**Una aplicación del Teorema de Stone-Weierstrass**

Tesis que presenta

Luís Eduardo Hernández Corrales

Para obtener el grado de
Magister en Matemáticas

Asesores:

Interno: Dr. Alfonso Segundo Gómez Mulett

Externo: Dr. Adolfo Javier Pimienta Acosta

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Cartagena de Indias-Colombia

26 de Octubre de 2017

# Resumen


## Abstract

The present research, is located in the perspective of looking for other ways that lead to the solution of mathematical problems of wide domain, exploring for conceptual and procedural changes in the construction of mathematics. The purpose is to present a new alternative solution to the problem of establishing relations concerning the cardinality of a topological space $(X, \tau)$ and some of its subsets, from the Stone-Weierstrass theorem. For the elaboration of the research, a documentary review and a content analysis on the antecedents of the problem was carried out, and then through the deductive method to obtain a connection between the topological space $(X, \tau)$, the Hausdorff compact spaces and Stone-Weierstrass theorem.



**Keywords:** $G_\delta$-set, $G_\delta$-closed set, topological space, compact-Hausdorff, Stone-Weierstrass theorem, Lindelöf spaces, hereditarily Lindelöf spaces and premetrizable space.



## Resumen

La investigación que se presenta, se ubica en la perspectiva de buscar otros caminos que conduzcan a la solución de problemas matemáticos de amplio dominio, buscando cambios conceptuales y procedimentales en la construcción de la matemática. El propósito es presentar una nueva alternativa de solución al problema de establecer relaciones referentes a la cardinalidad de un espacio topológico $(X, \tau)$ y algunos de sus subconjuntos, a partir del teorema de *Stone-Weierstrass*. Para la elaboración del trabajo se efectuó una revisión documental y un análisis de contenido sobre los antecedentes del problema, y luego a través del método deductivo obtener una conexión entre el espacio topológico $(X, \tau)$, los espacios compactos tipo Hausdorff y el teorema de Stone-Weierstrass.



**Palabras claves:** Conjunto $G_\delta$, conjunto cerrado-$G_\delta$, espacio topológico, compact-Hausdorff, teorema de Stone-Weierstrass, espacios Lindelöf, espacio hereditariamente Lindelöf, espacio premetrizable.

# Introducción

Esta tesis se enmarca en la temática de la topología general, puntualmente tiene que ver con la cardinalidad o metrizabilidad de espacios topológicos tipo Hausdorff, de allí que su objetivo es determinar condiciones sobre un espacio topológico $(X, \tau)$ con las características señaladas para establecer algunas de las relaciones propuestas en nuestro trabajo, tomando como base teórica el teorema de Stone-Weierstrass; además, desde el punto de vista teórico, se buscó ampliar resultados ya establecidos sobre un espacio topológico los cuales se fundamentan en la teoría de invariantes topológicos comparando la cardinalidad del espacio con las cardinalidades de ciertos subconjuntos de $X$.

Para lograr el objetivo propuesto, fue necesario hacer una revisión documental de los antecedentes del problema, posteriormente se hizo un estudio de la incidencia del teorema de Stone-Weierstrass en el álgebra de las funciones continuas y a partir de allí deducir la verificación de las relaciones anotadas; luego, se procedió a analizar en forma detallada el número de subconjuntos compactos de un espacio topológico, con el propósito se encontrar una cota superior a la cardinalidad de dichos subconjuntos, contemplando el axioma de numerabilidad y sus relaciones. La búsqueda de estas relaciones demandó utilizar referentes teóricos relacionados con el problema como fueron los desarrollos de *A. V. Arhangel'skii* (ver [2] y [3]), *F. B. Jones* [17] , *P. Roy* [28], *D. K. Burke* y *R. E. Hodel* [6], quienes también enfrentaron el problema.

En el primer capítulo, se definen los conceptos básicos de la teoría de conjuntos específicamente los relacionados con funciones cardinales entre conjuntos, también se define lo relacionado a la topología del espacio de funciones continuas, las topologías métricas, las funciones cardinales en topología (invariantes cardinales) y analizamos el anillo de funciones continuas y las topologías asociadas a este.

El segundo capítulo contiene las definiciones básicas que conducen al Teorema de Stone-Weierstrass, plasmado en algunos hechos importantes y algunos ejemplos. También se analiza una demostración del Teorema de Stone-Weierstrass en su versión real. La ventaja principal de este capítulo es que permite conocer en detalle las propiedades del espacio $C(K)$, cuando $K$ es un espacio compacto.

El último capítulo apunta directamente a la solución del problema, para ello se presenta una aplicación del Teorema de Stone-Weierstrass, con base en un vínculo o puente Teorema 3.0.30 que es un resultado auxiliar, el cual permite dar respuesta al problema planteado (ver Corolario 3.0.32), finalmente obtuvimos un par de resultados, Proposición 3.0.34 y Corolario 3.0.35, en el cual se le impusieron otras condiciones al espacio topológico de manera que se pudiera encontrar una cota superior a los conjuntos cerrados $G_\delta$.

Por último se anotan las conclusiones pertinentes y se plantean interrogantes que permiten continuar posibles líneas de trabajo sobre el tema.

# Resumen histórico

Algunos historiadores afirman que *Augustin Louis Cauchy* en [8], publicó una declaración "falsa", pero con una supuesta prueba del siguiente teorema:

El límite de una sucesión de funciones continuas es continua.

Sin embargo, como observó *Niels Henrik Abel* en [1], este teorema admite excepciones. Esta es una manera cautelosa de decir que el teorema es falso y que son necesarias hipótesis adicionales. *Abel* en 1826 encontró algunos contraejemplos, supuestamente, de esta declaración en el contexto de las series de *Fourier*. *Cauchy* finalmente respondió en 1853 con una aclaración de la formulación que hizo en 1821.

La hipótesis que faltaba era la de la *convergencia uniforme*, sin embargo, en esta época, las nociones de convergencia, continuidad, diferenciabilidad y aún la de función estaban en plena formación. No fue sino hasta veinte años después de la aparición del libro [8] que la idea de convergencia uniforme empezó a tomar forma con los trabajos, entre otros, de *Seidel*, *Stokes* y *Weierstrass*.

*Karl Weierstrass* es reconocido, sobre todo, por el nivel de rigor que introdujo a las matemáticas contemporáneas. Este rigor, en palabras de *Felix Klein* ([20], p,286); Consiste principalmente en su tratamiento cuidadoso de las series infinitas. Aquí sobresale el concepto de convergencia uniforme, que después se convertiría en una importante herramienta para las demostraciones.

Un ejemplo de la importancia de la convergencia uniforme se encuentra en el teorema, demostrado por Weierstrass en 1841, que asegura que el límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas es analítica [35]. Sin embargo, en ese artículo no se define explícitamente el concepto de convergencia uniforme. Según *Garrett Birkhoff* ([4], p, 71-74), la primera discusión de este concepto fue publicada por Stokes en 1847.

En vista del Teorema de Weierstrass mencionado en el párrafo anterior, es decepcionante que el límite uniforme de una sucesión de funciones reales diferenciables no sea necesariamente diferenciable.

En 1885, Weierstrass demostró un teorema más sorprendente "*Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*"[35].

Cualquier función real continua, definida en un intervalo cerrado y acotado, es el límite uniforme de una sucesión de polinomios.

Si recordamos la construcción, debida al mismo Weierstrass, de una función continua pero no diferenciable en ningún punto, podemos apreciar la magnitud de ésta aseveración.

Incluso esa función puede aproximarse uniformemente con polinomios (en intervalos cerrados y acotados).

Para muchos matemáticos cuya área de investigación es el análisis, este teorema resulta ser de los más utiles al permitirles, por ejemplo, simplificar la demostración de ciertos teoremas. Si la propiedad a demostrar se preserva al tomar límites uniformes, es suficiente demostrar el teorema para polinomios.

Como consecuencia, se ha dedicado mucho esfuerzo a generalizar este teorema, con la esperanza de poder aplicarlo a situaciones más generales. En dimensiones mayores a uno, en lugar de intervalos cerrados y acotados se usa una noción más general la de conjunto compacto. La clase de funciones polinomiales puede reemplazarse por otros tipos de funciones.

Los polinomios de aproximación de Weierstrass no son los del teorema de Taylor. Weierstrass no exige que sus polinomios coincidan con la función en ningún punto y los coeficientes de un polinomio $P_n$ no tienen, en principio, relación con los de $P_{n+1}$. Es esta flexibilidad para escoger los polinomios lo que le permite aproximar cualquier función continua sin necesidad de usar la diferenciabilidad.

A continuación enunciamos el Teorema de aproximación de Weierstrass, la prueba puede ser consultada a detalle en [25] y [31].

**Teorema 0.0.1.** *(Aproximación de Weierstrass) Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que, para todo $x \in [a,b]$*

$$||f(x) - P(x)|| < \epsilon.$$

El Teorema de aproximación de Weierstrass se extiende fácilmente al conjunto $C([a,b],\mathbb{C})$ de las funciones continuas en $[a,b]$ con valores en los números complejos. Podemos en pocas palabras enunciar el teorema diciendo que las combinaciones lineales finitas del conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ son densas en el conjunto $C([a,b],\mathbb{C})$, (con la norma del supremo). Los siguientes teoremas son generalizaciones de este resultado.

**Teorema 0.0.2.** *(Müntz-Szasz, 1916, ver [30]) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, entonces las combinaciones lineales finitas del conjunto $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}, \ldots\}$ son densas (con la norma del supremo) en el conjunto de funciones continuas $C([a,b],\mathbb{C})$, si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty.$$

Al tratar de extender el Teorema de Aproximación de Weierstrass al conjunto $C(K)$ de funciones complejas continuas definidas en un compacto $K \subset \mathbb{C}$, observamos que, si el interior de $K$ es no vacío, el límite uniforme de los polinomios debe ser analítico en $K^o$, entonces debemos añadir esa hipótesis a las funciones que queremos aproximar.

Cabe mencionar, que se necesita una condición extra para el conjunto $K$: Su complemento debe ser conexo. Podemos ver en [30] un ejemplo de la necesidad de esta hipótesis. La suficiencia fue demostrada por *S.N. Mergelyan* en 1952.

**Teorema 0.0.3.** *(Mergelyan, ver [30]) Si $K$ es un conjunto compacto en $\mathbb{C}$ cuyo complemento es conexo y si $f\colon K \to \mathbb{C}$ es continua en $K$ y analítica en $K^o$, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(z)$ tal que, para todo $x \in K$*

$$||f(z) - P(z)|| < \epsilon.$$

En 1937 *Marshall Harvey Stone* [32] demostró una generalización del teorema de aproximación de Weierstrass que caracteriza otras clases de funciones que pueden reemplazar a los polinomios como funciones aproximadoras. Para enunciar ése teorema es necesario dar algunas definiciones:

Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, denotaremos por $C(X)$ al conjunto de funciones reales continuas definidas en $X$.

**Definiciones 0.0.4.**

1. Una familia $\mathcal{A} \subset C(X)$, es una *álgebra*, si para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos $f + g \in \mathcal{A}, fg \in \mathcal{A}$ y $cf \in \mathcal{A}$.

2. Dada una colección $\mathcal{D} \subset C(X)$, la *subálgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ generada por $\mathcal{D}$, es la más pequeña de las subálgebras de $C(X)$ que contienena $\mathcal{D}$.

3. La *cerradura uniforme* de $\mathcal{A}$ es el conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ de las funciones en $C(X)$ que pueden aproximarse uniformemente mediante elementos de $\mathcal{A}$.

