G-DERIVADA Y F-DERIVADA EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS LOCALMENTE CONVEXOS

JEIDER AUGUSTO DIAZ NEGRETE

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA D.T Y C
OCTUBRE 2010

2

G-DERIVADA Y F-DERIVADA EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS LOCALMENTE CONVEXOS

JEIDER AUGUSTO DIAZ NEGRETE

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ASESORA
MARÍA OFELIA VASQUEZ

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA D.T Y C
OCTUBRE 2010

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente al ***Dios de Abraham, al Dios de Isaac, al Dios de Jacob****, por darme las fuerzas necesarias para realizar mi sueño de ser un profesional, por darme sabiduría, por darme paciencia, por estar conmigo en todos los momentos de mi vida y escuchar mis oraciones y clamores. ¡TE AMO PAPA DIOS!.*

A mis padres ***Carlos Daniel Díaz Pérez, Yenis Negrete Zuleta*** *y mi hermano* ***Carlos Daniel Díaz Negrete****, que por su gran esfuerzo y dedicación para suplirme económica y emocionalmente, me han hecho sentir que no estoy solo, sin importar que no estén conmigo en el presente.*

A mis pastores ***Jhon Jairo Sánchez Babilonia*** *y* ***Ana María de Sánchez****, por haberse dejado usar de Dios para darme consejos y palabras de fortaleza en los momentos de debilidad física y espiritual.*

A mi Prometida ***Dorelis Jimenez Jaramillo*** *que es una bendición de Dios, por estar siempre a mi lado apoyandome para que todo sea mas fácil en mi vida. ¡TE AMO PRINCESA!*

A mi asesora, la ***Dra. Maria Ofelia Vázquez****, por haber llenado mi vida de conocimientos matemáticos y por aceptar la responsabilidad de guiarme en mi trabajo de grado. ¡Gracias Dra María Ofelia!.*

Por último dedico este trabajo a todos mis amigos y familiares que me han abierto no solo las puertas de sus casas, sino también las puertas de sus corazones para hacer de mi carrera una realidad.

Índice

INTRODUCCIÓN

Toda la teoría que encierra la construcción y deducción de **espacios topológicos**, encierra un misterio dentro del mundo matemático, pues este es construido a partir de métricas generadas por conjuntos abiertos.

El resultado que se quiere obtener en este trabajo, es construir a partir del análisis funcional, la topología y el análisis complejo, usando los espacios topológicos localmente convexos, condiciones para que las derivadas de Frechét y de Gâteaux sean equivalentes.

Brevemente lo que se realiza en primera instancia es definir algunos conceptos de seminorma, conjuntos equilibrados, absorventes y convexos, para definir los espacios vectoriales apropiados en el desarrollo de éste trabajo. Tales espacios son los *espacios vectoriales topológicos localmente convexos.* Luego se definirán las derivadas de Fréchet y de Gâteaux para después proceder a demostrar algunos resultados que se utilizarán en los capítulos postreros.

Una vez demostrados los resultados referentes a las derivadas de Fréchet y Gâteaux, se procederá a demostrar el teorema principal llamado ***Teorema de Hartogs en dimensión infinita***, primeramente en un espacio vectorial topológico localmente convexo de dimensión finita. Este espacio es muy conocido y cumple con todas las condiciones de la hipótesis del teorema; este espacio es $\mathbb{C}^n$. Seguidamente se demuestra el teorema para el caso general, es decir, en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos, donde son definidas las funciones que se le aplican las derivadas anteriormente mencionadas. Estos espacios son de dimensión infinita.
Así en el capítulo 1 se estudiará la $F-$derivada y la $G-$derivada, en el capítulo 2 mostraremos el teorema de Hartogs para $X = \mathbb{C}^n$ en donde se tendrá en cuenta la definición de espacio de Baire y las definiciones de topología debil que serán útiles para demostrar el teorema de Hartogs en dimensión finita y se demostrarán algunos resultados con condiciones necesarias para que se cumpla la $F-$diferenciabilidad en funciones definidas en tales espacios vectoriales topológicos localmente convexos, en el capítulo 3 se mostrará el teorema de Hartogs caso general, demostrando con anterioridad consecuencias de polinomios homogéneos continuos de grado n y en el Apéndice se encuentran todos los resultados necesarios que son utilizados para desarrollar la teoría.

1. CAPÍTULO 1
F-DERIVADA Y G-DERIVADA EN $\mathbb{C}$

En este capítulo introducimos algunos conceptos y resultados sin demostración como son los de seminorma, conjuntos convexos, conjuntos equilibrados, conjuntos absorbentes, para luego poder definir el espacio en el que se realizará este trabajo que son los espacios vectoriales topógicos localmente convexos. Una vez introducidos estos conceptos y resultados, se demostrará el primer teorema de F-diferenciabilidad, que se realiza particularmente para una función definida desde $\mathbb{C}^n$, hasta $\mathbb{C}$ que admita derivadas parciales en cada punto.
El lector interesado en la demostración, puede consultar [13].

Definición 1.1. *Una función de valor real $p(x)$, definida sobre un espacio vectorial X se llama una* ***seminorma****, sobre X, si satisface las siguientes condiciones:*

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

Nota 1.1. *El conjunto $\mathbb{R}^+$, es el conjunto formado por todos los números reales positivos, esto es*

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Proposición 1.1. *Una seminorma $p(x)$ satisface:*

(i) $p(0) = 0$

(ii) $p(x_1 - x_2) \geq |p(x_1) - p(x_2)|$

Proposición 1.2. *Sea $p(x)$ una seminorma sobre X y c cualquier número positivo, entonces el conjunto*

$$M = \{x \in X : p(x) \leq c\}$$

cumple las siguientes propiedades

(1) $0 \in M$
M es ***convexo*** *si y solamente si, $x, y \in M$ y $0 < \alpha < 1$, implica que* $[\alpha x + (1-\alpha)y] \in M$

(2) *M es* ***equilibrada o balanceada*** *si $x \in M$ y $|\alpha| \leq 1$, implica que $\alpha x \in M$*

(3) *M es* ***absorbente*** *si y solamente si, para cualquier $x \in X$, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in M$*

(4)

$$p(x) = \inf_{\alpha>0, \alpha^{-1}x \in M} \alpha c$$

(ínf = ínfimo = la mayor cota inferior)

Definición 1.2. *Sean X, Y e.v.t.l.c. y Ω un subconjunto abierto de X. Una función $f : \Omega \longrightarrow Y$ es* ***G-diferenciable*** *en $a \in \Omega$, si el límite*

$$Gf(a,h) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

existe para todo $h \in X$. Diremos que $h \to G(f(a,h)) = \varphi(h)$ es la ***G-derivada*** *de f e el punto a.*

Definición 1.3. *Sean X, Y e.v.t.l.c. y Ω un subconjunto abierto de X. Una función $f : \Omega \longrightarrow Y$ es* ***F-diferenciable*** *en $a \in \Omega$, si existe una función lineal $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ con la propiedad siguiente:*
Para toda seminorma q continua en Y, existe una seminorma p en X tal que

$$\lim_{h\to 0, p(h)\neq 0} \frac{q(f(a+h) - f(a) - u(h))}{p(h)} = 0$$

es decir, para $\epsilon > 0$

$$q(f(a+h) - f(a) - u(h)) \leq \epsilon p(h)$$

para valores de $p(h)$ suficientemente pequeños.
Existe a lo más una función lineal continua u con esta propiedad, a la cual llamaremos ***F-derivada*** *de f en el punto a y escribiremos $u = Df(a)$.*

Lema 1.1. *Si f es F-diferenciable, entonces f es G-diferenciable.*

Demostración. Supongamos que f es F-diferenciable, entonces, para toda seminorma continua q en Y, existe una seminorma continua p en X tal que

$$\lim_{h\to 0, p(h)\neq 0} \frac{q(f(a+th) - f(a) - Df(a))}{p(h)} = 0$$

para $t \in X$. Por proposición 1.1 tenemos que

$$\frac{q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))}{p(h)} \leq \frac{|q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))|}{p(h)}$$

y

$$\frac{|q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))|}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+th)-f(a)-Df(a))}{p(h)}$$

entonces, por transitividad

$$\frac{q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+th)-f(a)-Df(a))}{p(h)}.$$

Consideremos $0 < p(h) < 1$, entonces

$$\frac{q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))p(h)}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))}{p(h)}$$

luego,

$$\frac{q(f(a+th)-f(a))-q(Df(a))p(h)}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+th)-f(a)-Df(a))}{p(h)}$$

entonces,

$$\frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)} - \frac{q(Df(a))p(h)}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+th)-f(a)-Df(a))}{p(h)}.$$

Ahora, cuando $h \to 0$, con $h \neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)} - q(Df(a))\right) \leq \lim_{h\to 0}\frac{q(f(a+th)-f(a)-Df(a))}{p(h)}$$

donde $h \neq 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0}\frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)} - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(Df(a)) \leq 0.$$

Pero como p y q son seminormas de X y Y respectivamente, entonces $p(x) \geq 0$ y $q(y) \geq 0$, para todo $x \in X$ y $y \in Y$, de modo que

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)} - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(Df(a)) = 0,$$

así que

$$q(Df(a)) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)}.$$

Es claro que cuando $h \to 0$, $p(h) \to 0$, entonces definamos $G(a,h) = q(Df(a))$, así

$$G(a,h) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{q(f(a+th)-f(a))}{p(h)},$$

por tanto $G(a,h)$ existe para $h \in X$, lo que obtenemos que f es $G-$diferenciable.

