

**MODELO NUMÉRICO DE LOS CAMPOS SONOROS URBANOS
MEDIANTE UN PROCESO DE DIFUSIÓN**

**Trabajo de Grado Presentado por
Victor Manuel Cueto Torrenegra**

**título obtenido
Matemático**

**Asesor
Ph.D Edgar Quiñones Bolaños**

**Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Matemáticas**

Cartagena de Indias D. T. y C.

Noviembre de 2012

Dedicado a:

Dios

Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

*y a **Mis Padres***

Victor Manuel Cueto Alvarez y Eudanis Torrenegra Vega que con su gran esfuerzo, me han apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero mas que nada por su gran amor, hicieron este sueño posible.

Índice general

Introducción	iv
1. Conceptos Preliminares	1
1.1. Métodos numéricos de diferencias finitas	1
1.2. Modelo de Difusión	4
2. Implementación numérica al modelo de difusión	9
2.1. Geometria y malla	9
2.2. Discretización de la derivada espacial de la densidad de energía	11
2.3. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos interiores	14
2.3.1. Difusión en estado estacionario	14
2.3.2. Estado de difusión variable en el tiempo	16
2.4. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos en las fachadas de los edificios	19
2.4.1. Absorción por la fachada de la construcción	19
2.4.2. Absorción por la esquina externa de la construcción	22
2.4.3. Absorción por la esquina interna de la construcción	24
2.5. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos en un cruce de la calle . .	27
3. Ejemplo	31
Conclusión	40
Anexos	41
Bibliografía	44

Introducción

El ruido se puede definir como un sonido molesto e intempestivo que puede producir efectos fisiológicos y psicológicos no deseados en una persona o grupo. Aunque este problema no es nada nuevo, los niveles de ruido en la actualidad siguen aumentando considerablemente debido en gran parte al aumento de las actividades de las personas, no solo en las zonas rurales, sino también en las zonas urbanas. De hecho, el aumento espectacular de los medios de transporte y su utilización han originado un incremento muy importante de los ruidos ambientales. Como consecuencia del incremento de estos niveles de ruido, cada vez más preocupantes, y de la también creciente conciencia ciudadana sobre las molestias que causa, el ruido se considera como uno de los factores más importantes de la disminución de la calidad de vida y el bienestar en las ciudades. Es así, como la exposición al ruido ambiental es causa de preocupación (por las graves molestias que origina, por sus efectos sobre la salud y por las consecuencias psicológicas y sociales). Por tales motivos, es que resulta de mucha importancia el estudio de la acústica urbana, con el fin de analizar y controlar este fenómeno. Y para tal hecho, resulta muy conveniente la utilización de métodos y modelos matemáticos de predicción que consideren todos los efectos que el ruido pueda ocasionar, ya que en la actualidad se cuenta con una gran cantidad de poder de computación bajo la punta de los dedos y por eso es muy importante comprender la naturaleza física del problema e interpretar los resultados.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

En este capítulo se tratarán aquellos conceptos que servirán como herramientas básicas para el desarrollo del presente trabajo. Pensando en la buena comprensión por parte del lector trabajaremos los conceptos de ecuacion de difusion y metodos numéricos de diferencias finitas.

1.1. Métodos numéricos de diferencias finitas

En la búsqueda de una descripción cualitativa de un determinado fenómeno físico, por lo general se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, válidas para determinada región (o dominio), e imponer sobre dicho sistema condiciones de borde e iniciales apropiadas. En esta etapa, el modelo matemático está completo, y es aquí donde aparece la mayor dificultad, dado que solamente la forma más simple de ecuaciones, con fronteras geoméricamente triviales es capaz de ser resuelta en forma exacta con los métodos matemáticos disponibles. Las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes son uno de los pocos ejemplos para los cuales se dispone de procedimientos matemáticos clásicos de solución. Con el fin de evitar tales dificultades y lograr resolver el problema con la ayuda de computadoras, es necesario presentar el problema de una manera puramente algebraica. Mediante el proceso de discretización, el conjunto infinito de números que representan la función o funciones incógnitas en el continuo es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita, y este proceso requiere alguna forma de aproximación. Entre las diferentes formas de discretización posibles (elementos finitos, volúmenes finitos, etc.), una de las más simples es mediante el Método de Diferencias Finitas.

Aproximaciones polinómicas

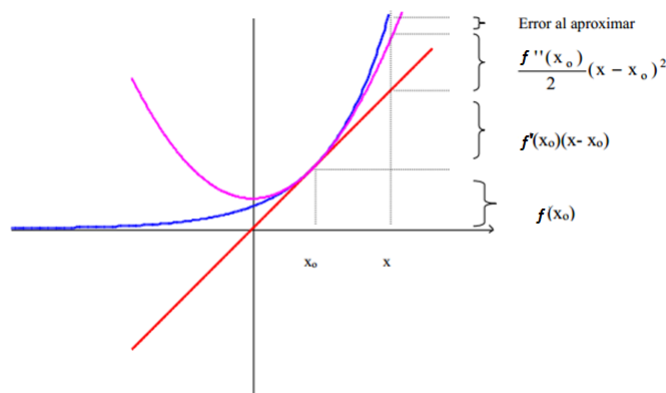


Figura 1.1: aproximaciones polinómicas.

La técnica fundamental para los cálculos numéricos en diferencias finitas se basa en las aproximaciones polinómicas a $f(x)$ cerca de $x = x_0$. Sea $x = \Delta x$, es decir, $\Delta x = x - x_0$, elegiríamos $f(x_0)$ como tal constante. Una aproximación mejor a $f(x)$ se obtiene mediante su recta tangente en $x = x_0$ (figura 1.1)

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx}(x_0),$$

una aproximación lineal (un polinomio de primer grado). Podemos también considerar una aproximación cuadrática a $f(x)$,

$$f(x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0)/2!,$$

de manera que el valor de la función, y de su primera y segunda derivadas en $x = x_0$, coincidan con los de $f(x)$. Cada una de estas aproximaciones polinómicas a $f(x)$ es más precisa a medida que aumentamos el grado, si x está suficientemente cerca de x_0 (es decir, si Δx es pequeño).

Error de truncamiento

en estas aproximaciones polinómicas se obtiene directamente una fórmula del error a partir de la expresión

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

conocida como **serie de Taylor con resto**. El resto R_n , también es llamado **error de truncamiento**, tiene una forma similar al término $n + 1$ de la serie, pero está evaluado en un punto intermedio, usualmente desconocido:

$$R_n = \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}), \quad (1.1)$$

donde $x_0 < \xi_{n+1} < x = x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1. El error en la aproximación por la tangente está dado en (1.1) con $n = 1$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2) \quad (1.2)$$

fórmula que conocemos como **teorema del valor medio extendido**. Si Δx es pequeño, entonces ξ_2 está contenido en un intervalo pequeño y, suponiendo que $\frac{d^2 f}{dx^2}$ es continua, el error de truncamiento es aproximadamente

$$R \approx \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Como usualmente suponemos que $\frac{d^2 f}{dx^2}$ está acotada, $\left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| < M$, el error de truncamiento es "del orden de delta-x al cuadrado", es decir,

$|R| < C(\Delta x)^2$, con $C = M/2$, lo que denotamos por $R = O((\Delta x)^2)$.

Aproximaciones de la primera derivada

Usando la serie de Taylor, podemos aproximar las derivadas de varias formas. Por ejemplo, a partir de (1.2):

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2) \quad (1.3)$$

Introducimos entonces una aproximación por diferencias finitas, la aproximación por **diferencias progresivas** a df/dx :

$$\frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

Esta expresión es muy parecida a la definición de derivada. Aquí utilizamos una diferencia progresiva, pero no tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Como (1.3) es válida para

todo Δx , podemos sustituir Δx por $-\Delta x$ y obtener la aproximación por **diferencias retrógradas** a df/dx ,

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{\xi}_2)$$

de donde:

$$\frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.5)$$

1.2. Modelo de Difusión

En acústica de salas, el campo de sonido es generalmente modelado por las partículas de sonido que tienen la misma energía constante y se propagan en líneas rectas golpeando las paredes u objetos de dispersión. En consecuencia, este proceso puede ser fácilmente comparado con el movimiento de una partícula en un gas. En trabajos recientes [6,8] se ha desarrollado una teoría de la difusión para modelar los campos sonoros en las habitaciones y en las calles con límites de reflexión difuso, a través de esta analogía. Se demostró que el flujo de energía de tal espacio J por unidad de superficie y tiempo sigue una ecuación gradiente de difusión:

$$J = -D \text{grad} w \quad (1.6)$$

donde w es la densidad de energía de sonido y D es el coeficiente de difusión del recinto. Esta ecuación es muy importante ya que permite una energía de sonido no uniforme en cajas, y por lo tanto un flujo de energía dentro de los límites absorbentes.

Ecuación de Difusión

Obtención física de la ecuación diferencial parcial

Se considera la concentración de un contaminante en una región que por simplicidad se seleccionó de una dimensión, por ejemplo, la región unidimensional podría ser un río largo y angosto en el que se supone que la concentración de contaminante es uniforme al cruzar el río, pero puede variar significativamente corriente arriba y corriente abajo, quizá debido a fuentes poderosas de contaminante en lugares específicos. Sea x la distancia a lo largo del río. Se supone que el área de una sección transversal es una constante A . Se introduce la variable $w(x, t)$ la concentración del contaminante (medida, por ejemplo en gramos por litro) en la posición x en el tiempo t . Aunque este caso representa un problema físico en el espacio real de tres dimensiones, se le da el nombre de unidimensional porque la variable w depende solo de la variable de espacio x . Inicialmente, se está suponiendo que el contaminante se dispersa por difusión pero no por transporte. Esto es, en realidad si tiene un lago o un depósito.

Una manera de establecer la ecuación diferencial parcial que modela el cambio en el nivel de contaminante es considerar la manera en que cambia la cantidad de contaminante a través del tiempo en una sección angosta del río, la región entre x y $x + \Delta x$. Para ser angosta, Δx debe ser pequeño. El volumen de esta región angosta es $A\Delta x$. Como la región es angosta la concentración es aproximadamente constante en esa región. La cantidad de contaminante en la región se puede aproximar con exactitud mediante la concentración w en el punto (x, t) de esta región multiplicado por el volumen $A\Delta x$:

$$\text{cantidad de contaminante en la región angosta} = w(x, t)A\Delta x$$

Dicha cantidad cambia como resultado de la entrada y salida de contaminantes a través de las fronteras de la región angosta (x , $x + \Delta x$) y tal vez como resultado de las fuentes de contaminación en la región. Así, la ecuación en palabras es:

La tasa de cambio en la cantidad de contaminante es la suma de la cantidad neta de contaminante que entra por unidad de tiempo con la cantidad de contaminante generada dentro de la región por unidad de tiempo. (*)

Ahora, sea $q(x, t)$ el **flujo** de contaminante definido como la cantidad de contaminante que fluye hacia la derecha en x por unidad de tiempo por unidad de área de superficie. Así la cantidad de contaminante que entra a la región angosta es:

$$q(x, t)A - q(x + \Delta x, t)A$$

el signo menos indica que si el contaminante fluye a la derecha en $x + \Delta x$, entonces contribuye a un decrecimiento en el contaminante que hay dentro de la región.

Definiremos la **fuentes** $\rho(x, t)$ como la cantidad de contaminante generado dentro de la región por unidad de tiempo por unidad de volumen.

