LA ECUACIÓN DE ONDA

B.P.
T.
515.353
N322

2

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

LA ECUACIÓN DE ONDA

Por: REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO

RAFAEL GALEANO ANDRADES
Profesor titular
Asesor

PROGRAMA DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
UNIVERSIDAD DE CATAGENA
CARTAGENA
2001

96559

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
CENTRO DE INFORMACION Y DOCUMENTACION
FORMA DE ADQUISICION
Compra____ Donación X Canje____ U. de C.____
Precio $ 10.000 Proveedor Prog. Matemáticas
No. de Acceso [illegible] No. de ej. 1
Fecha de ingreso: DD 10 MM 06 AA 02

Cartagena Noviembre de 2001

Señores:

Comité evaluador de trabajos de grado
Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Cartagena

Cordial saludo

Les comunico que he asesorado al estudiante REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO en su trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el titulo de matemático.

Atentamente

RAFAEL GALEANO ANDRADES
PhD.
Asesor

Cartagena Noviembre de 2001

Señores:

Comité evaluador de trabajos de grado
Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias e Ingenierias
Universidad de Cartagena

Cordial saludo

Con mayor respeto, presento a consideración y aprobación la redacción final de mi trabajo de grado, titulado LA ECUACIÓN DE ONDAS, presentado como requisito parcial para optar el titulo de matemático.

Atentamente

Remberto Navas M.
REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO
Código 209420011

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

LA ECUACIÓN DE ONDA

REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
PROGRAMA DE MATEMATICAS
CARTAGENA

2001

6

LA ECUACIÓN DE ONDA

REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO

Trabajo presentado como requisito parcial para optar el titulo de matemático.

RAFAEL GALEANO ANDRADES
Profesor titular
Universidad de cartagena
Asesor

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
PROGRAMA DE MATEMATICAS
CARTAGENA
2001

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Cartagena noviembre de 2001

DEDICATORIA

El presente trabajo esta dedicado a todas aquellas personas que contribuyeron en mi formación no solo profesional sino también personal, pero en especial quiero destacar en esta , a grupos como mi familia y amigos , y a personas como los profesores Rafael Galano, Cesar Herazo, Nestor Rodríguez y ala profesora Sonia Burgos, pues sus recomendaciones en los aspectos que considero fundamentales para mi formación estuvieron siempre presentes.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

AGRADECIMIENTOS

- agradezco a mi familia, familia incansable que siempre confio en mis deseos por mejorar mi entorno, en todo momento.

- A mis profesores pues sus conocimientos estando de vanguardia, me dan hoy el titulo de matemático.

- Y a los que no podian faltar mis, aquellos que estuvieron en todo momento, MIS AMIGOS.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
... de Información y Documentación

LA ECUACIÓN DE ONDA

11

LA ECUACIÓN DE ONDA

Por: REMBERTO DE JESÚS NAVAS MORENO

RAFAEL GALEANO ANDRADES
Profesor titular
Asesor

PROGRAMA DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
UNIVERSIDAD DE CATAGENA

CARTAGENA
2001

INTRODUCCION

En el presente trabajo se hace un estudio detallado sobre la existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación de ondas, que existen y están relacionadas el capitulo X inciso X.3 del texto de HAIN BRÉZIS (Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones) y el articulo monotone operators in Banach space by RALPH SHOWALTWR, además el trabajo esta dividido en dos secciones; en la primera encontramos definiciones y resultados importantes , entre los cuales destaco el teorema de HILLE YOSIDA dado que este garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 & en \quad [0,\infty) \\ U(0) = U_0 & dato\ inicial \end{cases}$$

con

$$U \in C^1([0,\infty);H) \cap C([0,\infty);D(A))$$

donde A es un operador máximal monótono y H un espacio de Hilbert. En la segunda encontramos el desarrollo de los teoremas que demuestran la existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación de ondas.