4. La colección $\mathcal{D}$ *separa puntos* si dados cualesquiera dos puntos $x \neq y$ en $X$, existe una función $f \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Cuando entran en contacto argumentos de varias disciplinas matemáticas generalmente se producen resultados de mucha potencia y elegancia. Tal es el caso del siguiente teorema conocido como Teorema de Stone-Weierstrass.

**Teorema 0.0.5.** *(Stone-Weierstrass, ver [32]) Sea $K$ un compacto en un espacio topológico $(X, \tau)$ cualesquiera y $C(K)$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre $K$. Si $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ es una subálgebra de $C(K)$ tal que:*

*i) $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ no se anula, lo que significa que para todo $x \in K$ existe $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ tal que $f(x) \neq 0$.*

*ii) $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ separa puntos.*

*entonces $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ es densa en $C(K)$.*

Algunas de las generalizaciones del Teorema de Stone-Weierstrass en el caso cuando $X$ no es compacto pueden encontrarse en [36].

Como podemos notar, el Teorema de Stone-Weierstrass ha generado mucha actividad desde su publicación hasta nuestros días. En [9] se exponen en forma detallada otros resultados y algunas aplicaciones del Teorema de Stone-Weierstrass.

# Objetivos

## General

Determinar condiciones sobre un espacio topológico $(X, \tau)$, compacto y de Hausdorff via Teorema de Stone-Weierstrass para verificar algunas de las siguientes relaciones $|X| = |X|_K = |X|_\tau = |X|_\delta$; $|X|_\tau \leq \mathfrak{c}$, $|X|_\delta \leq \mathfrak{c}$, $|X|_K \leq \mathfrak{c}$ .

## Específicos

- Estudiar el teorema de Stone-Weierstrass y su incidencia en el álgebra de las funciones continuas.
- Encontrar una cota superior a la cardinalidad del número de subconjuntos compactos de un espacio topológico $(X, \tau)$.
- Utilizar el primer axioma de numerabilidad y la condición de $\sigma$-compacidad para encontrar una cota superior a los conjuntos cerrados $G_\delta$ en un espacio topológico $(X, \tau)$.

# Contenido

# Capítulo 1
# Preliminares

En este apartado se establecen algunas definiciones y notaciones básicas, necesarias para la comprensión de este proyecto. Algunas demostraciones se omiten. El lector encotrará la referencia detallada de las que se omiten, donde se demuestran los resultados mencionados. La mayoria de los resultados se encuentran en [36].

## 1.1. Teoría de Conjuntos

En esta sección estableceremos una relación binaria entre conjuntos, llamada *equipotencia*, que intenta reflejar cuándo dos conjuntos "tienen la misma cantidad de elementos". Esta idea corresponde a lo siguiente: dos conjuntos son equipotentes si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre dos conjuntos. El concepto de equipotencia entre dos conjuntos se define rigurosamente y no debe ser confundida con la idea intuitiva de "tener la misma cantidad de elementos", algunos resultados se incluyen sin demostración pero las demostraciones pueden ser consultadas a detalle en las siguientes referencias, [16], [18] y [23].

**Definición 1.1.1.** Dos conjuntos $A$ y $B$ son *equipotentes* si existe una función biyectiva de $A$ en $B$.

**Notación 1.1.2.** *Si $A$ y $B$ son equipotentes, lo expresamos como $A \sim B$.*

**Proposición 1.1.3.** La relación $\sim$ entre conjuntos definida anteriomente tiene las siguientes propiedades.

i) $A \sim A$ para cualquier conjunto $A$.

ii) si $A \sim B$ entonces $B \sim A$.

iii) si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

*Demostración.* i) $1_A \colon A \to A$, la función identidad es biyectiva.

ii) Si $f \colon A \to B$ es biyectiva entonces $f^{-1} \colon B \to A$ es biyectiva.

iii) Si $f \colon A \to B$ y $g \colon B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f \colon A \to C$ es biyectiva.

$\square$

En esta sección nosotros no definiremos el concepto de *número cardinal*, sino cuándo dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Sin embargo presentamos a continuación cómo *A. Tarski* introdujo los números cardinales mediante dos axiomas.

*Axioma* 1.1.4.

1. Cada conjunto está asociado con un objeto, el cual es su *número cardinal*.
2. Dos conjuntos son equivalentes (equipotentes) si y sólo tienen el mismo número cardinal.

**Notación 1.1.5.** *Denotaremos por $|A|$, al número cardinal del conjunto $A$.*

*Observación* 1.1.6. Dos conjuntos $A$ y $B$ son equipotentes si y sólo si tienen el mismo número cardinal o tienen la misma cardinalidad, es decir $A$ es equipotente a $B$ si y sólo si $|A| = |B|$.

Existe un método para escoger un representante en cada clase de equivalencia y desde este punto de vista éste sería el cardinal asociado a la clase.

*Ejemplo* 1.1.7.

a) $|\emptyset| = |A|$ si y sólo si $A = \emptyset$. Denotamos $|\emptyset| = 0$.

b) $|\{x\}| = |A|$ si y sólo si $A$ consta de un solo elemento. Denotaremos $|\{x\}| = 1$.

c) Si $A$ y $B$ constan ambos de un único elemento y $A \cap B = \emptyset$ entonces $|A \cup B| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$. Denotaremos $2 = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|$.

Definiremos ahora un *orden sobre los cardinales.*

**Definición 1.1.8.** Sean $A$ y $B$ conjuntos. Diremos que $|A|$ es menor o igual que $|B|$ ($|A| \leq |B|$) si existe una función inyectiva de $A$ en $B$.

Demostraremos no sólo que $\leq$ es un orden parcial sino que es total. Para esto empecemos demostrando que esta definición es correcta, es decir, que no depende de los representantes.

**Proposición 1.1.9.** Sean $A_1, A_2, B_1, B_2$ conjuntos tales que $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$. Entonces $|A_1| \leq |B_1|$ si y sólo si $|A_2| \leq |B_2|$.

*Demostración.* Sean $f\colon A_1 \to A_2$ y $g\colon B_1 \to B_2$ funciones biyectivas, supongamos que $|A_1| \leq |B_1|$. Entonces existe una función inyectiva $h\colon A_1 \to B_1$. La función $g \circ h \circ f^{-1}\colon A_2 \to B_2$ es inyectiva y por lo tanto $|A_2| \leq |B_2|$. De la misma forma se prueba la otra implicación. □

**Proposición 1.1.10.** La relación $\leq$ satisface

i) $|A| \leq |A|$ para cualquier conjunto $A$.

ii) Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ entonces $|A| \leq |C|$.

*Demostración.*

i) La función identidad $1_A\colon A \to A$ es inyectiva.

ii) Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f\colon A \to C$ es una función inyectiva.

□

**Teorema 1.1.11.** *(Schröder-Bernstein) Si $A$ y $B$ son conjuntos tales que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

*Demostración.* Ver [16]. $\square$

**Corolario 1.1.12.** *La relación $\leq$ definida sobre los cardinales es un orden parcial.*

*Demostración.* En una consecuencia de la proposición 1.1.10 y el teorema 1.1.15. $\square$

**Teorema 1.1.13.** *El orden parcial $\leq$ definido sobre cardinales es un buen orden.*

*Demostración.* Ver [16]. $\square$

**Corolario 1.1.14.** *El orden parcial $\leq$ definido sobre los cardinales es total.*

El siguiente teorema, debido a Cantor muestra que dado un cardinal siempre existe uno mayor, es decir, no existe un cardinal máximo.

**Teorema 1.1.15.** *(Teorema de Cantor) Dado un conjunto $A$, se tiene que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

*Demostración.* Ver [16]. $\square$

# 1.2. Topología

En está sección nos proponemos a topologizar el conjunto de funciones continuas de un espacio en otro. La idea de tratar las funciones continuas como puntos de un espacio topológico tiene, entre otras, la siguiente ventaja: el problema de aproximación de funciones en Análisis se reduce al estudio de la cerradura de un conjunto en un espacio topológico, un contexto más familiar para nosotros. Aunque existen muy diversas topologías en estos espacios, nos concentramos en la llamada *topología compacto abierta*, la cual surge del concepto de aproximación uniforme en conjuntos compactos. Las referencias relevantes para está sección son [11], [14], [15], [19], [21] y [34].

## 1.2.1. Espacios Topológicos

**Definición 1.2.1.** Un *espacio topológico* es una pareja $(X, \tau)$ que consiste en un conjunto $X$ y una familia $\tau$ de subconjuntos de $X$ con las siguientes propiedades:

i) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;

ii) Si $U_1 \in \tau$ y $U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$;

iii) Si $\mathcal{F} \subseteq \tau$, entonces $\cup\mathcal{F} \in \tau$.

Los elementos de $X$ se llaman *puntos* de $(X, \tau)$ y los elementos de la familia $\tau$ se llaman conjuntos *abiertos* de espacio $(X, \tau)$.

**Definición 1.2.2.** Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ se llama base de la topología $\tau$, si para cada $U \in \tau$ existe una familia $\gamma \subset \mathcal{B}$, tal que $U = \cup\gamma$.

**Definición 1.2.3.** Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, una familia $\mathcal{S} \subset \tau$ se llama *sub-base* de la topología $\tau$, si todas las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ forman una base en $(X, \tau)$.

**Notación 1.2.4.** *Si* $(X, \tau)$ *es un espacio topológico, entonces confrecuencia se escribirá* $X$ *en vez de* $(X, \tau)$.

*Ejemplos* 1.2.5.

1. Sea $X$ un conjunto arbitrario y $\tau = \mathcal{P}(X)$. La familia $\tau$ es una topología en $X$ y todos los subconjuntos de $X$ son abiertos. Un espacio así se llama discreto y la topología respectiva se llama *discreta* también.

2. Dado un conjunto $X$, sea $\tau = \{\emptyset, X\}$. En este caso $\tau$ es la mínima topología en $X$ que se llama *indiscreta*.

3. Si $\mathbb{R}$ es la recta real sea $\tau_n = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R}\colon \text{para todo } x \in X \text{ existe un } \epsilon > 0, \text{tal que}(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U\}$. Entonces $\tau_n$ es una topología en $\mathbb{R}$, que se llama topología natural (o usual) de $\mathbb{R}$.

**Definición 1.2.6.** Dado un espacio topológico $X$, un conjunto $F \subset X$ se llama *cerrado*, si $X \setminus F$ es abierto.

**Proposición 1.2.7.** Sea $(x, \tau)$ un espacio topológico. La familia $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos cerrados de $(X, \tau)$ tiene las siguientes propiedades:

i) $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \in \mathcal{F}$;

ii) Si $F, G \in \mathcal{F}$, entonces $F \cup G \in \mathcal{F}$;

iii) Si $\gamma \subset \mathcal{F}$, entonces $\cap\gamma$.

**Definición 1.2.8.** Dados un espacio topológico $(X, \tau)$ y un $A \subset X$, el conjunto $\overline{A} = \bigcap\{B\colon A \subset B \subset X \text{ y } B \text{ es cerrado en } X\}$ se llama la *cerradura* de $A$ en $X$.

**Definición 1.2.9.** Sea $X$ un espacio topológico. Si $A \subset X$, entonces el conjunto $Int(A) = \bigcup\{U\colon U \in \tau_X \text{ y } U \subset A\}$ se llama *interior* de $A$ en $X$.

