EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN NO LINEAL

DAVID JOSÉ SANTOS MARTÍNEZ

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemáticas.

DIRECTOR

Dr. RAFAEL GALEANO ANDRADE

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

CARTAGENA DE INDIAS D.T. Y C.

COLOMBIA

2018

EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN NO LINEAL

DAVID JOSÉ SANTOS MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

CARTAGENA DE INDIAS D.T. Y C.

COLOMBIA

2018

Nota de aceptación

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

DEDICATORIA

Éste trabajo está dedicado a Jehová mi Dios, el Todopoderoso el Creador de todas las cosas el Gran Matemático que con su infinita sabiduría fundó el maravilloso mundo en el que vivimos, que nos dá la vida, salud y felicidad, la gloria y alabanza sea para Él.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi esposa Elvira por su gran apoyo incansable en la realización de éste gran proyecto en mi vida; a mis hijas Vanesa y María que son mis tesoros; a mis padres Noé y Miriam por todo lo que me dieron.

Especial agradecimiento al profesor Rafael Galeano por su paciente acompañamiento al darme la luz de un gran maestro y a todos mis profesores que son mis modelos para ser cada vez mejor.

También agradecimiento especial a la profesora Ana Magnolia Marín por su apoyo y orientación. Agradezco mucho la ayuda y colaboración de mi compañero Julio Cisneros.

RESUMEN

Exponemos los conceptos básicos más importantes que necesitamos para alcanzar los objetivos propuestos. Retomamos textualmente el trabajo hecho por R. Glassey en su libro The Cauchy Problem in Kinetic Theory en su capítulo 2, en el cual el autor plantea el problema de Cauchy para la Ecuación de Boltzmann no Lineal encontrando solución única en el espacio de las funciones continuas tales que multiplicadas por la función de prueba $e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$ son acotadas; lo hace definiendo un operador que, al ser contractivo, demustra la existencia de un único punto fijo en dicho espacio, el cual es la solución del Problema de Cauchy. Seguidamente definimos la suma de dos operadores: uno contractivo y otro continuo y compacto con dominio en el espacio de las funciones integrables tales que multiplicadas por la función de prueba $e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$ son acotadas. R. Glassey encuentra un operador contractivo que tiene punto fijo, el cual es solución única del Problema de Cauchy para la Ecuación de Boltzmann no lineal; nuestro trabajo consiste en estudiar la existencia de un operador que sea la suma de uno contractivo y otro continuo y compacto, el cual tiene solución en el espacio antes descrito, por el Teorema de Punto Fijo de Krasnolseskii.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales y el Análisis Funcional cobra mucho interés en la comunidad matemática actual. Particularmente la Ecuación de Boltzmann ha acaparado la atención de una buena parte de la comunidad científica por sus múltiples aplicaciones, toda vez que describe el choque que ocurre entre partículas o elementos, esto según el contexto de aplicación; es por esta razón que la teoría cinética de los gases y la economía, entre otras ciencias, la emplean para realizar sus respectivos estudios.

Estamos interesados en abordar el Problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann no lineal y queremos encontrarle solución vía Teorema de Punto Fijo de Krasnoselskii; con esta meta expuesta, buscaremos su solución en el espacio X de las funciones L^1 que multiplicadas por una función de prueba apropiada son acotadas. Después el problema se debe transformar en un problema de punto fijo para conseguir una solución débil. Seguidamente queremos encontrar dos operadores definidos en este espacio X, uno que sea continuo y compacto y otro que sea contractivo los cuales sumaremos de tal forma que garantice la existencia de alguna solución. A este espacio de funciones X lo dotaremos de una norma de tal manera que sea un espacio de Banach. Así las cosas aplicaremos el Teorema de Punto Fijo de Krasnolseskii el cual garantiza la existencia de por lo menos una solución local en X.

Por otro lado en el capítulo 3, abordaremos los conceptos básicos apropiados para nuestro propósito, en el cual recurriremos entre otros, al Principio de Contracción de Banach el cual exige un operador contractivo, que mapea el espacio X sobre el mismo espacio, para garantizar existencia de solución y particularmente unicidad de la misma. También el Teorema de Schauder que por su parte exige un operador continuo y compacto para garantizar existencia de por lo menos una solución al problema de punto fijo planteado.

El capítulo 4, se basará completamente en el capítulo dos del libro The Cauchy Problem in Kinetic Theory de Robert Glassey, en el cual el autor encuentra un operador contractivo para el problema de punto fijo correspondiente al Problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann no lineal pasando seguidamente a aplicar el principio de Contracción de Banach garantizando la existencia y unicidad de solución la cual es solución débil al Problema de Cauchy.

Por último, en el capítulo 5, encontraremos un operador que consta de la suma de dos operadores, uno contractivo y el otro continuo y compacto definido en el espacio de funciones antes descrito y le aplicaremos el Teorema de Punto Fijo de Krasnoselskii para encontrar una solución generalizada la cual es solución al Problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann, para consiguir de esta manera el objetivo general propuesto.

2. OBJETIVO DEL TRABAJO DE GRADO.

2.1 Objetivo general.

Encontrar una solución débil vía Teorema del punto fijo de Krasnoselskii con debilitamiento en el dato inicial $f_0(x, v)$ del Problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann no lineal a través de un operador consistente en la suma de uno contractivo y otro continuo y compacto definido en el espacio de Banach de las funciones integrables tales que, multiplicadas por una función de prueba apropiada son acotadas, dotado de la norma del supremo. El operador suma con valores en los reales.

3. PRELIMINARES

En todo nuestro trabajo consideraremos el siguiente espacio:

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida de Lebesgue donde $\Omega = \big([0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\big)$.

En éste capítulo hacemos una contextualización de la teoría que vamos a emplear en toda la consideración enmarcada en los resultados ampliamente conocidos del Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales; recordamos algunas demostraciones, las cuales transcribimos y otras por ser más elaboradas simplemente hacemos la remisión para mayor ilustración.Ver [6]

Definición 3.1 (**Espacio Normado**)**.** Un espacio normado X, es un espacio vectorial en el cual se ha definido una norma. Una norma $(\|\cdot\|)$ es a su vez un funcional definido sobre el espacio X tal que, para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio completo, entonces decimos que es un espacio de *Banach*. Sabemos que la norma define una métrica en un espacio normado; esto es, si $x, y \in X$ entonces $d(x, y) = \|x - y\|$, donde $d(x, y)$ es la distancia de x a y. También, cuando tenemos un mapeo continuo entre dos espacios métricos, conseguimos que la imagen de un espacio compacto es un espacio compacto; dicho de otro modo, la compacidad es un invariante topológico. Más precisamente, consideremos el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sea $T : X \to Y$ un mapeo continuo, para (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Si $M \subset X$ es compacto entonces $T(M)$ es compacto.*

Prueba. Basta verificar que toda sucesión en $T(M)$ posee una subsucesión convergente en $T(M)$.

En efecto, sea (y_n) una sucesión en $T(M)$; entonces para todo n, $y_n = T(x_n)$ donde $x_n \in M$, para todo n; así tenemos una sucesión (x_n) en M; como M es compacto, (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente en M.
Como T es continua tenemos que $T(x_{n_k})$ es una subsucesión de (y_n) que converge en $T(M)$, por lo que $T(M)$ es compacto.. □

Definición 3.2 (**Operador lineal acotado**)**.** Sean X , Y espacios normados, y

$$T : D(T) \subset X \to Y$$

un operador lineal, donde $D(T)$ es el dominio del operador T en X. El operador T se dice que es acotado si si existe un número real $c > 0$ tal que,

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

para todo $x \in D(T)$.

De ésta desigualdad vemos que T mapea conjuntos acotados en su dominio de definición en conjuntos acotados de su rango. La norma del operador T, $\|T\|$, la definimos como:

$$\|T\| = \sup \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}, \text{ donde } x \in D(T) - \{0\}.$$

Como ejemplos de operadores lineales tenemos, para X, Y espacios normados, los siguientes:

Ejemplo 3.1 (**Operador Identidad**)**.** *$I : X \to X$, definido como $I(x) = x$, $x \in X$.*

$$\|I\| = \sup \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|x\|}{\|x\|} = \sup 1 = 1, \quad x \neq 0.$$

Ejemplo 3.2 (**Operador Cero**)**.** *$0 : X \to Y$ definido como $0(x) = 0$; $\|0\| = 0$, $x \in X$.*

Estos dos operadores anteriores son acotados.

Ejemplo 3.3 (Operador Diferenciación). *Si X es el espacio de polinomios definidos sobre $[0,1]$; el operador $T: X \to X$ definido como $T\,x(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$. Se conoce como Operador Diferenciación.*
Este operador no es acotado con la norma del máximo, $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$.
En efecto, si $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\|x_n\| = 1$.
También $T\,x(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) = nt^{n-1}$. $\|T\,x_n\| = n$, $\|x_n\| = 1$ y $\dfrac{\|T\,x_n\|}{\|x_n\|} = n$ $(x \in [0,1])$.
Como n es arbitrario, encontramos que el operador lineal diferenciación no es acotado.