En esta ecuación encontramos que para el caso unidimensional N = 1, $\Omega = (0,1)$, la solución de este aproxima el movimiento de una cuerda uniforme sin fuerzas externas.

En el caso bidimensional $N = 2$, la solución aproxima movimientos de una membrana elástica.

Para el caso tridimensional $N = 3$, se tiene que la solución representa la propagación de ondas sonoras ,gracias a una perturbación inicial en un espacio cúbico.

En el caso general la ecuación en estudio modela la propagación de una onda en un medio elástico homogéneo $\Omega \subseteq R^N$ siendo u_0 yv_0 el desplazamiento y la velocidad inicial.

Observación. Es importante ver como se arman las condiciones para que se pueda aplicar el teorema de HILLE YOSIDA.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERN... MADRID
Centro de Informaci...

COTENIDO

Introducción. 1
Resumen. 2
Notaciones. 3
DEFINICIONES Y RSSUTADOS IMPORTANTES
Definición 1. Conjuntos de clase C^m 5
Definición 2. Espacios de Hilbert 5
Definición 3. Espacios L^1 5
Definición 4. Espacios L^p 5
Definición 5. Espacios de sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ 6
Definición 6. Espacios de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 6
Definición 7. Espacios de sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ 7
Definición 8. operador máximal y máximal nonotono 7
Teorema 1. Regularidad para el problema de dirichlet 8
Teorema 2. Dirichlet, Rieman, Hilbert 8
Teorema 3. 9
Corolario 4. 9
Teorema 5. Teorema de HILLE YOSIDA 9
LA ECUACION DE ONDA
Existencia y unicidad. 11
Efecto regularizante. 20
Cuando Ω es acota do como se calcula la solución de la ecuación de ondas. 21
Regularidad. 22
Conclusiones. 25
Bibliografía. 26

14

RESUMEN

En el trabajo se considera el problema siguiente :

Supongamos que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe una única solución u de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad en \qquad Q$$

$$u = 0 \qquad sobre \qquad \Sigma$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad en \qquad \Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \qquad en \qquad \Omega$$

siendo

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\Omega \subset R^N$ *abierto*

Γ *es la frontera de* Ω

$Q = \Omega \, X \, (0, \infty)$

$\Sigma = \Gamma \, X \, (0, \infty)$

u_0 *y* v_0 *son funciones dadas*

tal función es de la forma $u(x,t) : \bar{\Omega} \, X \, [0,\infty) \rightarrow R$. y a la cual debemos probarle existencia, unicidad y regularidad, apoyando el trabajo en gran parte el en teorema de HILLE YOSIDA .

NOTACIONES

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = grad\ u$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}} u, \qquad \|\alpha\| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplaciano de } u$$

$$R_+^N = \{ x = (x', x_N) \in R^{N-1} X R,\ x_N \rangle 0 \}$$

$$Q = \{ x = (x', x_N) \in R^{N-1} X R; |x'| \langle 1 \quad y \quad |x_N| \langle 1 \}$$

$$Q_+ = Q \cap R_+^N$$

$$Q_0 = \{ x \in Q; x_N = 0 \}$$

$$(D_h u)(x) = \frac{1}{|h|} (u(x+h) - u(x))$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *derivada nornal esterior*

$\Omega \subseteq R^N$

$\partial\Omega = \Gamma = frontera\ de\ \Omega$

$L^p(\Omega) = \left\{ u \quad medible \quad en \quad \Omega \quad y \quad \int_\Omega |u|^p dx \langle \infty \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$

$L^p(\Omega) = L^p(\Omega) = \{ u \quad medible \quad en \quad \Omega \quad y \quad existe \quad k \quad tal\ que \quad |u(x)| \leq k \quad c.t.p\ en \quad \Omega \}$

$C_c(\Omega)$ *funciones continuas con soporte compacto en* Ω

$C^k(\Omega)$ *funciones k veces continuamente diferenciables en* $\Omega\ (k \geq 0)$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ *funciones continuas en* $\overline{\Omega}$