### Subespacios y la topología relativa

Dado un espacio topológico $X$ y un $Y \subset X$, existe una manera muy natural de introducir una topología en $Y$.

**Definición 1.2.10.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Para un $Y \subset X$ definamos $\tau_Y^X = \{U \cap Y\colon U \in \tau\}$. Entonces la familia $\tau_Y^X$ es una topología en el conjunto $Y$, que se llama topología (*relativa*) inducida por $\tau$, y $(Y, \tau_Y^X)$ se llama subsespacio del espacio $X$.

**Proposición 1.2.11.** Dado un espacio topológico $X$ y su subespacio $M$:

1. Un conjunto $A \subset M$ es cerrado en $M$ si y sólo si $A = F \cap M$, donde $F$ es cerrado en $X$;

2. $\overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M$.

**Funciones continuas**

**Definición 1.2.12.** Dados espacio topológicos $X$, $Y$ y una función $f\colon X \to Y$, se dice que $f$ es *continua* si y sólo si para $\tau_Y$ el conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in X\colon f(x) \in U\}$ es abierto en $X$.

**Definición 1.2.13.** Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Se dice que $f$ es continua en el punto $x \in X$, si para toda vecindad $V$ del punto $f(x)$ en $Y$ existe una vecindad $U$ de $x$ 4n $X$ tal que $f(U) \subset V$.

**Teorema 1.2.14** (Caracterización de la continuidad)**.** *Si $X$ y $Y$ son espacios topológicos y $f\colon X \to Y$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f$ es continua;*

2. *Existe una base $\mathcal{B}$ en $Y$, tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$ para cada $U \in \mathcal{B}$;*

3. *Existe una sub-base $\mathcal{B}$ en $Y$, tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$ para cada $U \in \mathcal{B}$;*

4. *$f$ es continua en cada $x \in X$;*

5. *Si $F$ es cerrado en $Y$, entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado en $X$;*

6. *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$;*

7. *$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$;*

8. *$f^{-1}(Int(B)) \subset Int(f^{-1}(B))$ para todo $B \subset Y$.*

*Ejemplos* 1.2.15.

1. Si $X$ es un espacio discreto, entonces toda función en $X$ es continua.

2. Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos arbitrarios. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una es una función constante, o sea que existe un $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Entonces la función $f$ es continua.

3. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua $\mathbb{R}$ se considera con la topología natural), si y sólo si $f$ es continua en cada punto $a \in dom(f)$, en el sentido del análisis real (o sea $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$).

Recordemos que si $(X, \tau)$ es un espacio topológico que posee una base numerable $\mathcal{B}$, se dice que $X$ es *segundo numerable.* Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico tal que todo punto $x \in X$ posee una base local en $x$ numerable, decimos que $X$ es un espacio *primero numerable.* Un espacio $X$ *Hausdorff* es $T_{3\frac{1}{2}}$ o *Tychonoff* si para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ con la propiedad que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Todo espacio segundo numerable y regular es normal. Lo mismo ocurre con todo espacio regular y numerable.

**Definición 1.2.16.** Sean $X$ un espacio y $\{f_i : i \in I\}$ un conjunto de funciones tales que $f_i\colon X \to Y_i$. Definimos el *producto diagonal* $f\colon X \to \Pi_{i\in I} Y_i = \Delta_{i\in I} f_i$ mediante la fórmula $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$.

**Definición 1.2.17.** Sea $X$ un espacio topológico, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in S}$ una familia de espacios topológicos, sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in S}$ una familia de funciones continuas, donde $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$. Decimos que $\mathcal{F}$ *separa puntos* si dados $x, y \in X$, con $x \neq y$ existe $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Además si para todo $x \in X$, y todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existe una $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$, entonces decimos que la familia $\mathcal{F}$ *separa puntos de conjuntos cerrados.*

**Lema 1.2.18.** *Si la función continua $f\colon X \to Y$ es uno a uno y la familia de un elemento $\{f\}$ separa puntos y conjuntos cerrados, entonces $f$ es un encaje homeomorfico.*

El siguiente teorema describe una forma de obtener encajes de espacios en productos cartesianos.

**Teorema 1.2.19** (Teorema de la Diagonal)**.** *Si $\mathcal{F} = \{f_i\colon X \to Y_i : i \in I\}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de $X$, entonces la función diagonal $f = \Delta_{i\in I} f_i$ es inyectiva. Más aún, si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados de $X$, entonces $f$ es un encaje homeomorfico.*

*Demostración.* (Ver [11], T. 2.3.20). □

### Espacios métricos

Una de las maneras equivalentes de percibir la noción del espacio topológico es verla como una noción de proximidad entre un punto y un conjunto: un punto es proximo a un conjunto si pertenece a la cerradura del mismo. Ahora presentaremos la definición de espacio métrico.

**Definición 1.2.20.** Un *espacio métrico* es un par $(X, d)$, donde $X$ es un conjunto y $d$ es una función de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones para todos $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

El conjunto $X$ se llama *espacio*, los elementos de $X$ son sus *puntos* y la función $d$ se llamará *métrica en el conjunto* $X$.

**Definición 1.2.21.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, entonces $B_d(x_0, r) = \{x \in X\colon d(x_0, x < r)\}$. El conjunto $B_d(x_0, r)$ se llama *bola de radio* $r$ *centrada en el punto* $x_0$. Si no se puede confundir la métrica $d$ con ninguna otra, escribiremos $B(x_0, r)$ en vez de $B_d(x_0, r)$.

**Definición 1.2.22.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ se llama *metrizable*, si existe una métrica $d$ en $X$ tal que $\tau(d) = \tau$. En este caso la métrcia $d$ se llama compatible con la topología $\tau$.

*Ejemplos* 1.2.23.

1. Sea $X$ un conjunto arbitrario. Si para todos $x, y \in X$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y; \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

   entonces $d$ es una métrica en $X$ que genera la topología discreta en $X$. Por lo tanto, todo espacio discreto es metrizable.

2. Si $X = \mathbb{R}$ y $d(x, y) = |x - y|$, entonces $d$ es una métrica en $\mathbb{R}$, que genera a la topología natural de $\mathbb{R}$.

3. Sea $X = \mathbb{R}^n$. Si $x, y \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces la función $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ es una métrica en $X$ que genera la topología natural de $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $H = \{(x_i)_{i=1}^{\infty}\colon x_i \in \mathbb{R}^n \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$. Para $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, sea

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}.$$

   Entonces, $d$ es una métrica en $H$. El espacio $(H, d)$ se llama espacio de *Hilbert.*

**Definición 1.2.24.** Sean $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ espacios métricos. Una función sobreyectiva $f\colon X \to Y$ se llama *isométria*, si $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$. Los espacios $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ es este caso se llaman *isométricos.*

**Proposición 1.2.25.** Cualquier isométria $f$ entre espacios métricos $(X, d_X)$ y $(Y, d_Y)$ es un homeomorfismo entre los espacios $(X, \tau(d_X))$ y $(Y, \tau(d_Y))$.

*Ejemplos* 1.2.26.

1. en $\mathbb{R}^n$ introduscamos la función $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, para todos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$. Entonces $\rho_1$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$, equivalente a la métrica $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$;

2. El intervalo $(-1, 1)$ (considerado con la topología y métrica inducidas de $\mathbb{R}$) es homeomorfo a $\mathbb{R}$, pero no le es isométrico.

### 1.2.2. Funciones Cardinales

A continuación definimos algunas de las siguientes funciones cardinales mas conocidas.

**Definición 1.2.27.** Sea $X$ un espacio topológico, definimos:

- El *peso* de $X$, como $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de X}\} + \aleph_0$.
- La *densidad* de $X$, como $d(X) = \min\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de X}\} + \aleph_0$.
- Una familia de abiertos no vacíos mutuamente ajenos es una familia celular. La celularidad de $X$, esta definida por, $c(X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una familia celular en X}\} + \aleph_0$
- La noción de espacio de Lindelöf da lugar a una nueva función cardinal, el número de Lindelöf de un espacio $X$, denotado por $l(X)$ es el número cardinal $\kappa$ más pequeño tal que toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta de cardinalidad no mayor que $\kappa$.
- El *carácter* de un punto $x$ en un espacio topológico $X$ está definido por $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base local en x}\}$; definimos el carácter como sigue: $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0$.
- La *estrechez* $t(X)$ de $X$ es el cardinal infinito $\tau$ más pequeño tal que si $x \in \overline{A}$, donde $x \in X$ y $A \subset X$, entonces existe un $B \subset A$ para el cual $x \in \overline{B}$ y $|B| \leq \tau$.

### 1.2.3. Espacios de funciones continuas

**Definición 1.2.28.** Sean $X, Y$ espacios topológicos. Se define:

$$C(X, Y) = \{f : f : X \to Y, f \text{ continua}\}.$$

Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, ponemos

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}.$$

*Observación* 1.2.29. Sean $A, A_1, \ldots, A_n$ subespacios de $X$ y $W, W_1, \ldots, W_n$ subespacios de $Y$. Entonces:

(a) $\bigcup_{i=1}^{n} [A_i, W] = [\bigcup_{i=1}^{n} A_i, W]$.

(b) $\bigcap_{i=1}^{n} [A, W_i] = [A, \bigcap_{i=1}^{n} W_i]$.

(c) $\bigcap_{i=1}^{n} [A_i, W_i] = [\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} W_i]$.

**Definición 1.2.30.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Se dice que una familia $\mathcal{F} \subset Y^X = \{f : X \to Y\}$ tiene la *topología de la convergencia puntual* $\tau_p$ si posee la topología de subespacio inducida por la topología producto $(Y^X, \tau_{Tyc}$[1]$)$.

*Observación* 1.2.31. La topología $\tau_p$ está determinada sólo por la topología $\tau_Y$ sobre $Y$, la estructura topológica sobre $X$no juega ningún papel.

**Lema 1.2.32.** *Para $\mathcal{F} \subset Y^X, a \in X, U \subset Y$, sea el conjunto $(a, U) = \{f \in \mathcal{F} : f(a) \in U\}$. La familia $\sigma = \{(a, U) : a \in X,\ U \in \tau_Y\}$ es una subbase para la topología $\tau_p$ sobre $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* Ver ([36], 42.1). □

**Lema 1.2.33.** *Si $(Y, \tau_Y)$ es $T_2$, lo mismo sucede con $(Y^X, \tau_p)$.*

*Demostración.* Ver ([36], 42.2 and 42.3). □

**Definición 1.2.34.** Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos, la topología *topología compacto-abierta* sobre $\mathcal{F} \subset Y^X = \{f : X \to Y\}$, denotada por $\tau_c$, es la topología que tiene como base la familia $\beta = \{(K, U) : K$ compacto en $(X, \tau_X)$ y $U \in \tau_Y\}$, donde $(K, U) = \{f \in \mathcal{F} : f(K) \subset U\}$.

*Observación* 1.2.35. Sobre $Y^X$, se cumple que $\tau_p \subset \tau_c$.

*Ejemplos* 1.2.36. Con las notaciones anteriores, se cumple:

(1) Si $\tau_X = \tau_{dis}$, las topologías $\tau_p$ y $\tau_c$ sobre $Y^X$ coinciden.

(2) Si cada subespacio compacto de $(X, \tau_X)$ es finito, entonces $\tau_p = \tau_c$.

(3) Si $\mathcal{F}$ es la familia de aplicaciones $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ constantes , entonces $(\mathcal{F}, \tau_p) = (\mathcal{F}, \tau_c)$ es homeomorfo a $(Y, \tau_Y)$ (Ver [36], 42.4).