■

Lema 1.2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es $F-$diferenciable en $a \in X$, entonces f es continua en $a \in X$*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función $F-$diferenciable en $a \in X$, entonces

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{q(f(a+h)-f(a)-u(h))}{p(h)} = 0,$$

para valores de $p(h)$ suficientemente pequeños.
Debemos mostrar que:

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a+h)) = q(f(a)).$$

En efecto.
Puesto que f es F-diferenciable en $a \in X$, entonces f está definida en $a \in X$, luego por proposición 1.1 tenemos que

$$\frac{q(f(a+h)) - q(f(a)) - q(u(h))}{p(h)} \leq \frac{q(f(a+h)-f(a)-u(h))}{p(h)}$$

Además, para $p(h)$ suficientemente pequeño tenemos

$$\frac{q(f(a+h)) - q(f(a)) - q(u(h))}{p(h)} \cdot p(x) \leq \frac{q(f(a+h)) - q(f(a)) - q(u(h))}{p(h)}$$

entonces

$$q(f(a+h)) - q(f(a)) - q(u(h)) \leq \frac{q(f(a+h) - f(a) - u(h))}{p(h)}$$

así, cuando $h \to 0, p(h) \to 0$ y tenemos que:

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a+h)) - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a)) - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(u(h)) \leq 0$$

luego

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a+h)) - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a)) - \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(u(h)) = 0,$$

de modo que

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a+h)) = \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a)) + \lim_{h\to 0, h\neq 0} q(u(h)).$$

Pero como u es continua, entonces

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(u(h)) = 0$$

por consiguiente

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} q(f(a+h)) = q(f(a)).$$

lo que demuestra que f es continua en $a \in X$. ■

Teorema 1.3 (Teorema de Hartogs). *Si Ω es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^n$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, admite derivadas paciales en cada punto, entonces f es F-diferenciable.*

Demostración. Ver Bibliografía [13]. ■

Corolario 1.4. *Si $X = \mathbb{C}^n$ y $Y = \mathbb{C}$, entonces f es $G-$diferenciable si y solamente si f es $F-$diferenciable.*

Demostración. Sean $X = \mathbb{C}^n$ y $Y = \mathbb{C}$. Supongamos que f es $F-$diferenciable y veamos que f es $G-$diferenciable. En efecto.
El lema 1.1 garantiza la verdad de esta implicación.
Supongamos que f es $G-$diferenciable, veamos que f es $F-$diferenciable. En efecto.
Puesto que f es $G-$diferenciable, entonces existe el límite

$$Gf(a,h) = \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

para todo $h \in X$ y $a \in X$, luego éste límite existe para los vectores unitarios $e_k = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, es decir

$$Gf(a,h) = \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t}$$

existe para todo $a \in X$, así, f admite derivadas parciales en X y por el ***Teorema de Hartogs*** (teorema 1.3), f es $F-$diferenciable. ■

2. CAPÍTULO 2 TEOREMA DE HARTOGS EN DIMENSIÓN FINÍTA.

En el estudio de los espacios topológicos localmente convexos, podemos considerar la intersección de toda familia numerable de conjuntos densos y abiertos, el cuál será útil en la demostración del teorema de Hartogs, puesto que en su hipótesis toma en cuenta los espacios de Baire como consecuencia de los espacios localmente convexos cuando la intersección de toda familia numerable de subconjuntos densos y abiertos es un subconjunto denso.
En primer lugar mostremos que el espacio vectorial topológico localmente convexo $\mathbb{C}^n$ es de Baire.

Lema 2.1. *El espacio vectorial topológico localmente convexo $\mathbb{C}^n$, es un espacio de Baire.*

Demostración. Para demostrar que $\mathbb{C}^n$ es de Baire, debemos probar que cualquier intersección numerable de abiertos densos de $\mathbb{C}^n$ es densa, esto es, sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}\backsim\{0\}}$ una familia numerable de $\mathbb{C}^n$ tal que para cada $i \in \mathbb{N} \backsim \{0\}$, X_i es abierto y denso en $\mathbb{C}^n$.
Definamos

$$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}\backsim\{0\}} X_i.$$

Debemos mostrar que A es denso en $\mathbb{C}^n$, es decir $\overline{A} = \mathbb{C}^n$, en efecto.
Sea $x \in \overline{A}$, entonces $x \in A$ o $x \in A'$, pues $\overline{A} - A \cup A'$. Si $x \in A$, entonces $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}\backsim\{0\}} X_i$, luego para todo $i \in \mathbb{N} \backsim \{0\}$, $x \in X_i$, pero $X_i \subseteq \mathbb{C}^n$ para todo $i \in \mathbb{N} \backsim \{0\}$, entonces $x \in \mathbb{C}^n$.
Si $x \in A'$, entonces para cualquier $r > 0$ tenemos que $B(x,r) \cap \mathbb{C}^n \sim \{x\} \neq \emptyset$, luego existe $y \in \mathbb{C}^n$ y $y \neq x$ tal que $y \in B(x,r)$, esto implica que $x \in B(y,r) \subseteq \mathbb{C}^n$, así que $x \in \mathbb{C}^n$.
En resumen, si $x \in \overline{A}$, entonces $x \in \mathbb{C}^n$, obteniendo $\overline{A} \subseteq \mathbb{C}^n$.

Veamos que $\mathbb{C}^n \subseteq \overline{A}$. Razonemos por contradicción, esto es, supongamos que $\mathbb{C}^n \nsubseteq \overline{A}$, luego para $x \in \mathbb{C}^n$, entonces $x \notin \overline{A}$, así $x \in (\overline{A})^c$, es decir, $x \in (A \cup A')^c$, esto es $x \in (A^c \cap (A')^c)$, luego $x \in A^c$ y $x \notin A'$, esto es, $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}\backsim\{0\}} X_i^c$ y existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap \mathbb{C}^n \sim \{x\} = \emptyset$. Puesto que $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}\backsim\{0\}} X_i^c$, entonces $x \in X_k^c$ para algún $k \in \mathbb{N} \backsim \{0\}$, pero

X_k es abierto, entonces X_k^c es cerrado, luego $x \in \overline{X_k^c}$, es decir X_k^c contiene todos sus puntos límites, es decir $x \in (X_k^c)'$, por tanto para todo $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap \mathbb{C}^n \smallsetminus \{x\} \neq \emptyset$.
Cuando $\epsilon = r$, existe contradicción. Por tanto $\mathbb{C}^n \subseteq \overline{A}$. En resumen, $\overline{A} \subseteq \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^n \subseteq \overline{A}$, por tanto $\overline{A} = \mathbb{C}^n$, lo que cumple que A es denso en $\mathbb{C}^n$, concluyendo que $\mathbb{C}^n$ es de Baire. ■

Teorema 2.1 (Teorema de Hartogs en dimensión finíta). *Sean $\mathbb{C}^n$ y Y e.v.t.l.c., $\mathbb{C}^n$ espacio de Baire, Y secuencialmente completo y Ω un subconjunto abierto y conexo de X. Si $f : \Omega \longrightarrow Y$ es continua en un punto y G-diferenciable, entonces es F-diferenciable.*

Demostración. Inicialmente demostremos que la función $h \to Gf(a,h) = \varphi(h)$ de $\mathbb{C}^n$ en Y es lineal. En efecto:
Sea $u \in Y^*$ donde Y^* es el espacio dual de Y, luego u es lineal y continua. Como f es $G-$diferenciable en $a \in \Omega$, tenemos que

$$Gf(a,h) = \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

existe, luego

$$\begin{aligned}
u(Gf(a,h)) &= u\left(\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}\right)\\
&= \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} u\left(\frac{f(a+th)-f(a)}{t}\right)\\
&= \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{u(f(a+th)-f(a))}{t}\\
&= \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{u(f(a+th))-u(f(a))}{t}\\
&= \lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{u\circ f(a+th)-u\circ f(a)}{t}\\
&= G(u\circ f)(a,h)
\end{aligned}$$

esto es, la $G-$derivada de la función $u \circ f$ en $a \in \Omega$ existe, de modo que $u \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es $G-$diferenciable en $a \in \Omega$, luego por el teorema 1.3 (teorema de Hartogs) $u \circ f$ es F-diferenciable y su derivada es lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$.

Ahora

$$
\begin{aligned}
D(u\circ f)(a)h &= \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{u\circ f(a+th) - u\circ f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{u(f(a+th)) - u(f(a))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0, t\neq 0} u\left(\frac{f(a+th)-f(a)}{t}\right) \\
&= u\left(\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}\right) \\
&= u(\varphi(h)) \\
&= (u\circ\varphi)(h)
\end{aligned}
$$

Así hemos demostrado que $u\circ\varphi$ es lineal. Si $x, y \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$
\begin{aligned}
u(\varphi(x+y)) &= (u\circ\varphi)(x+y) \\
&= (u\circ\varphi)(x) + (u\circ\varphi)(y) \\
&= u(\varphi(x)) + u(\varphi(y)) \\
&= u(\varphi(x) + \varphi(y))
\end{aligned}
$$

luego,

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

además, para cualquier λ.

$$
\begin{aligned}
u(\varphi(\lambda x)) &= (u\circ\varphi)(\lambda x) = \lambda(u\circ\varphi)(x) \\
&= \lambda \cdot u(\varphi(x)) = u(\lambda\varphi(x))
\end{aligned}
$$

así

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$$

De modo que φ es lineal.
Demostremos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{q(\omega(h))}{\| h \|} = 0, \qquad \text{donde} \qquad \omega(h) = f(a+h) - f(a) - \varphi(h)$$

para toda seminorma continua q en Y.

