Unicidad y modos atrapados en el problema de ondas de agua por dos barras verticales.

Trabajo de grado que presenta

ARTURO GÓMEZ ARNEDO

para obtener el título de matemático.

Asesor de Tesis:

Dr. RUBEN DARÍO ORTIZ.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA DE MATEMATICAS

CARTAGENA D.T y C

2008.

Dedico este trabajo con todo cariño a
mis padres Angel Gómez Pérez y Amira Arnedo Hernández por su gran
apoyo y esfuerzo que me brindaron durante toda mi carrera.

Doy gracias en primer lugar a Dios, a Jesús y a la Virgen María,
a mis hermanos Amira y Jorge Armando Gómez Arnedo,
a mi novia Grace Kelly por todo su apoyo,
al Dr.Ruben Darío Ortiz por su orientación y gran ayuda,
y a todos los amigos que me apoyaron de un modo u otro y que es imposible
enumerar aquí.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Desde hace años la unicidad de la solución para el problema de ondas de agua ha sido tratado con mucha atención. Un esfuerzo considerable se ha hecho para obtener un teorema general de unicidad, pero sin éxito.
Durante algún tiempo muchos resultados parciales han sido obtenidos con ciertas restricciones para una clase de geometría o rangos de frecuencias. La razón por la falta de un teorema general es clara puesto que en 1996 McIver dá un contraejemplo que demostró que la solución del problema no necesita ser única, McIver fué capaz de construir una solución del problema homogéneo de ondas de agua que tiene energía infinita, tales soluciones son generalmente llamadas "modos atrapados".

En 1958 Levine y Rodemich dieron una solución explícita para el problema bidimensional esparciendo un par de barrras verticales idénticas, es decir válido para todas las frecuencias. Esto es conociendo sólamente la solución explícita para dos extructuras penetrando la superficie, desafortunadamente la solución es compleja y difícil de interpretar. Posteriormente, Evans y Morris en 1972 formularon el problema en términos de ecuaciones integrales y mostraron notablemente que es posible reflejar de manera completa una onda incidente por un par de barras en ciertas frecuencias discretas. Así la unicidad de la solución de Levine y Rodemich y la solubilidad única de las ecuaciones integrales obtenidas para el mismo problema por Evans y Morris (1972) están ya establecidas.

Una solución para el mencionado problema bidimensional se obtiene esparciendo dos barras verticales extendiéndolas hacia abajo indefinidamente desde los puntos ubicados a la misma distancia por debajo de la superficie y fué obtenida por Jarvis (1971). En 1994 Pearson y Martin demostraron numéricamente que un plato liso inclinado verticalmente penetrando una superficie tiene la propiedad en la cual $|R| = 1$, donde R es el coeficiente de reflexión resultante, (o alternativamente T = 0 donde T es el coeficiente de transmisión). Posteriormente Linton y Kuznetsov (1997) presentaron un número de evidencias fuertes en las que las ondas pueden ser atrapadas por un par de tales platos y los modos de frecuencia son correlacionados con detalles con las frecuencias en las que T = 0 por un sólo plato.

Un año más tarde en 1998 Evans y Porter hicieron un argumento heurístico en el cual consideran el caso bidimensional del esparcimiento en un plano de ondas uno o más obstáculos fijos, donde el coeficiente de reflección R depende de la frecuencia de onda y el cuerpo geométrico y satisface $|R| \leq 1$.

Este trabajo ha sido dividido en dos capítulos. El primero contiene los conceptos preliminares necesarios para el desarrollo de esta monografía y así ayudar a la comprensión de la misma.

En el segundo capítulo, se demuestra el problema principal (Teorema 2.1) sobre la unicidad de las soluciones del problema de ondas de agua por dos barras verticales. En este problema principal se escriben los detalles de la demostración la cual consiste en establecer que el problema principal tiene sólo la solución trivial para el espectro continuo $K > l \tanh lh$. Esto se hace construyendo una desigualdad que puede ser satisfecha sólo si el potencial $\phi = 0$.

Mi aporte en el desarrollo de esta monografía es escribir los detalles no dados por los autores *N. Kuznetsov, P. McIver* y *C.M. Linton* del teorema de unicidad para el caso de dos barras verticales del artículo "Unicidad y modos atrapados en el problema de ondas de agua por barras verticales ".

Capítulo 1

PRELIMINARES

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial normado.

Un subconjunto $K \subseteq X$ es llamado compacto si todo recubrimiento de K tiene un subrecubrimiento finito. Esto es si

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

donde los G_α son abiertos en X, entonces

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Definición 1.2 (Norma). Una función de valores reales definida en un espacio vectorial, es llamada *norma* si satisface las siguientes propiedades:

1) $||x|| > 0, \forall x \in X$ y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2) $||\lambda x|| \geq |\lambda| ||x|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$.

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in X$ (Desigualdad Triangular).

Nota: $\forall x, y \in X$, se tiene que $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y||$
En efecto, $||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$, luego $||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$.
De igual forma $||y|| - ||x|| \leq ||x - y||$, esto es $-(||x|| - ||y||) \leq ||x - y||$,
luego $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y|| \ \ \forall x, y \in X$.