**Teorema 1.2.37.** *Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos, se verifica que:*

1. *Si $(Y, \tau_Y)$ es $T_1$ o $T_2$, lo mismo sucede con $(Y^X, \tau_c)$;*

2. *Si $(Y, \tau_Y)$ es regular, lo mismo sucede con $(C(X, Y), \tau_c)$*

*Demostración.* Ver ([14], 8.47). □

**Notación 1.2.38.** *Los espacios $(C(X, Y), \tau_c)$ y $(C(X, Y), \tau_p)$ se denotarán simplemente como $\widehat{C}(X, Y)$ y $C(X, Y)$ respectivamente.*

**Definición 1.2.39.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto e $(Y, d_Y)$ un espacio métrico. Se dice que una sucesión de aplicaciones $\{\ f_n : X \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia una aplicación $f : X \to Y$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_\epsilon$ y $x \in X$ se tiene $d_Y(f(x), f_n(Y)) < \epsilon$.

[1]Donde $\tau_{Tyc}$ es *la topología de Tychonoff* generada por los entornos de la forma: $\{U(f, F, \delta) : F \subset [0, 1]$ finito $, \delta > 0\}$ , aquí $U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \forall x \in F\ |f(x) - g(x)| < \delta\}$, para $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $F \subset [0, 1]$ finito y $\delta > 0$

A continuación se introduce una topología sobre $Y^X$ que dé cuenta de la convergencia uniforme de las sucesiones de funciones.

Las demostraciones de las siguientes dos proposiciones, pueden ser consultadas en detalle en ([14], capítulo 8).

**Proposición 1.2.40.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto e $(Y, d_Y)$ un espacio métrico. Se verifica

1. La aplicación $e\colon Y^X \times Y^X \to [0, \infty)$ definida por $e(f, g) = \sup_{x \in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$ para $f, g \in Y^X$ es una métrica (completa) sobre $Y^X$. La topología de $Y^X$ asociada a la métrica, denotada por $\tau_{unif}$, se llama *topología de la convergencia uniforme* asociada a la distancia $d_Y$;

2. Una sucesión de aplicaciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $Y^X$ converge uniformente a $f \in Y^X$, si y sólo si la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f$ en $(Y^X, \tau_{unif})$.

**Proposición 1.2.41.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico e $(Y, d_Y)$ un espacio métrico. Se verifica

1. El conjunto de las aplicaciones continuas $C(X, Y)$ es cerrado en $(Y^X, \tau_{unif})$;

2. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones convergiendo uniformemente a $f \in Y^X$ y cada $f_n \in C(X, Y)$, entonces $f \in C(X, Y)$;

3. La aplicación $F\colon (C(X, Y) \times X, \tau_{unif} \times \tau) \to (Y, d_Y)$ dada por $F(f, x) = f(x)$ es continua;

4. Si $(X, \tau)$ es compacto, $D_\infty\colon (C(X, Y) \times C(X, Y), \tau_{unif} \times \tau_{unif}) \to ([0, \infty), \tau_{us})$, la aplicación dada por $D_\infty(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$ es una distancia, llamada *distancia de la convergencia uniforme*. Además, si $(Y, d_Y)$ es completo, entonces $(C(X, Y), D_\infty)$ es un espacio métrico completo;

5. Si $(X, \tau)$ es compacto y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $f_n\colon (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{us})$ que convergen simplemente a $f$, entonces para que la sucesión converja uniformemente, es necesario que $f$ sea una función continua

### 1.2.4. Anillos de funciones continuas

En este apartado estudiaremos someramente los espacios $\widehat{C}(Y, \mathbb{R}^n)$ y sus subconjuntos densos. Como referencia mas relevante invitamos al lector a revisar ([15], capítulo 2).

**Definición 1.2.42.** Si $Y$ es es un espacio topológico, $\widehat{C}(Y)$ denota el conjunto $C(Y, \mathbb{R})$ con la topología compacto abierta.

**Teorema 1.2.43.** *En* $\widehat{C}(Y)$ *tenemos las operaciones de adición, multiplicación y multiplicación por un escalar, esto es, las funciones*

$$(f,g) \to f+g \;;\; (f,g) \to f \cdot g$$

*de* $\widehat{C}(Y) \times \widehat{C}(Y) \to \widehat{Y}$*, y la operación*

$$(\lambda, f) \to \lambda f$$

*de* $\mathbb{R} \times \widehat{C}(Y) \to \widehat{C}(Y)$*. Con estas operaciones,* $\widehat{C}(Y)$ *es un álgebra conmutativa y asociativa con elemento unitario sobre* $\mathbb{R}$*. Además, si* $Y$ *es* $T_2$*, las operaciones mencionadas son continuas.*

*Demostración.* Para la primera parte, basta verificar las siguientes propiedades:

(i) $(\widehat{C}(Y), +)$ es un grupo abeliano.

(ii) Si $f,g,h \in \widehat{C}(Y)$, se tiene $fg = gf$; $f(gh) = (fg)h$ y $f(g+h) = fg + fh$.

(iii) La función constante $c(y) = 1$ es el elemento idéntico bajo la multiplicación en $\widehat{C}(Y)$.

(iv) Si $f,g \in \widehat{C}(Y)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(f+g) &= \alpha f + \alpha g;\; (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f; \\ (\alpha\beta)f &= \alpha(\beta f);\; \alpha(fg) = f(\alpha g) = (\alpha f)g \\ 1 \cdot f &= f \text{ para alguna} f \in \widehat{C}(Y). \end{aligned}$$

Todas estas propiedades se deducen fácilmente de ([14], Teorema 2.17). Supongamos ahora que $Y$ es $T_2$ y sea $\alpha\colon \widehat{C}(Y) \times \widehat{C}(Y) \to \widehat{C}(Y)$ es mapeo suma $(f,g) \to f+g$. Fijemos $(f,g) \in \widehat{C}(Y) \times \widehat{C}(Y)$ y sea $[A,W]$ una vecindad sub-básica de $f+g$. Como adición $(\lambda,\mu) \to \lambda + \mu$ en $\mathbb{R}$ es continua, podemos hallar, para cada $a \in A$, vecindades $U(f(a))$ de $f(a)$ y $V(g(a))$ de $g(a)$ en $\mathbb{R}$ tales que $U(f(a)) + V(g(a)) \subset W$, y como $f,g$ son continuas, existe un abierto $U(a)$ en $Y$ con $a \in U(a)$ y tal que $f(U(a)) \subset U(f(a))$, $g(U(a)) \subset V(g(a))$. La familia $\{U(a)\colon a \in A\}$ es entonces una cubierta del compacto $A$ y, por tanto, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(a_i)$. Según ([14] proposición 2.4), existen compactos $A_1, \ldots, A_n$ con la propiedad $A_i \subset U(a_i)$ y tales que $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Entonces $U_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, U(f(a_i))]$ es una vecindad de $f$, $V_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, V(g(a_i))]$ es una vecindad de $g$ y $\alpha(U_0 \times V_0) \subset [A,W]$. La continuidad de la multiplicación y del producto por escalares se prueba en forma análoga. □

*Observación* 1.2.44. Si $Y$ es $T_2$, $\widehat{C}(Y)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

*Demostración.* Como los intervalos abiertos $(c, d)$ forman una base de $\mathbb{R}$, los conjuntos de la forma $[A, (c, d)]$ ($A \subset Y$, compacto) forman una sub-base de $\widehat{C}(Y)$ ([14], Teorema 8.22 inciso (a)). Ahora, cada $[A, (c, d)]$ es convexo, pues si $f, g \in [A, (c, d)]$ entonces, para cada $\lambda \in [0, 1]$ y cada $a \in A$, el punto $\lambda f(a) + (1 - \lambda)g(a)$ pertence al segmento $(c, d)$, de manera que $\lambda f + (1 - \lambda)g \in [A, (c, d)]$. Como la intersección de convexos es convexa, $\widehat{C}(Y)$ tiene entonces una base de convexos. □

**Definición 1.2.45.** (1) $\emptyset \neq A \subset \widehat{C}(Y)$ es una *subálgebra* si siempre que $f, g \in A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene $f + g, f \cdot g$ y $\lambda f \in A$.

(2) Una subálgebra $A$ de $\widehat{C}(Y)$ es *unitaria* si contiene a la función constante $\delta(y) = 1$.

*Ejemplos* 1.2.46. (1) $\{c_0\}$, en donde $c_0$ es la función constante nula y $\widehat{C}(Y)$ son subálgebras de de $\widehat{C}(Y)$.

(2) Toda subálgebra de $\widehat{C}(Y)$ contiene la función constante nula.

(3) Una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$ es unitaria si y sólo contiene una función constante nula.

(4) Toda intersección de subálgebras de $\widehat{C}(Y)$ es una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$.

(5) En $\widehat{C}(I)$, los polinomios sin término constante forman una subálgebra no unitaria.

(6) Si $A$ es una subálgebra unitaria de $\widehat{C}(Y)$, $f_i \in A$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $p(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $p(f_1, \ldots, f_n) \in A$.

**Lema 1.2.47.** *Sea $Y$ un espacio $T_2$ y $A$ una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$. Entonces la cerradura de $A$ en $\widehat{C}(Y)$ es también una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha\colon \widehat{C}(Y) \times \widehat{C}(Y) \to \widehat{C}(Y)$ la función suma. Entonces $\alpha(A \times A) \subset A$ (pues $A$ es una subálgebra) y $\alpha((A \times A)^-) = \alpha(A^- \times A^-) \subset \alpha(A \times A)^-$ (pues $\alpha$ es continua). De donde, $\alpha(A^- \times A^-) \subset A^-$ y la suma de dos miembros de $A^-$ también pertence a $A^-$. Análogamente, la continuidad del producto y el producto por escalares implican las condiciones restantes para que $A^-$ sea una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$. □

**Lema 1.2.48.** *Existe una sucesión de polinomios reales $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ en $\widehat{C}(I)$ la cual converge uniformemente a la función $g(t) = \sqrt{t}$ en $\widehat{C}(I)$.*

*Demostración.* Definamos $u_n$ por inducción comenzando con $u_1 = 0$ y poniendo

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \text{ para } n \geq 1.$$

Suponiendo que $u_n \leq 9$, tenemos $u_n^2 \leq g^2$, de manera que $t - u_n^2(t) \geq 0$ para cada $t \in I$. Por tanto, $u_n \leq u_{n+1}$. Por otro lado, $\sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) = (\sqrt{t} - u_n(t))(1 - \frac{\sqrt{t}+u_n(t)}{2})$. De la hipótesis $u_n \leq g$, deducimos $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$, de manera que $\sqrt{t} \geq u_{n+1}(t)$. La sucesión $\{u_n(t)\}$ es entonces creciente y acotada y, por tanto, converge al límite $v(t) = \sup\{u_n(t) \colon n \in \mathbb{N}\}$. De lo ya demostrado se obtiene que $v \leq g$. De la definición de $u_{n+1}$, deducimos que $v = g$. Falta probar que la convergencia $u_n \to g$ es uniforme. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $t \in I$, existe uníndice $n(t)$ tal que $g(t) - u_m(t) < \frac{\epsilon}{3}$ para $m \geq n(t)$. Como $g$ y $u_{n(t)}$ son continuas, existe una vecindad $V(t)$ de $t$ en $I$ tal que $t' \in V(t)$ implica $|g(t) - g(t')| < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto, para cada $t' \in V(t)$, se tiene $g(t') - u_{n(t)}(t') < \epsilon$. Escogiendo ahora un número finito de puntos $t_1, \ldots, t_m \in I$ tales que $I = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_m)$ y tomando $N = \max\{n(t_1), \ldots, n(t_m)\}$, tenemos, para $n \geq N$ y $t \in I$,

$$g(t) - u_n(t) \leq g(t) - u_N(t) \leq g(t) - u_{n(t_i)}(t) < \epsilon,$$

en donde $t \in V(t_i)$. Por tanto, la convergencia $u_n \to g$ es uniforme. □

**Corolario 1.2.49.** *Si $Y$ es compacto y $T_2$ y $A$ es una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$, entonces, para cada $f \in A$, se tiene $|f| \in A^-$.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f$ no es constante. Sea $a = \sup\{|f(t)| \colon t \in Y\}$. Por el teorema, la sucesión de funciones $u_n(\frac{f^2}{a^2})$ converge uniformemente a $(\frac{f^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{|f|}{a}$ en $Y$. Como cada $u_n(\frac{f^2}{a^2})$ pertence a $A$ (pues $A$ es una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$), deducimos que $\frac{|f|}{a} \in A^-$.