Consideremos

$$\| z \| = \sup_{1\leq j\leq n} |z_j|,$$

donde $z \in \mathbb{C}^n$. Veamos que $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma. En efecto:
Sean $x,\ y \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \| x+y \| &= \sup_{1\leq j\leq n} |x_j + y_j| \leq \sup_{1\leq j\leq n} (|x_j| + |y_j|) \\ &\leq \sup_{1\leq j\leq n} |x_j| + \sup_{1\leq j\leq n} |y_j| = \| x \| + \| y \| \end{aligned}$$

así,

$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\| \lambda x \| = \sup_{1\leq j\leq n} |\lambda x_j| = |\lambda|_{\mathbb{R}} \sup_{1\leq j\leq n} |x_j| = \lambda \| x \|$$

esto es,

$$\| \lambda x \| = |\lambda|_{\mathbb{R}} \| x \|$$

Por tanto, la función $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma.
Definamos $W = \{z \in \mathbb{C}^n : \| z \| \leq \beta\}$, donde $\beta > 0$. Si β es suficientemente pequeño, entonces $a + W \subseteq \Omega$. En efecto:
Sea $a \in \Omega$ y supongamos que $z \in (a + W)$, entonces existe $x \in W$ tal que $z = a + x$, luego $x = z - a$, pero como $x \in W$, entonces $\| z - a \| = \| x \| \leq \beta$, así, z está en la bola cerrada $B[a, \beta]$, esto es, $z \in B[a, \beta]$. Consideremos $\alpha > 0$, tal que $\beta < \alpha$, entonces $\| z - a \| \leq \beta < \alpha$, luego $z \in B(a, \alpha)$, pero $a \in \Omega$ y Ω es abierto, entonces $B(a, \alpha) \subseteq \Omega$, por lo tanto $z \in \Omega$.
En resumen. Si $z \in (a + W)$, entonces $z \in \Omega$, esto es $a + W \subseteq \Omega$.

Veamos que W es cerrado. Razonemos por contradicción. En efecto:
Supongamos que W es abierto, entonces para todo $x \in W$, existe $r > 0$

tal que $B(x,r) \subseteq W$. Veamos si esto es cierto: Definamos $r = \text{mín}\{\beta - \| x \|, \| x \|\}$ y tomemos $y \in B(x,r)$, entonces $\| y - x \| < r$; por definición $r \leq \beta - \| x \|$ y $r \leq \| x \|$; luego, $\| y - x \| < r < \beta - \| x \|$ y $\| y - x \| < r \leq \| x \|$; además $\| x \| \leq \beta$, entonces $\| y - x \| < \beta - \| x \| \leq \beta - \beta = 0$ y $\| y - x \| < \| x \| \leq \beta$; de modo que $(y - x) \in W$ y $\| y - x \| < 0$ (contradicción). Por lo tanto W es cerrado.

Veamos que W está acotado. Sean $x, y \in W$, entonces $\| x \| \leq \beta$ y $\| y \| \leq \beta$, además
$\| x - y \| = \| x + (-y) \| \leq \| x \| + \| -y \| = \| x \| + \| y \| < 2\beta$. Definamos $M = 2\beta$, luego $\| x - y \| \leq M$ y por tanto W está acotado.

Puesto que $W \subseteq \mathbb{C}^n$ es cerrado y acotado, entonces $W \subseteq \mathbb{C}^n$ es compacto. Definamos

$$\begin{aligned} \sigma : W &\longrightarrow a + W \\ x &\longmapsto \sigma(x) = a + x \end{aligned}$$

Veamos que σ es continua. Para ello debemos mostrar que

$$\lim_{x \to h} \sigma(x) = \sigma(h) = a + h.$$

En efecto:
Para todo $\epsilon > 0$, definimos $\delta = \epsilon$. Si $\| x - h \| < \delta$, entonces $\| x - h \| < \epsilon$, luego $\| x + a - a - h \| < \epsilon$, así $\| x + a - (h + a) \| < \epsilon$, esto es, $\| \sigma(x) - \sigma(h) \| < \epsilon$. En resumen. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\| \sigma(x) - \sigma(h) \| < \epsilon$, siempre que $\| x - h \| < \delta$, esto es

$$\lim_{x \to h} \sigma(x) = \sigma(h).$$

demostrando así que σ es continua en $h \in W$, pero como $h \in W$ es cualquiera, entonces σ es continua en W.

Hemos demostrado que W es compacto y que la función $\sigma : W \longrightarrow a + W$ es continua en todo W, entonces por teorema 1.52 (Ver [7]) $\sigma(W) = a + W$ es compacto.
Puesto que $a + W$ es compacto, entonces $a + W$ es acotado, veamos que $|u \circ f(a + W)|$ es acotado. En efecto:
Sean $x, y \in (a + W)$, entonces existen $n, m \in W$ tales que $x = a + n$ y

$y = a + m$, luego

$$\begin{aligned}|u \circ f(x) - u \circ f(y)| &= |u \circ f(a+n) - u \circ f(a+m)| = |u \circ f(a+n-a-m)| \\ &= |u \circ f(n-m)| = |u \circ f(n) - u \circ f(m)| \\ &\leq |u \circ f(n)| + |u \circ f(m)|.\end{aligned}$$

Definamos $M = |u \circ f(n)| + |u \circ f(m)|$, luego $|u \circ f(x) - u \circ f(y)| \leq M$; por tanto $|u \circ f(a+W)|$ es acotada, de modo que

$$M_u = \sup_{z \in a+W} |u \circ f(z)| < \infty.$$

Consideremos la función $g(t) = f(a+tz)$, $\| z \| = \beta$ y $|t| \leq 1$.
Para cada $u \in Y^*$, la función $u \circ g$ es una función con valores en $\mathbb{C}$, la cual es F-diferenciable. Por el teorema 5.1(Ver Apéndice), podemos escribir:

$$\begin{aligned}(u\circ g)(t)-(u\circ g)(0)-D[(u\circ g)(0)]t &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u \circ g(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u \circ g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u \circ g(\zeta) t}{\zeta^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \left[\frac{u \circ g(\zeta)}{\zeta - t} - \frac{u \circ g(\zeta)}{\zeta} - \frac{u \circ g(\zeta)}{\zeta^2} t\right] d\zeta.\end{aligned}$$

Puesto que $u \circ g$ es analítica(Ver Apéndice, Definición 5.20), se puede expresar como la suma de Taylor:

$(u \circ g)(t) = c_0 + c_1 t, \quad$ donde $\quad c_n = \dfrac{(u \circ g)^n(0)}{n!}$, esto es

$c_0 = (u \circ g)(0), \quad c_1 = \dfrac{(u \circ g)'(0)}{1!}$, luego

$$\begin{aligned}|(u\circ g)(t)-(u\circ g)(0)-D[(u\circ g)(0)]t| &\leq |(u\circ g)(t)-(u\circ g)(0)+D[(u\circ g)(0)]t| \\ &= |c_0 + c_1 t - (u \circ g)(0) + D[(u \circ g)(0)]t| \\ &= |(u \circ g)(0) + D[(u \circ g)(0)]t - (u \circ g)(0) + D[(u \circ g)(0)]t| \\ &= |D[(u \circ g)(0)]t + D[(u \circ g)(0)]t| \\ &= 2|D[(u \circ g)(0)]t| = |(u \circ g)(0)| \cdot |t| \\ &\leq 2|u(g(0))| \cdot |t|^2 = 2|u(f(a))| \cdot |t|^2 \\ &= 2|(u \circ f)(a)| \cdot |t|^2 \leq M_u 2|t|^2\end{aligned}$$

Esto es,

$$|(u \circ g)(t) - (u \circ g)(0) - D[(u \circ g)(0)]t| \leq M_u 2|t|^2$$

si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $\| z \| = \beta$.
Sabemos que $D(u \circ g)(0) = u \circ \varphi(z)$, por consiguiente

$$|u \circ g(t) - u \circ g(0) - u \circ \varphi(z) \cdot t| \leq M_u 2|t|^2$$

esto es
$u(|g(t) - g(0) - \varphi(tz)|) \leq M_u 2|t|^2, \quad$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $\| z \| = \beta$
así,
$u\left(\left|\frac{g(t) - g(0) - \varphi(tz)}{t^2}\right|\right) \leq M_u 2, \quad$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $\| z \| = \beta$,
luego hemos mostrado que el conjunto

$$\left\{\frac{g(t) - g(0) - \varphi(tz)}{t^2} : 0 \leq |t| \leq \frac{1}{2}, \| z \| = \beta\right\}$$

de Y es acotado en la topología debil $\sigma(Y, Y^*)$ según la definición 5.21(Ver Apéndice), donde $u \in Y^*$ y por tanto en la topología original, es decir, para toda seminorma q en Y existe una constante M_q talque

$$q(g(t) - g(0) - \varphi(tz)) \leq M_q 2|t|^2$$

si $|t| \leq \frac{1}{2}$ y $\| z \| = \beta$.
Considerando $h = tz$, donde $\| z \| = \beta$ y $\| h \| = \| tz \| = |t| \| z \| \leq \frac{\beta}{2}$, tenemos que

$$q(g(t) - g(0) - g(tz)) \leq M_q 2|t|^2 = M_q 2\frac{\| h \|^2}{\| z \|^2} \leq M_q 2\frac{\| h \|^2}{\beta^2}$$

esto es,

$$q(g(t) - g(0) - \varphi(h)) \leq M_q \frac{2}{\beta^2} \| h \|^2$$

pero como $g(t) = f(a + tz)$, entonces

$$q(f(a + tz) - f(a) - \varphi(h)) \leq M_q \frac{2}{\beta^2} \| h \|^2, \quad \| z \| = \beta, \| h \| \leq \frac{\beta}{2}$$

es decir

$$\frac{q(f(a+th)-f(a)-\varphi(h))}{\| h \|} \leq M_q 2\frac{2}{\beta^2} \| h \|, \quad \| z \| = \beta, \| h \| \leq \frac{\beta}{2}$$

haciendo $h \to 0$, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{q(\omega(h))}{\| h \|} = 0$$

como se quería probar. ■

Lema 2.2. *Sean* $\Omega = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \beta\}$ *y* Y *es un e.v.t.l.c. secuencialmente completo. Si* $\psi : \Omega \longrightarrow Y$ *es una función tal que* $u \circ \psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* $G-$*diferenciable para toda* $u \in Y^*$*, entonces* ψ *es* $G-$*diferenciable.*