$C^k(\overline{\Omega})$ *funciones u de* $C^k(\Omega)$ *tales que para cada multi – indice* $\alpha, |\alpha| \leq k$,
la aplicacion $x \in \Omega \to D^\alpha u(x)$ *se extiende concontinuidad a* $\overline{\Omega}$

$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_k C^k(\overline{\Omega})$

$W^{1,p}, W_0^{1,p}, W^{m,p}, H^1, H_0^1, H^m$ *espacios sovolev*

$\int_\Omega (\Delta u) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v \qquad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}) \qquad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})$ *formulade green*

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID

DEFINICIONES Y RESULTADOS IMPORTANTES

En esta sección del trabajo se darán algunas definiciones y resultados importantes que serán utilizados en el desarrollo del mismo, entre los cuales es indispensable destacar el teorema de HILLE YOSIDA pues sus aportes en este, son de vital importancia.

Definición 1 – Se dice que un abierto Ω es de clase C^m, m entero, si para todo $x \in \Gamma$ existe un entorno U de x en R^N y una aplicación biyectiva $H : Q \to U$ talque

$$H \in C^m(\overline{Q}) \qquad H^{-1} \in C^m(\overline{U}) \qquad H(Q_+) = U \cap \Omega \qquad H(Q_0) = U \cap \Gamma \ .$$

Se dice que Ω es de clase C^∞ si es de clase C^m para toda m.

Definición 2 – (Espacio de Hilbert).Un espacio de Hilbert, es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar (u,v) y que es completo para la norma $(u,u)^{\frac{1}{2}}$.

En todo lo que sigue H designa un espacio de Hilbert.

Definición 3 – (Espacios L^1). Designamos por L^1 el espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores en R y escribimos

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)\,dx|.$$

Definición 4– (Espacios L^p). Si $p \in R$ con $1 \le p \le \infty$ se define

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to R ; f \quad \textit{es medible y} \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

y notamos

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definición 5 – (Espacios de sobolev $W^{1,p}(\Omega)$). Sea $\Omega \subseteq R^N$ un abierto y sea $p \in R$ con $1 \leq p \leq \infty$. Se define por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \text{tal que} \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\}$$

se pone

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

para $u \in W^{1,p}$ se nota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad y \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = grad\, u$$

el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ esta dotado de norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Definición 6 – (Espacios de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$). Sea $m \geq 2$ un entero y sea p un numero real con $1 \leq p \leq \infty$. Se define por recurrencia

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, N \right\}$$

o lo que es equivalente

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in L^{p}(\Omega)\left|\begin{array}{l}\forall\alpha \quad con \quad |\alpha|\leq m \quad \exists_{g_\alpha}\in L^{p}(\Omega) \qquad tal\ que\\ \int_\Omega uD^{\alpha}\varphi=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_{\alpha}\varphi \qquad \forall\varphi\in C_c^{\infty}(\Omega)\end{array}\right.\right\}$$

se nota $D^{\alpha}u=g_{\alpha}$.

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ dotado de la norma

$$||u||_{W^{m,p}}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}||Du||_{L^p}$$

es un espacio de Banach.

Se pone $H^{m}(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$; $H^{m}(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$(u,v)=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\left(D^{\alpha}u,D^{\alpha}v\right)_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert.

