro lado Brousseau, et al (2008) afirma que al presentar a los conceptos matemáticos a través de Situaciones Didácticas específicas, se incluye la presentación de objetos con diferentes estructuras matemáticas en diferentes roles y en ambientes diferentes, de tal forma que muestra a las fracciones como medida, como razones y como funciones lineales de manera separada, y no al mismo tiempo como lo presenta el currículo tradicional.

Por el interés del presente trabajo enfatizamos particularmente en tres de éstos enfoques de número Racional como son: parte-todo, como operador y como medida. Identifiquemos los significados de número Racional, a partir de estos enfoques, constatados por autores como Behr, Harel, Post y Lesh (1992), Escolano y Gairín (2005) y Kieren (1993).

2.1. Enfoque parte-todo: es el significado manifestado al considerar la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación existente entre dos cantidades específicas: un todo o unidad b, continua o discreta, representando un número total de partes iguales, y una parte a, destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total. Se conviene que el denominador de la fracción indica el número de partes en que está dividido dicho entero y el numerador las partes consideradas.

La idea clásica de fracción consiste en dividir un "todo", sea discreto o continuo, en partes "iguales". Se producen partes congruentes (por ejemplo equivalentes en número de elementos o en cantidad de una magnitud dada). Este significado de fracción se observa cuando se ve la relación existente entre el todo y una de sus partes. A este todo se le denomina "unidad". Dentro de las expresiones del lenguaje cotidiano asociadas a este significado están por ejemplo: la mitad de la naranja; ¼ de kilo; es decir donde se describen cantidades y/o valores de magnitudes. Parece ser que el sistema de representación que más se adecúa a esta forma de "ver" las fracciones (parte-todo), es el que usa modelos de superficie; esto es, que la representación figural continua por superficies tales como los círculos, los cuadrados y los rectángulos implican el significado de la relación parte-todo. Para Freudenthal (1995) "las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si lo fuera" Con respecto al todo, lo considera discreto o continuo, definido o indefinido y estructurado o carente de estructura. "enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte-todo" es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente sino también matemáticamente- este enfoque produce solo fracciones propias" (Freudenthal, 1995). Esta posición de Freudenthal es uno de los serios cuestionamientos a los procesos de enseñanza basados en parte-todo. Sin embargo, Freudenthal(1983); al referirse a la relación parte-todo, exhibe ejemplos didácticos para la enseñanza de las fracciones, sugiriendo tomar en cuenta las magnitudes de área y longitud como medios para visualizar las relaciones de equivalencia. Además recomienda el uso de otros materiales como la balanza y el reloj para percibir las equivalencias en los pesos y tiempos respectivamente.

Kieren(1980) considera la relación parte-todo como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. Para Kieren (1983), éste relación de parte-todo sirve de base para la construcción de los otros enfoques.

Otro uso que se suele hacer de la fracción asociada a parte-todo, es el que muestra la fracción como "comparador" de objetos concretos. Por ej: "Juan gana la mitad que Pedro" (se comparan salarios: objetos respecto a número o valores de magnitud); mientras que en "el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro" se comparan los propios números o valores de magnitudes. Finalmente se dice que dos aspectos de importancia en esta significación de la fracción es distinguir el proceso de ir de la parte al todo y su inverso, es decir del todo a las partes.

Para éste caso de la interpretación de la fracción como relación parte–todo, se proponen siete atributos que caracterizan dicha relación:

1. Un todo está compuesto por elementos separables, una región o superficie es vista como divisible.
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.
3. Las subdivisiones cubren el todo.
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.
5. Los trozos "partes" son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño-congruentes.
6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
7. El "todo" se conserva.

2.2. Enfoque como operador: significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción $\frac{a}{b}$ empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b.

26

Con ésta idea, la fracción actúa a partir de un estado inicial transformándolo en un estado final. Se asocia directamente a multiplicaciones y divisiones sucesivas (independiente del orden). En este sentido, se puede hablar de la fracción como expresando un orden de ejecución (que en el resultado final resulta ser indistinguible). Ejemplos de este uso de la fracción lo observamos en "los ¾ de una clase son niños" o "el 25% de descuento". Nótese que en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues para hallar la cantidad a descontar será necesario multiplicar por 25 y dividir por 100 (o a la inversa). En general, de la fracción comò operador se dice que actúa como "reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica" (Gairín, 1998); o "ciertos monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen" (Vasco, 1988).

Como operador, los números racionales son transformadores que: alargan o recortan los segmentos; aumentan o disminuyen el número de ítems en un conjunto de objetos discretos o toman una figura en el plano geométrico, como un triángulo o un rectángulo y mapearla en otra figura más pequeña o más grande con la misma forma; así por ejemplo, Freudental (1983), el modelo que propone para el operador-razón es la amplificación o reducción de una figura.

El papel de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se pude pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura $\frac{a}{b}$ veces más grande ó $\frac{a}{b}$ veces menor (Kieren, 1980)

En este caso la fracción actúa sobre otro número, en lugar de como una entidad con sentido autónomo. Esto se explicita cuando se piden, por ejemplo, los 4/5 de 20 ó los 3/4 de 56.

Escolano y Gairín (2005) señalan que el significado de operador es el de una función racional (refieren a la función y=a.x con a racional) que produce transformaciones en una cantidad de magnitud obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad.

La operatoria del operador es la síntesis de dos operadores enteros: uno que multiplica, el numerador, y otro que divide, el denominador. Escolano y Gairín (2005) señalan que para que sea posible aplicar tales acciones es necesario conocerlas y tal conocimiento lleva implícito el ostensivo m/n como convenio que indica que m es el número por el que se multiplica y n el número por el que se divide.