Demostración. Utilizando el corolario 1.4 tenemos que $u \circ \psi$ es $F-$diferenciable, así $u \circ \psi$ es dos veces diferenciable, es lineal y es continua, además es analítica, luego por el teorema de Taylor, podemos expresar $u \circ \psi$ como sigue, con $t_0 = 0$.

$$(u \circ \psi)(t) = \frac{(u \circ \psi)^{(0)}(0)}{0!} \cdot t^0 + \frac{(u \circ \psi)^{(1)}(0)}{1!} \cdot t^1 + \frac{(u \circ \psi)^{(2)}(0)}{2!} \cdot t^2 + r(t) \cdot t^2$$

donde $\lim_{t\to 0} r(t) = 0$, luego

$$(u \circ \psi)(t) = (u \circ \psi)(0) + \frac{d(u \circ \psi)(0)}{dt} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2(u \circ \psi)(0)}{dt^2} \cdot t^2 + r(t) \cdot t^2$$

Así

$$(u \circ \psi)(t) = (u \circ \psi)(0) + c_1 t + c_2 t^2 + r(t)t^2$$

donde

$$c_1 = \frac{d(u \circ \psi)(0)}{dt}, c_2 = \frac{d^2(u \circ \psi)(0)}{2 \cdot dt^2} \quad y \quad \lim_{t\to 0} r(t) = 0.$$

2C

Redefiniendo $r(0) = 0$, tenemos que $r(t)$ es continua, luego existe una constante α, tal que $|r(t)| < \alpha$, de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
\left|u \circ \left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right)\right| &= \left|u\left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right)\right| \\
&= \left|u\left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}\right) - u\left(\frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right)\right| \\
&= \left|\frac{u(\psi(t))-u(\psi(0))}{t} - \frac{u(\psi(\tau))-u(\psi(0))}{\tau}\right| \\
&= \left|\frac{(u\circ\psi)(t)-(u\circ\psi)(0)}{t} - \frac{(u\circ\psi)(\tau)-(u\circ\psi)(0)}{\tau}\right| \\
&= \left|\frac{c_1 t + c_2 t^2 + r(t)t^2}{t} - \frac{c_1\tau + c_2\tau^2 + r(\tau)\tau^2}{\tau}\right| \\
&= |c_1 + c_2 t + r(t)t - c_1 - c_2\tau - r(\tau)\tau| \\
&= |c_2(t-\tau) + r(t)t - r(\tau)\tau| \\
&\leq |c_2(t-\tau)| + |r(t)t - r(\tau)\tau| \\
&\leq |c_2 t - c_2\tau| + |r(t)t - r(\tau)\tau| \\
&\leq |c_2||t| + |c_2||\tau| + |r(t)||t| + |r(\tau)||\tau| \\
&\leq |c_2||t| + |c_2||\tau| + \alpha|t| + \alpha|\tau| \\
&\leq |c_2|(|t|+|\tau|) + \alpha(|t|+|\tau|) \\
&\leq (|c_2|+\alpha)\cdot(|t|+|\tau|) \leq M_u \cdot (|t|+|\tau|)
\end{aligned}$$

donde $M_u = (|c_2| + \alpha)$, esto es

$$\left|u \circ \left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right)\right| \leq M_u \cdot (|t|+|\tau|)$$

luego

$$\left|u \circ \left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right)\right| \cdot (|t|+|\tau|)^{-1} \leq M_u$$

por tanto

$$\left|u \circ \left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right) \cdot (|t|+|\tau|)^{-1}\right| \leq M_u$$

Así hemos demostrado que el subconjunto de Y

$$\left\{\left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} - \frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right) \cdot (|t|+|\tau|)^{-1}\right\} : 0 < |t|, |\tau| \leq \beta$$

es acotado en la topología debil $\sigma(Y, Y^*)$ y por tanto es acotado en la topología inicial de Y. Luego para toda seminorma continua q en Y, existe una constante M_q tal que

$$q\left(\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}-\frac{\psi(\tau)-\psi(0)}{\tau}\right) \leq M_q \cdot (|t|+|\tau|)$$

por consiguiente, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que convere a cero, entonces $\left(\dfrac{\psi(t_n)-\psi(0)}{t_n}\right)$ es una sucesión de Cauchy en Y. En efecto:
Puesto que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es de Cauchy, es decir, para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq k$, entonces $|t_n - t_m| < \epsilon_1$. Pero sabemos que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, así para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, entonces $|t_n| < \epsilon_1$.
Ahora, para todo $\epsilon > 0$, exixte $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq k$, entonces

$$\begin{aligned} q\left(\frac{\psi(t_n)-\psi(0)}{t_n}-\frac{\psi(t_m)-\psi(0)}{t_m}\right) &\leq M_q(|t_n|+|t_m|) \\ &\leq M_q \cdot (\epsilon_1+\epsilon_1) \\ &< 2M_q \cdot \epsilon_1 \\ &< 2M_q \cdot \frac{\epsilon}{2M_q} = \epsilon \end{aligned}$$

definiendo $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2M_q}$.
En resumen, para todo $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq k$, entonces $q\left(\dfrac{\psi(t_n)-\psi(0)}{t_n}-\dfrac{\psi(t_m)-\psi(0)}{t_m}\right) \leq \epsilon$, lo que demuestra que la sucesión $\left(\dfrac{\psi(t_n)-\psi(0)}{t_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y, la cual es convergente ya que Y es secuencialmente completo, por tanto, si $n \longrightarrow \infty$, entonces $t_n \longrightarrow t$ y $(q \circ \psi)(t_n) \longrightarrow (q \circ \psi)(t)$, donde t es cualquiera en $\mathbb{C}$. Así, cuando $t \longrightarrow 0$, el cociente $\dfrac{\psi(t)-\psi(0)}{t}$ existe, lo que demuestra que ψ es $F-$diferenciable y por el lema 1.1, ψ es $G-$diferenciable. ■

Teorema 2.2. *Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^n$ y Y un e.v.t.l.c. secuencialmente completo. Si las derivadas parciales de una función $f : \Omega \longrightarrow Y$ existen, entonces f es $F-$diferenciable.*

Demostración. Consideramos $u \in Y^*$, luego u es lineal y continua, entonces la función $u \circ f : \Omega \longrightarrow Y$ admite derivadas parciales, para $|t| > 0$ y $v_j \in \Omega_j \subset \mathbb{C}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\partial_j(u \circ f)(a) =& \frac{\partial(u \circ f)(a)}{\partial v_j} = \lim_{t \to 0} \frac{(u \circ f)(a + te_j) - (u \circ f)(a)}{t} \\
=& \lim_{t \to 0} \frac{u(f(a + te_j)) - u(f(a))}{t} = \lim_{t \to 0} u\left(\frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}\right) \\
=& u\left(\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}\right) = u \circ \left(\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}\right) \\
=& u \circ \partial_j f(a).
\end{aligned}$$

Así la función $u \circ f$ es contínua en un punto, luego por el teorema de Hartogs en dimención finita (Teorema 2.1), la función $u \circ f$ es $F-$diferenciable y por el lema 1.1, la función $u \circ f$ es $G-$diferenciable. En virtud del lema 2.2 la función f es $G-$diferenciable. En efecto:
Si fijamos $z \in \mathbb{C}$, entonces $(a + tz) \in \Omega$, luego para t suficientemente pequeño, es decir, tomando $|t| \leq \beta$, la función $\phi(t) = f(a + tz)$ es tal que, $u \circ \phi : \Omega \longrightarrow Y$ es $G-$diferenciable, donde $t \in \mathbb{C}$ y $|t| \leq \beta$. Así por el lema 2.2 f es $G-$diferenciable y por el corolario 1.4, f es $F-$diferenciable. ∎

3. CAPÍTULO 3 TEOREMA DE HARTOGS EN DIMENSIÓN INFINÍTA.

En éste capítulo se realizará la demostración del teorema de Hartogs, donde los espacios vectoriales topológicos localmente convexos en los cuales se encuentra definida la función protagonista, es de dimensión infinita, pero antes de proceder a la demostración de dicho teorema, se demostrarán varios resultados auxiliares, y se conocerán algunas definiciones previas.

Definición 3.1. *Sean X, Y e.v.t.l.c. y $f : X \longrightarrow Y$. Se llama* ***homogénea de grado n*** *o* ***n-homogénea*** *a la función f que cumpla la siguiente condición:*

$$f(tx) = t^n f(x),$$

donde $t \in \mathbb{C}$ y $x \in X$.

