LA COMPACIDAD DE UN ESPACIO COCIENTE CON ABIERTOS SATURADOS

JACKELIN DEL CARMEN CHACÓN ORTEGA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA DE INDIAS, COLOMBIA
2015

LA COMPACIDAD DE UN ESPACIO COCIENTE CON ABIERTOS SATURADOS

JACKELIN DEL CARMEN CHACÓN ORTEGA

ASESOR:
JULIO CESÁR HERNÁNDEZ ARZUSA.

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TITULO DE MATEMATICO

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
2015

A mis padres
Carmen Ortega e Irmen Chacón
Les agradezco mucho por todos los sacrificios que han hecho por mi.
A mi hermano Duwbla y todas las personas perseverantes como él.
Hermano de ti aprendí a no rendirme.

Agradecimientos

Después de culminar este trabajo de grado me complace escribir esta pagina para nombrar a todos aquellos seres y entidades con los que me siento agradecido y el porque. Estos seres son:

Dios porque me dio las fuerzas para no desmayar cuando las situaciones económicas o familiares se complicaban.

Mi familia y mi actual novio George Malambo Acosta quienes velarón siempre por darme los recursos y cariño necesario para terminar mi carrera, en especial mi madre Carmen de Jesús Ortega Chamorro y mi hermano Duwbla de Jesús Chaón Ortega quienes fuerón mi apoyo económico para hacer posible esta meta.

Mis profesores de primaria del colegio José María Córdoba quienes me dieron una formación con valores y con quienes descubrí por primera vez el gusto por las matemáticas gracias a mi profesora la difunta Aura Rubiano Morales y la profesora de español Isabel Cristina Arrieta.

Mis profesores de bachillerato del Colegio INEM José Manuel Rodríguez Torices y todo su cuerpo directivo de quienes aprendí que por una mejor sociedad hay que luchar hay que vencer, y que en el campo y en la ciudad la abundancia hemos de ver si al estudio y al trabajo nos sabemos ofrecer(estrofas del himno de nuestro colegio).

Todos mis profesores de matemática de la Universidad de Cartagena quienes transmitierón sus conocimientos hacia mi y con los cuales hoy puedo obtener mi titulo. En especial a los profesores Elias Salazar Buelvas por la dedicación que mostraba en sus clases, Humberto Pérez quien más de una vez tubo que sentarse a mi lado para enseñarme a programar e incluso gracias a su insistencia hoy puedo entregar hecha por mi misma este trabajo y al profesor Julio Cesar Hernándes Arsuza el tutor del mismo.

Los profesores y todo el cuerpo del departamento física de la Universidad de Cartagena con quienes labore mientras pagaba mis horas de plan padrino, teniendo así la oportunidad de tomar gusto a la fisíca aun cuando la perdí dos veces y aprendí que trabajar en equipo es la mejor opción cuando se busca el bienestar de nuestra sociedad.

La Universidad de Cartagena institución que con un excelente personal facilitarón mi estancia en la misma hasta formarme como una profesional integra capaz de servir a esta sociedad y avanzar en ella sin necesidad de lastimar a mi prójimo.

Finalmente agradezco a todas esas personas que sabiéndolo o ignorándolo ayudarón a que hoy tenga este objetivo logrado y esta meta alcanzada.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está basado en el estudio de la propiedad de compacidad de los espacios topológicos , esta propiedad consiste en darle a dichos espacios que la satisfagan una estructura similar a la que poseen los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$.

En los cursos de topología dictados durante el pregrado se relaciona la compacidad con las funciones continuas en espacios topológicos, de tal manera que mediante teoremas se permite garantizar la compacidad de la imagen de la función si el dominio de esta es un espacio topológico compacto. Por lo tanto si la imagen de la función es el espacio topológico cociente determinado por una relación de equivalencia cualquiera entonces este espacio es compacto, pero si el espacio topológico cociente es compacto no implica que el dominio de dicha función sea compacto. Es aquí donde juegan un papel importante los conjuntos saturados.

Debido a la necesidad de que los conjuntos abiertos sean saturados, se establece una relación de equivalencia para la cual sus conjuntos abiertos cumplen dicha condición y así lograr el objetivo de obtener la compacidad del dominio de la función continua si el espacio topológico cociente es compacto.