Ejemplo 3.4 (Operador Integración). *Podemos definir un operador integral*

$$T : C[0,1] \to C[0,1]$$

por

$$T\,x(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

donde k es una función dada, llamada kernel de T la cual es continua sobre $[0,1] \times [0,1]$ en el plano $t\tau$, en consecuencia k es acotada, así $|k(t,\tau)| \leq k_0$ para todo $(t,\tau) \in [0,1] \times [0,1]$, k_0 es un real. Así

$$|x(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = \|x\|, \quad t \in [0,1] \qquad y$$

$$\|Tx\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau \leq k_0\|x\|$$

esto es, $\|Tx\| \leq k_0\|x\|$, así T es acotado y sabemos que es lineal, $(t \in [0,1])$.

Definición 3.3 (Operador Lineal Compacto). Sean X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ se dice que es un operador lineal compacto si es lineal y si para todo $M \in X$ acotado, $\overline{T(M)}$ es compacto de Y.

Si dicho operador es acotado se tiene que es continuo. Una caracterización de la compacidad de operador lineal compacto sería:
$T : X \to Y$ es un operador lineal compacto si y solo sí $\overline{T(B)}$, es compacto, donde B es la bola unidad cerrada de X para X, Y espacios normados.

Definición 3.4. Sean X, Y espacios lineales normados. un mapeo $F : X \to Y$ es llamado *compacto* si $F(X)$ está contenido en un compacto de Y. Un mapeo compacto $F : X \to Y$ es llamado *finito dimensional* si $F(X)$ está contenido en un subespacio lineal finito dimensional de Y.

Definición 3.5 (Mapeo Lipschitziano). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado; un mapeo $T : X \to X$ se dice *Lipschitziano* si existe $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$\|(T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

para todo $x, y \in X$.

Se sigue de inmediato la continuidad de T si es Lipschitziano. El menor valor de α que cumple ésta desigualdad se conoce como constante Lipschitziana de T y la notamos por L. Si $L < 1$ decimos que T es una contracción y si $L = 1$ el mapeo se dice que no es expansivo.
Para notación definimos $T^n(x)$ inductivamente como $T^0(x) = x, T(T^n(x)) = T^{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ donde $x \in X$.

Definición 3.6 (Punto Fijo). Un elemento $u \in X$ se dice que es punto fijo de un operador

$$T : X \to X, \quad \text{si } Tu = u$$

Teorema 3.2 (Principio de Contracción de Banach PCB). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, $T : X \to X$ una contracción, entonces existe un único $u \in X$ tal que para todo $x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$$

con

$$\|T^n(x) - u\| \leq \frac{L^n}{1 - L}\|x - T(x)\|$$

para L constante Lipschitziana de T.

Prueba. Sea $x \in X$. Veamos que $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto,

$$\|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| \leq L\|T^{n-1}(x) - T^n(x)\| \leq \cdots \leq L^n\|x - T(x)\|.$$

Para $m > n$ tenemos por desigualdad triangular que

$$\begin{aligned}
&\|T^n(x) - T^m(x)\| \\
&\quad \leq \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| + \|T^{n+1}(x) - T^{n+2}(x)\| + \cdots + \|T^{m-1}(x) - T^m(x)\| \\
&\quad \leq L^n\|x - T(x)\| + \cdots + L^{m-1}\|x - T(x)\| \\
&\quad \leq L^n\|x - T(x)\|[1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n-1}] \\
&\quad \leq L^n\|x - T(x)\|[1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n-1} + \cdots] \\
&\quad = \frac{L^n}{1 - L}\|x - T(x)\|
\end{aligned}$$

Así $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X el cual es completo, por tanto existe $u \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$$

Como T es continua tenemos que

$$u = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x)) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(x)) = T(u)$$

De esta manera u es un punto fijo de T. Si $m \to \infty$ tenemos

$$\|T^n(x) - u\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x - T(x)\|$$

Seguidamente si x y y son puntos fijos del mapeo T tenemos que

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Así $\|x - y\| = 0$. Lo que nos muestra la unicidad del punto fijo de dicho mapeo. $\square$

Observación:

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, y $T : X \to X$ es una contracción, entonces cualquier bola cerrada en el espacio también es completa, ya que cualquier sucesión de Cauchy en dicha bola cerrada es también una sucesión de Cauchy en todo X y al ser éste completo existe el límite de la sucesión en X, y como la bola es cerrada, contiene todos sus puntos adherentes por lo que la sucesión converge en dicha bola cerrada. Es claro que bajo la hipótesis del *Principio de Contracción de Banach*, el operador tiene un único punto fijo en cualquier bola cerrada en donde esté definida, y en consecuencia en todo el espacio.

Teorema 3.3. *Si X es espacio métrico compacto y $T : X \to X$ tal que*

$$\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|,$$

con x, $y \in X$, $x \neq y$. Entonces T tiene un único punto fijo en X.

Prueba. La aplicación $x \longmapsto \|T(x) - x\|$ es contínua en X ; como X es compacto ésta aplicación alcanza mínimo valor en un punto $x_0 \in X$, por lo que x_0 es un punto fijo de T, ya que de otra forma tendríamos que

$$\|T(T(x_0)) - T(x_0)\| < \|T(x_0) - x_0\|, \quad \text{lo cual es una contradicción.}$$

Para la unicidad, supongamos que $T(x) = x$ y $T(y) = y$, $x \neq y$.

Entonces $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$, luego $\|x - y\| < \|x - y\|$ lo cual es absurdo, por lo que $x = y$. De esta manera se tiene la prueba. $\square$

Teorema 3.4. *Sean* $x_0 \in X, r > 0$ *y* $B = B(x_0, r) = \Big\{x \in X : \ \big\|x_0 - x\big\| < r\Big\}$ *y* $(X, \big\| \cdot \big\|)$ *un espacio de Banach.* $T : B \to X$ *una contracción tal que*

$$\big\|T(x_0) - x_0\big\| < (1 - L)r$$

entonces existe un único $u \in B$ *tal que* $T(u) = u$.

Prueba. Sea $r_0 \in [0, r)$ tal que $\big\|T(x_0) - x_0\big\| \leq (1 - L)r_0$, y sea $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$. Entonces

$$\big\|T(x) - x_0\big\| \leq \big\|T(x) - T(x_0)\big\| + \big\|T(x_0) - x_0\big\| \leq L\big\|x - x_0\big\| + (1 - L)r_0$$

ya que T es contractiva. Como $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$,

$$\big\|x - x_0\big\| \leq r_0,$$

así

$$L\big\|x - x_0\big\| + (1 - L)r_0 \leq Lr_0 + r_0 - Lr_0 = r_0,$$

en consecuencia

$$\big\|T(x) - x_0\big\| \leq r_0,$$

entonces $T(x) \in \overline{B(x_0, r_0)}$, esto significa que

$$T : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$$

y como $\overline{B(x_0, r_0)} \subset X$, $\overline{B(x_0, r_0)}$ es completa y por el PCB existe un único $u \in \overline{B(x_0, r_0)}$ tal que $T(u) = u$. Y como $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \overline{B(x_0, r)}$ tenemos el resultado deseado. $\square$

Teorema 3.5 (Teorema de Schauder). *Sea* M *convexo no vacío de un espacio normado* X *y* T *un mapeo continuo de* M *en un compacto* $N \subset M$

$$T : M \to N$$

Entonces T *tiene un punto fijo en su dominio.*

Prueba. Ver Agarwal, Fixed Point Theory and Aplications, pág 38. Ver [1]. $\square$

Definición 3.7. Sea $F \subset L^1(\Omega)$. F es equiintegrable si

i) F es acotado en $L^1(\Omega)$.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$ para todo $f \in F$ y todo $A \subset \Omega$ medible con $m(A) < \delta$.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\omega \in \Sigma$ con $m(\omega) < \infty$ tal que $\int_{\Omega \setminus \omega} |f| d\mu < \varepsilon$ para todo $f \in F$

Teorema 3.6 (Teorema de Dunford-Pettis)**.** *Sea $F \subset L^1(\Omega)$ acotado. Entonces F tiene clausura compacta en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$ si y sólo si F es equiintegrable.*

Prueba. Ver Brezis, Functional Analysis Sobolev Spaces on Partial Diferential Equations.Ver [4] $\square$

Teorema 3.7 (Teorema del Punto Fijo de Krasnoselskii)**.** *Sea M un subconjunto cerrado convexo no vacío de un espacio de Banach X. Supongamos que T y A mapean a M en X tal que:*

i) para todo $x, y \in M, \quad Tx + Ay \in M$,

ii) el operador A es compacto y continuo y

iii) el operador T es una contracción,

Entonces existe $y \in M$ tal que $Ty + Ay = y$

Prueba. Ver H. Bas, J.F.C. Kingman Fixed piont theorems pág 31.Ver [3] $\square$

4. LA SOLUCIÓN A TRAVÉS DE UN OPERADOR CONTRACTIVO

4.1 El problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann

Objetivo: Resolver el Problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann, encontrando una función f de medida de Lebesgue, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ que satisface el problema de Cauchy de la Ecuación de Boltzmann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(t,x,v)}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = Q(f,f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{4.1}$$

La Ecuación de Boltzmann describe en el contexto de la Teoría Cinética de los Gases, la evolución de la función distribución de un gas en un espacio de fases, en el cual se consideran choques indeformables binarios entre moléculas del gas.
Abreviaremos $f(t,x,v) = f(v)$, $f(t,x,u) = f(u)$, ...