Definición 7 – (Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$). Para m entero definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como el cierre de $C_c^{m}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. "grosso modo" una función $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$ si $u\in W^{m,p}(\Omega)$ y $D^{\alpha}u=0$ sobre Γ para todo multi-índice α tal que $|\alpha|\leq m-p$ para $m\geq 2$

Definición 8 – (Operador monótono y máximal monótono). Sea $A:D(A)\subset H\to H$ un operador lineal no acotado, se dice que A es monótono si

$$(Av,v)\geq 0 \qquad \forall\, v\in D(A),$$

A es máximal monótono si además $\mathrm{R}(A+I)=H$, es decir.

$$\forall f\in H,\ \ \exists u\in D(A)\ \ tal\ que\ \ u+Au=f.$$

Teorema 1 (Regularidad para el problema de dirichlet). – sea Ω en abierto de clase C^2 con frontera Γ acotada. Sea $f \in L^2(\Omega)$ y sea $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla \varphi \; + \; \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces $u \in H^2(\Omega)$ y $||u||_{L^2} \leq k||f||_{L^2}$ donde k es una constante que solo depende de Ω.

Además Ω es de clase C^{m+2} y si $f \in H^m(\Omega)$, entonces

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ y } ||u||_{H^{m+2}} \leq k||f||_{H^m} \;;$$

en particular, si $m \rangle \dfrac{N}{2}$ entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Finalmente si Ω es de clase C^∞ y si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demostración . $[Br]$ Haim Brézis; Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Pág. 181.

Teorema 2 (Dirichlet, Rieman, Hilbert). – para toda $f \in L^2(\Omega)$ exista $u \in H_0^1(\Omega)$ única solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en \quad \Omega \\ \qquad u = 0 & sobre \quad \Gamma \end{cases}$$

Demostración . $[Br]$ Haim Brézis; Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Pág. 176.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

Teorema 3 -- Supongamos que $u_0 \in D(A^k)$ con $k \geq 2$. Entonces la solucion u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & en \quad [0,\infty) \\ u(0) = u_0 & dato\ inicial \end{cases}$$

Verifica

$$u \in C^{k-j}\left([0,+\infty); D(A^j)\right) \quad para \quad j = 0, 1, \quad \ldots \quad k$$

Demostración. $[Br]$ Haim Brézis; Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Pág. 111.

Corolario 4. supongamos que $\Omega \subset R^N$ es un abierto de clase C^1 con frontera acotada Γ, o bien $\Omega = R^N_+$. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se verifica

si $1 \leq p \leq N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [0,\infty)$

si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

con inyección continua.
Además si $p > N$, se verifica para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq k\|u\|_{W^{1,p}} |x-y|^\alpha \quad \text{c.t.p}\ .x, y \in \Omega$$

con $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ y k dependiente solo de Ω, p y N. En particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Este corolario también es valido si se sustituye R^N por Ω.
Demostración. $[Br]$ Haim Brézis; Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Pág. 169.

Teorema 5 (HILLE YOSIDA).—Sea A un operador màximal monótono en un espacio de Hilbert H. Entonces para todo $u_0 \in D(A)$ existe una única función

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID Centro de Información y Documentación

$$u \in C^1([0,+\infty); H) \cap C([0,+\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & en \quad [0,+\infty) \\ u(0) = u_0 & dato\ inicial \end{cases}$$

además se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \ \text{ y } \ \left|\frac{du}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \qquad \forall t \geq 0 .$$

Demostración . $[Br]$ Haim Brézis; Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones. Pág. 105.

LA ECUACION DE ONDA

1. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Supongamos que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ entonces existe una única solución u de :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad en \qquad Q$$

$$(2) \qquad u = 0 \qquad sobre \qquad \Sigma$$

$$(3) \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad en \qquad \Omega$$

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \quad en \qquad \Omega$$

siendo

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\Omega \subset R^N$ *abierto*

Γ *es la frontera de* Ω

$Q = \Omega X(0,\infty)$

$\Sigma = \Gamma X(0,\infty)$

u_0 *y* v_0 *son funciones dadas*

tales que se cumple la siguiente relación

$$u \in C\left([0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,\infty);H_0^1(\Omega)\right)\cap C^2\left([0,\infty);L^2(\Omega)\right)$$

además se verifica

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}=\left|v_0\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\nabla u_0\right|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, t\geq 0$$

Nota. En el desarrollo del trabajo se supone que Ω es de clase C^∞ con Γ acotada.