Como aproximación, la fuente total es igual a la fuente por unidad de volumen $\rho(x, t)$ multiplicado por el volumen $A\Delta x$. Entonces (*) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial t}[w(x, t)A\Delta x] = q(x, t)A - q(x + \Delta x, t)A + \rho(x, t)A\Delta x \quad (1.7)$$

La derivada parcial en el tiempo se usa porque está en lugar de la derivada ordinaria respecto al tiempo con x fija. La densidad de flujo por unidad de área de superficie debe multiplicarse por el área de la superficie A .

Al dividir (1.7) entre $A\Delta x$ se llega a la aproximación:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{q(x, t) - q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + \rho(x, t) \quad (1.8)$$

tomando el limite en ambos lados de (1.8) cuando $\Delta x \rightarrow 0$, los errores en esta aproximación desaparecen cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Como se reconoce que el limite en el lado derecho de (1.8) es la derivada parcial respecto a x ,

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x + \Delta x, t) - q(x, t)}{\Delta x}$$

se deduce que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \rho(x, t) \quad (1.9)$$

En sólidos, "difusión de compuestos químicos" significa que sus concentraciones se dispersan. Los compuestos químicos no sufren difusión si la concentración es la misma en todas partes. En su lugar, experimentalmente, se observa que las concentraciones químicas (átomos) fluyen de regiones con altas concentraciones a regiones con bajas concentraciones. En muchas situaciones la LEY DE FICK se cumple:

La cantidad de contaminante que fluye a la derecha en x por unidad de área es proporcional a la tasa de cambio en la concentración por unidad de distancia, o

$$J = -D \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.10)$$

El signo menos en la ley de fick toma en cuenta, el flujo de alta concentración a baja. Si el compuesto químico tiene una concentración mas alta a la derecha ($\partial w / \partial x > 0$), entonces los átomos del compuesto químico migran a la izquierda y viceversa. Donde la constante de proporcionalidad D (medida en forma experimental) se llama **difusividad**. En fluidos (líquidos o gases), en situaciones en los que se puede ignorar el flujo del fluido, la dispersión de los compuestos químicos también satisface (1.7). Ahora, usando la LEY DE FICK (1.7) para eliminar q , la ecuación fundamental (1.9) para la tasa de cambio de la concentración se convierte en

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho$$

o

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \quad (1.11)$$

Cuando D es constante (lo que pasa con frecuencia), la ecuación (1.11) es una ecuación diferencial parcial para la concentración de contaminante. Se conoce como la **ecuación de difusión** con fuente ρ .

Esta última ecuación $D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} + \rho = 0$, es una extensión matemática del concepto clásico de SABINE de un campo sonoro difuso en recintos con limites de reflexión

difuso.

Así, la consecuencia fundamental de la ecuación de flujo es que la densidad de energía en una habitación o en una calle está descrito por una ecuación de difusión simple.

Parámetros de difusión

Para recintos totalmente cerrados (salas) con paredes uniformemente difusas, se ha demostrado [6] que el coeficiente de difusión se puede expresar mediante el espacio libre λ de la sala y la velocidad del sonido c , como:

$$\mathbf{D} \equiv D = \frac{\lambda c}{3} \quad (1.12)$$

Para las zonas urbanas, simulaciones numéricas también han demostrado [3] que el coeficiente de difusión depende de la ley de la reflexión de las fachadas de los edificios, el tamaño del edificio y la dirección de propagación, pueden ser escritos como un conjunto de coeficientes de difusión, en coordenadas cartesianas tridimensionales por:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

En particular, para las calles rectangulares, en los que la longitud de las dimensiones l_x largo, l_y ancho y l_z altura son paralelas al eje x , y y z , se encontró que el coeficiente de difusión se reduce a sus componentes diagonales D_{xx} , D_{yy} y D_{zz} (D_x , D_y y D_z) en un procedimiento simplificado de notación a través de una ley empírica [8]:

$$\frac{D_x}{l_x} = \frac{D_y}{l_y} = \frac{D_z}{l_z} = \mathcal{D}_{3D} \quad (1.13)$$

Aquí \mathcal{D}_{3D} se llama las tres dimensiones (3D) y los parámetros de difusión dependen de la aspereza de las fachadas de los edificios, y de la frecuencia. En este momento, \mathcal{D}_{3D} que se supone es una constante de una calle, se encuentra solo por los experimentos. Un método se propone en la referencia [8] para estimar el parámetro de difusión mediante la medición de la desintegración del sonido en algunos lugares en una calle rectangular con baja absorción en las fachadas y difusividad uniforme. Esta estimación se basa en la forma de análisis de la solución de la ecuación de difusión en una calle rectangular. En este caso, el tiempo T_R de reverberación puede ser fácilmente vinculado a los parámetros de difusión por:

$$\mathcal{D}_{3D} = \frac{6 \ln(10)}{\pi^2 T_R} \frac{4l_x l_z}{l_x + 4l_z} \quad (1.14)$$

Si siguiendo el método propuesto en [8] hay que señalar que en un problema bi-dimensional, el parámetro de difusión de dos dimensiones se debe utilizar en lugar de la relación (1.14):

$$\mathcal{D}_{2D} = \frac{6 \ln(10)}{\pi^2 T_R} l_x \quad (1.15)$$

Ecuaciones de frontera

Absorción por la pared

La distribución de la energía y la decadencia del sonido en una habitación o en una calle se encuentra por la solución de la ecuación (1.11) con las condiciones iniciales de contorno. Para las paredes o la construcción de fachadas con baja absorción, un parámetro adicional, llamado *coeficiente de intercambio* h , se puede introducir en las condiciones de contorno [7]. De acuerdo con esto, el flujo de energía en un límite tiene que satisfacer la siguiente condición:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D} \text{grad}_n w = h_w, \quad (1.16)$$

donde n es la normal a la frontera (parte positiva en el exterior de la frontera) y donde h se define por el coeficiente de absorción de la frontera y la velocidad del sonido c :

$$h = c \frac{\alpha}{4} \quad (1.17)$$

Cabe señalar que, dado que el coeficiente de absorción es una función de la frecuencia de sonido $N[\alpha \equiv \alpha(N)]$, el coeficiente de intercambio es también una función de la frecuencia [$h \equiv h(N)$].

Frontera infinita

Para las zonas urbanas, las condiciones de frontera infinita también pueden ser fácilmente simulados teniendo en cuenta que la energía del sonido w es igual a cero en el límite del dominio. Esta condición simplemente expresa que no hay contribución de la energía para los receptores situados lejos de las fuentes de sonido.

Capítulo 2

Implementación numérica al modelo de difusión

De acuerdo con las ecuaciones (1.10) y (1.11) las ecuaciones en dos dimensiones que corresponden al problema, ahora se escriben en coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{J} = -D_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{x} - D_y \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{y} \quad (2.1)$$

y

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{w} - \frac{\partial w}{\partial t} + \rho = 0 \quad (2.2)$$

2.1. Geometria y malla

Una malla es un conjunto de celdas contiguas que permite representar en forma discreta el dominio de un problema a resolver numericamente. La confiabilidad de la solución numérica obtenida depende de la calidad de la malla generada. Los criterios de calidad a usar dependen del método numérico escogido y del tipo de problema a resolver.

Como se sugiere en la figura 2.1, mostrando una simple área urbana caracterizada por edificios con una geometría rectangular, una malla interesante consistiría en elementos muy pequeños en el interior de la calle, donde se requiere una mejor precisión para la energía de sonido, y elementos mas grandes alrededor de los edificios, ya que solo se introducen para simular condiciones infinitas de contorno. Por otra parte, en la mayoría de los problemas relacionados con la propagación del ruido en las zonas urbanas, a menudo es necesario tener también una muy buena precisión en áreas específicas (cruce

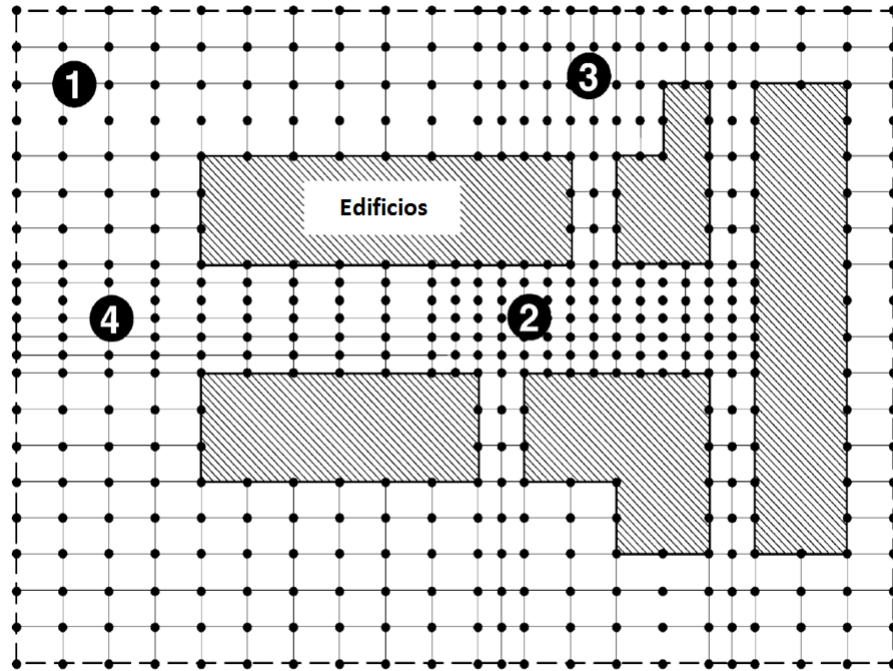


Figura 2.1: Ejemplo de una malla sencilla para áreas urbanas, con 4 zonas donde las redes son diferentes

de caminos, calles estrechas, principio o final de una calle...). Esto puede obtenerse mediante la reducción del tamaño del elemento. Por tanto, las observaciones anteriores sugieren que el uso de elementos rectangulares no uniforme se adapta bien al problema. En este punto, ahora es necesario definir más exactamente las anotaciones de malla.