El operador no lineal $Q(f,f)(v)$ en (4.1) está definido como:

$$Q(f,f)(v) = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} w \cdot (v-u) \Big[f(v')f(u') - f(v)f(u) \Big] dw\, du$$

el cual podemos reexpresar así $Q(f,f)(v) = Q_g(f,f) - Q_l(f,f)$, donde

$$Q_g(f,f)(v) = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(v')f(u')\, dw\, du$$

y

$$Q_l(f,f)(v) = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(v)f(u)\, dw\, du$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad del área de la esfera; también definimos el subconjunto de la esfera $S^2_+ = \{w \in S^2 : w \cdot (v-u) \geq 0\}$.

Es claro que $Q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ y $Q \in L^1(\Omega)$.

Supondremos que $v + u = v' + u'$, $|v|^2 + |u|^2 = |v'|^2 + |u'|^2$, donde $v, u, v', u', x \in \mathbb{R}^3$

Para $w \in S^2$ tenemos:

$u' = u + w \cdot (v-u)w$ y $v' = v - w \cdot (v-u)w$

De tal manera que $v + u = v' + u'$

En (4.1) $\dfrac{\partial f(v)}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f(v)$ es el operador transporte y $f(0,x,v) = f_0(x,v)$ es el dato inicial del problema de Cauchy.

Lema 4.1. *Veamos que*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(u) dw du = \pi \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u) du$$

.

Así mismo

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(u') dw du = \pi \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u') du.$$

Prueba. Sea $S^2_+ = \{w \in S^2 : w \cdot (v-u) \geq 0\}$

También tenemos $w \cdot (v-u) = |w||v-u|cos\theta$, donde θ es el ángulo entre w y $(v-u)$. Como $|w| = 1$ y $|v-u|cos\theta \geq 0$ tenemos que $cos\theta \geq 0$, razón por la que,si $dA = rdrd\theta$, conseguimos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(u) dw du &= \int_{\mathbb{R}^3} \Big[\int\int_A f(u)|v-u|cos\theta r dr d\theta \Big] du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(u)|v-u| \Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\theta \Big[\int_0^{\pi/2} dr \Big]\Big] d\theta du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(u)|v-u| \Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\theta \Big[r\Big|_0^{\pi/2} \Big]\Big] d\theta du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(u)|v-u| \frac{\pi}{2} \Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\theta d\theta \Big] du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u) \Big[sen\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big] du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u) \Big[sen(\frac{\pi}{2}) - sen(\frac{-\pi}{2}) \Big] du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u) \Big[2sen(\frac{\pi}{2}) \Big] du \\
&= \pi \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u) du
\end{aligned}$$

De forma parecida conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w \cdot (v-u) f(u') dw du = \pi \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f(u') du.$$

Con lo que tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w\cdot(v-u)f(v)f(u)dwdu = \pi\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|f(v)f(u)du.$$

y también

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w\cdot(v-u)f(v')f(u')dwdu = \pi\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|f(v')f(u')du.$$

Por lo que inmediatamente conseguimos

$$\begin{aligned} Q(f,f)(v) &= \sigma\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2_+} w\cdot(v-u)\Big[f(v')f(u')-f(v)f(u)\Big]dudw \\ &= \pi\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[f(v')f(u')-f(v)f(u)\Big]du. \end{aligned}$$

□

Como la ecuación es no lineal, escribimos (4.1) como un problema de punto fijo; para esto definimos el espacio, para $\beta > 0$ un escalar fijo y $\Omega = [0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$,

$$X := \Big\{f\in L^1(\Omega) : \exists\, c>0,\ |f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\le c\Big\}$$

El espacio $X\neq\emptyset$ ya que $f(t,x,v)=0 \quad f\in X$.

Ahora definamos sobre X una norma.
Sea

$$\big\|f\big\|_X = \big\|f\big\| \quad \text{y} \quad \big\|f\big\| = \sup_{(t,x,v)}|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}.$$

Esto está bien definido puesto que si $f\in X$, entonces $|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\le c$, luego existe el $\sup\limits_{(t,x,v)}|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$.

Afirmación:

$\big\|f\big\|_X = \big\|f\big\|$ es una norma.

En efecto, si $\big\|f\big\|=0$, entonces $\sup\limits_{(t,x,v)}|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}=0$,
con lo que $|f(t,x,v)|\equiv 0$, ya que si $|f(t,x,v)|>0$
tendríamos que $|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}>0$

de lo que $\|f\| > 0$;
de esta manera tendríamos una contradicción con la hipótesis.

También, si $f(t,x,v) \equiv 0$, entonces es claro que $\|f\| \equiv 0$.

Ahora sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$\|\alpha f\| = \sup_{t,x,v} |\alpha f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} = |\alpha| \sup_{t,x,v} |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} = |\alpha| \|f\|.$$

Para verificar la desigualdad triangular, sean $f, g \in X$, entonces

$$\|f+g\| = \sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v) + g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)},$$

como $|f(t,x,v) + g(t,x,v)| \leq |f(t,x,v)| + |g(t,x,v)|$, tenemos que

$$|f(t,x,v) + g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + |g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v) + {} & g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \\ & \leq \sup_{(t,x,v)} \left[|f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + |g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \right] \\ & \leq \sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + \sup_{(t,x,v)} |g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}& \sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v) + g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \\ & \qquad \leq \sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + \sup_{(t,x,v)} |g(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\end{aligned}$$

así $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$

Lema 4.2. $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en X, $n \in \mathbb{N}$. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$, $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$.
Así, si $n, m > N$, entonces

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{(t,x,v)} |f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon.$$

Luego, $|f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)| \leq \varepsilon e^{-\beta(|x_0|^2+|v_0|^2)}$, para todo $(t,x,v) \in \Omega$, siempre que $n,m > N$

Así para (t_0,x_0,v_0) fijo en $\Omega = [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$|f_n(t_0,x_0,v_0) - f_m(t_0,x_0,v_0)| \leq \varepsilon e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \quad n,m > N$$

con lo que existe un único $f(t_0,x_0,v_0) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0,x_0,v_0) = f(t_0,x_0,v_0)$.

Así, para cada $(t,x,v) \in \Omega$ existe un único $f(t,x,v) \in \mathbb{R}$ de tal manera que tenemos una función definida puntualmente en el dominio, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t,x,v) = f(t,x,v)$.

Veamos ahora que $f = f(t,x,v) \in X$.

En efecto, si $m \to \infty$, en $\sup\limits_{(t,x,v)} |f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon$, para n suficientemente grande

tenemos que $\sup\limits_{(t,x,v)} |f_n(t,x,v) - f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon$,

entonces $|f_n(t,x,v) - f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon$, para n suficientemente grande.

Pero, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t,x,v) \in X$, tenemos que $|f_n(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq C$.

Así tenemos:

$$|f(t,x,v)| = |f(t,x,v) - f_n(t,x,v) + f_n(t,x,v)| \leq |f(t,x,v) - f_n(t,x,v)| + |f_n(t,x,v)|,$$

así

$$\begin{aligned} |f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} &\leq |f(t,x,v) - f_n(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + |f_n(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \\ &\leq \varepsilon + C = C_0. \end{aligned}$$

Esto es, $|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq C_0$.

Además, si $m \to \infty$, en $\sup\limits_{(t,x,v)} |f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon$, para n suficientemente grande; conseguimos que

$$\big\| f_n(t,x,v) - f(t,x,v) \big\| \leq \varepsilon$$

de lo que podemos concluir que $\{f_n\} \to f$ uniformemente;

como $f_n \in X$ para todo n y $|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq C_0$, conseguimos que $f \in L_1(\Omega)$, por lo tanto $f \in X$ y también $f \in L_1(\Omega)$. Hemos conseguido mostrar que el espacio X con la norma definida es de Banach. $\square$

Lema 4.3. *Veamos que*

$$\int_0^\infty e^{-\beta|x+\tau(v-u)|^2}d\tau \leq |v-u|^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Prueba. Si $v = u$, el resultado es trivial, puesto que

$$\int_0^\infty e^{-\beta|x+\tau(v-u)|^2}d\tau = \int_0^\infty e^{-\beta|x|^2}dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta|x|^2}dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

.