Finalmente, como $A^-$ es también una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$, concluimos que $|f| \in A^-$. □

**Corolario 1.2.50.** *Sean $Y$ y $A$ como en el corolario anterior. Si $f, g \in A^-$, entonces las funciones* $\max\{f, g\}$ *y* $\min\{f, g\}$ *también pertence a $A^-$. Más generalmente, si $f_1, \ldots, f_n \in A$, entonces* $\max\{f, g\} = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$ *y* $\min\{f, g\} = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ *y aplicar (1.2.49).*

**Definición 1.2.51.** (1) Sea $D \subset \widehat{C}(Y)$. La intersección $A(D)$ de todas las subálgebras de $\widehat{C}(Y)$ que contienen a $D$ es una subálgebra de $\widehat{C}(Y)$ y recibe el nombre de *subálbegra generada por D*.

(2) $D \subset \widehat{C}(Y)$ es *separante* si para cada pareja de puntos distintos $y, y' \in Y$, existe $f \in D$ tal que $f(y) \neq f(y')$.

*Observación* 1.2.52. (1) Sea $D \subset \widehat{C}(Y)$. Entonces $A(D)$ es el conjunto de todas las funciones de la forma $p(f_1, \ldots, f_n)$, en donde $f_i \in D$ y $p$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sin término constante. $A(D)$ es unitaria si $D$ contiene una función constante nula.

(2) Sea $D \subset \widehat{C}(Y)$ separante, $x, y$ puntos distintos de $Y$ y $a, b \in \mathbb{R}$ escalares. Supongamos también que $D$ contiene una función constante no nula. Entonces existe $f \in A(D)$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$.

*Demostración.* Sólo probaremos el inciso (2).

(2) Como $D$ es separante, existe $g \in D$ tal que $g(x) = \alpha \neq \beta = g(y)$. Por hipótesis, $A(D)$ contiene a todas las funciones constantes. Por tanto, basta definir

$$f = a + \frac{b-a}{\beta - \alpha}(g - \alpha).$$

□

A continuación enunciamos y probamos el célebre teorema de aproximación de Stone-Weirestrass:

**Teorema 1.2.53.** *(Stone-Weirestrass) Sea $Y$ un espacio $T_2$ y sea $D \subset \widehat{C}(Y)$ una familia separante la cual contiene una función constante nula. Entonces $A(D)$ es denso en $\widehat{C}(Y)$.*

*Demostración.* Basta probar que si $f \in \widehat{C}(Y)$ y $\bigcap_{i=1}^{n} [A_i, V_i]$ es una vecindad de $f$, entonces $A(D)^- \cap \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, V_i] \neq \emptyset$. Sea

$$\epsilon = \text{mín}\{d(f(A_i), \mathbb{R} - V_i) \colon i = 1, \ldots, n\}$$

Basta encontrar entonces una función $g \in A(D)^-$ tal que $|f(y) - g(y)| < \epsilon$ para toda $y$ en el compacto $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Demostraremos primero lo siguiente:

(1) Para cada $y_0 \in K$, existe $g \in A(D)^-$ tal que:

  (a) $g(y_0) = f(y_0)$.

  (b) $g(y) < f(y) + \epsilon$ para toda $y \in K$

  En efecto, por (1.2.52.(2)), para cada $y \in K$ existe $h_y \in A(D)$ tal que $h_y(y_0) = f(y_0)$ y $h_y(y) < f(y) + \frac{\epsilon}{2}$. . Como $h_y$ es continua en $Y$, existe una vecindad $V(y)$ de $y$ tal que $h_y(y') < f(y') + \epsilon$ para toda $y' \in V(y)$. Como $K$ es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tales que $K \subset V(y_1) \cup \cdots \cup V(y_n)$. Definiendo $g = \text{mín}\{h_{y_1}, \ldots, h_{y_n}\}$, deducimos que $g \in A(D)^-$. Además, como cada $y \in K$ pertenece a alguna $V(y_i)$, se deduce que $g(y) \leq h_{y_i}(y) < f(y) + \epsilon$, como se esperaba.

(2) Existe $g \in A(D)^-$ tal que $|f(y) - g(y)| < \epsilon$ para toda $y \in K$. Para cada $y_0 \in K$, sea $g_{y_0} \in A(D)^-$ como en (1). Sea $V(y_0)$ una vecindad de $y_0$ tal que $g_{y_0}(y) > f(y) - \epsilon$ para toda $y \in V(y_0)$. Cubramos $K$ con una cantidad finita de vecindades $V(y_1), \ldots, V(y_n)$ y defínase

$$g = \text{máx}\{g_{y_1}, \ldots, g_{y_n}\} \in A(D)^-$$

  Sea $y \in K$. Existe entonces $i$ tal que $y \in V(y_i)$. Por tanto, $g(y) \geq g_{y_i}(y) > f(y) - \epsilon$. Por (1), $g_{y_i}(y) < f(y) + \epsilon$ para cada $i = 1, \ldots, n$. De donde, $g(y) < f(y) + \epsilon$ y, por tanto, $|f(y) - g(y)| < \epsilon$ para cada $y \in K$.

□

**Corolario 1.2.54.** *Sea $Y = \{z \colon |z| < 1\}$ el disco unitario en el plano complejo $Z$ y sea $D \subset \widehat{C}(Y, Z)$ una familia con las siguientes propiedades:*

*(a) $D$ es separante*

*(b) $D$ contiene una función constante nula*

*(c) Si $f \in D$, la función conjugada $\bar{f}$ también pertenece a $D$.*

*Entonces la subálgebra compleja $A(D)$ es densa en $\widehat{C}(Y, Z)$.*

*Demostración.* $\widehat{C}(Y, Z)$ es homeomorfo a $\widehat{C}(Y) \times \widehat{C}(Y)$. La familia $D_0 = \{f + \bar{f}, i(f - \bar{f}) \colon f \in D\}$ de funciones reales es separante. Por tanto, puede ser usada para aproximar separadamente la parte real e imaginaria de una $f \in C(Y, Z)$ dada. $\square$

**Corolario 1.2.55.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, $f \in \widehat{C}(I^n)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función polinomial $p(x_1 \ldots, x_n) \in \widehat{C}(I^n)$ tal que $||f(x_1, \ldots, x_n) - p(x_1, \ldots, x_n)|| < \epsilon$ para toda $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$.*

**Corolario 1.2.56.** *Sea $Y = [0, \infty)$. Entonces $D = \{\delta(x) = 1, f(x) = e^{-x}\}$ separa puntos. Por tanto, $A(D)$ es denso en $\widehat{C}(Y)$. En otras palabras, para cada $f \in \widehat{C}(Y)$, existe una sucesión*

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{n_k} a_n e^{-nx}$$

*tal que $p_k \to f$ uniformemente en cada compacto.*

# Capítulo 2

# Teorema de Stone-Weierstrass

El teorema clásico de Weierstrass afirma que cada función real continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ se puede aproximar uniformemente por polinomios.

Más adelante M. H. Stone generalizó el resultado anterior en un resultado conocido, como Teorema de Stone-Weierstrass, este resultado generaliza al teorema dado por Weierstrass en dos aspectos. Podemos observar que el mismo suceso ocurre en el espacio de las funciones continuas definidas sobre cualquier espacio compacto y si en lugar de los polinomios usamos un álgebra de funciones que contiene a la función constante y separa los puntos del dominio.

Cuando consideramos el espacio de las funciones continuas complejas hay que añadir otra condición: de que el álgebra ahora involucrada sea invariante bajo la operación de la conjugación compleja.

El enunciado del Teorema de Stone-Weierstrass, es el siguiente:

**Teorema 2.0.57. Teorema de Stone-Weierstrass,** *Sea $K$ un subconjunto compacto, de un espacio topológico cualquiera y $C(K)$ el espacio de las funciones reales continuas definidas sobre $K$. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(K)$ tal que*

*i) $\mathcal{A}$ no se anula, lo que significa que para todo $x \in K$ existe un $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq 0$,*

*ii) $\mathcal{A}$ separa puntos, es decir que para todo $x \neq y \in K$ existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$,*

*entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(K)$.*

Para hacernos una idea de la potencia del teorema anterior basta recordar algunas demostraciones inusualmente simples de algunas de sus más conocidas aplicaciones: tan sólo hay que comprobar las condiciones $(i)$ y $(ii)$.

*Ejemplo* 2.0.58.

1. *El álgebra de los polinomios a valores reales en $n$ variables sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ es densa en $C(K)$.* (pues la función $g \equiv 1$ cumple la condición (i) y las funciones coordenadas $g(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, hacen que se cumpla la condición (ii)).

2. Si $(K, d)$ *es un espacio métrico compacto, entonces* $C(K)$ *es separable*, es decir, $C(K)$ contiene un subconjunto denso numerable. (Si $\{x_n\}$ es denso en $K$, el álgebra generada por las funciones $g_n(x) = d(x, x_n) \in C(K)$ es densa pues las $g_n$ permiten comprobar la condición (i) sin dificultad, y de la densidad de $\{x_n\}$ se deduce (ii) por reducción

al absurdo. Las combinaciones racionales de sumas y productos de $g_n$ demuestran el resultado.)

3. El *álgebra generada por* $\sin x$ *y* $\cos x$ *es densa en* $C([0,\pi])$ ($g \equiv 1$ verifica la condición (i) y $g(x) = \cos x$ comple la condición (ii). De lo anterior se deduce que los polinomios trigonométricos son densos en $C([0,\pi])$) con valores complejos. El hecho es clave en la demostración de que $\{\frac{1}{\pi}e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2([0,\pi])$.

Como observamos las estructura algebraica del espacio de funciones continuas tiene un papel importante , por lo tanto presentaremos algunos elementos de estructura del espacio $C(K)$.

## 2.1. Algunas propiedades de C(K)

### Propiedades

Sea $(K,d)$ un espacio métrico compacto y sea $C(K)$ es espacio de todas las funciones continuas a valores sobre $K$.

El conjunto $C(K)$ es:

1. un espacio normado con la norma $||f||_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

2. un álgebra con el producto de la multiplicación punto por punto:

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

La multiplicación considerada como operación

$$\begin{aligned} H\colon C(K)\times C(K) &\to C(K) \\ (f,g) &\longmapsto fg \end{aligned}$$

es continua.