Proposición 3.1. *Sean X, Y e.v.t.l.c. y Ω un subconjunto abierto de X. Si $f : \Omega \longrightarrow Y$ es $G-$diferenciable, entonces la función $h \to G^n f(a,h)$ es un polinomio homogéneo de grado n. Este polinomio homogéneo es continuo si f es continua en a.*

Demostración. Debemos probar que la función $h \to G^n f(a,h)$ cumple la definición 3.1, es decir para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ y cualquier $h \in X$, se tiene $G^n f(a, \lambda h) = \lambda^n G^n f(a,h)$ y que $h \to G^n f(a,h)$ es continua. En efecto:
Razonemos por inducción sobre n.
Para $n = 1$. Debemos probar que $G^1 f(a, \lambda h) = \lambda^1 G^1 f(a,h)$, es decir $Gf(a, \lambda h) = \lambda Gf(a,h)$.
Sea $\lambda \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} Gf(a, \lambda h) =& \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t(\lambda h)) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda[f(a + t\lambda h) - f(a)]}{\lambda t} \\ =& \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{\lambda t} = \lambda Gf(a,h). \end{aligned}$$

esto es, $Gf(a, \lambda h) = \lambda Gf(a,h)$, donde $\lambda \neq 0$.
Ahora supongamos que para $n = k$, la función $h \to G^n f(a,h)$ es $n-$homogénea,

es decir, que para $h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\lambda \neq 0$, se tiene $G^k f(a, \lambda h) = \lambda^k G^k f(a, h)$.
Sean $h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\lambda \neq 0$, Puesto que $Gf(a, h) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial h}$, entonces

$$\begin{aligned}
G^{k+1} f(a, \lambda h) =& \frac{\partial G^k f(a, \lambda h)}{\partial \lambda h} = \frac{\partial \lambda^k G^k f(a, h)}{\partial \lambda h} = \frac{\lambda^k \partial G^k f(a, h)}{\partial \lambda h} \\
=& \lambda^k \lim_{t \to 0} \frac{f^{(k)}(a + t\lambda h) - f^{(k)}(a)}{t} = \lambda^k \lim_{t \to 0} \frac{\lambda[f^{(k)}(a + t\lambda h) - f^{(k)}(a)]}{\lambda t} \\
=& \lambda^{k+1} \lim_{t \to 0} \frac{f^{(k)}(a + t\lambda h) - f^{(k)}(a)}{\lambda t} = \lambda^{k+1} G^{k+1} f(a, h)
\end{aligned}$$

En resumen, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ tenemos que $G^n f(a, \lambda h) = \lambda^n G^n f(a, h)$, es decir, el polinomio $h \to G^n f(a, h)$ es homogéneo de grado n.
Ahora demostremos que la función $h \to G^n f(a, h)$ es continua, si f es continua en a. En efecto:
Sea $f : \Omega \longrightarrow Y$ una función continua en a. Si demostramos que $h \to G^n f(a, h)$ es continua en 0_X (Listo!).
Sea q una seminorma continua en Y. Si $h \longrightarrow 0$, entonces $q \circ f(a + h) \longrightarrow q \circ f(a)$, así $q \circ f(a + h)$ es continua en $h = 0$, luego existe una vecindad V de 0_X tal que $q \circ f(a + h) \in W$, donde W es una vecindad de $q \circ f(a)$ en Y. Definamos $V = \{x \in X : p(x) \leq c;\ c > 0\}$, luego por la propocisión 1.2, V es una vecindad balanceada de 0_X. Hemos demostrado que si $q \circ f(a + h)$ es continua en $h = 0$, entonces existe una vecindad V de 0_X que es balanceada tal que $q \circ f(a + h) \in W$, donde W es una vecindad de $q \circ f(a)$ en Y. Sin pérdida de generalidad, existe una vecindad balanceada V de 0_X tal que $q \circ f(a + h) \leq 1$ para todo $h \in V$. Definamos la función $t \to f(a + th) = g(t)$. Puesto que f es G−diferenciable en Ω, entonces

$$Gf(a, h) = \lim_{t \to 0,\ t \neq 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0,\ t \neq 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{dg}{dt}(t)$$

luego g es G−diferenciable en $\mathbb{C}$, en particular en $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq r\}$, donde $r < 1$, luego por el teorema 5.1(Ver Apéndice) tenemos que

$$g(t) = f(a + th) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(a + \zeta h)}{\zeta - t} d\zeta,$$

considerando $|t| < \dfrac{r}{2}$, así

$$\frac{d^n g}{dt^n}(t) = \frac{\partial^n f(a + th)}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(a + \zeta h)}{(\zeta - t)^{n+1}} d\zeta, \quad |t| < \frac{r}{2}.$$

Tomando $t = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
q \circ \frac{d^n g}{d^n}(0) =& q \circ \frac{\partial^n f(a)}{\partial t^n} = q \circ G^n f(a,h) = q \circ \left(\frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(a+\zeta h)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) \\
=& \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{q \circ f(a+\zeta h)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{1}{\zeta^{n+1}} d\zeta \leq n! \int_0^r \zeta^{-n-1} d\zeta \\
\leq& n! \frac{r^{-n-1+1}}{n-1+1} \leq n! \frac{r^{-n}}{n} \leq \frac{(n-1)!}{r^n} \leq \frac{n!}{r^n} = M_n
\end{aligned}
$$

Hemos mostrado que existe una vecindad balanceada V de 0_X tal que $q \circ G^n f(a,h) \leq M_n$, luego existe una vecindad K en Y tal que $G^n f(a,h) \in K$, lo que demuestra que la función $h \to G^n f(a,h)$ es continua en 0_X. ∎

Proposición 3.2. *Sean X, Y e.v.t.l.c., $\Omega \subset X$ abierto y conexo. Supongamos que Y es secuencialmente completo. Si $f : \Omega \longrightarrow Y$ es $G-$diferenciable y continua en $a \in \Omega$, entonces existe una vecindad balanceada V de O_X y una familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinomios homogéneos continuos de grado n y*

$$
f(a+h) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n(h) \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad h \in V
$$

Demostración. Definamos la función $t \to f(a+th)$ para $|t| \leq r$, con $r < 1$ y $h \in V$. Por el teorema de serie de Taylor podemos expresar la función definida por medio de la serie

$$
f(a+th) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a,h)}{n!}, \qquad |t| \leq 1
$$

consideremos la función $f_n(h) = \dfrac{G^n f(a,h)}{n!}$, luego por la proposición 3.1, f_n es un polinomio homogéneo de grado n y es continuo, es decir, existe una vecindad balanceada V de 0_X tal que f_n es un polinomio homogéneo y continuo de grado n, luego para todo $n \in \mathbb{N}_0$ existe una familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de polinomios homogéneos y continuos de grado n. Ahora para $t - 1$, tenemos que

$$
f(a+h) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a,h)}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} f_n(h)
$$

para cualquier $h \in \Omega$. ∎

Proposición 3.3. *Sean X, Y e.v.t.l.c., X espacio de baire, Y secuencialmente completo y f_n un polinomio homogéneo y continuo de grado n de X en Y, $n \in \mathbb{N}_0$. Si la serie formal $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n$ converge puntualmente en una vecindad V de 0_X, entonces la función*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(x), \quad x \in V, \quad \textit{es continua en } 0_X.$$

Demostración. Sea V una vecindad abierta y balanceada de 0_X y q una seminorma continua en Y. Supongamos que la serie $\sum f_n$ en V converge puntualmente en V y veamos que $f_n(x) \longrightarrow 0_Y$. En efecto:
Puesto que $\sum f_n(x)$ converge puntualmente en V, definamos f como el límite de ésta serie, de Ω en Y, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x)$$

es decir, para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que si $n \geq N$, entonces $q(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)) < \epsilon_1$. Ahora

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) - q(f(x)) \leq & \left| q\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) - q(f(x))\right| \\ \leq & q\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right) < \epsilon_1 \end{aligned}$$

así, para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$q\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) - q(f(x)) < \epsilon_1,$$

esto implica que

$$q\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right) < \epsilon_1 + q(f(x)) = \epsilon$$

por tanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que si $n \geq N$, entonces $q(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)) < \epsilon$. Pero $q(f_n(x)) \leq q(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)) < \epsilon$, lo que tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que si $n \geq N$, entonces $q(f_n(x)) < \epsilon$, lo que demuestra que $f_n \longrightarrow 0_Y$ si $n \longrightarrow \infty$, para cada $x \in V$. Luego