DEMOSTRACION

Hallaremos una función $u(x,t):\overline{\Omega}\times[0,\infty)\to R$. para un x fijo consideraremos $u(x,t)$ como una función definida en $[0,\infty)$ con valores en un espacio vectorial. La ecuación 1 se puede escribir como:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-v=0 & en\ Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-\Delta u=0 & en\ Q \end{cases}$$

En efecto

$$\frac{\partial u}{\partial t}-v=0 \quad en \quad Q$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad en \quad Q$$

de aquí

$$0=\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u \ .$$

Si definimos $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ entonces (5) seria equivalente a:

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

$$(6) \qquad \frac{dU}{dt} + AU = 0$$

con

$$(7) \qquad AU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}$$

el objetivo es aplicar el teorema de **HILLE YOSIDA** en el espacio

$$H = H_o^1(\Omega) \text{ X } L^2(\Omega)$$

dotado del producto escalar

$$\left(U_1, U_2\right) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 \, dx + \int_\Omega u_1 u_2 \, dx + \int_\Omega v_1 v_2 \, dx$$

siendo

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad y \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Esto es un producto escalar.

En efecto :

Veamos que es una forma bilineal.

$$\left(U_1 + U_2, U_3\right) = \int_\Omega \nabla\left(u_1 + u_2\right) \nabla u_3 \, dx + \int_\Omega \left(u_1 + u_2\right) u_3 \, dx + \int_\Omega \left(v_1 + v_2\right) v_3 \, dx$$

$$= \int_\Omega \left(\nabla u_1 + \nabla u_2\right) \nabla u_3 \, dx + \int_\Omega \left(u_1 + u_2\right) u_3 \, dx + \int_\Omega \left(v_1 + v_2\right) v_3 \, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_3 \, dx + \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_3 \, dx + \int_\Omega u_1 u_3 \, dx + \int_\Omega u_2 u_3 \, dx + \int_\Omega v_1 v_3 \, dx + \int_\Omega v_2 v_3 \, dx$$

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_3 dx + \int_\Omega u_1 u_3 dx + \int_\Omega v_1 v_3\, dx + \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_3 dx + \int_\Omega u_2 u_3 dx + \int_\Omega v_2 v_3 dx$$

$$= (U_1, U_3) + (U_2, U_3)$$

es decir se cumple

$$(U_1 + U_2, U_3) = (U_1, U_3) + (U_2, U_3)$$

de igual forma se cumple que

$$(U_1, U_2 + U_3) = (U_1, U_2) + (U_1, U_3)$$

por tanto, se tiene que el producto interior (U_1, U_2) así definido es una forma bilineal

Tenemos que :

$$(U_1, U_2) \geq 0 \qquad \forall\, U_1, U_2 \qquad en \quad H$$

observe además que

$$\begin{aligned}(U_1, U_1) &= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_1 dx + \int_\Omega u_1 u_1 dx + \int_\Omega v_1 v_1 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx + \int_\Omega |u_1|^2 dx + \int_\Omega |v_1|^2 dx \\ &\geq 0\end{aligned}$$

por tanto (U_1, U_2) es un producto escalar .

Consideremos el operador $A: D(A) \rightarrow H$ definido por (7) con

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \mathrm{X}\, H_0^1(\Omega)$$

Observamos que si $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces, $u = 0$ en Γ por tanto la condición (2) queda inmersa en la definición de H y tenemos además que

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad sobre \quad \Sigma .$$

Veamos ahora que $A+I$ es monótono en H.