Consideremos una malla rectangular (ver figura 2.2), y sea $P_{i,j}$ el nodo del elemento (i, j) de tamaño $\Delta x_{i,j}$ y $\Delta y_{i,j}$. Notando $\Delta x_{i-1/2,j}$, $\Delta x_{i+1/2,j}$, $\Delta y_{i,j-1/2}$ y $\Delta y_{i,j+1/2}$, respectivamente las distancias entre dos nodos sucesivos $P_{i,j}$ y $P_{i-1,j}$; $P_{i,j}$ y $P_{i+1,j}$; $P_{i,j}$ y $P_{i,j-1}$ y finalmente $P_{i,j}$ y $P_{i,j+1}$. Luego, el tamaño $\Delta x_{i,j}$ se puede escribir como:

$$\Delta x_{i,j} = \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j} \right] \quad (2.3)$$

y el tamaño $\Delta y_{i,j}$ se escribe como:

$$\Delta y_{i,j} = \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} + \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = \frac{1}{2} \left[\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2} \right] \quad (2.4)$$

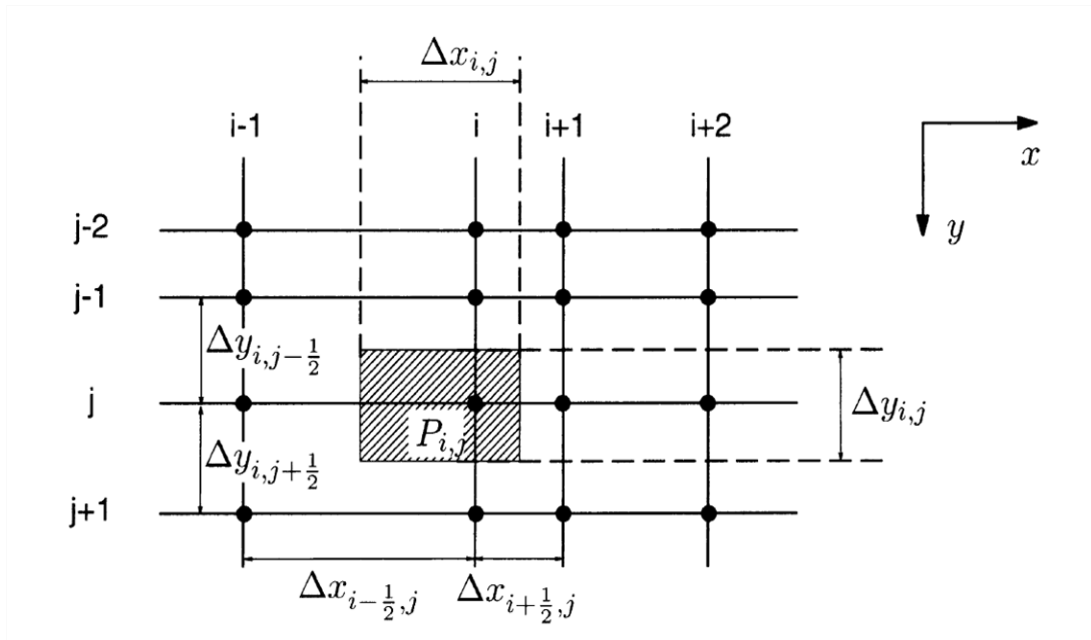


Figura 2.2: Notaciones rectangulares de malla de un elemento rectangular alrededor del nodo $P_{i,j}$.

2.2. Discretización de la derivada espacial de la densidad de energía

Las derivadas son los bloques de construcción de las ecuaciones diferenciales, y por consiguiente, en primer lugar se dará un breve repaso a las derivadas. Considerese una función f que depende de x . La primera derivada de $f(x)$ en un punto, es equivalente a la pendiente de una recta tangente a la curva en ese punto y se define como:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lo cual es la razón del incremento Δf en función al incremento Δx de la variable independiente, cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Si no se toma el limite indicado, se tendrá la siguiente relación aproximada para la primera derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Así, para el caso bidimensional de la densidad de energía $w_{i,j}$ en el nodo $P_{i,j}$, se tiene que el primer orden en $\Delta x_{i-1/2,j}$ y $\Delta x_{i+1/2,j}$ da:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \quad (2.5)$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \quad (2.6)$$

Ahora, la discretización del modelo de difusión se obtiene, mediante la sustitución de la derivada parcial en (2.1) por la relación de diferencias finitas, así: la ecuación

$$\mathbf{J} = -D_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{x} - D_y \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{y}$$

se convierte en

$$\varphi_{i,j} = -D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \mathbf{x} - D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \mathbf{y}$$

donde $\varphi_{i,j}$ corresponde al flujo de energía en el nodo $P_{i,j}$.

Se sabe que la expansión polinómica mediante series de Taylor se expresa como:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

Ahora, se desprecian todos los términos del desarrollo excepto los dos primeros, pues el primer término despreciado es proporcional a $(x - x_0)^2$. Sin embargo, el error en el que se incurre después de M pasos, es proporcional a $(x - x_0)$. Por tanto, entre menor sea $(x - x_0)$, menor es el error y de este modo, más exacta la aproximación. Así, la densidad de energía w para el nodo $P_{i-1,j}$ es:

$$w_{i-1,j} \approx w_{i,j} + (-\Delta x_{i-1/2,j}) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(-\Delta x_{i-1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

esto es,

$$w_{i-1,j} \approx w_{i,j} - (\Delta x_{i-1/2,j}) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\Delta x_{i-1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

De igual manera, para la densidad de energía de sonido en el nodo $P_{i+1,j}$, se tiene:

$$w_{i+1,j} \approx w_{i,j} + \Delta x_{i+1/2,j} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(\Delta x_{i+1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

Ahora, multiplicando (2.7) y (2.8), respectivamente por $\Delta x_{i+1/2,j}$ y $\Delta x_{i-1/2,j}$ tenemos:

$$\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} \approx \Delta x_{i+1/2,j} w_{i,j} - \Delta x_{i+1/2,j} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\partial w}{\partial x} + \Delta x_{i+1/2,j} \frac{(\Delta x_{i-1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

y

$$\Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j} \approx \Delta x_{i-1/2,j} w_{i,j} + \Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j} \frac{\partial w}{\partial x} + \Delta x_{i-1/2,j} \frac{(\Delta x_{i+1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

luego, añadiendo las relaciones resultantes, se obtiene la aproximación de la segunda derivada espacial de w así:

$$\begin{aligned} \Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j} &\approx \Delta x_{i+1/2,j} w_{i,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i,j} - \Delta x_{i+1/2,j} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ &\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j} \frac{\partial w}{\partial x} + \Delta x_{i+1/2,j} \frac{(\Delta x_{i-1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Delta x_{i-1/2,j} \frac{(\Delta x_{i+1/2,j})^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} \Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j} &\approx [\Delta x_{i+1/2,j} + \Delta x_{i-1/2,j}] w_{i,j} + \\ &\frac{\partial^2 w}{2\partial x^2} [\Delta x_{i-1/2,j} (\Delta x_{i+1/2,j})^2 + \Delta x_{i+1/2,j} (\Delta x_{i-1/2,j})^2] \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 w}{2\partial x^2} \approx \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j} - [\Delta x_{i+1/2,j} + \Delta x_{i-1/2,j}] w_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j} (\Delta x_{i+1/2,j})^2 + \Delta x_{i+1/2,j} (\Delta x_{i-1/2,j})^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{2\partial x^2} \approx \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j} - [\Delta x_{i+1/2,j} + \Delta x_{i-1/2,j}] w_{i,j}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}] [\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]}$$

$$\frac{\partial^2 w}{2\partial x^2} \approx \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}] [\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - \frac{w_{i,j}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}]}$$

así,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx 2 \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}] [\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - 2 \frac{w_{i,j}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}]} \quad (2.9)$$

De manera analoga se encuentran las relaciones para las derivadas espaciales individuales y dobles en la coordenada y , las cuales se expresan como:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}}$$

que son las derivadas espaciales individuales de primer orden en $\Delta y_{i,j+1/2}$ y $\Delta y_{i,j-1/2}$. Y la segunda derivada espacial de w en la coordenada y , se puede aproximar por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx 2 \frac{\Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1} + \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}] [\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} - 2 \frac{w_{i,j}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}]} \quad (2.10)$$

2.3. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos interiores

2.3.1. Difusión en estado estacionario

Teniendo en cuenta dos nodos consecutivos $P_{i,j}$ y $P_{i+1,j}$ en una calle, y a partir de la ecuación (1.6), el flujo incidente del elemento $(i+1, j)$ al elemento (i, j) se escribe:

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1/2,j} &= -D_x \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varphi_{i+1/2,j} &= -D_x \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De igual manera, los flujos incidentes de otros nodos mas cercanos de $P_{i,j}$ están dados por:

$$\varphi_{i,j-1/2} = -D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \quad (2.12)$$

$$\varphi_{i,j+1/2} = -D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \quad (2.13)$$

$$\varphi_{i-1/2,j} = -D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}}. \quad (2.14)$$

Ahora, consideremos un elemento de volumen, de tamaño $\Delta x_{i,j} \times \Delta y_{i,j} \times 1$ con centro en un nodo interior general (i, j) , en una región que contiene una fuente de sonido interna

$P_{i,j}$ por unidad de superficie.

Si se supone que la dirección del sonido es hacia el nodo que estamos considerando, en todas las superficies, para el balance de energía sobre el elemento de volumen se tiene que:

La razón de flujo Q en las superficies izquierda, derecha, superior e inferior, mas la razón de la fuente generadora de sonido es igual a la razón de cambio de contenido de energía del elemento

O bien,

$$Q_{cond.izquierda} + Q_{cond.derecha} + Q_{cond.superior} + Q_{cond.inferior} + P_{i,j} = \frac{\Delta E_{elemento}}{\Delta t} \quad (2.15)$$

Pero, puesto que el contenido de energía de un medio (o de cualquier parte de el) no cambia en condiciones estacionarias, entonces $\Delta E_{elemento} = 0$.

Así, tenemos:

$$Q_{cond.izquierda} + Q_{cond.derecha} + Q_{cond.superior} + Q_{cond.inferior} + P_{i,j} = 0 \quad (2.16)$$

Por tanto, *la conservación del flujo en estado estacionario dentro del elemento (i, j) de tamaño $\Delta x_{i,j}$ y $\Delta y_{i,j}$ se escribe:*

$$\frac{\varphi_{i,j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} + \frac{\varphi_{i,j+1/2}}{\Delta y_{i,j}} + \frac{\varphi_{i-1/2,j}}{\Delta x_{i,j}} + \frac{\varphi_{i+1/2,j}}{\Delta x_{i,j}} + P_{i,j} = 0$$

Al multiplicar cada término por $\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}$, se tiene:

$$\varphi_{i,j-1/2} \Delta x_{i,j} + \varphi_{i,j+1/2} \Delta x_{i,j} + \varphi_{i-1/2,j} \Delta y_{i,j} + \varphi_{i+1/2,j} \Delta y_{i,j} + P_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0$$

$$(\varphi_{i,j-1/2} + \varphi_{i,j+1/2}) \Delta x_{i,j} + (\varphi_{i-1/2,j} + \varphi_{i+1/2,j}) \Delta y_{i,j} + P_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0 \quad (2.17)$$

lo cual dá como resultado:

$$\left[-D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} - D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \right] \Delta x_{i,j} + \left[-D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta y_{i-1/2,j}} - D_x \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \right] \Delta y_{i,j} + P_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -D_y \frac{w_{i,j} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} + D_y \frac{w_{i,j-1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} - D_y \frac{w_{i,j} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + D_y \frac{w_{i,j+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - D_x \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + \\
 & \quad D_x \frac{w_{i-1,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} - D_x \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} + D_x \frac{w_{i+1,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} + P_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0 \\
 & D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} w_{i,j-1} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j} - \\
 & \left[D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \right] w_{i,j} + P_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Que es la ecuación de conservación del flujo en estado estacionario dentro del elemento (i, j) .

2.3.2. Estado de difusión variable en el tiempo

Hasta ahora, se ha aplicado el método de las diferencias finitas, a problemas de flujo de energía en estado estacionario. Aquí se extiende el método para resolver problemas en régimen transitorio. Se aplica el método de las diferencias finitas a los problemas de estado estacionario mediante la diferenciación del problema en las variables espaciales y resolviendo para los flujos de energía en los distintos puntos llamados nodos. La solución obtenida es válida para cualquier instante, dado que en condiciones estacionarias los flujos no cambian con el tiempo así como con la posición y, de este modo, la solución en diferencias finitas de este tipo de problemas requiere la diferenciación en el tiempo y en el espacio.

Para tal hecho, se selecciona un intervalo de tiempo apropiado Δt y resolver para las densidades de energía nodales desconocidas varias veces para cada Δt hasta que se obtiene la solución en el instante deseado.