$q\circ f_n(x) \longrightarrow 0_Y$ para cada $x \in V$, así la sucesión $(q\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es puntualmente acotada en V, pues $q \circ f_n(x) = q(f_n(x)) < \epsilon = M_x$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y todo $x \in V$.
Sabemos que X es un espacio de Baire y $V \subset X$ es abierto. Veamos que V es de Baire. En efecto:
Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una familia de abiertos densos de V, es decir $A_n \subset V$ es denso para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces el conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ es denso, ya que $A_n \subset V \subset X$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y toda intersección de abiertos densos en X, es densa. Por tanto V es de Baire.
Puesto que V es de Baire, abierto y $q\circ f_n$ es puntualmente acotada, entonces existe un subconjunto $A \subseteq V$ abierto en X tal que $(q \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es uniformemente acotada en A, es decir, existe $M > 0$ tal que $q \circ f_n(x) \leq M$ para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}_0$ (*Principio de la acotación uniforme.* Ver teorema 5.2 Apéndice). Definamos el conjunto $W = \bigcup_{|t|\leq 1} tA$ y veamos que W es una vecindad abierta y balanceada de 0_X y $W \subseteq V$. En efecto:
Veamos que W es balanceado, es decir, que para cualquier $x \in W$ y $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha x \in W$. Sea $x \in W$, luego existe $y \in A$ tal que $x = ty$ para $|t| \leq 1$. Sea α tal que $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha x = \alpha t y$, pero $|\alpha t| \leq |\alpha||t| = 1$, de modo que $\alpha x = \alpha t y \in A \subseteq \bigcup_{|t|\leq 1} tA = W$, por tanto W es balanceado. Ahora, puesto que $A \subset tA$ donde $|t| \leq 1$, entonces $A \subseteq \bigcup_{|t|\leq 1} tA = W$, luego $A \subseteq W$. Sabemos que A es abierto y por ende, tA tambien es abierto y como la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, entonces W también es abierto.
Consideremos $x \in W$, con $t = \frac{1}{2}$, luego existe $y \in A$ tal que $x = \frac{1}{2}y$, así

$$q \circ f_n(x) = q \circ f_n\left(\frac{y}{2}\right) = 2^{-n} q \circ f_n(y) \leq 2^{-n} M$$

debido a que f_n es homogénea de grado n y $q \circ f_n$ es uniformemente acotada.
Además, como $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(x) = f(x)$, entonces

$$q \circ f(x) = q \circ \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(x)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} q \circ f_n(x) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n} M \leq 2M = \frac{\epsilon}{2},$$

donde $M = \frac{\epsilon}{4}$ y $x \in W$. Por consiguiente, dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, entonces

$$\sum_{n>k} q \circ f_n(x) \leq 2M = \frac{\epsilon}{2}$$

26

para $x \in W$. Ahora

$$q(f(x)-f(0)) \leq q(f(x)) = q\circ f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q\circ f_n(x) = \sum_{n=1}^{k} q\circ f_n(x) + \sum_{n\geq k+1}^{\infty} q\circ f_n(x).$$

Puesto que f_r es continua para cada r tal que $1 \leq r \leq k$, utilizando el teorema 5.2(Ver Apéndice), existe una vecindad $U_r \subset W$ tal que $q \circ f_r(x) \leq \frac{\epsilon}{2k}$, para todo $x \in U_r$, así

$$q(f(x) - f(0)) \leq \sum_{n=1}^{k} q \circ f_n(x) + \sum_{n\geq k+1}^{\infty} q \circ f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $x \in \mathcal{U} = \bigcap_{1\leq r\leq k} U_r$. esto es:
Dado $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que si $n \geq k$, entonces $q(f(x) - f(0)) \leq \epsilon$, luego $|q \circ f(x) - q \circ f(0)| \leq q(f(x) - f(0)) < \epsilon$, es decir, si $x \longrightarrow 0_X$, entonces $q \circ f(x) \longrightarrow q \circ f(0)$, lo que demuestra que f es continua en 0_X. ■

Proposición 3.4. *Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de un e.v.t. y A un subconjunto abierto y no vacío de Ω. Si $a + W \subset A$ para todo $a \in A$ y toda vecindad balanceada W de cero tal que $a + W \subset \Omega$, entonces $A - \Omega$.*

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos que $A \neq \Omega$. Puesto que A es no vacío y Ω es conexo, veamos que $f_r(A)$ (la frontera de A) es no vacía. En efecto: Por hipótesis tenemos que Ω es conexo, luego $\Omega = Int(A) \cup Ext(A) \cup f_r(A)$, donde $Int(A) \cap Ext(A) = f_r(A) \neq \emptyset$. Si $f_r(A) = \emptyset$, entonces $Int(A) \cap Ext(A) = \emptyset$, obteniendo así una separación de $Int(A)$ y $Ext(A)$ en Ω, es decir Ω no es conexo, lo que contradice la hipótesis que Ω es conexo. Por tanto la frontera de A es no vacía.
Sea $b \in f_r(A)$ y sea W una vecindad balanceada de cero, entonces $b + W + W \subset \Omega$, en efecto:
Sea $x \in b + W + W$ luego existen $m, n \in \Omega$ tales que $x - b + m + n$, puesto que $b, m, n \in \Omega$, entonces $x \in \Omega$. Así $b + W + W \subset \Omega$.
Sea $a \in A$ tal que $a \in b + W$, luego $a + W \subset b + W + W \subset \Omega$ y por hipótesis $a + W \in A$. Sabemos que $a \in b + W$, entonces existe $w \in W$ tal que $a = b + w$, así $b = a + (-w)$ y como W es balanceada, tenemos que $b \in a + W \subset A$, contradiciendo que $b \in f_r(A)$. Así concluimos que $\Omega = A$. ■

Teorema 3.5 (Teorema de Hartogs en dimensión infinita). *Sean X, Y e.v.t.l.c., X espacio de Baire, Y secuencialmente completo y Ω un subconjunto abierto y conexo de X. Si $f : \Omega \longrightarrow Y$ es continua en un punto y $G-$diferenciable, entonces es $F-$diferenciable.*

Demostración. Definamos A como el conjunto de los $w \in \Omega$ en los que f es comtinua. $A \neq \emptyset$, pues la hipótesis dice que f es continua en un punto $a \in \Omega$, es decir $a \in A$.
A es abierto. En efecto:
Debemos probar que existe una vecindad V_1 abierta de $a \in A$ tal que $V_1 \subset A$. Puesto que $a \in A$, entonces f es continua en $a \in \Omega$, esto es, si $h \to 0$, entonces $q \circ f(a+h) \to q \circ f(a)$, es decir, para toda vencindad abierta W_1 de $f(a) \in Y$, existe una vencidad abierta de 0_X tal que si $h \in V$, entonces para $a + h \in a + V$, $f(a) \in W_1$, esto es, si $h \in V$, entonces para $a + h \in a + V$, $q \circ f(a + h) \leq M$, donde $M = \sup_{p(h)\leq 1} q \circ f(a + h) < \infty$, es decir $q \circ f$ está acotada.
Si $x = a + h \in a + V$, entonces $q \circ f$ está acotada, luego $q \circ f(x) \leq M$, donde $M = \sup_{p(h)\leq 1} q \circ f(a+h) < \infty$, así f es continua en $x \in a+V$, lo que prueba que $x \in A$ y por consiguiente $a + V \subset A$, demostrando que A es abierto.
Sean $a \in A$ y W una vecindad balanceada de 0_X tal que $a + W \subset \Omega$. Veamos que $a + W \subset A$. En efecto:
Sea $z \in a + W$, luego existe $h \in W$ tal que $z = a + h$. Definamos V una vecindad abierta y balanceada de 0_X tal que $z + u \in \Omega$ para todo $u \in V$. Consideremos la función $t \to f(a + th)$ definida en el conjunto $\{t : |t| \leq r\}$, para algún $r < 1$, luego por la serie de Taylor tenemos que

$$f(a + th) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{G^n f(a, h)}{n!} t^n, \qquad |t| \leq 1$$

luego por la proposición 3.2

$$f(a + h) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(h), \qquad f_n(h) = \frac{G^n f(a, h)}{n!}$$

donde los polinomios f_n son continuos y homogéneos de grado n.
Definamos la función $t \to f(a + h + tu)$, donde $u \in V$ y $|t| \leq 1$. Como f es diferenciable, entonces ésta función es diferenciable y podemos expresar

$$f(a + h + th) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(h + tu),$$

que converge en $\{t : |t| \leq 1\}$. Así

$$
\begin{aligned}
G^k f(a+h,u) =& \frac{\partial^k}{\partial u^k} f(a+h) = \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} f_n(h)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\partial^k}{\partial u^k} f_n(h) \\
=& \sum_{n\in\mathbb{N}_0} G^k f_n(h,u)
\end{aligned}
$$

es decir, $G^k f(a+h,u) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} G^k f_n(h,u)$
Ahora, por proposición 3.1 la función $u \to G^k f_n(h,u)$ es un polinomio homogéneo de grado k, además el polinomio $h \to f_n(h)$ es continuo, así la suma infiníta de polinomios continuos homogéneos de grado k, es un polinomio continuo homogéneo de grado k, por tanto el polinomio $u \to G^k f(a+h,u)$ es un polinomio homogéneo y continuo de grado k.
Definamos g como la función $u \to g(u) = f(a+h+u)$, luego, existe una familia $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios homogéneos continuos de grado k, tales que

$$
g(u) = f(a+h+u) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \varphi_k(u), \qquad \varphi_k(u) = \frac{G^k f(a+h,u)}{k!}.
$$

Puesto que φ_k es continuo para todo $k \in \mathbb{N}_0$, entonces su suma infiníta es continua. Por tanto f es continua en $z = a+h$, así

$$
q(f(z+u) - f(z)) = q(f(a+h+u) - f(a+h)) = q(g(u) - g(0))
$$

tiende a cero cuando u tiende a cero, es decir

$$
\lim_{u\to 0}(f(z+u) - f(z)) = 0
$$

obteniendo que f es continua en $z = a+h \in a+W$, esto es $z = a+h \in A$. En resumen, si $z \in a+W$, entonces $z \in A$, esto es $a+W \subset A$ y por proposición 3.4 tenemos que $A = \Omega$, es decir f es continua en Ω.
Ahora, por proposición 3.2

$$
f(a+h) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{G^k f(a,h)}{n!}, \qquad h \in W
$$

así, por el teorema de representación de Cauchy

$$
\frac{1}{n!} G^n f(a,h) = \frac{n!}{n! 2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(a+\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(a+\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi, \qquad h \in W
$$

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\dfrac{G^n f(a,h)}{n!}$ es continua y $a + W \subset \Omega \subset X$, luego el polinomio $\dfrac{1}{n!}G^k f(a,h)$ está acotado en $a + W$, esto es, para toda seminorma continua q en Y, existe una seminorma p en X tal que si $p(h) \leq 1$, entonces $a + h \in \Omega$ y