El desarrollo del trabajo se realiza en dos capítulos, el primero inicia recordando algunas definiciones básicas de la teoría de conjunto, como lo son relaciones de equivalencia, clases de equivalencia las cuales permiten establecer la formación de conjuntos cocientes ; también se incluyen alguna definiciones de topología y teoremas.

En el segundo capitulo se define la topología cociente y se establece una relación de equivalencia para obtener conjuntos abiertos saturados en el espacio topológico y así lograr el objetivo del trabajo, ya mencionado en el párrafo tres.

Capítulo 2

Definiciones

2.1 Topología

Definición 2.1. *Una* ***topología*** τ *sobre un conjunto* X *es una colección de subconjuntos de* X *con las siguientes propiedades*

i) ϕ *y* X *están en* τ

ii) La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ *está en* τ

iii) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ *están en* τ

Ejemplo 2.1. *Dado un conjunto* X *la toplogía definida por* $\tau = \{\phi, X\}$ *se le denomina* ***toplogía indiscreta****.*

Definición 2.2. *El par ordenado* (X, τ) *formado por un conjunto* X *y una topoloía* τ *sobre* X *se le denomina* ***espacio topólogico****.*

Cuando no haya peligro de confusión y la topología este clara, escribiremos X para referirnos al espacio topológico (X, τ)

Definición 2.3. *Si* X *es un conjunto con un espacio topólogico* τ*, diremos que* U *es un* ***subconjunto abierto*** *de* X *si* U *pertenece a la colección* τ*.*

Definición 2.4. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $x \in X$ *y* $V \subseteq X$*.* V *se dice una* ***vecindad*** *de* x *y notamos* V_x *si existe* $U \in \tau$ *tal que* $x \in U \subseteq V$*. Si ademas* V *es abierto se dice una vecindad abierta de* x *en* X*.*

Definición 2.5. *Sean* (X, τ) *un espacio topólogico,* $A \subseteq X y$ $p \in X$. p *se dice un* ***punto de adherencia*** *de* A *si toda vecindad de* p *intercepta a* A *, es decir* p *es un punto de adherencia si para toda* V_p *se cumple* $V_p \cap A \neq \phi$

2.2 Función continua

Definición 2.6. *Sean* X *e* Y *espacios topológicos, una función* f *se dice* ***continua*** *si dado* V *abierto en* Y, $f^{-1}(V)$ *es abierto en* X.

Definición 2.7. *Sea* $f : A \longrightarrow B$ *una función y* C *una subclase de* A*, la clase* $\{y \in B|(\exists x)[x \in C \wedge y = f(x)\}$ *se le denomina* ***imagen directa*** *de* C *bajo* f

Definición 2.8. *Sea* $f : A \longrightarrow B$ *una función y* D *una subclase de* B*, la clase* $f^{-1} = \{x|[x \in A \wedge f(x) \in D\}]$ *se le denomina* ***imagen inversa*** *de* D *bajo* f

Definición 2.9. *Decimos que una función* $f : X \longrightarrow Y$ *es abierta, si la imagen de un subconjunto abierto* $A \in X$ *es abierta en* Y

2.3 Espacios compactos

Definición 2.10. *Dado un espacio* (X, τ) *y* $A \subseteq X$ *decimos que una colección* $\zeta = \{U_i\}_{i \in I}$ *de abiertos de* X *es un* ***cubrimiento abierto*** *de* A *si*

$$A \subseteq \bigcup \zeta = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Si existe $J \subseteq I$ *tal que* $\{U_j\}j \in J$ *es también cubrimiento de* A*, a la familia* $\{U_j\}_{j \in J}$ *la llamamos* ***subcubrimiento*** *de* ζ

Definición 2.11. *Un espacio* (X, τ) *se dice* ***compacto*** *si cada cubrimiento abierto de* X *admite un subcubrimiento finito.*

Teorema 2.1. *Sea* $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_y)$ *sobre y continua. Si* X *es compacto entonces* Y *es compacto*

Demostración. *Sea* $X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua, y sea* X *un espacio compacto. Veamos que* $f(X)$ *es compacto, es decir que para cada cubrimiento abierto de* $f(X)$ *podemos extraer una subcolección finita que también cubre a* $f(X)$.