Definición 1.3 (Continuidad). Sean X e Y espacios vectoriales normados y $f : X \to Y$ una función y $x_0 \in X$, entonces f es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ si $||x - x_0|| < \delta$ entonces $||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$.

Definición 1.4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal desde el espacio vectorial normado X hacia el espacio vectorial normado Y. Decimos que $f : X \to Y$ está *acotada* si existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in X$, $||f(x)|| \leq M||x||$.

Definición 1.5. Sea V un espacio lineal y S un subespacio de V y sea $T : S \to V$ una transformación de S en V. Un escalar λ se denomina autovalor de T si existe un elemento no nulo x en S tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

El elemento x se llama autovector de T perteneciente a λ. El escalar λ se llama autovalor correspondiente a x.
Si V es un espacio funcional los autovectores se llaman autofunciones.

Definición 1.6 (Función primitiva). Una función P se llama primitiva (o antiderivada) de una función f en un intervalo abierto I si la derivada de P es f, esto es si $P'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Definición 1.7. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{kd+1}$ donde $k \geq 1$, $d \geq 1$ y $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una función continua, y sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^k x}{dt^k} = F\Big((t, X(t)), \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\Big).$$

Una función $X : I \to \mathbb{R}^{kd}$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es solución de la anterior ecuación diferencial si satisface las siguientes propiedades :

1. $\Big((t, X(t)), \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\Big) \in \Omega$.

2. $\frac{d^k x}{dt^k} = F\Big((t, X(t)), \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\Big) \qquad \forall t \in I$.

3. I es un intervalo (Subconjunto conexo de $\mathbb{R}$).

Definición 1.8. Con $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotamos el espacio vectorial de las funciones definidas en $\mathbb{R}$, a valor real, que poseen derivadas hasta orden infinito y son continuas.

Definición 1.9. Sea $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una aplicación lineal, que fijada una base se representa por una matriz, siempre tiene algún valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ que es solución de la ecuación $L(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq 0$. El conjunto de todos los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ que satisface la anterior ecuación recibe el nombre de espectro puntual de la aplicación lineal L.

Definición 1.10. Dado un operador acotado B, éste es invertible (esto es tiene un operador inverso acotado), si y sólo si B está acotado inferiormente y tiene un conjunto imagen denso en el espacio sobre el espacio de Banach sobre el que está definido. El espectro, no vacío, de un operador acotado siempre puede dividirse en tres partes:

◇ ***Espectro puntual.*** Para ciertos valores el operador $(B - \lambda I)$ no es inyectivo y por tanto no puede definirse una inversa. Esos valores conforman el espectro puntual.

◇ ***Espectro continuo*** (o espectro puntual aproximado): El espectro continuo está asociado con vectores propios aproximados o vectores cuasipropios. Un valor complejo pertenece al espectro continuo si el operador resolvente $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ existe y está definido sobre un dominio denso pero no es acotado.

◇ ***Espectro residual.*** Está formado por valores tales que el operador resolvente puede definirse sobre un dominio no denso. Este operador puede ser acotado o no acotado, pero eso es secundario a la hora de considerarlo en el espectro residual es si el dominio es o no denso.

En dimensión finita, el espectro continuo y residual de un operador siempre son vacíos y el espectro coincide así con el espectro puntual.

Definición 1.11. El espectro esencial de un operador consiste de todos los puntos del espectro excepto valores propios aislados de multiplidad finita. Hemos así añadido al espectro continuo:

1. Cualquiera valores propios incrustados en el espectro continuo o en sus orillas;

2. Cualquiera puntos límites del espectro y

3. Valores propios, si los hay, de multiplicidad infinita.

Examinando los varios casos, está visto que los puntos del espectro esencial pueden caracterizarse por vectores propios aproximados (posiblemente incluyendo verdaderos vectores propios) como sigue :
λ está en el espectro esencial H si y sólo si existe una sucesión $\{V_j\}_1^\infty$ de vectores unitarios linealmente independientes (o, si se prefiere, mutuamente ortogonales) tales que $\|H_{V_j} - \lambda_{V_j}\| \longrightarrow 0$ cuando j $\longrightarrow \infty$.

Definición 1.12. Si el movimiento del fluido es irrotacional, el vector velocidad V puede ser representado por el gradiente de un potencial escalar ϕ llamado el potencial de la velocidad

$$V = \nabla\phi.$$

El potencial de la velocidad es dado por la integral de línea

$$\phi(x,t) = \int_{x_0}^{x} \sum u_i dx_i$$

donde el límite inferior x_0 es arbitrario y el límite superior es el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Definición 1.13 (Laplaciano). El laplaciano es un operador diferencial de segundo orden, denotado por Δ. En coordenadas cartesianas bidimensionales, el laplaciano es $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Definición 1.14. Si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, decimos que f es complejo-diferenciable en el punto z_o de U si existe el siguiente límite

$$f'(z_o) = \lim_{z \longrightarrow z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}.$$

Definición 1.15 (Funciones Holomorfas). Son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto U del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciables en cada punto de U.