En problemas de régimen transitorio se utiliza el superíndice n como el índice o contador de los intervalos de tiempo, correspondiendo $n = 0$ a la condición inicial específica, y un intervalo general de tiempo, n , correspondiente a $t_n = n \Delta t$, puesto que el tiempo requerido para el cálculo de un problema en régimen transitorio es n veces el correspondiente a uno de estado estacionario.

Ahora, para la derivada de la densidad de energía, se puede considerar, que el tiempo se discretiza con el incremento de tiempo t .

El eje del nuevo tiempo, se define por los tiempos característicos $0, \Delta t, 2 \Delta t, \dots, n \Delta t, \dots$. Por tanto, la primera derivada de w con respecto al tiempo se puede escribir como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w([n+1] \Delta t) - w(n \Delta t)}{\Delta t} \tag{2.19}$$

Para notación, $w_{i,j}^n$ la energía de sonido en el nodo $P_{i,j}$ en el tiempo $n\Delta t$, así, la variación de la densidad de energía durante el tiempo Δt es:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.20)$$

Ahora, reescribiendo la derivada espacial (2.9) para incluir la dependencia del tiempo, se tiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx 2 \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j}^{n+1} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}^{n+1}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}][\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - 2 \frac{w_{i,j}^{n+1}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}]} \quad (2.21)$$

y para la coordenada y :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx 2 \frac{\Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1}^{n+1} + \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}^{n+1}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}][\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} - 2 \frac{w_{i,j}^{n+1}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}]} \quad (2.22)$$

Ahora, reemplazando en la ecuación (2.2)

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{w} - \frac{\partial w}{\partial t} + \rho = 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} & D_x \left[2 \frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j}^{n+1} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}^{n+1}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}][\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - 2 \frac{w_{i,j}^{n+1}}{[\Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}]} \right] + \\ & D_y \left[2 \frac{\Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1}^{n+1} + \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}^{n+1}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}][\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} - 2 \frac{w_{i,j}^{n+1}}{[\Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}]} \right] - \\ & \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Notando, $\Delta X_{i,j} = \Delta x_{i-1/2,j} \Delta x_{i+1/2,j}$ y $\Delta Y_{i,j} = \Delta y_{i,j-1/2} \Delta y_{i,j+1/2}$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} & 2D_x \left[\frac{\Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j}^{n+1} + \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta X_{i,j}[\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta X_{i,j}} \right] + 2D_y \left[\frac{\Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1}^{n+1} + \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta Y_{i,j}[\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} - \right. \\ & \left. \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta Y_{i,j}} \right] - \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{2D_x \Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta X_{i,j} [\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} + \frac{2D_x \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta X_{i,j} [\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]} - \frac{2D_x w_{i,j}^{n+1}}{\Delta X_{i,j}} +$$

$$\frac{2D_y \Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta Y_{i,j} [\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} + \frac{2D_y \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta Y_{i,j} [\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]} - \frac{2D_y w_{i,j}^{n+1}}{\Delta Y_{i,j}} - \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{n+1} = 0$$

$$\frac{2D_x \Delta x_{i+1/2,j} w_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta X_{i,j} \frac{[\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]}{2}} + \frac{2D_x \Delta x_{i-1/2,j} w_{i+1,j}^{n+1}}{2 \Delta X_{i,j} \frac{[\Delta x_{i-1/2,j} + \Delta x_{i+1/2,j}]}{2}} +$$

$$\frac{2D_y \Delta y_{i,j+1/2} w_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta Y_{i,j} \frac{[\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]}{2}} + \frac{2D_y \Delta y_{i,j-1/2} w_{i,j+1}^{n+1}}{2 \Delta Y_{i,j} \frac{[\Delta y_{i,j-1/2} + \Delta y_{i,j+1/2}]}{2}} - w_{i,j}^{n+1} \left[\frac{2D_x}{\Delta X_{i,j}} + \frac{2D_y}{\Delta Y_{i,j}} + \frac{1}{\Delta t} \right] +$$

$$\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{n+1} = 0$$

$$w_{i-1,j}^{n+1} D_x \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{\Delta X_{i,j} x_{i,j}} + w_{i+1,j}^{n+1} D_x \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta X_{i,j} x_{i,j}} + w_{i,j-1}^{n+1} D_y \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta Y_{i,j} y_{i,j}} + w_{i,j+1}^{n+1} D_y \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{\Delta Y_{i,j} y_{i,j}} -$$

$$w_{i,j}^{n+1} \left[\frac{2D_x}{\Delta X_{i,j}} + \frac{2D_y}{\Delta Y_{i,j}} + \frac{1}{\Delta t} \right] = -\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} - \rho_{i,j}^{n+1} \quad (2.23)$$

Aquí, $\rho_{i,j}^{n+1}$ representa la fuente de sonido interna en la superficie del elemento por unidad de tiempo.

Se puede notar, que la elección se hizo para utilizar un esquema implícito en (2.23) en lugar de un esquema explícito [12]. Con un esquema explícito en diferencias finitas, (es decir, la densidad de energía $w_{i,j}^{n+1}$ en el nuevo tiempo, está en función de la densidad de energía en el momento anterior Δnt), el incremento de tiempo Δt debe ser compatible con los incrementos del espacio. En este caso, las soluciones pueden llegar a ser inestables, causando que la solución diverja. Con el esquema implícito, la densidad de energía $w_{i,j}^{n+1}$ es una función de la densidad de energía de los nodos mas cercanos $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$ en el mismo tiempo $(n+1) \Delta t$, pero también depende de la densidad de energía $w_{i,j}^n$ en el tiempo previo $n \Delta t$. El análisis de la estabilidad del esquema implícito de diferencias finitas, demuestra que es incondicionalmente estable: la solución se mantiene estable para todos los incrementos de espacio y tiempo, y están ahí. Por lo tanto no hay restricciones en incrementos de espacio y tiempo.

2.4. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos en las fachadas de los edificios

2.4.1. Absorción por la fachada de la construcción

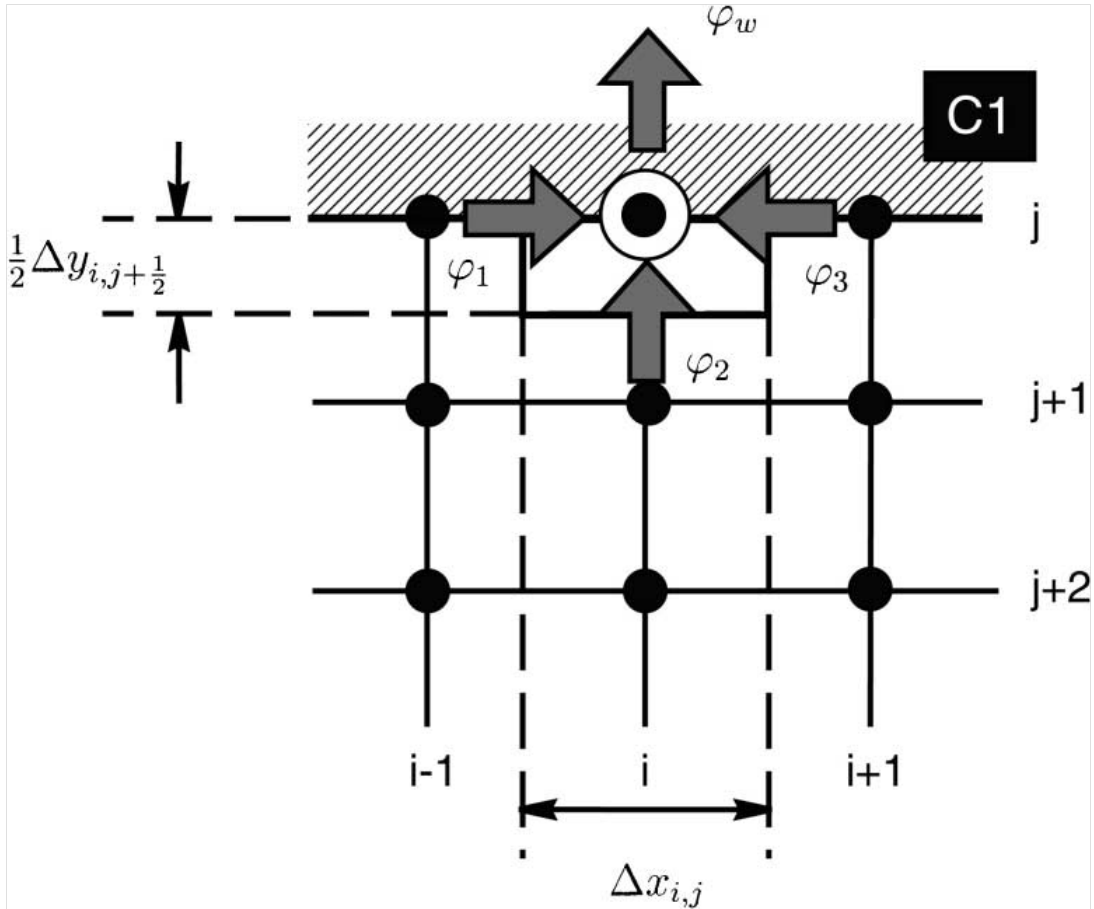


Figura 2.3: Absorción por la fachada de la construcción ($C1$) definido por un coeficiente de intercambio h_w . Conservación de la energía en la malla (i, j) .

Como se muestra en la figura 2.3. La energía total de la malla en el nodo (i, j) depende de los flujos de energía incidentes de los nodos más cercanos $P_{i+1,j}$, $P_{i-1,j}$, $P_{i,j+1}$, pero también depende de la tasa de energía que es absorbida por la fachada del edificio. Luego, la conservación de la energía en la malla (i, j) en estado estacionario, puede escribirse como:

$$(\varphi_1 + \varphi_3) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + (\varphi_2 - \varphi_w) \Delta x_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \quad (A1)$$

Reemplazando φ_1 , φ_2 y φ_3 respectivamente por $\varphi_{i-1/2,j}$, $\varphi_{i,j+1/2}$ y $\varphi_{i+1/2,j}$, la conservación de la energía (A1) se escribe ahora como:

$$(\varphi_{i-1/2,j} + \varphi_{i+1/2,j}) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + (\varphi_{i,j+1/2} - \varphi_w) \Delta x_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \quad (\text{A2})$$

donde el flujo de energía φ_w en el muro (1.16) está definido por

$$\varphi_w = h_w w_{i,j} \quad (\text{A3})$$

El coeficiente de intercambio h_w se expresa a partir del coeficiente de absorción de la pared $h_w = c\alpha/4$. Ahora, considerando también las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.11), la condición de frontera sobre la pared puede escribirse como sigue:

$$\left(-D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} - D_x \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \right) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \left(-D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - h_w w_{i,j} \right) \Delta x_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$-D_x \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{w_{i-1,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} - D_x \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_x \frac{w_{i+1,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} - D_y \frac{w_{i,j} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + D_y \frac{w_{i,j+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - h_w w_{i,j} \Delta x_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_w \Delta x_{i,j} \right] w_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