En efecto

Si $U=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ se tiene que :

$$(AU,U)_H+(U,U)_H=-\int_\Omega \nabla v\,\nabla u\,dx+\int_\Omega (-v)u\,dx+\int_\Omega (-\Delta u)v\,dx$$

$$+\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |u|^2\,dx+\int_\Omega |\,v|^2\,dx$$

ahora por formula de green tenemos que

$$\int_\Omega (\nabla u)v\,dx=-\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx$$

por tanto

$$(8)\qquad (AU,U)_H+(U,U)_H=-\int_\Omega uv\,dx+\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |u|^2\,dx+\int_\Omega |\,v|^2\,dx$$

Supongamos que $uv\geq 0$, como

$$(u-v)^2\geq 0$$

de donde

$$u^2-2uv+v^2\geq 0$$

de aquí que

$$u^2+v^2\geq \frac{u^2+v^2}{2}\geq uv$$

de esta forma

$$u^2+v^2\geq uv$$

es así como

$$-uv+u^2+v^2\geq 0$$

con esto podemos concluir que

$$(AU,U)_H + (U,U)_H = -\int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |v|^2\,dx \geq 0$$

Supongamos que $uv \leq 0$ es decir que $-uv \geq 0$ entonces tenemos

$$(u+v)^2 \geq 0$$

asi

$$u^2 + v^2 \geq -2uv$$

de donde

$$u^2 + v^2 \geq \frac{u^2+v^2}{2} \geq -uv$$

de donde

$$u^2 + v^2 \geq -uv$$

por tanto también se cumple que

$$(AU,U)_H + (U,U)_H = -\int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |v|^2\,dx \geq 0$$

de esta manera podemos concluir que

$$(AU,U)_H + (U,U)_H \geq 0$$

Probemos ahora que $A+I$ es máximal monótono, decir que $\mathbf{R}(A+2I) = H$, por lo tanto es suficiente probar que $A+2I$ es sobreyectivo.

Sea $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ se ha de resolver la ecuación

$$AU + 2U = F$$

es decir el sistema

$$(9) \qquad \begin{cases} -v + 2u = f & en \quad \Omega \\ \\ -\Delta u + 2v = g & en \quad \Omega \end{cases}$$

con

UNIVERSIDAD ... CARTAGENA
BIBLIOTECA FER... DE MADRID
Centro de Informacion ...

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \qquad y \qquad v \in H_0^1(\Omega)$$

En (9), multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando esta con la segunda obtenemos.

$$(10) \qquad -\Delta u + 4u = 2f + g \qquad en \quad \Omega$$

Multiplicando (10) por v se tiene

$$-(\Delta u)v + 4uv = (2f + g)v$$

que integrando sobre Ω

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\,dx + 4\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega (2f + g)v\,dx$$

aplicando la integral de green se tiene

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + 4\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega (2f + g)v\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

puesto que $f + g$ son elementos de $L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ (teorema 2) y $u \in H^2(\Omega)$ (teorema 1), por tanto existe $u \in \left[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right]$, que es solución única de (9), de este modo existe $v = 2u - f$, es decir hemos hallado (u,v) solución única de (9), por tanto $A + 2I$ es sobreyectivo.

Aplicando ahora el teorema de **HILLE YOSIDA** (teorema 5) encontramos que existe una solución única del problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 & en \quad [0,\infty) \\ U(0) = U_0 & dato\ inicial \end{cases}$$

con

$$U \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$$

esto implica

$$u \in C\left([0,\infty);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,\infty);H_0^1(\Omega)\right)\cap C^2\left([0,\infty);L^2(\Omega)\right).$$

Veamos ahora la relación

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\nabla u(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} = \left|v_0\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\nabla u_0\right|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, t\geq 0$$

Multiplicando la ecuación (1) por $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad en \quad Q$$

Integrando sobre Ω obtenemos

$$(11) \qquad \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \int_\Omega \Delta u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = 0.$$

veamos ahora que es

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

y luego veremos que es

$$-\int_\Omega \Delta u\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2$$

integrando sobre Ω se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

y

$$-\int \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega \nabla u \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u) dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

es decir que

$$\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

reemplazando estas ecuaciones en 11 obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

de donde

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\right] = 0$$

por tanto

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} = k, \qquad k \quad \text{costante}$$

esto con respecto a t.