En el caso $v \neq u$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta|x+\tau(v-u)|^2}d\tau &= \int_0^\infty e^{-\beta\left[|x|^2+2\tau x\cdot(v-u)+\tau^2|v-u|^2\right]}d\tau \\
&= e^{-\beta|x|^2}\int_0^\infty e^{-\beta\left[\tau^2|v-u|^2+2\tau x\cdot(v-u)\right]}d\tau \\
&= e^{-\beta|x|^2}\int_0^\infty e^{-\beta\left[\tau^2|v-u|^2+2\tau x\cdot(v-u)\frac{|v-u|}{|v-u|}\right]}d\tau.
\end{aligned}$$

Hacemos $s = \tau|v-u|$ y $\eta = \dfrac{(v-u)}{|v-u|}$, entonces $|\eta| = 1$, $ds = |v-u|d\tau$ y $s^2 = \tau^2|v-u|^2$. Ahora, sustituyendo

$$\begin{aligned}
|v-u|^{-1}e^{-\beta|x|^2}\int_0^\infty e^{-\beta\left[s^2+2sx\cdot\eta+(x\cdot\eta)^2-(x\cdot\eta)^2\right]}ds &= |v-u|^{-1}e^{-\beta|x|^2}\int_0^\infty e^{-\beta\left[(s+(x\cdot\eta))^2-(x\cdot\eta)^2\right]}ds \\
&= |v-u|^{-1}e^{\beta\left[(x\cdot\eta))^2-|x|^2\right]}\int_0^\infty e^{-\beta\left[s+(x\cdot\eta)\right]^2}ds
\end{aligned}$$

Sea $\xi = s + (x\cdot\eta)$, entonces $d\xi = ds$. Como $|\eta| = 1$ y como también se cumple que $(x\cdot\eta)^2 - |x|^2 = -|x\times\eta|^2$, tenemos al sustituir

$$\begin{aligned}
|v-u|^{-1}e^{\beta\left[(x\cdot\eta)^2-|x|^2\right]}\int_0^\infty e^{-\beta\xi^2}d\xi &= |v-u|^{-1}e^{-\beta|x\times\eta|^2}\int_0^\infty e^{-\beta\xi^2}d\xi \\
&\leq |v-u|^{-1}e^{-\beta|x\times\eta|^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta\xi^2}d\xi \\
&\leq |v-u|^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta\xi^2}d\xi = |v-u|^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}
\end{aligned}$$

□

4.2 Problema del Punto Fijo

Definición 4.1. Sea $f(t,x,v) \in X$. Definimos $f^\#(t,x,v) = f(t,x+tv,v)$, de donde $f^\# : \Omega \to \mathbb{R}^+$.

Definición 4.2. Entenderemos por una solución clásica de (4.1), aquellas $f \in L^1(\Omega)$ y que satisfacen (4.1) clásicamente.

Definición 4.3. Entenderemos por una solución en el sentido de $L^1(\Omega)$, aquellas $f \in L^1(\Omega)$ y que satisfacen (4.1) en $L^1(\Omega)$.

Ahora, sea $f \in X$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f^{\#}(t,x,v) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x+vt,v)\frac{dt}{dt} + \frac{\partial}{\partial(x+vt)} f(t,x+vt,v)\frac{d}{dt}(x+vt) + \frac{\partial}{\partial v} f(t,x+vt,v)\frac{d}{dt}v \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t} f^{\#}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x f^{\#}(t,x,v) \\
&\quad = Q^{\#}(f,f)(t,x,v).
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que:

$$\frac{d}{dt} f^{\#}(t,x,v) = Q^{\#}(f,f)(t,x,v)$$

Integrando en $[0,t]$ obtenemos

$$f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau, \quad \text{para} \;\; f \in X.$$

Por tanto definimos el operador

$$\boldsymbol{F}(f^{\#}(t,x,v)) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau. \tag{4.2}$$

Lema 4.4. *Supongamos que $f_0(x,v) \in X$. El operador definido en (4.2) satisface*

i) $\boldsymbol{F}(f^{\#}) \in X$, *si* $f^{\#} \in X$, *es decir* $\boldsymbol{F}\colon X \to X$

ii) $\boldsymbol{F}$ *es una contracción.*

Prueba. Sea $f_0(x,v) \in X$ y $f^{\#} \in X$. Sea $\mathbb{R}^3 \times S_+^2 = A$.
Por definición el operador colisión

$$Q(f,f)(t,x,v) = \sigma \iint_A w\cdot(v-u)\left[f(t,x,v')f(t,x,u') - f(t,x,v)f(t,x,u)\right] dw\, du$$

Por lo que tenemos aplicando Lema 4.1

$$
\begin{aligned}
Q^{\#}(f,f)(t,x,v) &= \sigma \iint_A w\cdot(v-u)\left[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right] dw\,du \\
&= \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|Q^{\#}(f,f)| &\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') + f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right| du \\
&\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\left|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')\right| + \left|f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right|\right] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|Q^{\#}(f,f)| \leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\left|f^{\#}(t,x,v')\right|\left|f^{\#}(t,x,u')\right| + \left|f^{\#}(t,x,v)\right|\left|f^{\#}(t,x,u)\right|\right] du \\
&\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[|f^{\#}(t,x,v')| e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\
&\qquad |f^{\#}(t,x,u')| e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&+ |f^{\#}(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} |f^{\#}(t,x,u)| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|Q^{\#}(f,f)| &\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[\|f^{\#}\| e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \|f^{\#}\| e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + \|f^{\#}\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \|f^{\#}\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big] du \\
&\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[\|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|Q^{\#}(f,f)| &\leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big] du \\
&\leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[e^{-\beta(|(x+tv)-tv')|^2+|(x+tv)-tu')|^2+|v'|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + e^{-\beta(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2)}\Big] du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|Q^{\#}(f,f)| &\leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv'+t^2|v'|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu'+t^2|u'|^2+|v'|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + e^{-\beta(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2)}\Big] du \\
&\leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[e^{-\beta(2|x+tv|^2-2(x+tv)t(v'+u')+t^2(|v'|^2+|u'|^2)+|v'|^2+|u'|^2)} \\
&\qquad + e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big] du
\end{aligned}
$$

$$|Q^{\#}(f,f)| \leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\Big[e^{-\beta(2|x+tv|^2-2(x+tv)t(v+u)+t^2(|v|^2+|u|^2)+|v|^2+|u|^2)} + e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big]du$$
$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\Big[e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv+t^2|v|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu+t^2|u|^2+|v|^2+|u|^2)} + e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big]du$$

$$|Q^{\#}(f,f)| \leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\Big[e^{-\beta(|(x+tv)-tv)|^2+|(x+tv)-tu)|^2+|v|^2+|u|^2)} + e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\Big]du$$
$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\Big[e^{-\beta(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2)} + e^{-\beta(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2)}\Big]du$$

$$|Q^{\#}(f,f)| \leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]-\beta\left[|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right]}du$$
$$\leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|e^{-\beta\left[|x+t(v-u)|^2\right]}e^{-\beta|u|^2}du$$

Integrando en $[0,t]$ conseguimos:

$$\int_0^t |Q^{\#}(f,f)(t,x,v)|d\tau$$
$$\leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left[\int_0^t e^{-\beta\left[|x+\tau(v-u)|^2\right]}d\tau\right]e^{-\beta|u|^2}du$$
$$\leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left[\int_0^\infty e^{-\beta\left[|x+\tau(v-u)|^2\right]}d\tau\right]e^{-\beta|u|^2}du$$

$$\int_0^t |Q^{\#}(f,f)(t,x,v)|d\tau \leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\beta|u|^2}du$$
$$\leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}^3 e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]}$$

$$\int_0^t |Q^{\#}(f,f)(t,x,v)|d\tau \leq 2\sigma\|f^{\#}\|^2 \frac{\pi^3}{\beta^2}e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]}$$

Por todo esto hacemos:

$$\boldsymbol{F}f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

$$|\boldsymbol{F}f^{\#}(t,x,v)| = |f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau|$$
$$\leq |f_0(x,v)| + \int_0^t |Q^{\#}(f,f)|d\tau$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{F} f^{\#}(t,x,v)| &\leq |f_0(x,v)| e^{\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} + \int_0^t |Q^{\#}(f,f)| d\tau \\
&\leq \left\|f_0\right\| e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} + 2\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \frac{\pi^3}{\beta^2} e^{-\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]}
\end{aligned}
$$

Por tanto conseguimos que:

$$
|\boldsymbol{F} f^{\#}(t,x,v)| e^{\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \leq \left\|f_0\right\| + 2\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \frac{\pi^3}{\beta^2}
$$

Esto nos muestra que si $f^{\#} \in X$ y $f_0 \in X$, entonces $\boldsymbol{F} f^{\#} \in X$. Esto es $\boldsymbol{F} : \ X \to X$. Ahora, considerando la bola cerrada en X

$$
X_R = \{f \in X : \|f\| \leq R, \ R > 0\}
$$

En particular si R es lo suficientemente pequeño, ésto es, $R \leq \frac{\beta^2}{4\sigma\pi^3}$ tenemos que , $\left\|f_0\right\| \leq \frac{R}{2}$ y $+2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2} R \leq \frac{1}{2}$, por lo que

$$
|\boldsymbol{F} f^{\#}(t,x,v)| e^{\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \leq \left\|f_0\right\| + 2\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \frac{\pi^3}{\beta^2} \leq \left\|f_0\right\| + 2\sigma R^2 \frac{\pi^3}{\beta^2}
$$