Para el estado variable en el tiempo, la condición de frontera se encuentra siguiendo un proceso similar, pero esta vez, incluyendo la variación de la densidad de energía en el tiempo, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_{i-1/2,j}^{n+1} + \varphi_{i+1/2,j}^{n+1}) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + (\varphi_{i,j+1/2}^{n+1} - \varphi_w^{n+1}) \Delta x_{i,j} - \frac{\partial w}{\partial t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & \varphi_{i-1/2,j}^{n+1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \Delta x_{i,j} - \varphi_w^{n+1} \Delta x_{i,j} - \frac{\partial w}{\partial t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & -D_x \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \right) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} - D_x \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \right) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} - D_y \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \right) \Delta x_{i,j} - h_w \Delta x_{i,j} w_{i,j}^{n+1} - \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & -D_x \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2} - w_{i-1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} \right) - D_x \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2} - w_{i+1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} \right) - D_y \left(\frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} - w_{i,j+1}^{n+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \right) - h_w \Delta x_{i,j} w_{i,j}^{n+1} - \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & -D_x \frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{w_{i-1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} - D_x \frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_x \frac{w_{i+1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} - D_y \frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + D_y \frac{w_{i,j+1}^{n+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - h_w \Delta x_{i,j} w_{i,j}^{n+1} - \frac{w_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} - \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} - \rho_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & D_x \frac{w_{i-1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{w_{i+1,j}^{n+1} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_y \frac{w_{i,j+1}^{n+1} \Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_w \Delta x_{i,j} + \frac{\Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2}}{\Delta t} \right] w_{i,j}^{n+1} = - \left(\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} - \rho_{i,j}^{n+1} \right) \Delta x_{i,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} \quad \text{A(5)}
 \end{aligned}$$

2.4.2. Absorción por la esquina externa de la construcción

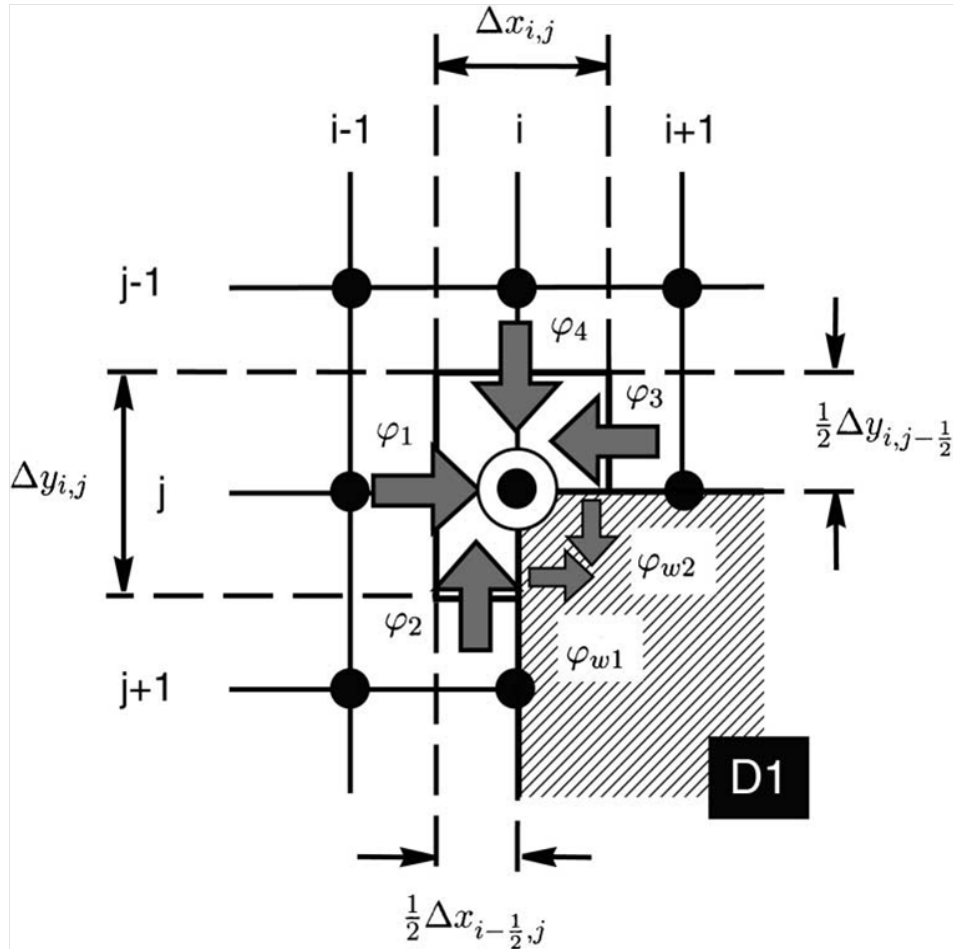


Figura 2.4: Absorción por la esquina externa de una construcción (D1). Definidos por dos fachadas w_1 y w_2 caracterizados por los coeficientes de intercambio h_{w_1} y h_{w_2} respectivamente.

Ahora, se considera un nodo $P_{i,j}$ en el filo de la construcción (figura 2.4). La energía total en la malla (i, j) alrededor de $P_{i,j}$, es una función de los flujos incidentes de los nodos mas cercanos $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$ y $P_{i,j+1}$, pero también es función de la parte de energía la cual es absorbida por las dos fachadas de la construcción (w_1) y (w_2). Luego, la conservación de la energía sobre el nodo $P_{i,j}$ puede ser escrita a partir de los flujos incidente φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 y los flujos de energía φ_{w_1} y φ_{w_2} dentro de las fachadas del edificio. Así, el balance de energía para esta situación es:

$$\varphi_1 \Delta y_{i,j} - \varphi_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \varphi_2 \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \varphi_4 \Delta x_{i,j} - \varphi_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \varphi_3 \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} + \rho_{i,j} \Delta y_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} = 0$$

$$\varphi_{i-1/2,j} \Delta y_{i,j} - \varphi_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \varphi_{i,j+1/2} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \varphi_{i,j-1/2} \Delta x_{i,j} - \varphi_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \varphi_{i+1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} + \rho_{i,j} s_{i,j} = 0$$

$$-D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j} - h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} w_{i,j} - D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \Delta x_{i,j} - h_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} w_{i,j} - D_x \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} + \rho_{i,j} s_{i,j} = 0$$

$$-D_x \frac{w_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j} + D_x \frac{w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j} - h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} w_{i,j} - D_y \frac{w_{i,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} \Delta x_{i-1/2,j} + D_y \frac{w_{i,j+1}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} \Delta x_{i-1/2,j} - D_y \frac{w_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \Delta x_{i,j} + D_y \frac{w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \Delta x_{i,j} - h_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} w_{i,j} - D_x \frac{w_{i,j}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} \Delta y_{i,j-1/2} + D_x \frac{w_{i+1,j}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} \Delta y_{i,j-1/2} + \rho_{i,j} s_{i,j} = 0$$

$$D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} w_{i,j-1} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} + h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + h_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} \right] w_{i,j} + \rho_{i,j} s_{i,j} = 0$$

$$\text{donde } s_{i,j} = \Delta y_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2}$$

Para el estado variable en el tiempo la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\varphi_{i-1/2,j}^{n+1} \Delta y_{i,j} - \varphi_{w_1}^{n+1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \varphi_{i,j+1/2}^{n+1} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \varphi_{i,j-1/2}^{n+1} \Delta x_{i,j} - \varphi_{w_2}^{n+1} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \varphi_{i+1/2,j}^{n+1} \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2} - \frac{\partial w}{\partial t} s_{i,j} + \rho_{i,j}^{n+1} s_{i,j} = 0$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j}^{n+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j}^{n+1} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1}^{n+1} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} w_{i,j-1}^{n+1} - \\ & D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i,j}^{n+1} - D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} w_{i,j}^{n+1} - D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j}^{n+1} - D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} w_{i,j}^{n+1} - \\ & h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} w_{i,j}^{n+1} - h_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} w_{i,j}^{n+1} - \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} s_{i,j} + \rho_{i,j}^{n+1} s_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j}^{n+1} + D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j}^{n+1} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1}^{n+1} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} w_{i,j-1}^{n+1} - \\ & \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{\Delta y_{i,j-1/2}}{2 \Delta x_{i+1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1/2}} + h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + h_{w_2} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \right. \\ & \left. \frac{s_{i,j}}{\Delta t} \right] w_{i,j}^{n+1} + \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} s_{i,j} + \rho_{i,j}^{n+1} s_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

2.4.3. Absorción por la esquina interna de la construcción

Esta configuración es equivalente a la última. La energía total de la malla (i, j) alrededor de $P_{i,j}$, es una función de los flujos incidentes de los nodos mas cercanos $P_{i-1,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j-1}$ y $P_{i,j+1}$, pero también es función de la parte de energía la cual es absorbida por las dos fachadas de la construcción (w_1) y (w_2) .(figura 2.5).

Luego, la conservación de la energía sobre $P_{i,j}$ para este caso es:

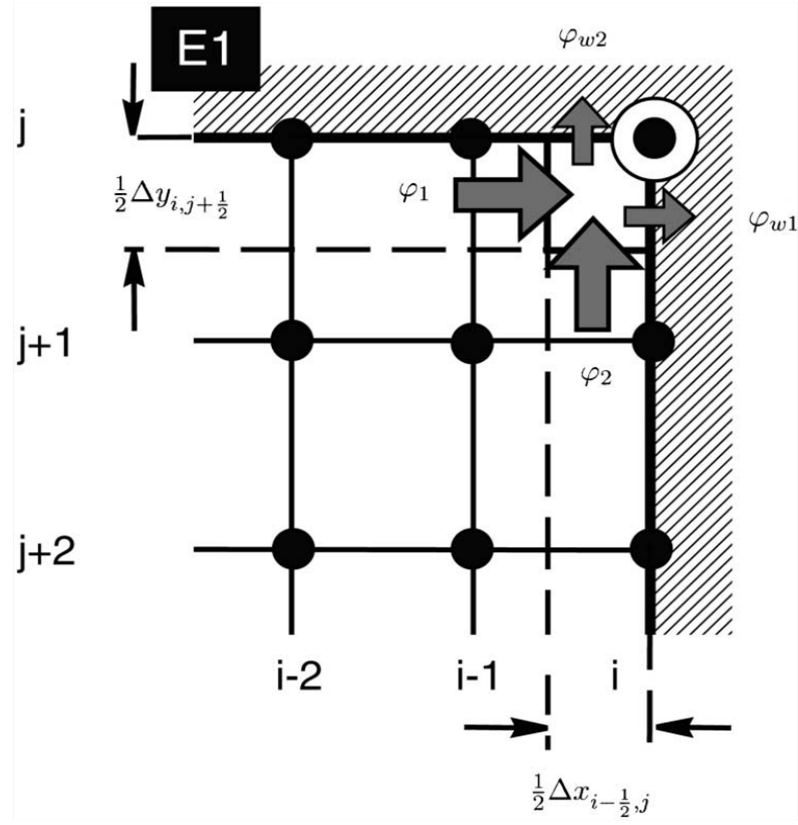


Figura 2.5: Absorción por la esquina interna de una construcción (E1). Definidos por dos fachadas w_1 y w_2 caracterizados por los coeficientes de intercambio h_{w_1} y h_{w_2} respectivamente.