En efecto, sea $\mathscr{A}$ *un cubrimiento para* $f(X)$ *formado por conjuntos abiertos de* Y. *Como la aplicación* f *es continua entonces por definición 2.2 la* $f^{-1}(A)$ *de cada conjunto abierto* $A \subseteq \mathscr{A}$ *es abierta en* X. *Así el conjunto*

$$\{f^{-1}(A)|A \subseteq \mathscr{A}\}$$

forma un cubrimiento abierto para X *y dado a que* X *es compacto podemos extraer de este cubrimiento abierto una subcolección finita*

$$f^{-1}(A_1) \cdots f^{-1}(A_1)$$

que también cubra a X *, por lo tanto los conjuntos* $A_1 \cdots A_n$ *cubren a* $f(X)$

2.4 Topología final

Sean $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ una familia de espacios topológicos, A un conjunto y $\{f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow A\}_{\alpha \in J}$ una familia de funciones.

El propósito es dotar a A de la mejor topología posible que haga que cada f_α sea continua. Si le ponemos a A la topología indiscreta el objetivo es conseguido, pero tal vez es posible ponerle más abiertos y que estas sigan siendo continuas.

Proposición 2.1. *Sean* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ *una familia de espacios topológicos,* A *un conjunto y* $\{f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow A\}_{\alpha \in J}$ *una familia de funciones.*

$$\tau_A = \{U \subseteq A : f_\alpha^{-1}(U) \quad \textit{es abierto en} \quad X_\alpha \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in I\}$$

Es una topología sobre A, *que hace que cada una de las* f_α *sean continuas. Ademas es la topología mas fina que hace a cada* f_α *continua.*

Demostración. *Veamos que para cada* $\alpha \in J$, τ_A *satisface la definición definición 2.1 .*

i) *Veamos que* ϕ *y* A *están en* τ_A
Sea $\phi \subseteq A$*, dado que* $f_\alpha^{-1}(\phi) = \phi$ *y* $\phi \in \tau_\alpha$ *para cada* $\alpha \in J$ *entones* $\phi \in \tau_A$.
Como $f^{-1}(A) = X_\alpha$ *para cada* $\alpha \in J$ *y ademas* $X_\alpha \in \tau_\alpha$ *entonces* $A \in \tau_A$.

ii) *Sea* $\{B_i\}_{i\in I}$ *una colección arbitraria de elementos de* τ_A*, veamos que* $\bigcup_{i\in I} B_i \in \tau_A$ *o equivalentemente* $f_\alpha^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \in \tau_\alpha$ *para cada* $\alpha \in J$ *e* $i \in I$.
En efecto como para cada $B_i \in \tau_A$*, se tiene que* $f_\alpha^{-1}(A_i) \in \tau_\alpha$ *para todo* $\alpha \in J$ *e* $i \in I$*, y dado que* τ_α *es una topología se tiene que* $\bigcup_{i\in I} f_\alpha^{-1}(B_i) \in \tau_\alpha$ *y por propiedades de imagen inversa* $f_\alpha^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f_\alpha^{-1}(B_i)$ *por lo que se concluye que* $\bigcup_{i\in I} B_i \in \tau_A$.

iii) *Sean* B_1 *y* B_2 *elementos de* τ_A *veamos que* $B_1 \cap B_2 \in \tau_A$ *o equivalentemente* $f_\alpha^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau_\alpha$ *para* $\alpha \in J$.
En efecto sean B_1 *y* B_2 *dos elementos cualesquiera de* τ_A *entonces* $f_\alpha^{-1}(B_1) \in \tau_\alpha$ *y* $f_\alpha^{-1}(B_2) \in \tau_\alpha$*, luego como* τ_α *son topologías entonces* $f_\alpha^{-1}(B_1) \cap f_\alpha^{-1}(B_2) \in \tau_\alpha$ *y dado que* $f_\alpha^{-1}(B_1 \cap B_2) = f_\alpha^{-1}(B_1) \cap f_\alpha^{-1}(B_2) \in \tau_\alpha$ *entonces para cada* $\alpha \in J$ $f_\alpha^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau_\alpha$*, así* $B_1 \cap B_2 \in \tau_A$.