La composición de operadores que definen la acción de m/n sobre la cantidad puede ser entendida como: "multiplicar por m y dividir entre n" o "dividir entre n y multiplicar por m".

El Número Racional como operador, le da un significado funcional a la preposición "de"; la interpretación del número racional como operador se apoya en el significado de función. Un número racional actuando sobre una parte, un grupo o un número modificándolo.

2.3. Enfoque como medida: significado que tiene su origen al medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción $\frac{a}{b}$ emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad de medida en b subunidades iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

Al decir: la mitad de, un tercio de, un cuarto de; se está describiendo una cantidad o un valor de magnitud por medio de otro.

La fracción como medida es reconocida por Kieren (1980) como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad.

Una unidad de medida siempre puede dividirse en subunidades más y más finas de tal manera que puedes tomar una medida tan exacta como lo requieras. En los números racionales como medidas, el centro de atención está sobre la partición sucesiva de la unidad. La partición es el mecanismo que proporciona la experiencia para comprender cocientes, juega un papel principal en nombrar distancias a partir de cero en la recta numérica. La recta numérica se utiliza de la misma manera que otras unidades continuas se utilizan en las comparaciones parte–todo. El uso de cintas o cuerdas fraccionarias y patrones de bloqueo (modelos de longitud y área) les proporcionan a los estudiantes alguna experiencia con diferentes unidades y subunidades de medida. La partición sucesiva nos ayuda a nombrar a otras fracciones entre dos fracciones dadas.

Ésta interpretación de la fracción como medida, se identifica con la enseñanza de la recta numérica, en la cual se muestra el número de partes iguales en que se puede dividir la unidad, pudiendo ésta partición variar, dependiendo del número de particiones (Clarke, 2007; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007).

Diversos autores se han ocupado de la polisemia de interpretaciones asociadas al concepto de número racional. Kieren (citado en Escolano y Gairín, 2005) identifica cuatro significados asociados a este concepto en función de la diversidad de situaciones y contexto de uso: medida, cociente, razón y operador. Considera que la concepción parte-todo está incluida en las restantes, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes.

Al referirnos a las representaciones de los números racionales, encontramos que las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada (3/5), representación como razón (3:5), representación decimal (0.6), representación de porcentajes (60%). En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco (Llinares y Sánchez, 1988).

2.4. Números racionales, estándares y competencias

Actualmente y de acuerdo a los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional, especificados en los estándares de competencias básicas; se hace un gran énfasis en el aprendizaje por competencias, de tal forma que el estudiante adquiera habilidades relacionadas con el ser, el saber y el hacer, para que sea capaz de aplicar los aprendizajes en contexto; particularmente en matemática como es de conocimiento público, los contenidos se trabajan por pensamientos: numérico y sistema numérico, espacial y sistema geométrico, métrico y sistema de medidas, aleatorio y sistema de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos; confirmando así que la matemática es una manera de pensar caracterizada por procesos tales como la exploración, el descubrimiento, la clasificación, la abstracción, la estimación, el cálculo, la predicción, la descripción, la deducción y la medición, entre otros; además, que la matemática constituye un poderoso medio de comunicación que sirve para representar, interpretar, modelar, explicar y predecir. Revisando los estándares por competencias establecidos por el Ministerio de educación Nacional, encontramos que el tema particular tratado en el presente trabajo: "los números racionales" lo abordan empezando con las fracciones: "Interpreta las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones", continuando hasta lograr en el séptimo grado el estándar: "el estudiante debe estar en capacidad de utilizar números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida; además, reconocer y generalizar propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.), y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos"; todo con miras al alcance de la competencia básica en matemática: "El(la) estudiante comprenderá que es el número, su representación, las relaciones y operaciones que existen entre ellos en cada uno de los sistemas numéricos para resolver situaciones matemáticas en diferentes contextos, con base en los principios y teorías matemáticas demostradas".

Éstos pensamientos, estándares y competencias, nos respaldan para afirmar que los conceptos en matemática, particularmente el de los números racionales, pueden ser tratados desde diferentes enfoques y utilizar distintos recursos materiales dentro de su metodología de explicación. Cada uno de los tres enfoques aquí analizados se presta para una dinámica diferente de trabajo, esto es, el enfoque de parte-todo puede ser trabajado a partir de conjuntos, con representación de cantidades, elementos u objetos concretos y luego refiriéndose a éstos objetos de manera abstracta ó también recurriendo al pensamiento geométrico con la representación de los números racionales utilizando la partición de figuras geométricas; el enfoque como operador es propicio para la presentación y resolución de situaciones en la que se desee obtener como resultado una cantidad definitiva, éste permite apoyarnos más exactamente en el pensamiento numérico y el enfoque de los números racionales como medida, permite trabajarlos apoyados en el pensamiento métrico, es decir utilizando longitudes haciendo ver a el estudiante que los números racionales le permiten expresar cantidades que no son enteras y trabajar con ellas en el desarrollo de operaciones.

Así como las demás áreas, el aprendizaje de la matemática es más efectivo cuando los estudiantes están motivados, por tal razón es de suma importancia despertar su curiosidad con las actividades de aprendizaje teniendo en cuenta de que éstas correspondan a la etapa de desarrollo en la que se encuentra el estudiante y para cumplir con lo expuesto en los estándares y competencias, al preparar éstas actividades hay que tener en cuenta que éstas tengan relación con experiencias de su vida cotidiana.

Mediante el desarrollo del primer capítulo pudimos ver como la matemática es parte de nuestra cultura y ha sido una actividad humana desde los primeros tiempos y en los diferentes lugares; al darles a conocer a nuestros estudiantes ésta parte tan significativa de la matemática, como es su historia, les estamos permitiendo apreciar mejor su legado y tener una amplia perspectiva de los logros de la humanidad.