Ahora si $t = 0$ se tiene entonces que k esta dado por

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} = |v_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

por tanto se tiene la igualdad buscada. ∎

2. EFECTO REGULARIZANTE SOBRE LOS DATOS INICIALES

La ecuación de ondas no tiene **ningún efecto regularizante** sobre los datos iniciales. Para visualizar esto observe que en el caso $\Omega = R$ el problema $(1), (2), (3)\, y\, (4)$ toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(x,0) = u_0 \qquad 0 \le x \le l$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0 \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = 0 \qquad t \ge 0$$

$$u(l,t) = 0 \qquad t \ge 0$$

el cual en las coordenadas

$$\xi = x + t \quad y \qquad \eta = x - t$$

y realizando algunas operaciones sencillas se llega a que la solución esta dada por:

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
BIBLIOTECA FERNANDEZ DE MADRID
Centro de Información y Documentación

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x+t)+u_0(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds$$

(ver $[H.F]$ H. F. WEINBERGER ecuaciones diferenciales en derivadas parciales)

si en esta ecuación hacemos $v_0=0$ obtenemos

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x+t)+u_0(x-t)\right]$$

en donde se observa claramente que u no es mas regular que u_0, lo cual podemos precisar de la siguiente forma. Supongamos $u_0 \in C^\infty(R\setminus x_0)$ con $x_0=x+t$ y $x_0=x-t$ las características en el punto$(x_0,0)$, entonces $u(x,t)$ es C^∞en RXR excepto sobre las características, por tanto se cumple la afirmación de que la ecuación de ondas no tiene ningún efecto regularizante sobre los datos iniciales. ∎

3. CUANDO Ω ES ACOTADO

Cuando Ω es acotado, el problema $(1),(2),(3)\,y\,(4)$ se puede resolver por descomposición sobre la base hilbertiana.

En efecto, elijamos una base $(e_i(x))$ de $L^2(\Omega)$ formada por las funciones propias de $-\Delta$ con condición de dirichlet es decir

$$-\Delta e_i=\lambda_i e_i \quad en \quad \Omega \quad con\ \lambda_i\geq 0$$

$$e_i=0 \quad sobre \quad \Gamma$$

se busca una solución de problema $(1),(2),(3)\,y\,(4)$ de la forma

$$u(x,t)=\sum_i a_i(t)e_i(x)$$

de inmediato de observa que

$$a_i''(t)+\lambda_i a_i(t) = 0$$

como el discriminante $(-\lambda_i)$ es menor que cero, entonces

$$a_i(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right)$$

derivando esta se tiene

$$a_i'(t) = -\sqrt{\lambda_i}\, c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) + \sqrt{\lambda_i}\, c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right)$$

que en $t = 0$ se obtiene

$$a_i(0) = c_1(1) + c_2(0)$$

de donde

$$a_i(0) = c_1$$

y

$$a_i'(0) = -\sqrt{\lambda_i}\, c_1(0) + \sqrt{\lambda_i}\, c_2(1)$$

de donde

$$\frac{a_i'(t)}{\sqrt{\lambda_i}} = c_2$$

de esta forma encontramos que

$$a_i(t) = a_i(0) \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) + \frac{a_i'(0)}{\sqrt{\lambda_i}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right)$$

que es la solución buscada y en donde las constantes $a_i(0)$ y $a_i'(0)$ están determinadas por las relaciones

$$u_0(x) = \sum_i a_i(0) e_i(x) \quad y \quad v_0(x) = \sum_i a_i'(0) e_i(x)$$

Es decir son las componentes de u_0 y v_0 en la base (e_i). ∎

REGULARIDAD

Supongamos que los datos iniciales verifican

$$u_0 \in H^k(\Omega) \quad y \quad v_0 \in H^k(\Omega) \forall k$$

al igual que las condiciones de compatibilidad

$$u_0 = \Delta u_0 = \ldots = \Delta^j u_0 = \ldots = 0 \quad sobre \ \Gamma \ \forall j \ natural$$

$$v_0 = \Delta v_0 = \ldots = \Delta^j v_0 = \ldots = 0 \quad sobre \ \Gamma \ \forall j \ natural$$

entonces la solución u del problema $(1), (2), (3)\, y\, (4)$ pertenece a $C^\infty(\overline{\Omega}\ X\,[0,\infty))$

DEMOSTRACION.