Por i, ii, iii *se concluye que* τ_A *es una topología.*

Veamos ahora que τ_A *hace a cada* f_α *continua para cada* $\alpha \in J$.

En efecto, Sean (X, τ) *y* (A, τ_A) *espacios topológicos, y sea* $f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \longrightarrow (A, \tau_A)$*, además* $B \subseteq A$*, tal que* B *es abierto en* A*, es decir* $B \in \tau_A$ *de donde se deduce por definición de* τ_A *que* $f_\alpha^{-1}(B) \in \tau_\alpha$ *lo que es equivalente a decir que* $f^{-1}(B)$ *es abierto en* X.

Así para el conjunto $B \subseteq A$ *se tiene que* $f_\alpha^{-1}(B)$ *es abierto en* X*, lo que implica que* f_α *es continua para cada* $\alpha \in J$

2.5 Topología cociente

Las relaciones de equivalencia permiten agrupar en un conjunto elementos que posean una caracterisca común especifica y así formar subconjuntos llamados clases de equivalencia.

Definición 2.12. *Sea X un conjunto y sean a y b elementos de X, si a esta relacionado con b escribiremos $a \sim b$. Una **relación de equivalencia** en X es una relación que satisface las siguientes propiedades:*

i) Reflexiva: $a \sim a$ para todo $a \in X$

ii) Simetría: Si $a \sim b$ entonces $b \sim a$

iii) Transitiva: Si $a \sim b$ y $b \sim c$ entonces $a \sim c$

Definición 2.13. *Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Si $G \subseteq H$ decimos que H es mas fina que G*

Definición 2.14. *Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X y un elemento x de X, definimos un cierto subconjunto A de X, llamado **clase de equivalencia** determinada por x mediante la ecuación*

$$[x] = \{y \in X | y \sim x\}$$

Definición 2.15. *Se llama **Conjunto cociente** al conjunto de toda las clases de equivalencia determinadas por $\sim$, este conjunto se denota por $X/\sim$.*

$$X/\sim = \{[x] | x \in X\}$$

.

Definición 2.16. *Definamos $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ por $x \longrightarrow [x]$, a π se le llama **aplicación cociente**.*

Definición 2.17. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\pi : X \to Y$ una función sobreyectiva y $\sim$ una relación de equivalencia en X, la topología final sobre $X/\sim$ inducida por π se le llama **topología cociente** de $X/\sim$.*

Capítulo 3

Compacidad de un espacio cociente

Con las definiciones y teoremas del capitulo anterior procederemos a trabajar el problema planteado en este trabajo. Iniciaremos con la caracterización de las relaciones de equivalencia sobre un espacio topológico para los cuales los abiertos son saturados.

Sea (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Consideremos el espacio cociente X/R con la topología cociente τ/R.

$$\tau/R = \{A \subseteq X/R | \pi^{-1}(A) \in \tau\}$$

Donde $\pi : X \longrightarrow X/R : f(x) = \overline{x}$ es la función canónica al cociente. Por la demostración 2.4 podemos afirmar que τ/R es una topología y además que la función π es continua.

Definición 3.1. *En el espacio (X, τ) definimos la siguiente relación*

$$x \sim_\tau y \Longleftrightarrow (x \in adh_\tau\{y\} \wedge y \in adh_\tau\{x\})$$

donde $adh_\tau Z$ designa la adherencia de Z con respecto a la topoloía τ. Cuando no haya lugar a confusiones notaremos simplemente por $\sim$ y la llamaremos relación $\mathbf{T_0} \in (X, \tau)$.