Freudenthal (1983) en su fenomenología didáctica, hace un enfrentamiento entre lo que él llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos, dando mayor importancia al primero ya que él dice que el sujeto que lee un texto o ha de interpretar un mensaje no opera en el conjunto de la enciclopedia, es decir, la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme, sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido en situaciones o contextos. Para la parte que nos atañe en el presente trabajo; lo que Freudenthal llamaría "objeto mental número" estaría descrito en cierta manera por este campo semántico personal, y la intención de los sistemas educativos tendría que ser, expresado en estos términos, para permitirle interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar "número" o los números.

En el mundo, el número o, mejor, los números se usan en contextos de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, código, guarismo escrito, cálculo. Los usos de los números en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas: así, por ejemplo, cuando se dice "mi número de teléfono es seis, ochenta y seis, cuarenta y cuatro, ochenta y seis", el número se refiere a un objeto y no describe ninguna propiedad suya ni de su relación con otros sino que sirve para identificarlo, ése es el contexto de *código*; en un contexto *ordinal*, el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa; en un contexto *cardinal,* el número se refiere a un conjunto de objetos (sin orden o cuyo orden no se toma en consideración) y describe la numerosidad del conjunto; etc.

La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de "número", el significado enciclopédico de "número". La identificación del contexto en que el número se está usando permite a quien lee el texto o recibe el mensaje atenerse a la *restricción semántica* que establece el contexto y le permite así poder interpretarlo de forma afortunada. Por ejemplo, el número natural de Peano se construye con el significado propio del contexto de secuencia; y el número natural de Cantor, aunque él tratara en realidad de cardinales y no de números naturales, se construye con el del contexto cardinal.

Lo expuesto por Freudenthal nos permite ver cuán influyente es el enfoque dado a los conceptos para el éxito en la comprensión de éstos (en nuestro caso particular los enfoques de números racionales), y los objetivos hacia donde debe ir encaminada la educación nacional (estándares por competencias "aprender a hacer en contexto"), respaldando así nuestro trabajo.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El estudio descrito en el presente trabajo se realizó utilizando la metodología mixta de tipo descriptiva, comparativa y en parte cualitativa, siguiendo los dos primeros pasos de la ingeniería didáctica (Artigue, M, 1998): análisis preliminar y análisis a priori; aplicado a un grupo de profesores a través de una entrevista que sirvió de elemento para evaluar las distintas concepciones que tenían con respecto a los números racionales y la metodología empleada en su enseñanza.

También se hizo uso del análisis de textos para la revisión de libros escolares de: Caro, V; Obonaga, E. y Pérez, J. (1983); Rodríguez, C. (2006) y Estrada, W. (2008), tal como lo proponen González y Sierra (2004) y pudiendo determinar así los enfoques utilizados en la enseñanza de éstos números en la educación básica.

3.1. El proceso

La población bajo estudio la constituyó los docentes del área de Matemática de grado séptimo de instituciones de la ciudad de Cartagena; la muestra fue conformada por un grupo de ocho docentes amigos, entre ellos cuatro matemáticos puros y cuatro licenciados, que laboran en distintas instituciones, entre ellas: el Colegio Naval de Crespo, ASPAEN, Foco Rojo y Eucarístico; los cuales fueron seleccionados por la confianza y su disposición para la realización de la entrevista.

El presente trabajo constó de cuatro momentos: el primero, la aproximación al objeto de estudio mediante la exploración que permitió conocer sobre la historia de la conformación del concepto de número racional y tener una aproximación a éste, además de la elaboración del marco teórico de los tres enfoques abordados lo cual nos sirvió como orientación para los tres siguientes momentos; el segundo fue la aplicación de la entrevista al grupo de docentes que permitió indagar sobre sus concepciones y la manera como abordan el tema con sus estudiantes para analizar su influencia; el tercer momento consistió en la revisión de tres textos de séptimo grado con el fin de analizar el desarrollo que hacen de éste tema; del cuarto y último momento hacen parte el análisis, conclusiones y recomendaciones finales redactadas en el presente capítulo, las cuales van encaminadas a dar respuesta al interrogante inicialmente formulado y que le da sentido al trabajo que aquí se expone.

3.2. Resultados

Los resultados que se tomaron provienen de las entrevistas hechas a los docentes.

Entrevista a docentes

Además de los contenidos y de la forma como se aborden, es innegable la gran influencia que representa la claridad que el docente tenga sobre los conceptos, y como los desarrolle; por eso fue que se decidió en el presente trabajo incluir la realización de una entrevista cuyas preguntas estuvieron orientadas a determinar si sus concepciones coinciden con los enfoques por analizar. Las preguntas de dicha entrevista, seguidas de las respectivas respuestas dadas por los docentes se presentan a continuación:

PREGUNTA 1: ¿Qué es un número?

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 1: Una magnitud, cantidad numérica abstracta porque no son tangibles, mas sin embargo son la base para las operaciones mentales y movimientos de translación, etc.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 2: Es un elemento donde un sistema numérico es un conjunto con unas operaciones establecidas.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 3: Un número es un símbolo que se utiliza para representar una cantidad conocida o determinada.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 4: Un número es un símbolo que representa uno o varios elementos.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 5: Representación de un objeto.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 6: Es un objeto que lo utilizamos para representar una cantidad o una característica especial (número de elementos) de un conjunto.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 7: Guarismo, símbolo que denota una cantidad.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 8: Es un ente matemático el cual nos representa cantidades.

PREGUNTA 2: ¿Qué es un número racional?