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_{i-1/2,j} - \varphi_{w_1}) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + (\varphi_{i,j+1/2} - \varphi_{w_2}) \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & \left[-D_x \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} - h_{w_1} w_{i,j} \right] \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \left[-D_y \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - h_{w_2} w_{i,j} \right] \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \\
 & \quad \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \\
 & -D_x \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_x \frac{w_{i-1,j}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j+1/2} - h_{w_1} w_{i,j} \Delta y_{i,j+1/2} - D_y \frac{w_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + \\
 & \quad D_y \frac{w_{i,j+1} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} - h_{w_2} w_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + h_{w_1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + h_{w_2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} \right] w_{i,j} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + \frac{1}{2} D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} - \frac{1}{2} \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_{w_1} \Delta y_{i,j+1/2} + h_{w_2} \Delta y_{i,j+1/2} \right] w_{i,j} + \frac{1}{2} \rho_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_{w_1} \Delta y_{i,j+1/2} + h_{w_2} \Delta y_{i,j+1/2} \right] w_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \quad (A11)$$

Para el estado variable en el tiempo se tiene:

$$(\varphi_{i-1/2,j}^{n+1} - \varphi_{w_1}^{n+1}) \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + (\varphi_{i,j+1/2}^{n+1} - \varphi_{w_2}^{n+1}) \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j}^{n+1} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

Lo cual dá:

$$\left[-D_x \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2,j}} - h_{w_1} w_{i,j}^{n+1} \right] \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \left[-D_y \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} - h_{w_2} w_{i,j}^{n+1} \right] \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$-D_x \frac{w_{i,j}^{n+1}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j+1/2} + D_x \frac{w_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j+1/2} - h_{w_1} w_{i,j}^{n+1} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} - D_y \frac{w_{i,j}^{n+1}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} \Delta x_{i-1/2,j} +$$

$$D_y \frac{w_{i,j+1}^{n+1} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} - h_{w_2} w_{i,j}^{n+1} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - \frac{w_{i,j}^{n+1} \Delta x_{i-1/2,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta t \cdot 2} + \frac{w_{i,j}^n \Delta x_{i-1/2,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta t \cdot 2} + \rho_{i,j} \frac{\Delta x_{i-1/2,j} \Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j}^{n+1} + \frac{1}{2} D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1}^{n+1} - \frac{1}{2} \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_{w_1} \Delta y_{i,j+1/2} + h_{w_2} \Delta x_{i-1/2,j} + \frac{1}{\Delta t} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} \right] w_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} + \frac{1}{2} \rho_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j}^{n+1} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} w_{i,j+1}^{n+1} - \left[D_x \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_y \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{\Delta y_{i,j+1/2}} + h_{w_1} \Delta y_{i,j+1/2} + h_{w_2} \Delta x_{i-1/2,j} + \frac{1}{\Delta t} \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2} \right] w_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j} \right) s_{i,j} = 0 \quad (\text{A12}) \end{aligned}$$

$$\text{donde } s_{i,j} = \Delta x_{i-1/2,j} \frac{\Delta y_{i,j+1/2}}{2}. \quad (\text{A13})$$

Si la esquina externa se localiza en el cruce de varias calles con diferentes parámetros de difusión, las ecuaciones en diferencias finitas son un poco más complicadas, pero se puede encontrar utilizando el mismo método. Un ejemplo se da a continuación para un nodo en el cruce de dos calles.

2.5. Ecuaciones en diferencias finitas para los nodos en un cruce de la calle

Utilizando el mismo método aplicado anteriormente, para el cruce de dos calles a y b , caracterizados respectivamente por sus coeficientes de difusión (D_x^a, D_y^a) y (D_x^b, D_y^b) (figura 13), los flujos incidentes pueden ser escritos como:

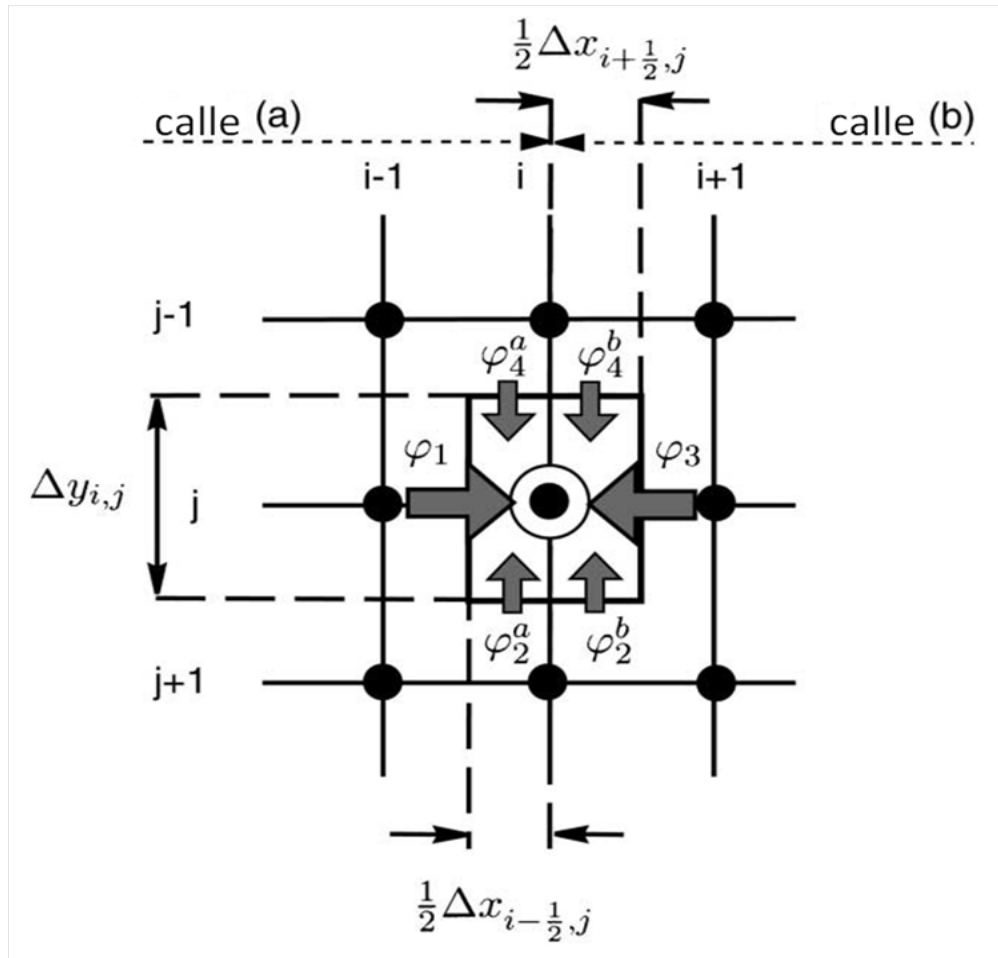


Figura 2.6: Balance de energía en la interfaz entre dos calles (a) y (b), definidos por sus coeficientes de difusión (D_x^a, D_y^a) y (D_x^b, D_y^b) .

$$\varphi_{i+1/2,j}^b = -D_x^b \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}}$$

$$\varphi_{i-1/2,j}^a = -D_x^a \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}}.$$

$$\varphi_{i,j-1/2}^a = -D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}}$$

$$\varphi_{i,j-1/2}^b = -D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}}$$

$$\varphi_{i,j+1/2}^a = -D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}}$$

$$\varphi_{i,j+1/2}^b = -D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}}$$

En estado estacionario, la conservación del flujo incidente en el elemento (i, j) de tamaño $\Delta x_{i,j}$ y $\Delta y_{i,j}$ es entonces:

$$\varphi_{i,j-1/2}^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \varphi_{i,j+1/2}^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} + \varphi_{i,j-1/2}^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \varphi_{i,j+1/2}^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} + \varphi_{i-1/2,j}^a \Delta y_{i,j} + \varphi_{i+1/2,j}^b \Delta y_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0 \quad (*)$$

reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} & -D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - D_y^a \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2} - D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-1/2}} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} \\ & - D_y^b \frac{w_{i,j} - w_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2} - D_x^a \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} \Delta y_{i,j} - D_x^b \frac{w_{i,j} - w_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \Delta y_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} \\ & y_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -D_y^a \frac{w_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^a \frac{w_{i,j-1} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} - D_y^a \frac{w_{i,j} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^a \frac{w_{i,j+1} \Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} - \\ & D_y^b \frac{w_{i,j} \Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^b \frac{w_{i,j-1} \Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} - D_y^b \frac{w_{i,j} \Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^b \frac{w_{i,j+1} \Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} - D_x^a \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + \\ & D_x^a \frac{w_{i-1,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} - D_x^b \frac{w_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} + D_x^b \frac{w_{i+1,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

$$\left(D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} \right) w_{i,j-1} + \left(D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} \right) w_{i,j+1} +$$

$$\begin{aligned}
 & D_x^a \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j} + D_x^b \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j} - \left[D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + \right. \\
 & \left. D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_x^a \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_x^b \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \right] w_{i,j} + \rho_{i,j} \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j} = 0
 \end{aligned}$$

En el estado variable en el tiempo, la conservación del flujo (*) es similar, excepto que debe tenerse en cuenta la variación de la energía durante el incremento de tiempo Δt , en la superficie $\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}$. Luego, en forma implícita, la ecuación final que se obtiene es:

$$\begin{aligned}
 & \left(D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} \right) w_{i,j-1}^{n+1} + \left(D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} \right) w_{i,j+1}^{n+1} + \\
 & D_x^a \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} w_{i-1,j}^{n+1} + D_x^b \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} w_{i+1,j}^{n+1} - \left[D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + D_y^a \frac{\Delta x_{i-1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j-1/2}} + \right. \\
 & \left. D_y^b \frac{\Delta x_{i+1/2,j}}{2 \Delta y_{i,j+1/2}} + D_x^a \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i-1/2,j}} + D_x^b \frac{\Delta y_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2,j}} + \frac{\Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}}{\Delta t} \right] w_{i,j}^{n+1} = - \left[\frac{w_{i,j}^n}{\Delta t} + \rho_{i,j}^{n+1} \right] \Delta \\
 & x_{i,j} \Delta y_{i,j}
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Ejemplo

Con el fin de ilustrar los resultados de este esquema numérico, hemos considerado una configuración urbana sencilla (ver figura 3.1), definida por una calle rectangular muy larga y estrecha de longitud $L = 96m$ y anchura $l = 8m$ y sin cruces de calles. Se supone que el parametro de difusión que ∂_{2D} y el coeficiente de absorción α (e.g el coeficiente de intercambio h) sean uniformes y definidos por los valores $\alpha = 0,05$ y $\partial_{2D} = 105m/s$.

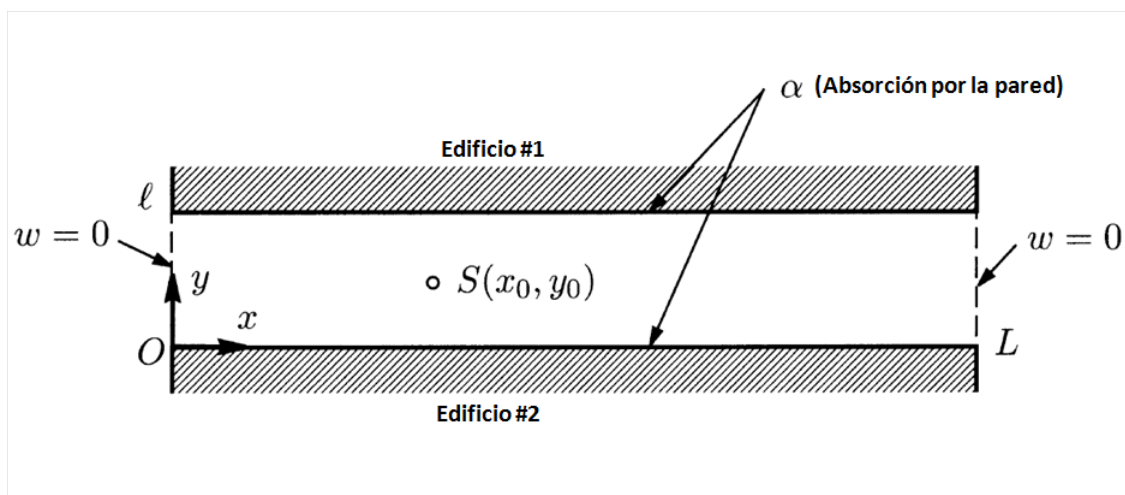


Figura 3.1: Calle rectangular estrecha de longitud L y anchura l , con absorción por la pared α y difusión uniforme. La fuente de sonido S , está localizada en (x_0, y_0) en el interior de la calle.