La desigualdad $||fg||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$ conduce a

$$\begin{aligned} ||fg - hk||_\infty = ||fg - fk + fk - hk||_\infty &\leq ||f(g-k)||_\infty + ||(f-h)k||_\infty \\ &\leq ||f||_\infty ||g-k||_\infty + ||k||_\infty ||f-h||_\infty. \end{aligned}$$

La convergencia $(h_n,k_n) \to (f,g)$ definida en $C(K)\times C(K)$ implica la convergencia $h_n k_n \to fg$.

3. $C(K)$ es una *retícula* lo que significa, que para cada $f \in C(K)$ la función

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

pertenece al espacio $C(K)$.

Lo anterior también se puede expresar en la siguiente forma.

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

obteniendo las siguientes relaciones:

i) $f^- = -(-f)^+$;

ii) $f = f^+ - f^-$;

iii) $|f| = f^+ + f^-$.

El hecho de que $C(K)$ es una retícula significa que es un espacio cerrado con respecto a cualquiera de las operaciones: $f \to f^+, f \to f^-$ o $f \to |f|$.

**Definición 2.1.1.** Sean $f, g \in C(K)$ y sean

$$f \wedge g(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$
$$f \vee g(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

Observamos que la relaciones que tienen estas operaciones con las anteriores son:

$$f \wedge g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) - |f(x) - g(x)|,$$
$$f \vee g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + |f(x) - g(x)|.$$

La forma más sencilla de probar estas relaciones es verificarlas punto por punto considerando los casos $f(x) \leq g(x)$ y $f(x) > g(x)$.

A continuación enunciamos algunos resultados sin demostración necesarios para el desarrollo de este trabajo.

**Lema 2.1.2.** *Toda subálgebra cerrada de $C(K)$ es una retícula.*

**Lema 2.1.3.** *Existe una sucesión de polinomios $p_n$ que converge a la función $\sqrt{t}$ uniformemente sobre $[0, 1]$.*

*Observación* 2.1.4. El lema 2.1.2 implica que toda subálgebra cerrada de $C(K)$ es cerrada también con respecto a las operaciones $\wedge$ y $\vee$.

Terminaremos los preparativos relacionados con el teorema de Stone-Weierstrass con un resultado sencillo pero muy importante.

**Proposición 2.1.5.** Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(K)$. Entonces la cerradura de $\mathcal{A}$ en $C(K)$ es también un álgebra.

*Demostración.* Si $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, existen $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$. Como hemos visto anteriormente, $f_n g_n \to fg$, entonces $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. El espacio $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra. □

Recordemos que una familia $\mathcal{F} \subset C(K)$ *separa los puntos* de $K$, si para cada par de puntos $x \neq y$ en $K$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

A continuación enunciaremos y probaremos la versión real del Teorema de Stone-Weierstrass.

**Teorema 2.1.6** (**Teorema Stone-Weierstrass**). *Sea $K$ un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(K)$ que contiene a la función constante $1$ y separa los puntos de $K$, entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(K)$.*

*Demostración.* Sean $a \neq b$ y $x \neq y$ dos numeros reales en $K$, construimos una función $h \in \mathcal{A}$ tal que $h(x) = a$, $h(y) = b$. Como el álgebra $\mathcal{A}$ separa puntos, entonces existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$, para $x \neq y$ en $K$.

La función
$$h(z) = a + \frac{(b-a)(g(z) - g(x))}{g(y) - g(x)}$$
tiene las propiedades deseadas.

Sea $f \in C(K)$ y sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar un elemento $g$ del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ que satisfaga $f - \epsilon \leq g \leq f + \epsilon$.

Fijamos $x_0 \in K$ y sea $r \in K$. Buscamos $h_r \in \mathcal{A}$ tal que $h_s(x_0) = f(x_0)$ y $h_s(s) = f(s)$. La función $h_s - f$ es continua y se anula en $s$, entonces existe un radio $r(s) > 0$ tal que para $y$ en la bola $B(s, r(s))$ se cumple $h_s(y) - f(y) < \epsilon$.

Después de haber construido las funciones $h_s$ y los radios correspondientes $r(s)$ para todos $s \in K$, representamos $K = \bigcup_{s \in K} B(s, r(s))$.

El espacio $K$ es compacto, así que esta cubierta abierta de $K$ tiene una subcubierta finita:
$$K = \bigcup_{j=1}^{n} B(s_j, r(s_j)).$$

Sea $g_{x_0} = h_{s_1} \wedge \cdots \wedge h(s_n)$. Esta función perrtenece a $\overline{\mathcal{A}}$ y satisface las condiciones $g_{x_0} = f(x_0)$ y $g_{x_0}(y) < f(y)\epsilon$ para todos $y \in K$. Por la continuidad de las funciones existe $R(x_0)$ tal que para $z \in B(x_0, R(s_0)$ se cumple que $f(z) - \epsilon < g_{x_0}(z)$.

Ahora consideramos la familia de todas las funciones $g_{x_0}$ y los radios $R(x_0) > 0$ para todos $x_0 \in K$.

La cubierta $K = \bigcup_{x \in K} B(x, R(x))$ tiene una subcubierta finita $K = \bigcup\limits_{m=1}^{k} B(x_m, R(x_m))$.

La función $g = g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_k}$ que pertenece a $\overline{\mathcal{A}}$ satisface para $z \in K$ arbitrario $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$.

Los elementos del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ aproximan a cada elemento de $C(K)$ en la norma $|| \cdot ||_\infty$ y, como $\overline{\mathcal{A}}$ es cerrado en esta norma, obtenemo que $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$. □

*Observación* 2.1.7. El Teorema Stone-Weierstras proporciona un método de construir subconjuntos densos en espacios de funciones lo que crea una relación con el estudio de la separabilidad de estos espacios.

**Lema 2.1.8.** *Sea* $(K, d)$ *un espacio métrico compacto. El espacio* $C(K)$ *es separable.*

*Demostración.* Dado que $K$ es un espacio métrico compacto, entonces $K$ es separable. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en $K$ y sea $f_n(x) = d(x, x_n)$. Los elementos de la familia de funciones $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ son continuas y separan los puntos de $K$.

Efectivamente, si $d = d(x, y)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{d}{3}$. Por la desigualdad triangular $f_n(y) = d(y, x_n) \geq d(x, y) - d(x, x_n) > d - \frac{d}{3} = \frac{2}{3}d$. La función $f_n$ separa los puntos $x$ y $y$ porque $f_n(y) - f_n(x) > \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}d$.

Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial generado linealmente por funciones de la forma:

$$f_{n_1}^{k_1} \dots f_{n_N}^{k_n}, \tag{2.1}$$

donde $n_j, k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Visiblemente la suma y producto de dos combinaciones siguen teniendo la misma forma, entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones, que contiene a funciones constantes.

Por el Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ es denso en $C(K)$. Sea $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ el subconjunto de estos elementos de $\mathcal{A}$ que son combinaciones lineales con coeficientes racionales.

Si $g \in \mathcal{A}$, entonces se puede representar en la forma $g = \Sigma_{j=1}^m a_j q_j$ donde cada función $g_j$ es de la forma 2.1, podemos encontrar $q_1, \dots, q_m$ tales que

$$|a_j - q_j| < \frac{\epsilon}{m||g_j||_\infty}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad \text{Se sigue}$$

$$||g - \Sigma_{j=1}^m q_j g_j||_\infty = ||\Sigma_{j=1}^m (a_j - q_j) g_j||_\infty \leq \Sigma_{j=1}^m |a_j - q_j| ||g_j||_\infty < \epsilon.$$

El espacio $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ es denso en $\mathcal{A}$ y por lo tanto es denso en $C(K)$.

Solo queda por probar que el conjunto $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ es numerable.

Un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ es numerable si y sólo si su base es numerable. La base de $\mathcal{A}_\mathbb{Q}$ está formada por funciones de la forma 2.1. Es suficiente demostrar que el número de estas funciones es numerable. Cada una de estas funciones está determinada por dos sistemas de números enteros no negativos $(n_1, \dots, n_N)$, $(k_1, \dots, k_N)$ donde $N$ recorre el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

La base del espacio no es más numerosa que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2N}$ y este espacio es numerable. □

Finalizaremos esta sección mostrando algunos resultados donde se aplican el Teorema de Weierstrass y el Teorema de Stone-Weierstrass.

Los teoremas famosos como el Teorema de Stone-Weierstrass deben su importancia al hecho de que encuentran muchas aplicaciones en análisis y en otras áreas de las matemáticas. Sin embargo la mayoría de las aplicaciones no consiste en el uso directo del Teorema sino necesitan la creación de un vínculo un *puente* entre el problema original y el Teorema.

Tratandose del Teorema original de Weierstrass podemos formular varios problemas a los cuales a primera vista no se aplica el Teorema.

1. Si una función continua sobre el intervalo $[-1, 1]$ se anula en cero,

   ¿es posible aproximarla solo por polinomios que se anulan en cero?

2. Si una función del espacio $C[-1, 1]$ es simétrica (o antisimétrica),

   ¿podemos aproximarla por polinomios simétricos? (resp. antisimétricos?)

Las funciones que se anulan en cero, sí forman un álgebra, pero dicha álgebra no contiene la unidad y sus elementos no separan los puntos del intervalo $[-1, 1]$. Las funciones simétricas tampoco separan los puntos, mientras que las funciones antisimétricas ni siquiera forman un álgebra.

Sin embargo la solución de estos problemas está a mano gracias al Teorema de Weierstrass.

**Lema 2.1.9.** *Sea $(K, d)$ un espacio métrico compacto y sea $x_0 \in K$. Si $\mathcal{A} \subset C(K)$ es un álgebra que separa los puntos de $K$ y contiene a la función constante 1 y si además $\mathcal{A}_0 = \{f \in \mathcal{A}\colon f(x_0) = 0\}$, entonces*

$$\overline{\mathcal{A}_0} = \{f \in \mathcal{A}\colon f(x) = 0\}.$$

*Demostración.* Sea $f \in C(K)$ tal que $f(x_0) = 0$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass existen $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente.

En particular $f_n(x_0) \to 0$. Sean $g_n = f_n - f_n(x_0)$. Se cumple entonces $g_n \in \mathcal{A}_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g_n \to f$ uniformemente. □

Los problemas antes mencionados se pueden formular y resolver en forma más general. Para una función $f$ sobre un espacio vectorial $E$ denotemos por $\check{f}(x) = f(-x)$. Una función es *simétrica* o *par* si $\check{f} = f$ y *antisimétrica* o *impar* si $\check{f} = -f$.

**Proposición 2.1.10.** Sea $K$ un conjunto compacto en un espacio normado $E$ y tal que $K = -K$. Sea $\mathcal{A} \subset C(K)$ un álgebra que separa los puntos de $K$, contiene a la función constante 1 y satisface $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \check{f} \in \mathcal{A}$. Entonces toda función simétrica (antisimétrica) de $C(K)$ se puede aproximar uniformemente por elementos simétricos (resp. antisimétricos) de $\mathcal{A}$.