Con las mismas notaciones del teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación de ondas que acabamos de demostrar y por inducción sobre k se demuestra que

$$D(A^k) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} u \in H^{k+1}(\Omega) \quad y \quad \Delta^j u = 0 \ sobre \ \Gamma \ \forall\, 0 \le j \le \left[\frac{k}{2}\right] \\ v \in H^k(\Omega) \quad y \quad \Delta^j v = 0 \ sobre \ \Gamma \ \forall\, 0 \le j \le \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 \end{array} \right\}$$

en efecto. Para $k = 1$ encontramos que la definición es valida, esto por la demostración del teorema anterior . supongamos entonces se cumple para un cierto $k = n$ y veamos si es cierta para $k = n + 1$.

Tenemos que

$$H^m(\Omega) = W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1 \ldots N \right\}$$

de donde

$$W^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m-1,p}(\Omega)$$

así

$$H^m(\Omega) \subseteq H^{m-1}(\Omega)$$

es decir que para $k = n + 1$ se cumple que

$$H^{n+1}(\Omega) \subseteq H^{n}(\Omega)$$

de acuerdo con esto y con la definición de $D\left(A^{k}\right)$ se tiene entonces

$$D\left(A^{n+1}\right) \subseteq D\left(A^{n}\right)$$

por tanto

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D\left(A^{n+1}\right)$$

se cumple

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D\left(A^{n}\right)$$

de este modo podemos concluir que para todo k el $D\left(A^{k}\right)$ esta dado como lo hicimos adelante.

En particular $D\left(A^{k}\right) \subset H^{k+1}(\Omega) \text{ X } H^{k}(\Omega)$. Aplicando el (teorema 3) se observa que si $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D\left(A^{k}\right)$ entonces la solución U de

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

verifica

$$U \in C^{k-j}\left([0,\infty); D\left(A^{k}\right)\right) \quad \forall\, j = 0, 1, \ \ldots \ k$$

en particular

$$u \in C^{k-j}\left([0,\infty); H^{j+1}(\Omega)\right) \quad \forall\, j = 0, 1, \ \ldots \ k$$

ahora con ayuda de el corolario 4 y con las hipótesis del este teorema se tiene

$$u \in C^{k}\left(\overline{\Omega} \text{ X } [0,\infty)\right) \quad \forall\, k . \qquad \blacksquare$$

CONCLUSIONES

- Una de las conclusiones que se obtienen del presente trabajo es que el teorema de HILLE YOSIDA es una herramienta muy importante para demostrar existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales parciales.

- las soluciones de la ecuación de ondas no tiene ningún efecto regularizante sobre los datos iniciales.

BIBLIOGRAFIA

[$A\,p$] Apóstol T..M; " Análisis matemático " .Segunda edición.
Editorial Reberte S.A. 1991.

[$B\,r$] Brézis, H ; " análisis funcional teoría y aplicaciones ".
Editorial Alianza Madrid 1984.

[$G\,a$] García, J.A; " introducción ala integral de lebesgue " .
department of mathematics. The university of lowa.
Lowa city, lowa EE UU.

[$H.F$] H.F. Weinberger; "ecuaciones diferenciales en derivadas parciales ".
Editorial reverte S.A.

[$R\,s$] RALPH SHOWALTER, "Monotone Operators in Banach Space"
1988.