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 1: Es una magnitud que se expresa de la forma $\frac{a}{b}$ donde b≠0 y $a,b \in \mathbb{Z}$.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 2: Se puede entender de manera abstracta como el representante de la clase de equivalencia de todas las fracciones equivalentes a él.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 3: Es el cociente indicado entre dos cantidades así: $\frac{a}{b}$,es un número racional. $\frac{7}{6}$, es un número racional.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 4: Un número racional es el conjunto de números de la forma $\frac{a}{b}$ con $a,b \in \mathbb{Z}$ y b≠0 .

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 5: Aquel que se divide en dos partes: una parte que se toma y otra que es en la que se divide.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 6: Es un número que puede tener 2 o 3 formas: como fraccionario, como decimal, como entero.

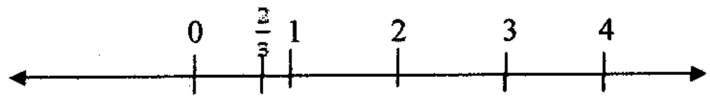
RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 7: Es un número que se puede expresar como una razón, es decir la división de un entero sobre otro entero.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 8: Matemáticamente un número racional lo podemos representar así como perteneciente a éste conjunto:

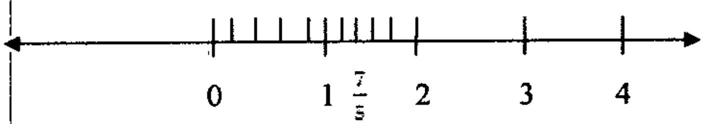
$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$$

PREGUNTA 3: ¿Cómo se construye el sistema de los números racionales?

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 1: depende de la fracción, si son fracciones propias ejm: $\frac{2}{3}$ se divide la unidad en 3 partes iguales y se toma 2.



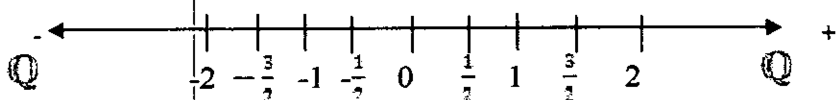
Si es impropia: $\frac{7}{5}$ se divide la unidad en partes iguales:

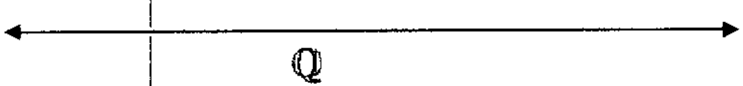


RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 2: Construyendo las clases de equivalencia entre conjuntos de las fracciones, realizando una partición sobre conjunto de todas las fracciones.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 3: Se construye como las fracciones negativas y las positivas, incluyendo el cero, así:

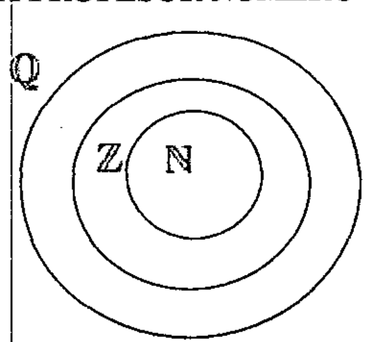
$\mathbb{Q} = \{-\frac{a}{b} \cup 0 \cup \frac{a}{b}\}$; así:





$\mathbb{Q} = \{\mathbb{Q}^- \cup 0 \cup \mathbb{Q}^+\}$

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 4:



RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 5: Se construye de una parte entera: numerador; y otra parte que divide: denominador.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 6: Haciendo divisiones entre números naturales, exactas e inexactas y bien definidas, que no se divide por cero.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 7: Haciendo divisiones entre números enteros.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 8: Se forman a partir de la imposibilidad de resolver ecuaciones de tipo $ax - b = 0$

PREGUNTA 4: ¿Cómo deben enseñarse los números racionales en el séptimo grado?

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 1: Con base a los estándares de 6° y 7° con base a magnitudes, razones, proporciones, problemas cotidianos.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 2: Sería partiendo de enseñar los conceptos de partición, clases de equivalencia de un conjunto y luego resumírselo como el conjunto de todas las fracciones entre números enteros.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 3: Como la ampliación de las fracciones o números fraccionarios; ya que en los racionales aparecen las fracciones negativas y entonces se habla de fracciones positivas y negativas.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 4: Introduciendo el tema a manera de preguntas.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 5: Partiendo de ejemplos muy concretos y reales, de la vida cotidiana para luego ir entrando a lo que realmente se percibe.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 6: A partir del concepto de fracción; se enseña a partir del concepto de división, cuando es inexacta se convierte en una fracción.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 7: Relacionándola con cosas posibles en la vida, por ejemplo: empiezo concientizándolos de que la división entre cero no existe, es ilógico pretender dividir 5 dulces entre cero personas. Hacerles comparaciones con imposibles: hablar de media persona. Mis ejemplos clásicos son los de divisiones de pasteles de manzanas. No les exijo el dibujo, se los hago como ejemplos sueltos. Los alejo del miedo a la matemática.

RESPUESTA PROFESOR NÚMERO 8: se les debe hacer mucho énfasis en la ubicación de números racionales en la recta numérica y a su representación en fracción, decimales y números mixtos.

Análisis de las respuestas dadas a la entrevista

Cabe señalar que la entrevista se realizó sin previo aviso, con el fin de abordar a los docentes sin que hubieran preparado sus respuestas, sino que respondieran de acuerdo a sus concepciones ya establecidas, las que manejan a diario en sus clases, con sus estudiantes.

RESPUESTA A LA PREGUNTA 1:

En general, podemos evidenciar que los docentes tienen un concepto de número como símbolo que sirve para representar. Con la respuesta dada se puede decir que se encaminaron hacia el número viéndolo de manera global y con respecto a la imagen de este, a su escritura.