*Demostración.* Toda función $f$ sobre $K$ se puede representar en forma única como suma de componente simétrica y antisimétrica:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f_s(x) + f_a(x).$$

Una función es simétrica si $f = f_s$ y es antisimétrica si $f = f_a$. Sean $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente. Se sigue, $(f_n)_s \to f_s$ y $(f_n)_a \to f_a$. Si $f$ es simétrica obtenemos $f = f_s = \lim_{n\to\infty}(f_n)_s$ y en caso de una función antisimétrica $f = f_a = \lim_{n\to\infty}(f_n)_a$. $\square$

La compacidad del dominio es una hipótesis importante para la validez del Teorema de Stone-Weierstrass. Sin embargo, en el caso de algunos dominios no compactos el Teorema proporciona resultados interesantes sobre la aproximación uniforme de funciones continuas. Antes de presentar estos corolarios formulamos un lema sencillo sobre la convergencia uniforme.

**Lema 2.1.11.** *Sea $(X, d_X)$ un espacio métrico y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas sobre $X$ que convergen uniformemente a la función $f$. Sea $(Y, d_Y)$ y sea $\varphi\colon Y \to X$ una función suprayectiva. Entonces la sucesión $f_n \circ \varphi$ converge uniformemente a $f \circ \varphi$.*

Sea $C_\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R})\colon \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}$. El espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es una subálgebra cerrada del álgebra (ver [15]) $BC(\mathbb{R})$ que no contiene a la función constante 1.

**Teorema 2.1.12.** *Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos no tienen ningún cero común en $\mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{A} = C_\infty(\mathbb{R})$.*

**Definición 2.1.13.** Un espacio métrico $(X, d)$ se llama *$\sigma$-compacto* si existe una familia numerable de conjuntos compactos $K_n \subset X$, para $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

El ejemplo principal de un espacio $\sigma$-compacto es el espacio euclidiano que se puede representar como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B(0,m)}$.

**Definición 2.1.14.** Una sucesión de funciones $\{f_m\}$ continuas sobre un espacio $\sigma$-compacto $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ converge a la función $f$ *casi-uniformemente* si para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K_n} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En otras palabras, $f_n \to f$ casi-uniformemente si para cada $m \in \mathbb{N}$ $f_n|_{K_m} \to f|_{K_m}$ uniformemente.

El Teorema de Stone-Weierstrass conduce a un teorema sobre la aproximación casi-uniforme de funciones continuas sobre un espacio $\sigma$-compacto.

**Teorema 2.1.15.** *Sea $X$ un espacio $\sigma$-compacto y sea $\mathcal{A} \subset C(X)$ una subálgebra unitaria que separa los puntos de $X$. Para cada $f \in C(X)$ existe una sucesión $f_n \in \mathcal{A}$ tal que $f_n \to f$ casi-uniformemente.*

La convergencia casi uniforme, así como la hemos definido no corresponde a la convergencia con respecto a una norma determinada sino a un sistema de normas en los espacios $C(K_m)$. Sin embargo sí se puede introducir en el espacio $C(X)$ una métrica $D$ tal que la convergencia casi-uniforme $f_n \to f$ tenga lugar si y solo si $D(f_n, f) \to 0$.

Esta métrica se define de la manera siguiente: sea $||f||_n = \sup_{x\in K_m} |f(x)|$ y sea

$$D(f,g) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \frac{||f-g||_m}{1 + ||f-g||_m}.$$

# Capítulo 3
# Una aplicación del Teorema de Stone-Weierstrass

Aunque los espacios compactos de Hausdorff son el objeto de estudio del presente trabajo, no son los únicos que vamos a estudiar, nos hacen falta definir otros espacios que por su naturaleza están íntimamente relacionados con estos.

**Definición 3.0.16.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subfamilia numerable que también cubre a $X$. Un espacio topológico $(X, \tau)$ es *hereditariamente de Lindelöf* si todo subespacio de $X$, con respecto a la topología del subespacio, es un espacio de Lindelöf.

A continuación reproducimos la prueba de un teorema que da dos condiciones equivalentes para la propiedad hereditaria de Lindelöf (la prueba puede ser consultada en detalle en [11] y [22]).

**Teorema 3.0.17.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio $X$ es hereditariamente de Lindelöf.*
2. *Todo subespacio abierto de $X$ es Lindelöf.*
3. *Para todo subespacio no numerable $Y$ de $X$, existe un punto $y \in Y$ tal que todo subconjunto abierto de $X$ que contiene a $y$ contiene una cantidad no numerable de puntos de $Y$.*

*Demostración.* La implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) y (2) $\Rightarrow$ (3) pueden ser consultadas en datalle en ([36], P 110).

(3) $\Rightarrow$ (1) Procedamos por contrarrecíproco. Supongamos que $T$ no es un subespacio de Lindelöf de $(X, \tau)$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $T$ tal que ningúna subcolección numerable de $\mathcal{U}$ puede cubrir a $T$. Por un proceso inductivo tranfinito, elijamos un conjunto de puntos $\{t_\alpha \in T \colon \alpha < \omega_1\}$ y una colección de conjuntos abiertos $\{U_\alpha \in \mathcal{U} \colon \alpha < \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $t_\alpha \in U_\alpha$ y $t_\alpha \notin \bigcup\{U_\beta \colon \beta < \alpha\}$. El proceso inductivo es posible ya que ningúna subcolección numerable de $\mathcal{U}$ puede cubrir $T$.

Por otro lado para cada $\alpha$, sea $V_\alpha$ un subconjunto abierto de $(X,\tau)$ tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$. Ahora podemos concluir, que para cualquier punto $t_\alpha$ de $Y$, existe un conjunto abierto $V_\alpha$ que contiene a $t_\alpha$ tal que $V_\alpha$ contiene sólo una cantidad numerable de puntos de $Y$. Lo anterior es la negación de la condición 3.

$\square$

*Observación* 3.0.18. La condición 3 indica que cada conjunto no numerable tiene cierto tipo especial de puntos límites. Sea $p \in X$. Decimos que $p$ es un punto límite del conjunto $Y \subset X$ si cada conjunto abierto que contiene a $p$ contiene un punto de $Y$ distinto de $p$.

En algunas situaciones será suficiente aplicar el siguiente corolario que se obtiene a partir de la condición 3.

**Corolario 3.0.19.** *Si el espacio $(X,\tau)$ es hereditariamente de Lindelöf, entonces todo subespacio no numerable $Y$ de $X$ contiene uno de sus puntos límite.*

**Definición 3.0.20.** Una familia $\mathcal{V}$ de vecindades abiertas de un punto $x \in X$ es una *base local* en $x$ si toda vecindad de $x$ contiene un elemento de $\mathcal{V}$. $(X,\tau)$ es *primero-numerable* si cada $x \in X$ tiene una base local numerable.

**Teorema 3.0.21.** *Si $(X,\tau)$ es $T_2$, Lindelöf y primero-numerable, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$ (ver [3], Corollary 2.1).*

Del teorema anterior se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 3.0.22.** *Si $(X,\tau)$ es $T_2$, hereditariamente de Lindelöf y primero-numerable, entonces $|X|_\tau \leq \mathfrak{c}$.*

**Definición 3.0.23.** Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico.

1. Un subconjunto $A$ de un espacio $X$ es un conjunto $G_\delta$, si es intersección numerable (finita o infinita) de abiertos de $X$;

2. Un subconjunto $A$ de un espacio $X$ es un conjunto *cerrado*-$G_\delta$ en $X$, si y sólo si, para todo punto $p \notin A$ existe un conjunto $G_\delta$, $D_p$, tal que $p \in D_p$ y $D_p \cap A = \emptyset$.

**Definición 3.0.24.** Un espacio topológico $(X,\tau)$ es *normal* si cada pareja de cerrados ajenos en $X$ tienen vecindades ajenas. El espacio $(X,\tau)$ es *perfectamente normal* si es normal y cada cerrado en $X$ es $G_\delta$. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado *conjunto cero* si existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$.

El resultado que sigue es bien conocido en topología de conjuntos.

**Teorema 3.0.25.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio normal y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces $A$ es un conjunto cero si y sólo si $A$ es $G_\delta$.*

Un espacio $(X,\tau)$ es *Čech-completo* si es homeomorfo a un subespacio $G_\delta$ de un compacto de Hausdorff.

Tendremos la oportunidad de usar el siguiente resultado:

**Teorema 3.0.26.** *(ver [3], Lemma 2.) Todo espacio Čech-completo y hereditariamente de Lindelöf $X$ es primero-numerable o tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

*Demostración.* Supongamos que $(X, \tau)$ es no numerable. Con a lo más una infinidad numerable de excepciones, todos los puntos de $X$ son puntos de condensación de $X$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $X$ es además denso en sí mismo. Supongamos que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$, en donde $W_1, W_2, \ldots$ son abiertos en un espacio compacto y de Hausdorff $Z$. Escojamos dos puntos distintos $a_0, a_1 \in X$. Sean $V_0, V_1$ abiertos ajenos en $Z$ tales que $a_0 \in V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq W_1$, $a_1 \in V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq W_1$ (las cerraduras se toman en $Z$). Como $X$ es denso en sí mismo, existen pustos distintos $a_{00}, a_{01} \in V_0 \cap X$ y puntos distintos $a_{10}, a_{11} \in V_1 \cap X$. Sean $V_{00}, V_{01}, V_{11}$ abiertos mutuamente ajenos en $Z$ tales que $a_{00} \in V_{00} \subseteq \overline{V}_{00} \subseteq V_0 \cap W_2$; $a_{01} \in V_{01} \subseteq \overline{V}_{01} \subseteq V_0 \cap W_2$; $a_{10} \in V_{10} \subseteq \overline{V}_{10} \subseteq V_1 \cap W_2$ y $a_{11} \in V_{11} \subseteq \overline{V}_{11} \subseteq V_1 \cap W_2$. Escojamos ahora puntos distintos $a_{ij0}, a_{ij1} \in V_{ij} \cap X$ $(i, j = 0, 1)$ y sean $V_{ij0}, V_{ij1}$ abiertos ajenos en $Z$ tales que

$$\begin{aligned} a_{ij0} &\in V_{ij0} \subseteq \overline{V}_{ij0} \subseteq V_{ij} \cap W_3 \\ a_{ij1} &\in V_{ij1} \subseteq \overline{V}_{ij1} \subseteq V_{ij} \cap W_3, \qquad i, j = 0, 1. \end{aligned}$$

Este proceso puede continuarse inductivamente. Para cada $(i_1, i_2, \ldots) \in 2^W$, escojamos un punto $x(i_1, i_2, \ldots)$ en $V_{i_1} \cap V_{i_1 i_2} \cap V_{i_1 i_2 i_3} \cap \cdots$. Como podemos notar $(i_1, i_2, \ldots) \to x(i_1, i_2, \ldots)$ define una función inyectiva de $2^W$ en $X$. Por tanto, $|X| \geq \mathfrak{c}$. Pero por el teorema 3.0.21, $|X| \leq \mathfrak{c}$ (obsérvese que todo espacio Čech-completo y hereditariamente de Lindelöf $X$ es primero-numerable). Por tanto, $|X| = \mathfrak{c}$. □

**Definición 3.0.27.** Para cada espacio compacto y de Hausdorff $X$, denotemos con $C(X, \mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ con la topología inducida por la métrica

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}, f, g \in C(X, \mathbb{R}).$$

**Definición 3.0.28.**

1. Una familia $\mathcal{A} \subset C(X)$, es una *álgebra*, si para todo $f, g \in \mathcal{A}$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos $f + g \in \mathcal{A}$, $fg \in \mathcal{A}$ y $cf \in \mathcal{A}$.

2. Dada una colección $\mathcal{D} \subset C(X)$, la *subálgebra* $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ generada por $\mathcal{D}$, es la más pequeña de las subálgebras de $C(X)$ que contienena $\mathcal{D}$.