Para la definición anterior verifiquemos que $\mathbf{T_0}$ es una relación de equivalencia

Demostración. *Debemos verificar que la relación $\mathbf{T_0}$ satisface las condiciones de la definición 2.12*

i *Reflexiva:* $x \sim_\tau x$ *para cualquier* x *en* X. *En efecto, sea* x *un elemento cualquiera de* X , $x \sim_\tau x \iff (x \in adh_\tau\{x\} \wedge x \in adh_\tau\{x\}) \iff (V_x \cap \{x\} \neq \phi \wedge V_x \cap \{x\} \neq \phi)$. *Dado a que* $V_x \cap \{x\} = \{x\}$ *entonces* $x \in adh_\tau\{x\}$, *por lo tanto* $\mathbf{T_0}$ *es reflexiva*

ii *Simetría: Si* $x \sim_\tau y$ *entonces* $y \sim_\tau x$.
En efecto:

$$\begin{aligned} x \sim_\tau y &\iff (x \in adh_\tau\{y\} \wedge y \in adh_\tau\{x\}) \\ &\iff (y \in adh_\tau\{x\} \wedge x \in adh_\tau\{y\}) \\ &\iff y \sim_\tau x \end{aligned}$$

Como $x \sim_\tau y$ *e* $y \sim_\tau x$ *entonces* $\mathbf{T_0}$ *es simétrica*

iii *Transitiva: Si* $x \sim_\tau y$ *e* $y \sim_\tau z$ *entonces* $x \sim_\tau z$. *Es decir que si* $(x \in adh_\tau\{y\} \wedge y \in adh_\tau\{x\})$ *e* $(y \in adh_\tau\{z\} \wedge z \in adh_\tau\{y\})$ *entonces* $(x \in adh_\tau\{z\} \wedge z \in adh_\tau\{x\})$ *lo cual es equivalente a decir que si para* $(V_x \cap \{y\} \neq \phi \wedge V_y \cap \{x\} \neq \phi)$ *y* $(V_y \cap \{z\} \neq \phi \wedge V_z \cap \{y\} \neq \phi)$ *se obtiene que* $(V_x \cap \{z\} \neq \phi \wedge V_z \cap \{x\} \neq \phi)$

En efecto, sea $x \sim_\tau y$ *e* $y \sim_\tau z$ *entonces* $(x \in adh_\tau\{y\} \wedge y \in adh_\tau\{x\})$ *e* $(y \in adh_\tau\{z\} \wedge z \in adh_\tau\{y\})$. *Puesto que* $x \in adh_\tau\{y\}$ *se tiene que* $(V_x \cap \{y\}) \neq \phi$ *así* $V_x \cap \{y\} = \{y\}$ *por lo cual* $y \in V_x$. *Ahora como* V_x *contiene a* y, *por lo tanto también es una vecindad de* y . *Ahora como* $y \in adh_\tau\{z\}$ *entonces cualquier vecindad de* y *interceptada con* z *es no disyunta, en particular* V_x. *Así* $(V_x \cap \{z\}) \neq \phi$. *Con lo que resta probar que* $(V_z \cap \{x\}) \neq \phi$.

Dado a que $z \in adh_\tau\{y\}$ *se cumple que* $(V_z \cap \{y\}) \neq \phi$ *así* $V_z \cap \{y\} = \{y\}$ *por lo tanto* $y \in V_z$. *Ahora como* V_z *contiene a* y *por lo tanto también es* *una vecindad de* y *. Dado que* $y \in adh_\tau\{x\}$ *entonces cualquier vecindad de* y *interceptada con* x *es no disyunta, en particular* V_z*. Así* $(V_z \cap \{x\}) \neq \phi$*.*

De lo demostrado en los dos párrafos anteriores se tiene que si $x \sim_\tau y$ *e* $y \sim_\tau z$ *entonces* $(V_x \cap \{z\} \neq \phi)$ *y* $(V_z \cap \{x\}) \neq \phi)$ *lo que es equivalente a decir que* $(x \in adh_\tau\{z\} \wedge z \in adh_\tau\{x\})$ *concluyéndose así* $x \sim_\tau z$ *por lo cual la relación* $\mathbf{T_0}$ *es transitiva.*

Por i, ii *e* iii *podemos afirmar que* $\mathbf{T_0}$ *es una relación de equivalencia*