Y seguidamente,

$$
\sup_{(t,x,v)} |\boldsymbol{F} f^{\#}| e^{\beta\left[|x|^2+|v|^2\right]} \leq \frac{R}{2} + 2\sigma R \frac{\pi^3}{\beta^2} R \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R
$$

de lo que

$$
\left\|\boldsymbol{F} f^{\#}\right\| \leq R
$$

de lo que observamos que $\boldsymbol{F} f^{\#} \in X_R$, siempre que $\left\|f_0\right\| \leq \frac{R}{2}$ y $+2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2} R \leq \frac{1}{2}$

Para mostrar la segunda parte; tomemos $f^{\#}, g^{\#} \in X$, entonces:

$$
|\boldsymbol{F}(f^{\#}) - \boldsymbol{F}(g^{\#})| = |\boldsymbol{F}(f^{\#} - g^{\#})| = \left| \int_0^t [Q^{\#}(f,f) - Q^{\#}(g,g)] d\tau \right|
$$

De esta manera hacemos:

$$
\begin{aligned}
&\big|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\big| \\
&\quad=\bigg|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')-f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\Big] \\
&\qquad-\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u)\Big]du\bigg| \\
&\quad=\bigg|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') \\
&\qquad+g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\Big]du\bigg| \\
&\quad\leq\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') \\
&\qquad+g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\Big|du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\big|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\big| \\
&\quad\leq\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\big|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')\big| \\
&\qquad+\big|g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\big|\Big]du \\
&\quad\leq\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\big|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')-f^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') \\
&\qquad+f^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')\big|+\big|g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u) \\
&\qquad-g^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)+g^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\big|\Big]du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\big|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\big| \\
&\quad\leq\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\big|f^{\#}(t,x,v')\big(f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,u')\big)+g^{\#}(t,x,u') \\
&\qquad\big(f^{\#}(t,x,v')-g^{\#}(t,x,v')\big)\big|+\big|g^{\#}(t,x,v)\big(g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,u)\big) \\
&\qquad+f^{\#}(t,x,u)\big(g^{\#}(t,x,v)-f^{\#}(t,x,v)\big)\big|\Big]du \\
&\quad\leq\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\big|f^{\#}(t,x,v')\big(f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,u')\big)\big|+\big|g^{\#}(t,x,u') \\
&\qquad\big(f^{\#}(t,x,v')-g^{\#}(t,x,v')\big)\big|+\big|g^{\#}(t,x,v)\big(g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,u)\big)\big| \\
&\qquad+\big|f^{\#}(t,x,u)\big(g^{\#}(t,x,v)-f^{\#}(t,x,v)\big)\big|\Big]du
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right| \\
&\quad\le \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\left|f^{\#}(t,x,v')\right|\left|f^{\#}(t,x,u')-g^{\#}(t,x,u')\right|+\left|g^{\#}(t,x,u')\right| \\
&\quad\left|f^{\#}(t,x,v')-g^{\#}(t,x,v')\right|+\left|g^{\#}(t,x,v)\right|\left|g^{\#}(t,x,u)-f^{\#}(t,x,u)\right| \\
&\quad+\left|f^{\#}(t,x,u)\right|\left|g^{\#}(t,x,v)-f^{\#}(t,x,v)\right|\Big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right| \\
&\quad\le \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\left|f^{\#}(t,x,v')\right|e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\
&\quad\left|(f^{\#}-g^{\#})(t,x,u')\right|e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\quad+\left|g^{\#}(t,x,u')\right|e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\quad\left|(f^{\#}-g^{\#})(t,x,v')\right|e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\
&\quad+\left|g^{\#}(t,x,v)\right|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left|(g^{\#}-f^{\#})(t,x,u)\right|e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \\
&\quad e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}+\left|f^{\#}(t,x,u)\right|e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \\
&\quad\left|(g^{\#}-f^{\#})(t,x,v)\right|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\Big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right| \\
&\quad\le \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\left\|f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\quad+\left\|g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}+\left\|g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \\
&\quad\left\|g^{\#}-f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}+\left\|f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\left\|g^{\#}-f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\Big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right| \\
&\quad\le \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[\left\|f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\
&\quad+\left\|g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2+|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}+\left\|g^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)} \\
&\quad+\left\|f^{\#}\right\|e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\Big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right| \\
&\quad\le \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right) \\
&\quad+e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|(x+tv)-tv'|^2+|v'|^2+|(x+tv)-tu'|^2+|u'|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\\&\qquad+e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv'+t^2|v'|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu'+t^2|u'|^2+|v'|^2+|u'|^2)}\\&\quad\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)+e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(2|x+tv|^2-2(x+tv)t(v'+u')+t^2(|v'|^2+|u'|^2)+|u'|^2+|v'|^2)}\\&\quad\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)+e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

Aplicando las leyes $v+u=v'+u'$ y $|u|^2+|v|^2=|u'|^2+|v'|^2$, conseguimos:

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(2|x+tv|^2-2(x+tv)t(v+u)+t^2(|v|^2+|u|^2)+|u|^2+|v|^2)}\\&\quad\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)+e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv+t^2|v|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu+t^2|u|^2+|v|^2+|u|^2)}\\&\quad\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)+e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|x+tv-tv|^2+|v|^2+|x+tv-tu)|^2+|u|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\\&\qquad+e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\\&\qquad+e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big[e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\\&\qquad+e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\Big]du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|2e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}du\end{aligned}$$

Integrando de ambos lados y aplicando el Lema 4.3 tenemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|d\tau\\&\leq 2\pi\sigma e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left(\int_0^t e^{-\beta|x+\tau(v-u)|^2}d\tau\right)e^{-\beta|u|^2}du\\&\leq 2\pi\sigma e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left(\int_0^\infty e^{-\beta|x+\tau(v-u)|^2}d\tau\right)e^{-\beta|u|^2}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left|Q^{\#}(f,f)-Q^{\#}(g,g)\right|d\tau\\&\quad\leq 2\pi\sigma e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\beta|u|^2}du\\&\quad\leq 2\pi\sigma e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\right)\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}^3\\&\quad\leq 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\Big(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\Big)\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos:

$$\left|\boldsymbol{F}\left(f^{\#}-g^{\#}\right)\right|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\leq 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\Big)\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|$$

En consecuencia conseguimos finalmente:

$$\left\|\boldsymbol{F}\left(f^{\#}-g^{\#}\right)\right\|\leq 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\Big)\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|$$

Ahora, sea $X_R=\{f\in X:\|f\|\leq R\quad R>0\}$; si $f^{\#},g^{\#}\in X_R$, tenemos que:

$$\left\|\boldsymbol{F}\left(f^{\#}-g^{\#}\right)\right\|\leq 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big(\left\|f^{\#}\right\|+\left\|g^{\#}\right\|\Big)\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|\leq 4\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}R\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|$$

Si R es lo suficientemente pequeño, esto es $R<\dfrac{\beta^2}{4\pi^3\sigma}$, entonces $4\dfrac{\pi^3\sigma}{\beta^2}R<1$ con lo que demostramos que $\boldsymbol{F}$ es una contracción siempre que R sea lo suficientemente pequeño. $\square$

Teorema 4.1. *Sea* $X_R = \{f \in X : \|f\| \leq R \quad R > 0\}$ *El operador*

$$\boldsymbol{F}(f^{\#}(t,x,v)) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

descrito en (4.2), tiene un único punto fijo en X_R.

Prueba. El espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach, en consecuencia la bola cerrada X_R también es completa como subespacio; el operador $\boldsymbol{F}$ es una contracción tal que $\boldsymbol{F} : X_R \to X_R$. Entonces por el Principio de Contracción de Banach, existe un único $f^{\#} \in X_R$ tal que $\boldsymbol{F}f^{\#} = f^{\#}$. □

Conclusión: Al finalizar este capítulo hemos conseguido una única solución. El Teorema de Punto Fijo de Banach ó Principio de Contracción de Banach, garantiza la existencia y unicidad de la solución de nuestro problema; esto es existe un único $f^{\#} \in X_R$ tal que $\boldsymbol{F}f^{\#} = f^{\#}$, es decir una única solución local.Ver [2]

5. LA SUMA DE UN OPERADOR CONTRACTIVO CON UNO CONTINUO Y COMPACTO

Ahora, queremos encontrar dos operadores definidos en el espacio de funciones X, en ese orden de ideas procedemos primeramente a plantear el problema de Cauchy. El problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann no lineal es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(t,x,v)}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) = Q(f,f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{5.1}$$

Queremos encontrar una función f, de medida de Lebesgue tal que:
$f : \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \to \mathbb{R}^+$ satisfaga dicho problema en el siguiente espacio.

$$X := \left\{ f \in L^1(\Omega) : \exists\, c > 0,\ |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq c \right\}$$

Para $\beta > 0$, $\Omega = [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Espacio dotado con norma

$$\|f\|_X = \sup_{(t,x,v)} |f(t,x,v)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

.

Sabemos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Abreviemos las notaciones $f(t,x,v) = f(v)$, $f(t,x,u) = f(u)$, ...