Una fuente de sonido estable o impulsiva (en $t = 0$) se encuentra en la posición (x_0, y_0) en el interior la calle. Por otra parte, se asume una calle muy larga. Por consigu-

iente, la energía de sonido en ambos extremos de la calle puede despreciarse ($w = 0$) en comparación con la energía de sonido dentro de la calle. Finalmente, se supone que no hay radiación de sonido en ambos extremos de la calle. Aunque esta hipótesis parece ser muy fuerte, los resultados anteriores [8] han mostrado que este modelo puede predecir la energía del sonido en una calle estrecha con una buena precisión.

Por consiguiente, el campo sonoro en la calle debe satisfacer la ecuación de difusión:

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{w} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (\text{en el estado transitorio})$$

con condiciones iniciales $w(x, y, 0) = w_0 \delta(x_0, y_0)$.

Y también

$$\left[D_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \mathbf{w} = 0 \quad (\text{en el estado estable})$$

con condiciones de fuente $w(x_0, y_0) = w_0$.

En ambos casos se tiene que $w = 0 \quad \forall x = 0, x = L$
esto es, $w(0, y) = w(L, y) = 0 \quad \forall y \in [0, l]$.

Así,

$$D_y \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = hw(x, 0) \quad \text{y} \quad -D_y \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=l} = hw(x, l).$$

Puesto que $\frac{D_x}{l_x} = \partial_{2D}$, entonces, $D_x = (105m/s)(96m) = 10080m^2/s$.

Del mismo modo, $\frac{D_y}{l_y} = \partial_{2D}$, entonces, $D_y = (105m/s)(8m) = 840m^2/s$.

Además, $h = c \frac{\alpha}{4} = (343,2m/s) \frac{0,05}{4} = 4,29m/s$.

Aplicando la ecuación de difusión en estado estable, se tienen que

$$D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Por tanto, por diferencias finitas, tomando a N_x como el número de nodos en x y N_y como el número de nodos en y , tenemos que $a = \frac{l_x}{N_x - 1}$ es el tamaño de paso de un nodo a otro en x .

De manera similar, $b = \frac{l_y}{N_y - 1}$ es el tamaño de paso de un nodo a otro en y .

Tomemos a $w(x_i, y_j) = w_{i,j}$ con $i = 1, \dots, N_x - 2, j = 1, \dots, N_y - 2$. Ahora, aplicando el método de diferencias finitas se tiene que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{a} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{b}$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i-1,j}}{a} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j-1}}{b}$$

así,

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{a} - \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{a}}{a} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2}.$$

Análogamente,

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{b^2}.$$

Remplazando en la ecuación de difusión en estado estable, se tiene que:

$$D_x \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{a^2} + D_y \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{b^2} = 0$$

$$\frac{D_x}{a^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + \left(\frac{-2D_x}{a^2} - \frac{2D_y}{b^2} \right) w_{i,j} + \frac{D_y}{b^2} (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = 0$$

Tomando ahora $r_1 = \frac{-2D_x}{a^2} - \frac{2D_y}{b^2}$, $r_2 = \frac{D_x}{a^2}$ y $r_3 = \frac{D_y}{b^2}$, la ecuación queda de la forma:

$$r_2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + r_1w_{i,j} + r_3(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = 0.$$

Haciendo un reordenamiento de la malla, se tiene que para un nodo (i, j) ,

$$w_p = w_{i+[N_y-2-j][N_x-2]}, \text{ así por ejemplo, } w_{1,2} = w_{N_y(N_x-2)+1}.$$

Puesto que $w_{0,j} = 0$ y $w_{N_x-1,j} = 0$ para $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$. Además $D_y \frac{\partial w}{\partial y} i, 0 = hw_{i,0}$

$$\text{y } -D_y \frac{\partial w}{\partial y} i, N_y - 1 = hw_{i,N_y-1}, \text{ para } i = 1, \dots, N_x - 2.$$

Luego, por diferencias finitas

$$\frac{\partial w}{\partial y} i, 0 = \frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{b} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} i, N_y - 1 = \frac{w_{i,N_y-1} - w_{i,N_y-2}}{b},$$

así

$$D_y \frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{b} = hw_{i,0} \quad \text{y} \quad -D_y \frac{w_{i,N_y-1} - w_{i,N_y-2}}{b} = hw_{i,N_y-1}$$

$$\left(\frac{D_y}{b}\right)w_{i,1} = \left(h + \frac{D_y}{b}\right)w_{i,0} \quad \text{y} \quad \left(\frac{D_y}{b}\right)w_{i,N_y-2} = \left(h + \frac{D_y}{b}\right)w_{i,N_y-1}, \text{ de donde}$$

$$w_{i,0} = \left(\frac{D_y}{bh + D_y}\right)w_{i,1} \quad \text{y} \quad w_{i,N_y-1} = \left(\frac{bh + D_y}{D_y}\right)w_{i,N_y-2}.$$

$$\text{Llamemos } r_4 = \frac{bh + D_y}{D_y}.$$

Si $i = 1$ y $j = 1$, en

$$r_2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + r_1w_{i,j} + r_3(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = 0$$

tenemos que:

$$r_2(w_{2,1} + w_{0,1}) + r_1w_{1,1} + r_3(w_{1,2} + w_{1,0}) = 0$$

$$r_2w_{2,1} + r_1w_{1,1} + r_3\left(w_{1,2} + \frac{1}{r_4}w_{1,1}\right) = 0$$

$$r_2w_{2,1} + \left(r_1 + \frac{r_3}{r_4}\right)w_{1,1} + r_3w_{1,2} = 0$$

esto es,

$$r_2w_{2+(N_y-3)(N_x-2)} + \left(r_1 + \frac{r_3}{r_4}\right)w_{1+(N_y-3)(N_x-2)} + r_3(w_{1+(N_y-4)(N_x-2)}) = 0.$$

Entonces, aplicando nuevamente la ecuación $r_2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + r_1w_{i,j} + r_3(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = 0$ para $j = 1$ y para $i = 1, 2, \dots, N_x - 2$ tenemos:

$$\begin{aligned} r_2(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}) + r_1w_{i,1} + r_3(w_{i,2} + w_{i,0}) &= 0 \\ r_2(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}) + r_1w_{i,1} + r_3(w_{i,2} + \frac{1}{r_4}w_{i,1}) &= 0 \\ r_2(w_{i+1,1} + w_{i-1,1}) + (r_1 + \frac{r_3}{r_4})w_{i,1} + r_3w_{i,2} &= 0 \end{aligned}$$

esto es,

$$r_2[w_{i+1+(N_y-3)(N_x-2)} + w_{i-1+(N_y-3)(N_x-2)}] + \left(r_1 + \frac{r_3}{r_4}\right)w_{i+(N_y-3)(N_x-2)} + r_3w_{i+(N_y-4)(N_x-2)}.$$

Ahora, si $j = N_y - 2$ tambien se tiene:

$$\begin{aligned} r_2(w_{i+1,N_y-2} + w_{i-1,N_y-2}) + r_1w_{i,N_y-2} + r_3(w_{i,N_y-1} + w_{i,N_y-3}) &= 0 \\ r_2(w_{i+1,N_y-2} + w_{i-1,N_y-2}) + r_1w_{i,N_y-2} + r_3(r_4w_{i,N_y-2} + w_{i,N_y-3}) &= 0 \\ r_2(w_{i+1,N_y-2} + w_{i-1,N_y-2}) + (r_1 + r_3r_4)w_{i,N_y-2} + r_3w_{i,N_y-3} &= 0 \\ r_2(w_{i+1} + w_{i-1}) + (r_1 + r_3r_4)w_i + r_3w_{i+(N_x-2)} &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a tener en general, que si w_p es un punto de la malla, el que está ubicado hacia arriba es $w_{p-(N_x-2)}$, hacia abajo $w_{p+(N_x-2)}$ y a los lados, w_{p-1} y w_{p+1} , vamos a tener, $r_2(w_{p+1} + w_{p-1}) + r_1w_p + r_3(w_{p+(N_x-2)} + w_{p-(N_x-2)}) = 0$.

Haciendo este procedimiento para todos los puntos de la malla, se obtiene un sistema de ecuaciones que se puede expresar en forma de una matriz de $(N_x - 2)(N_y - 2) \times (N_x - 2)(N_y - 2)$ tridiagonal por bloques, de la forma $AW = B$. Donde W es el vector columna formado por las soluciones ordenadas por p .

Empecemos formando la matriz A .

Como el número de puntos por fila son $N_x - 2$ y cada w_p depende de w_{p-1} y w_{p+1} , formemos las submatrices de $(N_x - 2)(N_x - 2)$, P, P_1, P_2 :

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_2 & r_1 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & r_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} r_1 + r_3 r_4 & r_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_2 & r_1 + r_3 r_4 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & r_1 + r_3 r_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_1 + r_3 r_4 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{r_3}{r_4} & r_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_2 & r_1 + \frac{r_3}{r_4} & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & r_1 + \frac{r_3}{r_4} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_2 & r_1 + \frac{r_3}{r_4} \end{bmatrix}$$

Además cada w_p depende de $w_p - (N_x - 2)$ y $w_p + (N_x - 2)$.