RESPUESTA A LA PREGUNTA 2:

Al igual que en las respuestas anteriores, los docentes guiaron su segunda respuesta hacia la escritura de los números racionales, mas no hacia el sistema que ellos conforman. Se ve como las definiciones dadas en los libros han creado un dominio sobre sus conceptos.

RESPUESTA A LA PREGUNTA 3:

Con las respuestas dadas por los docentes a la pregunta tres, se puede evidenciar la fuerte y cerrada relación que establecen entre los números racionales y las fracciones, enfatizando en algunos casos en la representación en la recta numérica y otros en la operación de división.

RESPUESTA A LA PREGUNTA 4:

Al leer las respuestas dadas a ésta pregunta vemos que disciernen bastante; algunos siguieron ciñéndose por la operación de división, otros dijeron que a partir de las fracciones y ubicación en la recta numérica y hubo quienes encaminaron sus respuestas hacia la presentación de situaciones en las que sea necesario el uso de los racionales.

Análisis de textos

Pero no solamente es de gran influencia para el aprendizaje del estudiante, las concepciones de sus docentes si no que también hay otro elemento de gran influencia en éste proceso de aprendizaje y éste elemento es el libro de texto ó texto guía que llaman. Actualmente, en las instituciones se hace una lista detallada de los textos con los que el estudiante trabajará durante el año y en ésta lista nunca falta el texto de matemáticas aunque en algunas instituciones este texto es de su propia creación es decir, elaboran una especie de módulo con base a distintos libros de matemáticas, que hace las veces de texto escolar, como ejemplo concreto y cercano podemos citar en la ciudad de Cartagena a el colegio La Salle que sigue ésta metodología.

Por la influencia de éstos textos, se decidió que el trabajo realizado contara también con el desarrollo de una parte curricular, referida precisamente al tratamiento que en los libros de texto se le da a los números racionales. Los libros analizados fueron: Matemática 2, Aritmética y Geometría de Caro, V; Obonaga, E. y Pérez, J. (1983). Colombia: PIME ltda editores; Símbolos 7 de Rodríguez, C. (2006). Colombia: Voluntad y DELTA número 7 de Estrada, W.(2008). Bogotá: Grupo editorial Norma.

Good y Brophy, (1996), refieren que: El uso de los textos genera intereses en los estudiantes porque los motiva a leer y comprender. Desde este punto de vista, el empleo del texto ayuda a incrementar la comprensión lectora del alumno, lo adiestra en la lectura del lenguaje simbólico de esta área y le permitirá entender con mayor facilidad el contenido matemático presentado en el texto. Teniendo en cuenta esto y para tomar a los textos como una herramienta favorable al proceso de enseñanza-aprendizaje, el docente debería adaptar el texto, a sus objetivos de enseñanza y no al revés; tomarlo como un recurso utilizado como estrategia para motivar el aprendizaje en el estudiante.

Matemática 2, Aritmética y Geometría

En éste texto se inicia trabajando los Números enteros y posicionan a los Números Racionales en la segunda unidad con el siguiente orden de temas:

1. Fracciones.
2. Fracciones equivalentes.
3. Notación.
4. Fracciones irreducibles.
5. Números racionales.
6. Adición de fracciones y propiedades.
7. Sustracción de racionales.
8. Ecuaciones.
9. Multiplicación de fracciones y propiedades
10. Ecuaciones.
11. División de fracciones.
12. Potenciación de números fraccionarios y propiedades.
13. Orden en los fraccionarios.
14. Densidad en los números racionales.
15. Ejercicios suplementarios.

El libro en su desarrollo, aborda a las fracciones con la definición del conjunto:

F= { $\frac{a}{b}$ / $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ }; y las representa por medio de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos) divididos en partes iguales y sombreando la fracción respectiva; es decir toma el enfoque parte-todo. Además el tema de fracciones equivalentes y adición de fracciones, lo explica a través de la recta numérica, al igual que la densidad de los números racionales. Las operaciones de multiplicación, división y potenciación las explican a través de sus respectivos algoritmos, sin ir al trasfondo de cada operación.

Como se puede ver, no hay una correlación entre el sistema de los números racionales y su representación decimal y el enfoque de los racionales como operador, no es trabajado.

Símbolos 7

Éste texto hace énfasis en que es matemática aplicada, empieza hablando de los estándares y presentando ejercicios de pruebas saber; cada una de las unidades las relaciona con un tema particular de la vida cotidiana por ejemplo, la unidad 4 es la reservada para los números racionales, la cual empieza con una lectura titulada "Comer para vivir" en la que se dan citan algunos valores nutricionales; adentrados al tema, se explica la utilidad de los números racionales y ámbitos en los cuales se utilizan. La unidad está compuesta por los siguientes temas:

- Concepto de racional.
- Adición y sustracción de números racionales.
- Propiedades de la adición.
- Potenciación y radicación.
- Conversiones de decimales a racionales y viceversa.
- Ecuaciones.

En éste texto se explica que los números racionales pueden ser fraccionarios o decimales y la conversión entre éstos; utilizan bastantes dibujos para correlacionar las fracciones, además de figuras rectangulares para las particiones; también recurren a la recta numérica para ubicación y comparación de fraccionarios; y para las operaciones básicas además de la explicación del algoritmo, presentan ejemplos gráficos y con diferentes elementos, también se refieren a medidas de longitud, de capacidad y de tiempo en los problemas que presentan.

Pienso que el hecho de representar gráficamente tanto las explicaciones como los problemas hace que el estudiante tenga una visualización más clara de la situación, sumado a que se hace con referencia a elementos de su contexto y términos de su vida diaria que le permiten mayor aplicabilidad; también se puede evidenciar que el texto maneja los tres enfoques a los que nos referimos en el presente trabajo: racionales como parte-todo, como operador y como medida.