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{n!}G^n f(a,h)\right) &= q\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{f(a+\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} q\left(\int_{|\xi|=1} \frac{f(a+\xi h)}{\xi^{n+1}} d\xi\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{q(f(a+\xi h))}{p(\xi^{n+1})} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} q(f(a+\xi h)) d\xi \\ &\leq \int_{|\xi|=1} q(f(a+\xi h)) d\xi \\ &\leq \int_{|\xi|=1} M d\xi \leq M \int_{|\xi|=1} d\xi \leq M \end{aligned}$$

donde

$$M = \sup_{p(h)\leq 1} q(f(a+h)) < \infty.$$

Luego, si tomamos α tal que $p(h) \leq \alpha < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h)) &\leq q(f(a+h)) - q(f(a)) - q(G^1 f(a,h)) \\
&\leq q(f(a+h)) - q(G^1 f(a,h)) \\
&= q\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G^k f(a,h)}{k!}\right) - \frac{q(G^1 f(a,h))}{1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(G^k f(a,h))}{k!} - \frac{q(G^1 f(a,h))}{1!} \\
&= \frac{q(G^1 f(a,h))}{1!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q(G^k f(a,h))}{k!} \\
&- \frac{q(G^1 f(a,h))}{1!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q(G^k f(a,h))}{k!} \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} M \leq M \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k
\end{aligned}$$

puesto que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \dfrac{1}{1-\alpha}$ por ser la serie geométrica, tenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} - (1+\alpha) = \frac{1-(1-\alpha^2)}{1-\alpha} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

luego

$$q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h)) \leq M \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\alpha \leq \dfrac{\epsilon}{M+\epsilon}$, así

$$\begin{aligned}
\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} &= \frac{M \cdot \alpha \cdot \alpha}{1-\alpha} \leq \frac{M \cdot \alpha \cdot \left(\dfrac{\epsilon}{M+\epsilon}\right)}{1 - \dfrac{\epsilon}{M+\epsilon}} = \frac{M \cdot \alpha \cdot \left(\dfrac{\epsilon}{M+\epsilon}\right)}{\dfrac{M+\epsilon-\epsilon}{M+\epsilon}} \\
&= \frac{M \cdot \alpha \cdot \epsilon}{M} = \alpha \cdot \epsilon.
\end{aligned}$$

Si $p(h) = \alpha \leq \dfrac{\epsilon}{M+\epsilon}$, entonces

$$q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h)) \leq \frac{M \cdot \alpha^2}{1-\alpha} \leq \alpha \cdot \epsilon = \epsilon p(h)$$

csto cs

$$\frac{q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h))}{p(h)} \leq \epsilon$$

por tanto, si $h \longrightarrow 0$, entonces existe el límite

$$\lim_{h \to 0, p(h) \neq 0} \frac{q(f(a+h) - f(a) - G^1 f(a,h))}{p(h)},$$

quedando así demostrado que

$$G^1 f(a, \cdot) = Df(a)$$

■

4. EJEMPLOS

Ejemplo 4.1. *Sea X un espacio de dimensión infinita secuencialmente completo y sea $\Omega = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de X linealmente independiente tal que $\| a_n \| = 1$, para todo n. La función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(a_n) = n$, es lineal, no es continua en ningún punto, es G-diferenciable y por el Teorema de Hartogs en dimensión infiníta, no es F-diferenciable.*

En efecto: Sabemos que f es lineal, puesto que para $a_n, a_m \in \Omega$,

$$f(a_n + a_m) = n + m = f(a_n) + f(a_m)$$

y para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ tenemos que

$$f(\lambda a_n) = \lambda \cdot n = \lambda f(a_n).$$

pero no es continua en ningún punto, puesto que si f es continua en un punto $a_k \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\lim_{a_n \to 0} f(a_k + a_n) = f(a_k),$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\| a_n \| < \epsilon$, entonces $\| f(a_k + a_n) - f(a_k) \| < \epsilon$. Sin pérdida de generalidad, consideremos $0 < \epsilon < 1$, luego $\| f(a_k + a_n) - f(a_k) \| = \| k + n - k \| = \| n \| < \epsilon$, obteniendo una contradicción, pues $n \in \mathbb{N}$ y $n > \epsilon$. Así f no es continua.

Ejemplo 4.2. *Para el caso real, la G-diferenciabilidad no implica la F-diferenciabilidad, aún si f es continua.*

Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y f como

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f es $G-$diferenciable, puesto que

$$\begin{aligned}
Gf((0,0),(1,0)) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t+0+\dfrac{t^3\cdot 0}{t^4+0}-0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t+0-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} 1 = 1
\end{aligned}$$

Además, f es continua en $(0,0)$ ya que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f((0,0)+(h_1,h_2)) = f(0,0),$$

pero no es $F-$diferenciable, puesto que

$$\begin{aligned}
Df(0,0) &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\| f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0) \|}{\| (h_1,h_2) \|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\| f(h_1,h_2)-f(0,0) \|}{\| (h_1,h_2) \|} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1+h_2+\dfrac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}
\end{aligned}$$

y el denominador de este límite siempre se acercará a cero cuando el vector (h_1,h_2) se acerca al vector $(0,0)$.

62464

5. APÉNDICE

Esta sesión del trabajo contiene las definiciones y resultados que son utilizadas para demostrar los teoremas, las proposiciones y los lemas que aparecen en cada uno de los capítulos anteriores.

Definición 5.1. *El funcional*

$$p_M(x) = \inf_{\alpha>0,\alpha^{-1}x\in M} \alpha$$

se llama ***funcional de Minkowski*** *de los convexos, equilibrado y absorbente en el conjunto M de X*

Definición 5.2. *Sea X un e.v.t.l.c. seminormado. Se dice que el subconjuto V de X es una* ***vecindad*** *de $a \in X$ si existe A abierto en X, tal que $a \in A \subset V$.*

Nota 5.1. *Sea X un e.v.t.l.c. con topología τ. Los elementos de τ se llaman* ***conjuntos abiertos*** *en X o simplemente abiertos en X.*

Definición 5.3. *Un espacio vectorial topológico X se llama un* ***espacio vectorial topológico localmente convexo****, si cualquiera de sus conjuntos abiertos que contiene el cero, contiene un convexo, es equilibrado, absorbente y abierto.*

Ejemplo 5.1. *El espacio vectorial $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, en efecto.*

Consderemos la función $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, tal que para $x = a + bi \in \mathbb{C}$, $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$, veamos que la función $|\cdot|$ es una seminorma.

(i) Sean $x, y \in \mathbb{C}$, donde $x = a + bi$, $y = c + di$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces,

$$
\begin{aligned}
|x+y|^2 = (x+y)\cdot\overline{(x+y)} &= (x+y)\cdot(\overline{x}+\overline{y}) = x\cdot\overline{x}+x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{x}+y\cdot\overline{y}\\
&= x\cdot\overline{x}+y\cdot\overline{y}+(a+bi)\cdot(c-di)+(c+di)\cdot(a-bi)\\
&= |x|^2+|y|^2+ac-adi+bci+bd+ac-bci+adi+bd\\
&= |x|^2+|y|^2+2ac+2bd = |x|^2+|y|^2+2(ac+bd)\\
&\leq |x|^2+|y|^2+2\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}\\
&= |x|^2+|y|^2+2\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}\\
&= |x|^2+|y|^2+2\sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}\\
&= |x|^2+|y|^2+2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\\
&= |x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2 = (|x|+|y|)^2,
\end{aligned}
$$

así que

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2,$$

lo que podemos concluir que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

(ii) Notaremos el valor absoluto de los números reales como $|x|_{\mathbb{R}}$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para $x = a+bi \in \mathbb{C}$, donde $a,b \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\lambda x| = |\lambda(a+bi)| = |\lambda a + \lambda bi|&\\
&= \sqrt{\lambda^2a^2+\lambda^2b^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2)}\\
&= |\lambda|_{\mathbb{R}}\sqrt{a^2+b^2} = |\lambda|_{\mathbb{R}}\cdot|x|.
\end{aligned}
$$

(iii) Sea $x = 0 \in \mathbb{C}$, entonces

$$|x| = |0| = |0+0i| = \sqrt{0} = 0$$

Por lo tanto, la función $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $a+bi \longmapsto \sqrt{a^2+b^2}$, es una seminorma.
Ahora veamos que $\mathbb{C}$ es un espacio topologico localmente convexo, en efecto. Consderemos $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}$, tal que $0 \in \mathbb{G}$ y $\mathbb{G}$ abierto, debemos probar que existe $M \subseteq \mathbb{G}$ tal que M es convexo, equilibrado, absorbente y abierto.

Puesto que $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}$, tal que $0 \in \mathbb{G}$ y $\mathbb{G}$ es abierto, entonces para todo $x \in \mathbb{G}$, existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset \mathbb{G}$.
Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$ y definamos el conjunto

$$M = \left\{ x \in \mathbb{G} : |x| < \frac{1}{n}, \right\}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $M \subset \mathbb{G}$.
Sea $a \in M$, entonces $|a| < \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos que $|a| < \frac{1}{n} < r$, para algún $n \in \mathbb{N}$. De modo que $|a| < r$ y $a \in B(0,r)$; además $B(0,r) \subset \mathbb{G}$, lo que implica que $a \in \mathbb{G}$, concluyendo que $M \in \mathbb{G}$.
Ahora, haciendo uso de la proposición 1.2, tenemos que M es convexo, equilibrado y absorbente.