Ahora formemos la submatriz de $(N_x - 2)(N_x - 2)$, Q .

$$Q = \begin{bmatrix} r_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_3 \end{bmatrix}$$

Puesto que la malla está formada por $N_y - 2$ filas y teniendo en cuenta las afecciones de la primera y última fila, tenemos que la matriz A es de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} P_1 & Q & 0 & \dots & 0 \\ Q & P & Q & \ddots & \vdots \\ 0 & Q & P & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & Q \\ 0 & \dots & 0 & Q & P_2 \end{bmatrix}$$

Puesto que la fuente está ubicada en la posición $x_0 = 32$ y $y_0 = 4$, con $w_0 = w(x_0, y_0) = 1$, entonces, para encontrar la ubicación de la fuente en los puntos sucesivos en x e y , es necesario lo siguiente:

$i_f = \frac{x_0}{h}$ y $j_f = \frac{y_0}{k}$, así para ubicar w_l , aplicamos nuevamente la formula $w_{p_f} = w_{i_f + (N_y - 2 - i_f)(N_x - 2)}$, y teniendo tal ubicación en la matriz A , en la p_f -ésima fila se llena de ceros y sólo se coloca el valor de 1 en tal fila, en la columna p_f ; llamemos a esta nueva matriz A_f , de tal modo que se creó un nuevo vector B , tal que es 1 en la posición p_f y 0 (cero) en las demás posiciones, es decir,

$$w_0 = w_{p_f}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así la solución aproximada por el método de diferencias finitas, se determina por medio

de la relación

$$A_f W = B.$$

Finalmente, haciendo uso de MATLAB, encontramos las graficas del nivel de sonido a lo largo y ancho de la calle, en las condiciones anteriormente mencionadas para diferentes nodos (ver figuras 3.1 y 3.2):

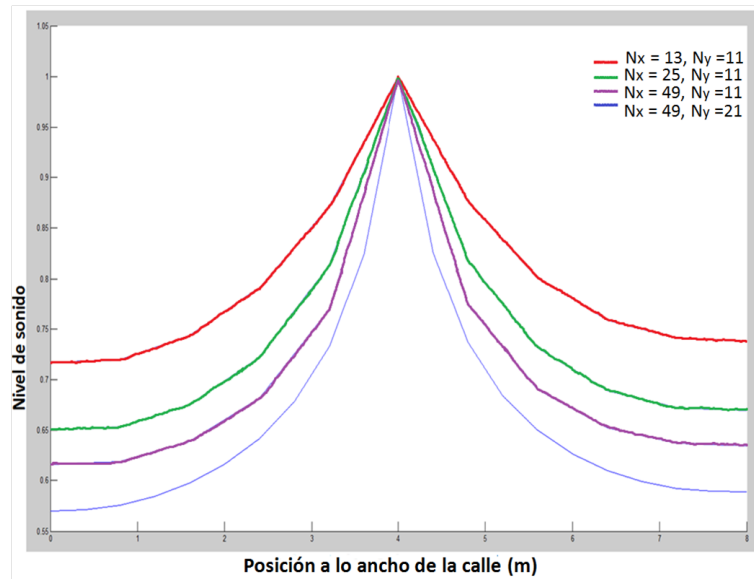


Figura 3.2: Nivel de sonido en la sección transversal de la calle en $x = x_0$, para una fuente constante ubicada en $x_0 = 32m$ y $y_0 = 4m$, ($w_0 = 1$). Se muestran los resultados numéricos con 13×11 nodos, 25×11 nodos, 49×11 nodos y 49×21 nodos.

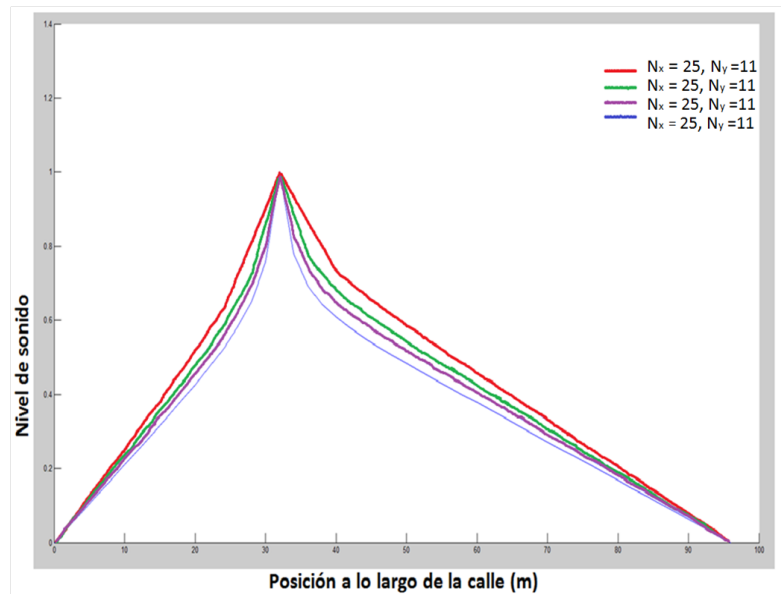


Figura 3.3: Nivel de sonido a lo largo del eje de la calle en $y = y_0$ para una fuente constante ubicada en $x_0 = 32m$ y $y_0 = 4m$, ($w_0 = 1$). Se muestran los resultados numéricos con 13×11 nodos, 25×11 nodos, 49×11 nodos y 49×21 nodos.

Conclusión

En este trabajo hemos propuesto un esquema numérico para predecir la distribución del sonido y la decadencia de sonido en una calle con límites de reflexión difusa. Este método se basa en un nuevo modelo matemático (el modelo de difusión) desarrollado en trabajos anteriores para las calles y habitaciones rectangulares, basándose en una ecuación de difusión. La simplicidad de dicha ecuación se basa en derivadas sencillas de ecuaciones en diferencias finitas, que puede ser fácilmente computado para predecir la distribución del sonido y la reverberación del sonido en las zonas urbanas. Aunque hemos dado sólo ecuaciones de diferencias finitas en dos dimensiones, la generalización a tres dimensiones se puede hacer fácilmente. Sin embargo, las verdaderas configuraciones urbanas son más complicadas que las calles rectangulares, con edificios rectangulares y cruces de carreteras perpendiculares. Por lo tanto, las ecuaciones en diferencias finitas deben ser más complejas que las que están dadas en este documento. Las comparaciones con las soluciones analíticas han demostrado que las soluciones numéricas tienen una convergencia rápida, incluso cuando muy pocos nodos se utilizan para la malla, en este punto, se debe señalar que este modelo numérico es muy similar al calor. Las mismas ecuaciones y los mismos términos (coeficiente de difusión, coeficiente de intercambio) son utilizados en ambos problemas. Entonces, el uso de programas de transferencia de calor, que funciona tanto en estado estacionario y problemas transitorios, podría ser una forma fácil de estudiar acústica en problemas mas complejos de las zonas urbanas, sin modificaciones importantes y con un bajo costo. Por otra parte, aunque en este trabajo, hemos aplicado el esquema numérico para una configuración rectangular urbana con un único punto de origen, también se pueden considerar fácilmente muchas extensiones, en particular haciendo el uso de software de transferencia de calor. También pueden utilizar otro tipo de fuentes sonoras: dos, tres o más simultáneamente moviendo las fuentes puntuales o fuentes lineales de sonido, tanto en el estado estacionario y el estado transitorio, del manera similar se puede utilizar para predecir la propagación del sonido desde vehículos en movimiento y en los flujos de tráfico.

Anexos

En esta sección se anexan las simulaciones hechas en MATLAB 7.7.0.471 (R 2008b), License Number: 161051, que permiten el desarrollo del trabajo.

ALGORITMO MATLAB

```
clear;
clc
lx = 96; %longitud en x
ly = 8; %longitud en y
alpha = 0,05; %coeficiente de absorcion
D2D = 105; %parametro de difucion en 2D
velson = 343,2; %velocidad del sonido
h = velson * (alpha/4); %coeficiente de intercambio
Dx = D2D * lx; %coeficiente de difucion en x
Dy = D2D * ly; %coeficiente de difucion en y
nx = [13, 25, 49, 49]; %numero de puntos en x
ny = [11, 11, 11, 21]; %numero de puntos en y
a = lx./(nx - 1); %tamaño de paso en x
b = ly./(ny - 1); %tamaño de paso en y
r1 = -2 * ((Dx./a.^2) + (Dy./b.^2));
r2 = Dx./a.^2;
r3 = Dy./b.^2;
r4 = (b * h + Dy)/Dy;
for
k = 1 : 4
X = 0 : a(k) : lx;
Y = 0 : b(k) : ly;
A = zeros((nx(k) - 2) * (ny(k) - 2), (nx(k) - 2) * (ny(k) - 2)); %tamaño de la matriz
for
i = 1 : nx(k) - 2
P(i, i) = r1(k); %submatriz de la diagonal principal
P1(i, i) = r1(k) + (r3(k) * r4(k)); %primera submatriz de la diagonal principal
P2(i, i) = r1(k) + (r3(k) / r4(k)); %ultima submatriz de la diagonal principal
```

```

Q(i, i) = r3(k);
inferior
end
for
i = 1 : nx(k) - 3
P(i + 1, i) = r2(k);
P(i, i + 1) = r2(k);
P1(i + 1, i) = r2(k);
P1(i, i + 1) = r2(k);
P2(i + 1, i) = r2(k);
P2(i, i + 1) = r2(k);
end
for i = 1 : ny(k) - 2
A((nx(k) - 2) * (i - 1) + 1 : i * (nx(k) - 2), (nx(k) - 2) * (i - 1) + 1 : i * (nx(k) - 2)) = P;
end
for
i = 1 : ny(k) - 3
A((nx(k) - 2) * (i - 1) + (nx(k) - 1) : i * (nx(k) - 2) + (nx(k) - 2), (nx(k) - 2) * (i - 1) + 1 :
i * (nx(k) - 2)) = Q;
A((nx(k) - 2) * (i - 1) + 1 : i * (nx(k) - 2), (nx(k) - 2) * (i - 1) + (nx(k) - 1) :
i * (nx(k) - 2) + (nx(k) - 2)) = Q;
end
for
i = 1 : nx(k) - 2
A(i, i) = P1(i, i);
A((nx(k) - 2) * (ny(k) - 2) - i + 1, (nx(k) - 2) * (ny(k) - 2) - i + 1) = P2(i, i);
end
x0 = 32; y0 = 4;
ii = x0/a(k); jj = y0/b(k); 4
pos = ii + (ny(k) - 2 - jj) * (nx(k) - 2);
A(pos, :) = zeros(1, (nx(k) - 2) * (ny(k) - 2));
A(pos, pos) = 1;
C = zeros((nx(k) - 2) * (ny(k) - 2), 1);
C(pos, 1) = 1;
W = A \ C;
for
i = 1 : nx(k) - 2
for
j = 1 : ny(k) - 2
Ww(i, j) = W(i + (ny(k) - 2 - j) * (nx(k) - 2));
end
end

```

%submatriz de la diagonal superior e

%ubicacion de la fuente

%coordenadas en x e y

```
end
for
i = 1 : nx(k) - 2
J1(i) = (Dy/(h * b(k) + Dy)) * Ww(i, 1);
J2(i) = (Dy/(h * b(k) + Dy)) * Ww(i, ny(k) - 2);
end
Com = zeros(nx(k), ny(k));
Com(2 : nx(k) - 1, 1) = J1;
Com(2 : nx(k) - 1, ny(k)) = J2;
Com(2 : nx(k) - 1, 2 : ny(k) - 1) = Ww;
Sol = Com';
hold on
%plot(Y, Sol(:, ii + 1))
plot(X, Sol(jj + 1, :))
hold off
end
```

Bibliografía

- [1] Picaut J., *Numerical modeling of urban sound fields by a diffusion process*. Applied Acoustics, 63(2002) pág 965-991.
- [2] Picaut J, Hardy J, Simon L., *Sound propagation in urban areas: a periodic disposition of buildings*. Physical Review E 1999; 60:4851-9.
- [3] Picaut J, Simon L, Polack JD., *A mathematical model of diffuse sound field based on a diffusion equation*. ACUSTICA-Acta acustica 1997;83:614-21.
- [4] Picaut J, Simon L, Polack JD., *Sound field in long rooms with diffusely reflecting boundaries*. Applied Acoustics 1999;56:217-40.
- [5] Picaut J, Simon L, Hardy J., *Sound field modeling in streets with a diffusion equation*. Journal of the Acoustical Society of America 1999;106(5):2638-45.
- [6] Press WH, Flannery BP, Teukolsky SA, Vetterling WT., *Numerical recipes in C, the art of scientific computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [7] Incropera FP., De Witt DP., *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 1990.
- [8] Zill D.G., Cullen M.R., *ecuaciones diferenciales parciales con problemas en la frontera*. 6ed. 2006.
- [9] Burden R., Faires JD., *Análisis Numérico*. 4ed. 1998.
- [10] Cengel Y., *Transferencia de calor y masa: un enfoque práctico*. 3ed. 2007.
- [11] Tassi PA., Engelberger CR., *Introducción al método de diferencias finitas*.