La *cerradura uniforme* de $\mathcal{A}$ es el conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ de las funciones en $C(X)$ que pueden aproximarse uniformemente mediante elementos de $\mathcal{A}$. Se dice que la colección $\mathcal{D} \subset C(X)$, *separa puntos* si dados cualesquiera dos puntos $x \neq y$ en $X$, existe una función $f \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

La siguiente versión del Teorema de Stone-Weierstrass no es la más general. Sin embargo, será suficiente para nuestros propósitos:

**Teorema 3.0.29. Teorema de Stone-Weierstrass***(Ver [27]). Sea $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que $\mathcal{A}$ contiene al menos una función constante no nula. Si para cada pareja de puntos distintos $a, b \in X$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces la subálgebra $\mathcal{A}^*$ generada por $\mathcal{A}$ es densa en $C(X, \mathbb{R})$.*

En lo que sigue procedemos a enunciar y dar una prueba alternativa de un teorema que es de vital importancia en la conclusión del trabajo.

La prueba original puede ser consultada en [12] y [13].

**Teorema 3.0.30.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces $|X|_\delta \leq |X|^{\aleph_0}$.*

*Demostración.* Sea $K_\delta$ la familia de cerrados $G_\delta$ en $X$. Por el teorema 3.0.25, existe una función inyectiva $j\colon K_\delta \to C(X, \mathbb{R})$ tal que para cada $H \in K_\delta$, podemos eligir $f_H \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $f_H^{-1}(0) = H$. Sea $j(H) = f_H$. Bastará probar entonces que $|C(X, \mathbb{R})| \leq |X|^{\aleph_0}$. Para cada pareja de puntos distintos $a, b \in X$, definimos $g_{a,b} \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $g_{a,b}(a) = 0$ y $g_{a,b}(b) = 1$. Sea $\overline{\lambda} \in C(X, \mathbb{R})$ la función constante $\overline{\lambda} \equiv 1$. Podemos notar que $\mathcal{A}^*$, es una subálgebra generada por la familia $\mathcal{A} = \{\overline{\lambda}\} \cup \{g_{a,b}\colon a, b \in X, a \neq b\}$, además $\mathcal{A}^*$ satisface las hipótesis del teorema 3.0.29. Por tanto, la subálgebra $\mathcal{A}^*$ generada por $\mathcal{A}$ es densa en $C(X, \mathbb{R})$. Lo anterior nos permite afirmar que $|\mathcal{A}^*| \leq \aleph_0 \cdot |\mathcal{A}| \cdot \mathfrak{c} \leq \text{máx}\{|X|, \mathfrak{c}\}$ (ver [15]). Finalmente, como $C(X, \mathbb{R})$ es primero numerable, cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ es el límite de una sucesión en $\mathcal{A}^*$ y, por tanto, $|C(X, \mathbb{R})| \leq |X|^{\aleph_0}$. □

Antes de enunciar algunos corolarios del teorema anterior, necesitamos algunas definiciones.

**Definición 3.0.31.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es *$\sigma$-compacto* si existen compactos $A_1, A_2, \ldots$ en $X$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

**Corolario 3.0.32.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico $\sigma$-compacto de Hausdorff, con puntos $G_\delta$. Entonces $|X|_\delta \leq \mathfrak{c}$.*

*Demostración.* Sean $X_1, X_2, \ldots$ compactos en $X$ tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Sean $K, K_1, K_2, \ldots$ las familias de cerrados $G_\delta$ en $X, X_1, X_2, \ldots$, respectivamente. Como cada $X_n$ es primero numerable (por ser compacto y tener puntos $G_\delta$, ver ([36], 16 **A**. 4)) , tenemos $|X_n| \leq \mathfrak{c}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ (ver Teorema 3.0.21). Por tanto, cada $|K_n| \leq \mathfrak{c}$ (ver Teorema 3.0.30). Luego la correspondencia $K \to (K \cap X_1, K \cap X_2, \cdots)$ determina una función inyectiva de $K$ en $K_1 \times K_2 \times, \ldots$. Como $|K_1 \times K_2 \times \cdots| \leq \mathfrak{c}$, también $|K| \leq \mathfrak{c}$, o lo que es lo mismo $|X|_\delta \leq \mathfrak{c}$. □

Una función $f\colon X \to Y$ es *perfecta* si $f$ es continua, suprayectiva, cerrada y cada $f^{-1}(y)$ es compacto.

**Definición 3.0.33.** Un espacio topológico de Hausdorff $(X, \tau)$ es *pre-imagen perfecta de un espacio métrico* $Y$ (esto es, $X$ se dice *pre-metrizable*), si existe una función perfecta $f\colon X \to Y$.

**Proposición 3.0.34.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico pre-metrizable de Lindelöf, con puntos $G_\delta$ y sea $K$ la familia de conjuntos cerrados $G_\delta$ y $\sigma$-compactos de $X$. Entonces $|K| \leq \mathfrak{c}$.

*Demostración.* Por hipótesis, como $(X, \tau)$ es un espacio topológico pre-metrizable, existe un espacio metrizable $Y$ y una función perfecta $\phi$ tal que $\phi\colon X \to Y$. Como $X$ es de Lindelöf, $Y$ también lo es y, por lo tanto, $Y$ tiene base numerable. Según el Corolario 3.0.22, $|Y|_\tau \leq \mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{H}^* = \{H \subseteq X\colon H = \phi^{-1}\phi(H),\ H \text{ cerrado y } \sigma - \text{compacto}\}$. Por lo anterior podemos afirmar que $|\mathcal{H}^*| \leq |Y|_\tau \leq \mathfrak{c}$. Además, cada $K_i \in K$ es un cerrado $G_\delta$ en algún elemento de $\mathcal{H}^*$ (pues $K_i \subseteq \phi^{-1}\phi(K_i)$ y $\phi^{-1}\phi(K_i) \in \mathcal{H}^*$), para $i = 1, 2, \ldots$. Por el Corolario 3.0.32, para cada $H \in \mathcal{H}^*$ tenemos $|H|_\delta \leq \mathfrak{c}$. Por tanto, $|K| \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. $\square$

**Corolario 3.0.35.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\sigma$-compacto, pre-metrizable, hereditariamente de Lindelöf y con puntos $G_\delta$. Entonces $|X|_\delta \leq \mathfrak{c}$.*

*Demostración.* Se obtiene directamente del corolario 3.0.34. $\square$

# Conclusiones y perspectivas

Hemos dado en esta tesis una prueba alternativa del siguiente resultado:

Sí $(X, \tau)$ es un espacio topológico compacto de Hausdorff. Entonces $|X|_\delta \leq |X|^{\aleph_0}$.

El cual es el puente de unión entre el Teorema de Stone-Weierstrass y los problemas planteados en este proyecto, añadiendole condiciones al espacio, tales como la $\sigma$-compacidad, la propiedad de Lindelöf, hereditariamente de Lindelöf y la premetrizabilidad.

## Algunos problemas

En el siguiente apartado se enuncian algunos problemas, que los autores encontraron en la revisión de la literatura y en la realización de este proyecto.

Al utilizar el Teorema de Weierstrass, podemos notar en su demostración que las funciones continuas pueden ser aproximadas por polinomios. Pero no hemos explicado realmente por qué los polinomios son adecuados para aproximar funciones. En otras palabras:

¿ Cuáles son las propiedades de Polinomios que los hacen buenas aproximaciones?

¿ Hay otros conjuntos de Funciones que tienen similares propiedades de aproximación?

**Avances:** Isaacson Y Keller [24], y W. Rudin [10] tienen material interesante sobre estos temas.

# Bibliografía


[1] N. H. Abel, *Undersuchen über die Reihe* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3+\cdots$ *u.s.w.* J. für die Reine und Angewandte Math. **1**, 311-339, 1826.

[2] A. V. Arhangel'skii, *On the cardinality of bicompacta satisfying the first axiom of countability*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **187**, 1969.

[3] A. V. Arhangel'skii, *On hereditary properties*. Topology and its Applications **3**, 39-46, 1973.

[4] G. Birkhoff, *A source book in classical analysis*. Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts, 1973.

[5] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler To Weierstrass*. Springer- Verlag, New York 1986.

[6] D. K. Burke and R. E. Hodel, *The number of compact subsets of a topological space*. Proc. Amer. Math. Soc. **58**, 363-368, 1976.

[7] D. K. Burckel, *characterizations of $C(X)$ among its subalgebras*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1972.

[8] A. L. Cauchy, *Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy*. Ser. 2 Tomo **3**. Gauthier-Villars, Paris, pp. 1908-1938, 1821.

[9] P.J. Davies, *Interpolation and approximation*. Ed. Dover, 1975.

[10] R. Douglas and W. Rudin, *Approximation by inner functions*. Pacific. J. Math. 31 1969, 313-320.

[11] Engelking. R., *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[12] Engelking. R., *Cartesian product and dyadic spaces*. Fund. Math. 59 (1966), 287-304.

[13] Engelking. R., *On functions defined of cartesian product*. Fund. Math. 59 (1966),221-231.

[14] A. García-Máynez and A. Tamariz, *Topología General*. Editorial Porrúa, S. A., México, 1988.

[15] Gillman. L. y Jerison. M, *Rings of Continuous Functions*. Springer Verlag, Berlin, 1976.

[16] C. Gómez, *Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.

[17] F. B. Jones, *On the first countability axiom for locally compact Hausdorff spaces*. Colloq. Math. **7**, 33-34, 1959.

[18] I. Kaplansky, *Set theory and metric spaces*, Chelsea, New York, 1997.

[19] Kelley. J., *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[20] F. Klein, *Entwicklung der mathematik im 19ten jarhrhundert*. Springer, Berlin 1927: Chelsea, New York 1950.

[21] K. Kuratowski, *Topology*. **Vol. 1**, Academic Press, new York, 1966.

[22] Hart, K. P., Nagata J. I and Vaughan, J. E, *Encyclopedia of General Topology*. First Edition, Elsevier Science Publishers B. V, Amsterdam, 2003.

[23] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker Inc. 1984.

[24] E. Isaacson and H.B. Keller, *Analysis of numerical methods*. Dover publications, 1966.

[25] R. Murillo, *El teorema de aproximación de Weierstrass*. Misc. Mat. SMM **25**, 39-46, 1997.

[26] A. Pinkus, *Weierstrass and approximation theory*. J. Approx. Theory **107**, 1-66, 2000.

[27] J. Prolla, *Weierstrass-stone theorems for set-valued mappings*. J. Approx. Theory **36**, 1-15, 1982.

[28] P. Roy, *The cardinality of first countable spaces*. Amer. Math. Soc. **77**, No 6, 1057-1059, 1971.

[29] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*. Mc. Graw Hill, 1980.

[30] W. Rudin, *Real and complex analysis*. Mc. Graw Hill, 1987.

[31] E. Schenkman, *The Weierstrass appoximation theorem*. American Mathematical Monthly **79**, 1972.

[32] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375-481, 1937.

[33] M.H. Stone, *The generalized weierstrass approximation theorem*. Mathematics Magazin. 21**5**, 237-254, 1948.

[34] V. Tkachuk., *Curso Básico de Topología General*, Libros de texto, manuales de prácticas y antologias, Editorial UAM., México, 1999.

[35] K. Weierstrass, *Mathematische werke von Karl Weierstrass*. **Vol. 7**. Mayer and Muller, Berlin 1894-1927, 1885.

[36] S. Willard, *General topology*. Addison-Wesley, 1970.