DELTA número 7

El texto ubica a los números racionales en la unidad 2 para la parte de representaciones y operaciones, y en la unidad 3 para referirse a ellos como razones y proporciones. Para revisarlo teniendo en cuenta los tres enfoques tratados en el presente trabajo, enfatizamos en la unidad 2, la cual comprendía:

- Números racionales.
- Expresión decimal de los números racionales.
- Orden de los números racionales.
- Adición y sustracción de los números racionales.
- Propiedades de la adición de números racionales.
- Ecuaciones aditivas.
- Multiplicación de números racionales y propiedades.
- División de números racionales.
- Ecuaciones multiplicativas.
- Potenciación y sus propiedades.
- Radicación.

Al igual que en el texto mencionado anteriormente (Símbolos 7), éste texto redacta los estándares a trabajar y hace referencia al empleo de estrategias para la resolución de problemas que en la presente unidad involucrarían números racionales.

La unidad también inicia con una lectura "cifras del cuerpo humano" cifras con referencia a la cantidad de huesos del cuerpo humano, que expresan con fracciones, adentrándose así a los números racionales.

Empiezan definiendo al conjunto de los números racionales como el conjunto que permite que todas las divisiones tengan solución, más adelante los definen como el conjunto de todas las clases de fracciones equivalentes así:

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b}, \text{donde } a \text{ y } b \text{ son } \mathbb{Z}, \text{ con } b \neq 0 \}$$

Al explicar las fracciones equivalentes utilizan la recta numérica para representar como varias de ellas corresponden a un mismo punto de la recta correspondiente a un solo número racional; de la recta numérica también hacen uso para ubicar y comparar a los decimales, como también para expresarlos como números racionales y viceversa.

Para las operaciones básicas explican el algoritmo correspondiente.

Se pudo evidenciar que no se recurrió al enfoque de parte-todo para empezar a explicar las fracciones, como tampoco se remitieron a otros contextos de medición para la utilización de los números racionales aunque en cierto momento se involucró el cálculo de perímetros. También, el concepto de número racional como operador se trabajó indirectamente mas no se le destacó esa función.

En general el texto intenta hacer conexiones entre los contenidos, al relacionar los conceptos con situaciones de la vida cotidiana, sin embargo termina cayendo en la explicación algorítmica como proceso para la resolución de ecuaciones, sin dar una correspondencia concreta del significado de la operación.

TEXTOS	ENFOQUES		
	PARTE-TODO	OPERADOR	MEDIDA
Matemática 2 Aritmética y Geometría (Caro, V; Obonaga, E. y Pérez, J. 1983).	x	x	x
Símbolos 7 (Rodríguez, C. 2006).	x	x	x
DELTA número 7 (Estrada, W. 2008).		x	x

TEMAS	TEXTOS		
	Matemática 2 Aritmética y Geometría	Símbolos 7	DELTA número 7
Concepto	x	x	x
Expresión decimal de un número racional	x	x	x
Orden de los números racionales		x	x
Fracciones equivalentes y fracciones irreducibles	x		x
Ubicación en la recta numérica	x	x	
Adición y sustracción de números racionales	x	x	x
Propiedades de la adición de números racionales	x	x	x
Multiplicación y división de números racionales	x	x	x
Propiedades de la multiplicación de números racionales	x	x	x
Ecuaciones	x	x	x
Potenciación y radicación de números racionales	x	x	x
Propiedades de la potenciación de números racionales	x	x	x
Aplicación en problemas	x	x	x

También encontramos siete criterios puntualizados por Piaget, Inheler y Szeminska (Dickson y otros;1991) que denotan la comprensión del enfoque parte-todo:

1. Considerar divisible una región entera (los niños pequeños se niegan a cortar el entero).
2. Admitir que el "todo" puede cortarse en cualquier número de partes que se solicite.
3. Comprender que las partes han de agotar el todo en la división.
4. Centrar la equivalencia de las partes en su tamaño.
5. Distinguir entre número de cortes y número de partes (número de cortes y número de partes no son necesariamente iguales).
6. Comprender la relación inversa entre el número de partes equivalentes y el valor de cada parte (a mayor n° de partes, menor extensión de las mismas).
7. Admitir la construcción del todo como suma de las partes, es decir que el total se conserva aunque sea dividido en partes.

Al evaluar éstos siete criterios en los tres libros analizados, obtenemos:

CRITERIOS DE PIAGET , INHELER Y SZEMINSKA	TEXTOS		
	Matemática 2 Aritmética y Geometría	Símbolos 7	DELTA número 7
1	x	x	
2	x	x	
3	x	x	
4	x	x	
5	x	x	
6	x	x	
7	x	x	

CONCLUSIONES

Analizando las respuestas dadas por los docentes entrevistados es posible ver que:

- El profesor número 5, al contestar la pregunta 1: ¿qué es un número?, responde refiriéndose al número como "representación de un objeto" y considero que ésta interpretación no es correcta pues con decir "un objeto", está especificando dando un valor, una cantidad.
- Con respecto a la pregunta 2: ¿qué es un número racional?, el profesor número 3 lo define como "el cociente indicado entre dos cantidades" y no hace la aclaración respectiva de que el denominador debe ser diferente de cero además olvida que todo número entero es también un número racional cuyo denominador es 1. Con respecto a esta misma pregunta, el profesor 5 habla de partes tanto para referirse a la forma como se escribe el número como también para referirse a lo que representa y esto me parece que se prestaría para confusiones en los estudiantes. El profesor número 6 dice las "formas que puede tener" el número racional, más no lo define.
- Al leer las respuestas dadas a la pregunta tres, es para preocuparse pues se observa que varios de los profesores entrevistados no tienen una idea clara de cómo se construye el sistema de los números racionales y si esto ellos no lo tienen claro, ¿Cómo pretenden aclarárselos a sus estudiantes?. La explicación que da el profesor número 1 es más una respuesta de cómo se representan fracciones en la recta; y el gráfico que dibuja el profesor número 4, al igual que el presentado en éste trabajo en el I capítulo, logra hacer una clasificación para ver la posición de los racionales dentro de los números, pero tampoco es una explicación de cómo se construyen; el profesor número 5 dice de lo que se compone el número racional mas no como se construye el sistema de los números racionales.
- El profesor número 6, con su respuesta para la pregunta 4: ¿cómo deben enseñarse los números racionales en el séptimo grado?, está excluyendo a los números enteros de los números racionales y recordemos nuevamente que todo número entero es un número racional cuyo denominador es 1.