Definición 3.2. *Sean* (X, τ)*,* $(X/R, \tau/R)$ *espacios topológicos, y sea* $\pi : (X, \tau) \longrightarrow (X/R, \tau/R)$ *la función canónica al cociente. Decimos que un subconjunto* B *de* X *es* $\mathbf{R-}$**saturado** *ó simplemente* ***saturado*** *si* $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ *es decir,*

$$(\forall y \in B)(yRx \Longrightarrow x \in B)$$

Proposición 3.1. *Si* $\tau \in Top(X)$ *(la clase de las topologías) sobre* X *entonces los abiertos de* τ *son* $\sim$ *saturados.*

Demostración. *Sean* $\tau \in Top(X)$ *,* $\pi : X \to X/R : \pi(x) = \overline{x}$ *y* A *un conjunto cualquiera, tal que* $A \subseteq X$ *y* $A \in \tau$ *veamos que* A *es saturado, es decir que* $\pi^{-1}\pi(A) = A$*, esto es* $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$ *y* $\pi^{-1}(\pi(A)) \subseteq A$*.*

i) Veamos que $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$*, en efecto, sea* $A \subseteq X/R$ *y* $x \in A$ *entonces* $\pi(x) \in \pi(A)$*, así por la definición 2.8* $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$

ii) Observemos que $\pi^{-1}(\pi(A)) \subseteq A$*, sea* $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$ *y* $D = \pi(A) \subseteq X/R$*, entonces por definición 2.8* $\pi(x) \in \pi(A)$*, así por la definición 2.7 se tiene que* $f(x) = f(a)$ *para algún* $a \in A$ *, esto es* $\overline{a} = \overline{x}$*, así* $x \sim a$ *y en consecuencia* $a \in adh_\tau\{x\}$*, luego por definición 2.5 para toda vecindad* V_a *se cumple* $V_a \cap \{x\} \neq \phi$*, por lo tanto* $x \in V_a$*; dado que* $a \in A$ *y* A *es un conjunto abierto entonces en particular* A *es una vecindad de* a *por lo que se concluye que* $x \in A$

Por i *e* ii *se cumple que para* $\tau \in Top(X)$ *,* $\pi : X \to X/R : \pi(x) = \overline{x}$ *y* A *un conjunto cualquiera, tal que* $A \subseteq X$ *y* $A \in \tau$*, que* A *es saturado, es decir que* $\pi^{-1}\pi(A) = A$

Proposición 3.2. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $\sim$ *la relación ya definida y* R *una relación de equivalencia sobre* X*. Los abiertos de* X *son* $R-$ *saturados si y sólo si la relación* T_0 *es más fina que* R*.*

Demostración. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $\sim$ *la relación ya definida y* R *una relación de equivalencia sobre* X*. Veamos que si los abiertos de* X *son* $R-$ *saturados entonces la relación* T_0 *es más fina que* R*.*

Sea A *un conjunto cualquiera en* τ *tal que* A *es* $R-$ *saturado, es decir que para cualquier* $x \in A$ *e* $y \in X$ *si* xRy *entonces* $y \in A$*. Supongamos que* $x \nsim y$ *entonces* $(x \notin adh_\tau\{y\})$ *o* $y \notin adh_\tau\{x\}$*, si* $x \notin adh_\tau\{y\}$ *entonces existe un conjunto abierto* A *para el cual* $x \in A$ *y al interceptarlo con* $\{y\}$ *es vació, así* $y \notin A$ *lo cual contradice el hecho de que* A *es* $R-$ *saturado. Por lo tanto* $x \sim y$ *y* $R \subseteq T_0$*.*

Veamos que si T_0 *es más fina que* R *entonces los abiertos de* X *son* $R-$ *saturados.*

Sea $A \in \tau$ *y sean* R*,* T_0 *relaciones de equivalencia en* X*, tales que* $R \subseteq T_0$*. Sea* $(x \in A \wedge xRy)$ *entonces para todo* xRy *en* T_0 *se cumple* $(x \in A \wedge x \sim y)$ *dado que* T_0 *es mas fina que* R*. Como para* $x \in A$ *e* $y \in X$ *se cumple que* $x \sim y$ *entonces por la proposición 3.2 se cumple que el conjunto abierto* A *es* $\sim$ *saturado, por tanto* $y \in A$ *. Así se tiene para todo* $x \in A$*,* $y \in X$ *tales que* xRy *se cumple que* $y \in A$ *lo que demuestra que* A *es* $R-$ *saturado.*

3.1 Compacidad de los espacios cocientes con la relación T_0

Es de saberse que si X es compacto y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua sobreyectiva por el teorema 2.3 entonces Y es compacto. Por tanto si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces la continuidad de la función canónica garantiza la compacidad del espacio cociente, siempre que X sea compacto.