Veamos que M es abierto, en efecto:
Debemos mostrar que para todo $x \in M$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset M$.
Sean $x, y \in M$, entonces, $|x| < \frac{1}{n}$. Consideremos $r = \text{mín}\left\{ |x|, \frac{1}{n} - |x| \right\}$, definamos $B(x,r) = \{y \in M : |y| < r\}$. Si $y \in B(x,r)$ entonces, $|x - y| < r$.
Sabemos que $r \leq |x|$ y $r \leq \frac{1}{n} - |x|$ por definición de mínimo de un conjunto, luego $r \leq |x| < \frac{1}{n}$ y $r \leq \frac{1}{n} - |x| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$, esto es $r < \frac{1}{n}$ y $r < 0$, pero $r > 0$, entonces, consideramos solo el caso $r < \frac{1}{n}$ y obtenemos que $|y - x| < r < \frac{1}{n}$ es decir $|y - x| < \frac{1}{n}$. Ahora,
$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$, esto es $|y| < \frac{2}{n}$. Puesto que M es absorbente, para todo $y \in \mathbb{G}$ existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}|y| \in M$. Definamos $\alpha = \frac{1}{2}$, luego $\alpha^{-1}|y| = 2|y| < \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, esto es $2|y| < \frac{2}{n}$, así $|y| < \frac{1}{n}$, lo que implica que $y \in M$, luego $B(x,r) \subset M$, demostrando así que M es abierto.

En resumen, hemos encontrado en $\mathbb{C}$ un subconjunto $\mathbb{G}$ que contiene al cero, tal que $\mathbb{G}$ contiene un subconjunto M que es convexo, equilibrado, absorbente y abierto, lo que demuestra que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Nota 5.2. *Por simplicidad notaremos a un espacio vectorial topológico localmente convexo por (e.v.t.l.c.).*

Definición 5.4. *Sea X un espacio vectorial topológico. Una* **separación** *de X es un par $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de abiertos disjuntos no triviales de X, cuya unión es X, es decir:*

$$\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$$

El espacio X, se dice que es **conexo** *si no existe separación de X. También podemos definir un espacio X como un espacio* **conexo** *si y sólo si sus únicos subconjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.*

Definición 5.5. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es* **continua** *si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.*

Nota 5.3. *Recuerde que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in X$, esto es*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}.$$

Definición 5.6. *Sean $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_n$, $\mathbb{F}$, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{E}$, $x_k \in \mathbb{E}_k$ donde $k = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n$ y $f : \Omega \longrightarrow Y$ una función $G-$diferenciable en $a \in \Omega$. Si el límite*

$$\partial_j f(a) = \partial_j(f, a) = \partial(f, x_j) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

existe, entonces $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ se llama **derivada parcial** *respecto a e_j, en $a \in \Omega$.*

Definición 5.7. *Una familia o sucesión de puntos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ en un e.v.t.l.c X con seminorma p, tiene* **límite** *L, si para cada $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que*

$$si \quad n \geq k, \quad entonces \quad p(a_n - L) \leq \epsilon$$

En este caso, decimos que la sucesión $\{a_n\}$ converge hacia L y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad o \qquad a_n \longrightarrow L, \quad siempre \quad que \quad n \longrightarrow \infty$$

Una sucesión que no converge se llama **divergente**.

40

Definición 5.8. *Sea la sucesión de puntos* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *en un e.v.t.l.c* X. *Consideremos*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A la sucesión de sumas $\{s_n\}$ *se le llama* ***serie***, *siempre que* $n \longrightarrow \infty$.
Si existe un $S \in X$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

se dice que la serie

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

converge. *Si* $\{s_n\}$ *no converge, decimos que la serie* ***diverge***.

Definición 5.9. *Sean* X, Y *e.v.t.l.c.,* $f_n : X \longrightarrow Y$ *tal que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una sucesión de funciones. Sea* $\Omega \subset X$ *el conjunto de puntos* x *para los que* f_n *converge. La función* f *definida en* Ω *por la igualdad*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad si \quad x \in \Omega,$$

se llama ***función límite*** *de la sucesión* $\{f_n\}$ *y decimos que la sucesión* $\{f_n\}$ ***converge puntualmente*** *hacia* f *en el conjunto* Ω.

Definición 5.10. *Sean* X, Y *e.v.t.l.c.,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una sucesión de funciones,* $\Omega \subset X$ *el conjunto de puntos* x *para los que* f_n *converge. Considerenmos*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(x),$$

donde $\{\mu_k\}$ *son funciones definidas de* Ω *en* Y. *Si* $f_n \longrightarrow f$ *puntualmente en* Ω, *entonces se dice que la serie* $\{f_n(x)\}$ ***converge puntualmente*** *y tenemos*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x)$$

Definición 5.11. *Sea* X *un e.v.t.l.c. con seminorma* p, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de elementos de* X.
La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *se llama* ***sucesión de Cauchy***, *si y solamente si dado* $\epsilon > 0$, *existe* $k \in \mathbb{N}_0$ *tal que si* $n, m \geq k$, *entonces* $p(a_n - a_m) < \epsilon$.

Definición 5.12. *Un espacio vectorial topológico es* ***secuencialmnte completo*** *si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 5.13. *Un punto x es un* ***punto de acumulación*** *o* ***punto límite*** *de un subconjunto $A \subset X$, X e.v.t.l.c, si toda bola abierta contiene un $y \neq x$ tal que $y \in X$, esto es. Para todo $r > 0$*

$$B(x,r) \cap X \neq \emptyset$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A'

Definición 5.14. *Al subconjunto $A \in X$ se le llama* ***cerrado*** *si todos sus puntos límites pertenecen a él, es decir, si cumple que*

$$A' \subset A$$

Definición 5.15. *Sea X e.v.t.l.c. y $A \subset X$, se define la* ***clausura*** *de A como el conjunto formado por la unión de A con A'. Lo denotaremos como el conjunto $\overline{A}$, esto es*

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Definición 5.16. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es* ***denso*** *si $\overline{A} - X$, donde $\overline{A}$ es la clausura del conjunto A.*

Definición 5.17. *Un espacio topológico (X, τ) se dice* ***espacio de Baire****, si toda intersección numerable de abiertos densos de X es densa.*

Definición 5.18. *Sea X un espacio seminormado con seminorma p. Un subconjunto A de X se dice que está* ***acotado****, si existe algún número M tal que*

$$p(x) \leq M$$

para todo $x \in A$.

Definición 5.19. *Sea $\Omega \subset X$, X e.v.t.l.c., p una seminorma en X.*

(a) Se dice que Ω está ***uniformemente acotado*** *si para todo $x \in \Omega$, existe un $M > 0$ tal que $p(x) \leq M$.*

(b) Se dice que Ω está ***puntualmente acotado*** *si para todo $x \in \Omega$, existe $M_x > 0$ (que depende de x) tal que $p(x) \leq M_x$.*

Nota 5.4. *Si X es un espacio vectorial topológico, llamaremos* ***espacio dual de*** *X, al conjunto X^*, que es el espacio de todas las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, que son lineales y continuas.*

Definición 5.20. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, Ω abierto en $\mathbb{C}$. Se dice que f es* ***analítica*** *en $a \in \mathbb{C}^n$, si el límite*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. El límite se denota por $f'(a)$.
Se dirá que f es analítica en Ω, si f es analítica en z, para todo $z \in \Omega$.

Teorema 5.1 (Teorema de representación de Cauchy). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en Ω y sea C una curva cerrada en la que f es analítica, entonces*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

Definición 5.21. *Sean E un espacio vectorial toplógico y E' el espacio dual de E. La* ***topología debil*** *$\sigma(E, E')$ sobre E, es la topología menos fina sobre E que hace contínuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Teorema 5.2 (Principio de la acotación uniforme). *Sea X un espacio métrico completo, Y un espacio métrico y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $C(X, Y)$ tal que para cada $a \in X$ el conjunto*

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$$

está acotado. Entonces existe un conjunto no vacío U abierto en X sobre el cual las funciones de $\mathcal{F}$ están uniformemente acotadas, esto es, existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Apostol T., Calculus. Volumen I, Segunda edición. Editorial reverté, Col, s.a. 1988.

[2] Apostol T., Calculus. Volumen II, Segunda edición. Editorial reverté, Col, s.a. 1988.

[3] Bochnak J., Siciak J., Analytic Functions in Topological Vector Spaces. Studia Math. 1971, pp. 77-112.

[4] Bochnak J., Siciak J., Polynomials and Multilinear Mappings in Topological Vector Spaces. Studia Math, 1971, pp. 59-76.

[5] Brézis. H. *Analyse Fonctionelle*. Ed. cast., Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[6] Caicedo J. F., Cálculo Avanzado, Introducción. Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá. 2005.

[7] Hervé M., Analyticity in Infinite Dimensional Spaces. Walter de Gruyter, 1989.

[8] Munkres J. R., Topología. Massachusetts institute of Technology. 2â edición. Prentice Hall. 2003.

[9] Narasimhan R., Several Complex Variables. (University of Chicago Press), 1971.

[10] Pérez J.J. y Restrepo G., G−derivada y F−derivada en Espacios Topológicos Localmente Convexos, Universidad del Valle - Colombia. 2005.

[11] Seán Dineen., Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North-Holland Mathematics Studies. 1981.

[12] Yosida K., Funtional Analysis. Third Edition. 1970.

[13] Wolfgang T. y Carmen J. V., Métodos del análisis complejo en dimensiones superiores. XXI Escuela de Matemáticas EMALCA, Mérida Venezuela. 2008.