Con respecto a los textos analizados y con referencia a su presentación, los tres empiezan el tema de una manera muy didáctica y gráfica para lograr que el estudiante se familiarice con el tema, pero en particular, el texto Matemática 2 Aritmética y Geometría (Caro, V; Obonaga, E. y Pérez, J. 1983) me parece que es muy completo pues además de abarcar los tres enfoques estudiados en el presente trabajo, hace variados gráficos que le permiten al estudiante visualizar claramente la representación de los racionales y presenta variadas situaciones a través de problemas que permiten darle aplicabilidad a éstos números y reconocer su necesidad. Por otro lado, el texto Símbolos 7 (Rodríguez, C. 2006) a pesar de su didáctica y desarrollo de los contenidos omite: "fracciones equivalentes y fracciones irreducibles" y esto me parece bastante grave pues apoyados en las fracciones equivalentes es damos explicación de los números racionales a partir de las clases de equivalencia y finalmente tenemos el texto DELTA número 7 (Estrada, W. 2008), el cual a pesar de una estructura que da indicios de responder a la necesidad de una educación por competencias; presenta dos grandes falencias: en primera instancia no toma el enfoque parte-todo, el cual es base para todos los demás enfoques y como segundo punto no aborda la ubicación de los números racionales en la recta, habla de ellos como representación de medidas y se refiere de ésta manera en algunos de los problemas propuestos, más no los representa concretamente.

Para finalizar y después de la revisión de variadas investigaciones hechas en diversos países, citadas en la bibliografía, es importante no pasar por alto algunas recomendaciones tales como las hechas por los docentes de la Red de escuelas de Campana en su obra colectiva(2001), para la enseñanza del tema de fracciones; éstas son:

- Presentar situaciones variadas que impliquen los distintos usos de las fracciones con base a distintos contextos. No centrarse en la enseñanza de la relación parte-todo.
- Dejar que los alumnos se expresen en forma oral y escrita con el lenguaje coloquial e incentivar el dibujo como apoyo para la comprensión de los conceptos implicados en las situaciones dadas. No apresurar el uso de la simbolización al comienzo del ciclo.

- Comenzar a trabajar fracciones con las fracciones más usuales y sus equivalencias. No empezar por las más complicadas.
- No imponer los algoritmos de las operaciones, sino que hay que cargar de sentido las mismas a través de problemas variados.

También podemos decir que si a través del planteamiento de problemas queremos trabajar la comprensión de los números Racionales, indudablemente son de mucha ayuda las anotaciones hechas por los de "la serie de Cuadernos para el aula"; quienes partiendo de la idea que Cada noción matemática resuelve un cierto conjunto de problemas, sin embargo, no tiene el mismo significado en todos los casos; citan varios ejemplos en los que muestran claramente el enfoque con el que se deben tratar cada uno de ellos para lograr su solución. Se empieza afirmando que por ejemplo el número racional 3/4 es respuesta a distintos problemas, entre ellos:

a) Si de 4 bolitas, 3 son negras, ¿qué parte de las bolitas es negra?
b) María tiene 3 tortas para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos, ¿cuánto come cada uno?
c) Si el segmento A mide 3 cm y el segmento B mide 4 cm, ¿cuál es la medida de A en relación a B?

En estos problemas se establecen diferentes relaciones entre las cantidades involucradas. En el primer problema, 3/4 representa la relación entre una parte (en este caso subconjunto de cardinal 3) con el todo (conjunto de cardinal 4). En el segundo problema, 3/4 indica el resultado de dividir 3 entre 4 (en este caso repartir 3 entre 4), mientras que en el tercer problema, indica la medida de un objeto, resultado de la comparación entre los tamaños del segmento A y del segmento B. Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento aspectos diversos del concepto de número racional. Esto obliga a tener en cuenta las distintas representaciones posibles de la noción que queremos enseñar, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en sus distintas representaciones pudiendo pasar de una a otra y elegir la más conveniente en función del problema a resolver.

Lamon(2006), también menciona que si los estudiantes tienen una comprensión clara de cada una de las interpretaciones del concepto de fracción podrán desarrollarse confiadamente en cualquier situación que involucre fracciones y podrán escoger las operaciones adecuadas a cada problema. Sabiendo esto en el futuro podrán utilizarlo al trabajar con los Números Racionales.

A partir de mi experiencia propia quisiera compartir algunos puntos a tener en cuenta:

- En el momento en que nuestros estudiantes experimentan que varias representaciones (ej: física, verbal, numérica, pictórica y gráfica), para nuestro caso las de los racionales, se interrelacionan; su comprensión aumenta, en la medida en que comprueban cómo están conectadas; pues así como nuestros estudiantes aprenden a comunicarse de diferentes maneras relacionando activamente materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas, a través de la práctica reflexionan sobre ellas y clarifican su propio pensamiento, estableciendo relaciones entre el lenguaje cotidiano con ideas y símbolos matemáticos; y también mediante las discusiones matemáticas que a diario se dan con sus compañeros dentro de las clases.