El operador $Q^{\triangle}(f,g)$ está definido de la siguiente manera

$$Q^{\triangle}(f,g)(t,x,v) = \frac{1}{2}\sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} \omega\cdot(v-u) \left[f(v')g(u') + f(u')g(v') - f(u)g(v) - f(v)g(u) \right] d\omega du \tag{5.2}$$

El operador colisión $Q(f,f)$ está definido de la siguiente manera

$$Q(f,f)(t,x,v) = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} \omega \cdot (u-v) \left[f(v')f(u') - f(v)f(u) \right] d\omega du \tag{5.3}$$

$$Q(f,f)(t,x,v) = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} \omega \cdot (u-v) f(v')f(u') d\omega du - \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} \omega \cdot (u-v) f(v)f(u) d\omega du \tag{5.4}$$

Es decir,

$$Q(f,f) = Q_g(f,f) - Q_l(f,f) \tag{5.5}$$

Donde σ es una constante proporcional al área de la esfera.
Observemos que

$$Q^{\triangle}(f,f) = Q(f,f)$$

Aquí

$$S^2_+ = \left\{ \omega \in S^2 : \omega \cdot u \leq \omega \cdot v \right\}$$

$$S^2 = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^3 : \|\omega\| = 1 \right\}$$

Consideraremos que $v' + u' = v + u$ y que $|v'|^2 + |u'|^2 = |v|^2 + |u|^2$ se cumplen.

Definimos $f^{\#}(t,x,v) = f(t, x+vt, v)$; por cálculos directos encontramos que

$$Q^{\#}(f,\, f) = Q(f^{\#},\, f^{\#})$$

así:

$$\frac{d}{dt} f^{\#}(t,x,v) = Q^{\#}(f,f)(t,x,v),$$

y si integramos con respecto a t;

$$f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f) d\tau$$

Por tanto definimos el operador $\boldsymbol{F} f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f) d\tau$. Tenemos que $\boldsymbol{F} :\ X \to X$.

Definamos los operadores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{T}$ sobre el espacio X de la siguiente manera

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} f^{\#}(t,x,v) = -\displaystyle\int_0^t Q_l^{\#}(f,f) d\tau \\ \boldsymbol{T} f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \displaystyle\int_0^t Q_g^{\#}(f,f) d\tau. \end{cases} \tag{5.6}$$

Obsérvese que $\boldsymbol{F} f^{\#} = \boldsymbol{A} f^{\#} + \boldsymbol{T} f^{\#}$.

Lema 5.1. *Los operadores* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{T}$ *cumplen que* $\boldsymbol{A} :\ X \to X$ *y* $\boldsymbol{T} :\ X \to X$.

Prueba. Tomemos $f^\# \in X$, de lo que conseguimos

$$\left|\boldsymbol{A} f^\#(t,x,v)\right| = \left| - \int_0^t Q_l^\#(f,f) d\tau \right| \leq \int_0^t \left|Q_l^\#(f,f)\right| d\tau$$

Por definición $Q_l(f,f) = \sigma \int \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} \omega \cdot (v-u) f(t,x,v) f(t,x,u) d\omega du$ por lo que

$$Q_l^\#(f,f) = \sigma \int \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} \omega \cdot (v-u) f^\#(t,x,v) f^\#(t,x,u) d\omega du$$

Integrando en $\mathbb{S}_+^2$ y por Lema 4.1 conseguimos que

$$Q_l^\#(f,f) = \sigma\pi f^\#(t,x,v) \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| f^\#(t,x,u) du$$

$$\begin{aligned}
\left|Q_l^\#(f,f)\right| &\leq \sigma\pi \left|f^\#(t,x,v)\right| \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left|f^\#(t,x,u)\right| du \\
&\leq \sigma\pi \left|f^\#(t,x,v)\right| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left|f^\#(t,x,u)\right| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} du \\
&\leq \sigma\pi \|f^\#\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \|f^\#\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} du \\
&\leq \sigma\pi \|f^\#\|^2 \, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} du
\end{aligned}$$

Ahora, integrando en $[0,t]$ conseguimos

$$\int_0^t |Q_l^\#(f,f)| d\tau \leq \sigma\pi \|f^\#\|^2 \;\; e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\int_0^t e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2)} d\tau \right] e^{-\beta|u|^2} du$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|Q_l^\#(f,f)\right| d\tau &\leq \sigma\pi \|f^\#\|^2 \, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\int_0^\infty e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2)} d\tau \right] e^{-\beta|u|^2} du \\
&\leq \sigma\pi \|f^\#\|^2 \, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \right] e^{-\beta|u|^2} du \\
&\leq \sigma\pi \|f^\#\|^2 \, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \right]^3
\end{aligned}$$

$$\int_0^t \left|Q_l^\#(f,f)\right| d\tau \leq \frac{\pi^3 \sigma}{\beta^2} \|f^\#\|^2 \, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

Así

$$\left|\boldsymbol{A} f^\#(t,x,v)\right| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \frac{\pi^3 \sigma}{\beta^2} \|f^\#\|^2$$

Esto significa que $\boldsymbol{A} : \; X \to X$.

Similarmente, para el operador $\boldsymbol{T}$ tenemos; si $f^{\#} \in X$ y $f_0 \in X$:

$$\left|\boldsymbol{T} f^{\#}(t,x,v)\right| \leq \left|f_0(x,v)\right| + \left|\int_0^t Q_g^{\#}(f,f)d\tau\right|$$

Por definición: $Q_g(f,f) = \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \omega\cdot(v-u)f(t,x,v')f(t,x,u')d\omega du$ por lo que

$$Q_g^{\#}(f,f) = \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \omega\cdot(v-u)f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')d\omega du$$

$$\begin{aligned}
\left|Q_g^{\#}(f,f)\right| &\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\left|f^{\#}(t,x,v')\right|\left|f^{\#}(t,x,u')\right|d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\left|f^{\#}(t,x,v')\right|e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\
&\qquad \left|f^{\#}(t,x,u')\right|e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}\|f^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|(x+tv)-tv')|^2+|v'|^2+|(x+tv)-tu')|^2+|u'|^2)}d\omega du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|Q_g^{\#}(f,f)\right| &\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2 \\
&\qquad e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv'+t^2|v'|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu'+t^2|u'|^2+|v'|^2+|u'|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2 \\
&\qquad e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)t(v'+u')+|x+tv|^2+t^2(|v'|^2+|u'|^2)+|v'|^2+|u'|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2 \\
&\qquad e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)t(v+u)+|x+tv|^2+t^2(|v|^2+|u|^2)+|v|^2+|u|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2 \\
&\qquad e^{-\beta(|x+tv|^2-2(x+tv)tv+t^2|v|^2+|x+tv|^2-2(x+tv)tu+t^2|u|^2+|v|^2+|u|^2)}d\omega du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|Q_g^{\#}(f,f)\right| &\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|(x+tv)-tv)|^2+|v|^2+|(x+tv)-tu)|^2+|u|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|\|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)}d\omega du \\
&\leq \sigma\|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int\int_{\mathbb{R}^3\times S_+^2} \left|\omega\cdot(v-u)\right|e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2)}e^{-\beta|u|^2}d\omega du
\end{aligned}$$

Ahora, integrando en $[0,t]$ y considerando que $[0,t] \subset [0,\infty]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|Q_g^{\#}(f,f)\right| d\tau \\
&\quad \leq \sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_0^t \int \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} \left|\omega \cdot (v-u)\right| e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} e^{-\beta|u|^2} d\omega du d\tau \\
&\quad \leq \sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_0^\infty \int \int_{\mathbb{R}^3 \times S_+^2} \left|\omega \cdot (v-u)\right| e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} e^{-\beta|u|^2} d\omega du d\tau \\
&\quad \leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \left|v-u\right| e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} e^{-\beta|u|^2} du d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|Q_g^{\#}(f,f)\right| d\tau \\
&\quad \leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} \left|v-u\right| \left[\int_0^\infty e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} d\tau\right] e^{-\beta|u|^2} du d\tau \\
&\quad \leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right] e^{-\beta|u|^2} du \\
&\quad \leq \pi\sigma \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right]^3 \\
&\quad \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}
\end{aligned}$$

Así conseguimos:

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{T} f^{\#}(t,x,v)\right| &\leq \left|f_0(x,v)\right| + \int_0^t \left|Q_g^{\#}(f,f)(t,x,v)\right| d\tau \\
&\leq \left|f_0(x,v)\right| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} + \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \\
&\leq \|f_0\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} + \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2\, e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}
\end{aligned}$$

Por lo que finalmente conseguimos:

$$\left|\boldsymbol{T} f^{\#}(t,x,v)\right| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \|f_0\| + \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2$$

De tal manera que $\boldsymbol{T} : X \to X$. □

Por otro lado, definamos la bola cerrada de radio R en X:

$$X_R = \{f \in X : \|f\| \leq R, R > 0\}$$

para demostrar los siguientes lemas.