El siguiente teorema da una condición para la compacidad de X a partir de la compacidad del espacio cociente.

Teorema 3.1. *Sean (x, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X. Si los abiertos de (X, τ) son saturados, entonces (X, τ) es compacto si y solo si $(X/R, \tau/R)$ es compacto.*

Demostración. *Supongamos que (X, τ) es compacto y veamos que si los abiertos de (X, τ) son saturados entonces $(X/R, \tau/R)$ es compacto.*

Sea $\pi : X \longrightarrow X/R : \pi(x) = \overline{x}$, donde X es compacto, dado a que π es una función continua se deduce del proposición 2.3 que $(\pi(X) = X/R)$ es compacto. Esto es que el espacio $(X/R, \tau/R)$ es compacto.

Veamos que si $(X/R, \tau/R)$ es compacto y los abiertos de (X, τ) son saturados, entonces (X, τ) es compacto.

sea A un conjunto saturado cualquiera, tal que $A \in \tau$ y sea $(X/\tau, \tau/R)$ un espacio compacto. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X, esto es $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.
Ahora bien, para X/R se tiene que

$$X/R = \pi(X) = \pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi(A_i)$$

donde $\pi(A_i)$ es abierta en X/R. Puesto que $\pi(A_i) \in \tau/R$ ya que por el hecho de que A_i es saturado entonces $\pi^{-1}(\pi(A_i)) = A_i$ y dado a que $A_i \in \tau$ se cumple que $\pi^{-1}(\pi(A_i)) \in \tau$.

Así la colección $\{\pi^{-1}(\pi(A_i))\}_{i\in I}$ forma un cubrimiento abierto para el espacio X/R y como esté es compacto entonces por definición 2.11 existe una subcolección finita, por ejemplo $\{i_1, \cdots i_n\} \subseteq I$ tal que $X/R = \bigcup_{j=1}^{n} \pi(A_{i_j})$.

Veamos ahora que este subcolección finita de $\pi(X)$ es también una subcolección para $\pi^{-1}(X/R) = X$, esto es que $X = X/R = \bigcup_{j=1}^{n} \pi(A_{i_j})$, en efecto $X = \pi^{-1}(X/R) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \pi(A_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \pi^{-1}(\pi(A_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$ dado a que los A_{i_j} son saturados. Con lo que se ha obtenido para el cubrimiento abierto de X una subcolección finita que también cubre a X, así el espacio (X, τ) es compacto.

De la demostración del teorema anterior se tiene el siguiente corolario

Corolario 3.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X, tal que la relación T_0 es más fina que R, entonces $\pi : (X, \tau) \longrightarrow (X/R, \tau/R)$ es abierta.*

En efecto, sea $A \subseteq X$ tal que $A \in \tau$ y sea $R \subseteq T_0$ entonces por proposición 3.2 A es saturado, así $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ donde $A \in \tau$, por lo que se tiene que $\pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau$ para $\pi(A) \subseteq X/R$ así $\pi(A) \in \tau/R$ y por definición 2.3 $\pi(A)$ es abierta en $(X/R, \tau/R)$. Con lo que se tiene que para $A \subseteq R$ tal que A es abierto en X la imagen $\pi(A)$ es abierta en $(X/R, \tau/R)$ por lo tanto π es abierta.

Bibliografía

[1] Acosta, L. y Rubio, M. (2006). Relaciones de equivalencia con abiertos saturados, *Matemáticas enseñanza universitaria*, *XIV(1)*. 20, 28.

[2] Macho, M. (2002). *topología general.* Managua. Recuperado de http:/www.ehu.es ~mtwmastm.

[3] Munkres, J. (2002). *Topología segunda edición*, Madrid: Pearson Educación .

[4] Rubiano, G.N. (2010). *topología general un primer curso.* Bogota, Colombia: Editorial UN.

INDICE