- Si tomamos a los contextos (casos) como los que caracterizan con qué sentido (enfoques) se usan las fracciones es importante tener en cuenta que al referirnos a la noción de Número Racional entendida desde el enfoque de medida, habrá que avanzar simultáneamente en la comprensión de los usos de los Números Racionales en situaciones y procesos de medición (de longitudes, capacidades, pesos y tiempo); permitiéndole utilizar instrumentos para establecer diferentes medidas.
- Así como podemos afirmar que la matemática es una de las ramas más importantes para el desarrollo de la vida del niño, ya que este aprende conocimientos básicos, como contar, agrupar, clasificar, al igual que se relaciona con el lenguaje propio de su edad; debemos aprovechar que responde a inquietudes prácticas: la necesidad de ordenar, cuantificar y crear un lenguaje para las transacciones comerciales, etc; sin embargo en vez de esto, lastimosamente en el campo docente hay quienes enfatizan las clases en la memorización y la mecanización pues comienzan señalando una definición determinada del contenido a desarrollar, pasando luego a la explicación del algoritmo que el estudiante debe seguir para la resolución de un ejercicio, realizando planas de ejercicios comunes hasta que pueda llegar a asimilarlos,

demostrando así que no es el razonamiento el principal objetivo ni herramienta de la clase; por eso, para acabar con esto, el docente debe empezar por ilustrar con fenómenos referidos al área y relacionarlos con el medio que rodea a sus estudiantes; aspecto que a través de la revisión de textos hecha en el presente trabajo pudimos corroborar que ya existe en algunos textos escolares la tendencia a esto.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M; Douady, R; Moreno, L.(1998). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Colombia. Una empresa docente. Grupo editorial Iberoamérica, S.A.

Arrieche, M., Font, V., Godino, J. y Wilhelmi, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática.* 19(1), 34-46.

Barrios, A; Meza, A. (2010). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Institución Alfonso Builes Correa. Institución Simón Bolívar. Planeta Rica.

Brophy, J; Good, T.(1996). Psicología educative contemporanea. México: McGraw-Hill.

Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Ledezma, J. y Roma. A. (2008). Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un aporte iberoamericano. México: Ediciones Diaz de Santos S.A.

Cárdenas, R.(1990). Álgebra superior. México D.F.: Trillas.

Caro, V; Obonaga, E. y Pérez, J. (1983). Matemática 2 Aritmética y Geometría. Colombia: PIME ltda editores.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: AIQUE.

Cremón, A; Iglesias, M; Ronconi, C; Villafañe, C.(2001). La enseñanza de las fracciones en el segundo ciclo de la Educación General Básica. Obra colectiva de los docentes de la Red de escuelas de Campana. Módulo 2. Serie Aportes al proyecto curricular institucional. Argentina.

De Faria, E. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* 4(1), 9-27.

Díaz, L. (1998). Reflexiones didácticas: en torno a fracciones, razones y proporciones. Grupos profesionales de trabajo. Ministerio de educación. Chile.

Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo. Serie Cuadernos para el aula. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Nap. p.14-33.

Escolano, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: un estudio desde el modelo cociente. Universidad de Zaragoza. Almería.

Estrada, W.(2008). DELTA número 7. Bogotá: Grupo editorial Norma.

Faria De, E. (2006). Ingeniería didáctica. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas. Universidad de Costa Rica. Asociación de matemática Educativa. Año 1, Número 2.

Flores, P., Morcote, O. (1999). Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: las fracciones). España.

Flores, P; Moreno, A.(1999). Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales. SAEM THALES, Granada.

Flores, R; Martínez, G.(2009). Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios. X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Área 5: educación y conocimientos disciplinares.

Gairín, J. (1998). Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción Zaragoza.

Gairín, J. (1999).Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Zaragoza.

Gallardo, J., González, J. y Quispe, W. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *Revista PNA*. 4(3), 111-113.

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanza de las ciencias, 22(3), 389-408.

Hans Freudenthal (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 1. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México: CINVESTAV, 2001.

Hughes, M. (1987). Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. España: Editorial Planeta.

Jarne, G; Minguillón, E; Zabal, T. Curso básico de Matemáticas para estudiantes de económicas y empresariales. Unidad Didáctica 4. Números Reales y Números Complejos. Proyecto de innovación Aragón tres.

Lamon, S. (2006). Teaching Fractions and ratios for understanding (2nd ed). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1996). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. 13-24.

Martínez, N.(2003). Trabajo especial de grado. Universidad Santa María. Caracas Venezuela.

Matemáticas B-4° E.S.O.-Tema 1- Los Números Reales.

Matinón, A. y Molina, C. (1982). Reflexiones sobre la didáctica de los números. *ISSN 0212-3096(8) (Ejemplar dedicado a: IV Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas)*. 17-48.

Niven, I. (1961). Números racionales e irracionales. Colombia: Editorial Norma.

Perera, P; Valdemoros, M.(2007).Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. Investigación en Educación Matemática XI. CINVESTAV. México. p 209-218.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. Universidad de Zulia. Venezuela. *Revista OMNIA*. Año 13, N 2. p 120-157.

Rodríguez, C. (2006). Símbolos 7. Colombia: Voluntad.

Sanabria, G. (2007) Propuesta sobre la enseñanza de los números racionales. Escuela matemática. Instituto tecnológico de Costa Rica. *Revista virtual matemática, Educación e internet.* 10(2).

Sanabria, G. Los números reales utilizando cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy: una propuesta didáctica. Instituto Tecnológico de costa Rica, Escuela de Matemática.

Serie Educativa Lasallista (2011). Colegio de la Salle Cartagena.

Vargas, J. (2007). La argumentación inductiva de Toulmin. México: Asociación Oaxaqueña de psicología A.C.