Lema 5.2. *Sea* $\boldsymbol{T}\colon X_R \to X$ *un operador definido por*

$$\boldsymbol{T}f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q_g^{\#}(f,f)(t,x,v)d\tau, \ \ con \ \ f^{\#} \in X_R.$$

Entonces $\boldsymbol{T}$ *es una contracción.*

Prueba. Sean $f^{\#}$, $g^{\#}$, $f_0 \in X_R$, entonces

$$\begin{aligned}\big|\boldsymbol{T}(f^{\#}-g^{\#})(t,x,v)\big| &= \big|\boldsymbol{T}f^{\#}(t,x,v) - \boldsymbol{T}g^{\#}(t,x,v)\big| \\ &= \left|\int_0^t \big[Q_g^{\#}(f,f)(t,x,v) - Q_g^{\#}(g,g)(t,x,v)\big]d\tau\right| \\ &\leq \int_0^t \big|Q_g^{\#}(f,f)(t,x,v) - Q_g^{\#}(g,g)(t,x,v)\big|d\tau\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}&\big|Q_g^{\#}(f,f) - Q_g^{\#}(g,g)\big| \\ &\quad= \left|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')\Big\}du\right| \\ &\quad= \Bigg|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,u')g^{\#}(t,x,v') \\ &\qquad\qquad + f^{\#}(t,x,u')g^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')\Big\}du\Bigg| \\ &\quad= \Bigg|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{f^{\#}(t,x,u')\big[f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')\big] \\ &\qquad\qquad + g^{\#}(t,x,v')\big[f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')\big]\Big\}du\Bigg|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big|Q_g^{\#}(f,f) - Q_g^{\#}(g,g)\big| &\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{\big|f^{\#}(t,x,u')\big[f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')\big]\big| \\ &\qquad + \big|g^{\#}(t,x,v')\big[f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')\big]\big|\Big\}du \\ &\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{\big|f^{\#}(t,x,u')\big|\big|f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')\big| \\ &\qquad + \big|g^{\#}(t,x,v')\big|\big|f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')\big|\Big\}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big|Q_g^{\#}(f,f) - Q_g^{\#}(g,g)\big| \\ &\quad\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{|f^{\#}(t,x,u')|e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} \\ &\qquad\qquad |(f^{\#}-g^{\#})(t,x,v')|e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\ &\qquad\qquad + |g^{\#}(t,x,v')|e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \\ &\qquad\qquad |(f^{\#}-g^{\#})(t,x,u')|e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}\Big\}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{\|f^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}\|f^{\#}-g^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}\\&\qquad\qquad+\|g^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}\|f^{\#}-g^{\#}\|e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)}\Big\}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{&\big[\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\big]\\&e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)+|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)}\|f^{\#}-g^{\#}\|\Big\}du\end{aligned}$$

Aplicando las leyes $v+u=v'+u'$ y $|v'|^2+|u'|^2=|v|^2+|u|^2$ y procediendo como anteriormente lo hicimos, conseguimos

$$\begin{aligned}&\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|\\&\quad\leq \pi\sigma\|f^{\#}-g^{\#}\|\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)+|x|^2+|v|^2)}du\end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^t\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|d\tau\leq \pi\sigma\|f^{\#}-g^{\#}\|&\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\\&\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\Big\{\int_0^{\infty}e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)}d\tau\Big\}e^{-\beta|u|^2}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|d\tau\\&\qquad\leq \pi\sigma\|f^{\#}-g^{\#}\|\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\beta|u|^2}du\\&\qquad\leq \pi\sigma\|f^{\#}-g^{\#}\|\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right]^3\end{aligned}$$

$$\int_0^t\left|Q_g^{\#}(f,f)-Q_g^{\#}(g,g)\right|d\tau\leq\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\|f^{\#}-g^{\#}\|\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

Esto es

$$\left|\boldsymbol{T}(f^{\#}-g^{\#})\right|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}\leq\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}\|f^{\#}-g^{\#}\|$$

Con lo que finalmente conseguimos:

$$\left\|\boldsymbol{T}(f^{\#}-g^{\#})\right\|\leq\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}\|f^{\#}-g^{\#}\|$$

Como $f^{\#}$, $g^{\#}\in X_R$ se tiene que $\|f^{\#}\|$ y $\|g^{\#}\|$ son menores o iguales que R. Por lo tanto

$$\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}\Big\{\|f^{\#}\|+\|g^{\#}\|\Big\}\leq 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}R$$

Si R es lo suficientemente pequeño, esto es, $R<\dfrac{\beta^2}{2\pi^3\sigma}$, tenemos que $\dfrac{2\pi^3\sigma R}{\beta^2}<1$. Luego, el operador $\boldsymbol{T}$ es una contracción, como se quería demostrar. □

Lema 5.3. *Sea* $\boldsymbol{A} : X_R \to X$ *el operador definido por*

$$\boldsymbol{A} f^{\#} = \int_0^t Q_l^{\#}(f,f)d\tau, \quad con \ f^{\#} \in X_R.$$

Entonces $\boldsymbol{A}$ *es un operador compacto y continuo.*

Prueba. Para demostrar la continuidad del operador $\boldsymbol{A}$:
Sean $f^{\#}$, $g^{\#} \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}(f^{\#} - g^{\#})(t,x,v)| &= |\boldsymbol{A} f^{\#}(t,x,v) - \boldsymbol{A} g^{\#}(t,x,v)| \\
&= \left| \int_0^t \left[Q_l^{\#}(f,f)(t,x,v) - Q_l^{\#}(g,g)(t,x,v) \right] d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t \left| Q_l^{\#}(f,f)(t,x,v) - Q_l^{\#}(g,g)(t,x,v) \right| d\tau
\end{aligned}$$

Seguidamente, tenemos:

$$\begin{aligned}
|Q_l^{\#}(f,f) - Q_l^{\#}(g,g)| &= \left| \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ f^{\#}(t,x,v) f^{\#}(t,x,u) - g^{\#}(t,x,v) g^{\#}(t,x,u) \Big\} du \right| \\
&= \left| \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ f^{\#}(t,x,v) f^{\#}(t,x,u) - f^{\#}(t,x,u) g^{\#}(t,x,v) \right. \\
&\qquad \left. + f^{\#}(t,x,u) g^{\#}(t,x,v) - g^{\#}(t,x,v) g^{\#}(t,x,u) \Big\} du \right| \\
&= \left| \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ f^{\#}(t,x,u) \big[f^{\#}(t,x,v) - g^{\#}(t,x,v) \big] \right. \\
&\qquad \left. + g^{\#}(t,x,v) \big[f^{\#}(t,x,u) - g^{\#}(t,x,u) \big] \Big\} du \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q_l^{\#}(f,f) - Q_l^{\#}(g,g)| &\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \big\{ \big| f^{\#}(t,x,u) \big[f^{\#}(t,x,v) - g^{\#}(t,x,v) \big] \big| \\
&\qquad + \big| g^{\#}(t,x,v) \big[f^{\#}(t,x,u) - g^{\#}(t,x,u) \big] \big| \Big\} du \\
&\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ \big| f^{\#}(t,x,u) \big| \big| f^{\#}(t,x,v) - g^{\#}(t,x,v) \big| \\
&\qquad + \big| g^{\#}(t,x,v) \big| \big| f^{\#}(t,x,u) - g^{\#}(t,x,u) \big| \Big\} du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q_l^{\#}(f,f) - Q_l^{\#}(g,g)| \leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ & |f^{\#}(t,x,u)| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2 + |u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2 + |u|^2)} \\
& |(f^{\#} - g^{\#})(t,x,v)| e^{\beta(|x+t(v-v)|^2 + |v|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-v)|^2 + |v|^2)} \\
& + |g^{\#}(t,x,v)| e^{\beta(|x+t(v-v)|^2 + |v|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-v)|^2 + |v|^2)} \\
& |(f^{\#} - g^{\#})(t,x,u)| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2 + |u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2 + |u|^2)} \Big\} du
\end{aligned}$$

$$|Q_l^\#(f,f) - Q_l^\#(g,g)| \leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ \|f^\#\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \|f^\# - g^\#\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} + \|g^\#\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \|f^\# - g^\#\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \Big\} du$$

$$|Q_l^\#(f,f) - Q_l^\#(g,g)| \leq \pi\sigma \|f^\# - g^\#\| \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \Big\} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)+|x|^2+|v|^2)} du$$

De manera que tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t &|Q_l^\#(f,f) - Q_l^\#(g,g)| d\tau \\
&\leq \pi\sigma \|f^\# - g^\#\| \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left\{ \int_0^\infty e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} d\tau \right\} e^{-\beta|u|^2} du \\
&\leq \pi\sigma \|f^\# - g^\#\| \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\beta|u|^2} du \\
&\leq \pi\sigma \|f^\# - g^\#\| \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left[\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \right]^3 \\
&\leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^\# - g^\#\| \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}
\end{aligned}$$

Esto es,

$$|\boldsymbol{A}(f^\# - g^\#)| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} \|f^\# - g^\#\|$$

Con lo que en consecuencia conseguimos:

$$\|\boldsymbol{A}(f^\# - g^\#)\| \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \left\{ \|f^\#\| + \|g^\#\| \right\} \|f^\# - g^\#\|$$

Luego, el operador $\boldsymbol{A}$ es continuo sobre X, como se quería mostrar.
Para demostrar la compacidad del operador, procedemos:
Sea $E \subset \Sigma$ medible, tal que $m(E) < \delta$ y $f^\# \in X_R$. Tenemos:

$$\int_E |\boldsymbol{A} f^\#| d\mu \leq \int_E \int_0^t |Q_l^\#(f,f)| d\tau \, d\mu \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^\#\|^2 m(E).$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2}$, conseguimos:

$$\int_E |\boldsymbol{A} f^\#| d\mu \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^\#\|^2 m(E) \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2 m(E) \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2 \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2} = \varepsilon$$

Por otra parte, elegimos un conjunto cerrado F con $\Omega - F = G$ tal que $m(\Omega - F) < \dfrac{\varepsilon}{\frac{\pi^3}{\beta^2}\sigma R^2}$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_G |\boldsymbol{A} f^{\#}| d\mu &\leq \int_G \int_0^t |Q_l^{\#}(f,f)| d\tau \, d\mu \leq \int_G \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2 d\mu \\
&\leq \int_G \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2 d\mu \leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2 m(G) \\
&\leq \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2 \frac{\varepsilon}{\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por último el conjunto $X_f = \left\{ \boldsymbol{A} f^{\#} : f^{\#} \in X_R \right\}, \; X_f \subset X$ es acotado toda vez que $\boldsymbol{A}$ es un operador continuo y claramente X_R es acotado.

En conclusión el operador $\boldsymbol{A}$ es compacto en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.

$\square$

Por otra parte, tomemos $f^{\#}$, $g^{\#}$, $f_0 \in X_R$. También sea R tal que $\dfrac{2\sigma\pi^3 R}{\beta^2} \leq \dfrac{1}{2}$ y hacemos:

$$\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q_g^{\#}(f,f) d\tau - \int_0^t Q_l^{\#}(g,g) d\tau$$

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#}| &= \left| f_0(x,v) + \int_0^t Q_g^{\#}(f,f) d\tau - \int_0^t Q_l^{\#}(g,g) d\tau \right| \\
&\leq \left| f_0(x,v) + \int_0^t Q_g^{\#}(f,f) d\tau + \int_0^t Q_l^{\#}(g,g) d\tau \right| \\
&\leq |f_0(x,v)| + \int_0^t |Q_g^{\#}(f,f)| d\tau + \int_0^t |Q_l^{\#}(g,g)| d\tau \\
&\leq \|f_0\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} + \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} + \frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} \|g^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}
\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#}| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \|f_0\| + 2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R^2$$

Ahora, si $\|f_0\| \leq \frac{R}{2}$ y $2\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2} R \leq \frac{1}{2}$ tenemos:

$$\sup_{(t,x,v)} |\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#}| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \frac{R}{2} + 2\frac{\pi^3\sigma R}{\beta^2} R \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

$\|\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#}\| \leq R$. Por lo que $\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#} \in X_R$.
Esto muestra que si $f^{\#}$, $g^{\#}$ y f_0 $\in \mathrm{X}_R$ entonces $\boldsymbol{T} f^{\#} + \boldsymbol{A} g^{\#} \in X_R$; además por

Lema 5.2 el operador $\boldsymbol{T}$ es una contracción y por Lema 5.3 el operador $\boldsymbol{A}$ es un operador compacto y continuo; por consiguiente por el Teorema de Punto Fijo de Krasnoselskii,ver [7], existe $y^{\#} \in X_R$ tal que

$$\boldsymbol{F}y^{\#} = \boldsymbol{T}y^{\#} + \boldsymbol{A}y^{\#} = y^{\#}$$

De tal forma que podemos afirmar que existe $y^{\#} \in X_R$ tal que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}y^{\#} &= \boldsymbol{T}y^{\#} + \boldsymbol{A}y^{\#} = y^{\#} \\
&= y_0(x,v) + \int_0^t Q_g^{\#}(y,y)d\tau - \int_0^t Q_l^{\#}(y,y)d\tau \\
&= y_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(y,y)d\tau
\end{aligned}$$

De esta manera hemos encontrado que el problema débil a través de un operador que formulado como la suma de uno compacto y continuo con otro contractivo tiene punto fijo, es decir tiene solución en un espacio de Banach.Ver [5]

Ahora en la ecuación

$$y^{\#} = \boldsymbol{F}y^{\#} = \boldsymbol{T}y^{\#} + \boldsymbol{A}y^{\#} = y_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(y,y)d\tau$$

derivamos con respecto a t y conseguimos

$$\frac{d}{dt}y^{\#}(t,x,v) = Q^{\#}(y,y)(t,x,v)$$

De manera que conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y^{\#}(t,x,v) &= \frac{d}{dt}y(t,x+tv,v) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}y^{\#}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x f(t,x,v) \\
&= Q^{\#}(y,y)(t,x,v)
\end{aligned}$$

Por tanto, el problema de Cauchy para la Ecuación de Boltzmann no lineal tiene solución a través del Teorema de Punto Fijo de Krasnoselskii; sin embargo no podemos garantizar por éste método que la solución encontrada sea única. Para verificar esta unicidad tendríamos que abordar dicho problema usando otras estrategias las cuales sería interesante abordar para futuros trabajos.

CONCLUSIONES

Por todo lo anteriormente expuesto, el Problema de Cauchy para la Ecuación de Boltzmann no Lineal, si lo expresamos como un problema de punto fijo, tiene solución en el espacio normado de funciones integrables que multiplicadas por una función de prueba apropiada son acotadas. En ese orden de ideas, se define un operador sobre dicho espacio normado, que resulta ser contractivo, para el cual el Principio de Contracción de Banach garantiza existencia y unicidad de solución sobre una bola cerrada del espacio normado, es decir una solución local.

Asimismo, si se define un operador consistente en la suma de dos mapeos, uno contractivo y otro que sea continuo y compacto con dominio sobre una bola cerrada del espacio normado, entonces, por el Teorema de punto Fijo de Krasnoselskii, existe solución local en dicha bola, pero no se puede garantizar la unicidad de la solución.

Es interesante seguir investigando acerca de la unicidad de la solución en próximos trabajos, pero para hacerlo se precisa imponer nuevas hipótesis.

Bibliografía

[1] Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'Regan, D. *Fixed Point Theory and Applications.* (Vol. 141). Cambridge University Press.

[2] Glassey, R. T. *The Cauchy Problem in Kinetic Theory.* SIAM.

[3] H. Bas, J.F.C. Kingman . *Fixed Point Theorems.*

[4] Brezis, Haim. *Functional Analysis Sovolev Spaces on Partial Differential Equations.*. SPRINGER.

[5] Kanwal, R. P. (2000). *Generalized Functions: Theory and Technique.* Applications of Mathematics-Phaha, 45(4), 320-320.

[6] Kreyszig, E. (1989). *Introductory functional analysis with applications.* (Vol. 81). New York: wiley.

[7] T. A. Burton.(1997). *A Fixed-Point Theorem of Krasnoselskii.* PERGAMON.

1827 ¡Siempre a la altura de los tiempos!	UNIVERSIDAD DE CARTAGENA	CÓDIGO: FO-GR-011
	RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN	VERSIÓN: 00
	CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	PAGINA: 1

FECHA		
DD	MM	AAAA
19	09	2018

1. Presentación del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).					
Código	Documento de Identidad		Apellidos	Nombres	Correo electrónico
	Tipo	número			
1711420002	CC	92556800	SANTOS MARTÍNEZ	DAVID JOSÉ	david.santosmartinez@hotmail.com

Programa	MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
Facultad	CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Título al que opta	MAGISTER EN MATEMÁTICAS
Asesor	DR. RAFAEL GALEANO ANDRADES

Título de la obra: EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN NO LINEAL

Palabras claves (materias): ECUACIONES DIFERENCIALES, ANÁLISIS FUNCIONAL, SOLUCIÓN GENERALIZADA

2. Autorización de publicación de versión electronica del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Con esta autorización hago entrega del trabajo de grado (investigación o tesis) y de sus anexos (si existen), de forma gratuita en forma digital o electrónica (CD-ROM, DVD) y doy plena autorización a la Universidad de Cartagena, de forma indefinida, para que en los terminos establecidos en la ley 23 de 1982, la Ley 44 de 1993, leyes y jurisprudencia vigente al respecto, haga la publicación de éste, con fines educativos. Esta autorización, es válida sobre la obra en formato o soporte material, digital, electrónico o virtual, para usos en red, internet, intranet, biblioteca digital o cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR, expresa que el trabajo de grado (investigación o tesis) objeto de la presente autorización, es original y la elaboró sin quebrantar ni suplantar los derechos de autor de terceros, de tal forma que el Trabajo es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre éste. En caso de queja o acción por parte de un tercero referente a los derechos de autor sobre el trabajo de grado en cuestión EL AUTOR, asumirá la responsabilidad total, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos, la Universidad de Cartagena actúa como un tercero de buena fe.

Toda persona que consulte ya sea la biblioteca o en medio electrónico podrá copiar apartes del texto **citando** siempre la fuentes, es decir el título del trabajo, autor y año.

Esta autorización no implica renunciar a la facultad que tengo de publicar total o parcialmente la obra. La autorización debe estar respaldada por las firmas de todos los autores del trabajo de grado.

Si autorizo

3. Firma

Firma Autor 1	Firma Autor 2
Firma Autor 3	Firma Autor 4