Definición 1.16. Sea U un abierto en el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $a \in U$. Se dice que f es una función analítica en el punto a si existe una sucesión de números complejos $\{C_k\}$ y número real $r > 0$ tales que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

y la serie converge absolutamente en el disco $|z-a| < r$.
Si la función es analítica en cada punto del conjunto U se dice que la función es analítica en U.

Ejemplo:
La función racional

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

es analítica en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.
En efecto, es claro que es analítica en 0, pues

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

Pero utilizando esta misma suma, si $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-(z-a)} = \frac{1}{(1-a)} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{1-a}\right)}$$

Así que

$$\frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

Siempre que $|\frac{z-a}{1-a}|<1$. Es decir en el entorno de a, $|z-a|<|1-a|$.

Definición 1.17. Se entiende por sinusoide la función seno o la curva que la representa, en general todos los gráficos de ondas se llaman sinusoides .
La sinusoide puede ser descrita por la siguiente fórmula:

$$A\sin(2\pi fx+\varphi)$$

donde A es la amplitud, f es la frecuencia y φ es la fase.
O también:

$$A\sin\left(\frac{2\pi}{T}x+\varphi\right)$$

donde T es el período de oscilación,

$$T=\frac{1}{f}$$

o $A\sin(\omega x+\varphi)$, donde ω es la velocidad angular, $\omega=2\pi f$.
Obsérvese que el coseno, o cualquier combinacion lineal de seno y coseno con la misma frecuencia, pueden transformar en una sinusoide simple y viceversa:

$$M\sin(\omega x)+N\cos(\omega x)=A\sin(\omega x+\varphi).$$

Siendo $A^2=M^2+N^2$ y $\varphi=\arctan(N/M)$

Definición 1.18. Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$, en el caso más general, funciones complejas de una variable real, continuas en el intervalo cerrado

$[a,b]$. Se define como producto escalar de estas dos funciones y se expresa como $\langle u,v\rangle$, a la integral

$$\langle u,v\rangle = \int_a^b u(x)\overline{v}(x)dx$$

siendo $\overline{v}(x)$ la compleja conjugada de $v(x)$.
De acuerdo con esta definición, se pueden observar las siguientes propiedades del producto escalar:

a. $\langle u,v\rangle = \langle\overline{\overline{u},\overline{v}}\rangle$

b. $\langle\overline{u},\overline{v}\rangle = \langle v,u\rangle$

c. $\langle u_1+u_2,v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$

d. $\langle u,v_1+v_2\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$

e. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, entonces $\langle\lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

f. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, entonces $\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u,v\rangle$

g. Si u y v son funciones reales, entonces $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

Definición 1.19. Si $\left|\frac{f(x)}{\phi(x)}\right|$ es acotada, escribimos $f(x) = O\{\phi(x)\}$, $x \longrightarrow \infty$. En otras palabras, f es de orden que no excede a ϕ.

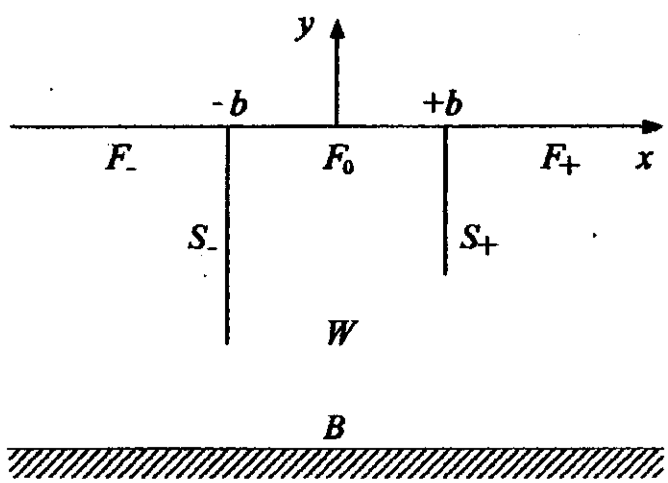
Definición 1.20. Una función ψ_n, $n = 0,1,2,3,\cdots$ es la asintótica de la función propia ψ si satisface $\|\psi - \psi_n\| = O\{\varepsilon^{n+1/2}\}$.

Capítulo 2

TEOREMA DE UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES PARA DOS BARRAS VERTICALES

Un fluido ocupa una capa de profundidad media h (posiblemente infinita), limitada inferiormente por una capa rígida y por encima una superficie libre.

Figura 1



Nuestro papel tiene que ver con la linealidad de las soluciones del problema de ondas de agua que tienen un potencial de velocidad en la forma $\phi(x,y)e^{i(lz-wt)}$; tales soluciones son como en el movimiento armónico con frecuencia angular ω y periodo en la dirección z con correspondiente número de ondas l (posiblemente cero).

Sea $L = \{-\infty < x < \infty; -h < y < 0\}$, F la superficie libre, B es la capa $\{-\infty < x < \infty; y = -h\}$ y S es la curva limitada en el plano (x,y) de cualquier estructura dentro del fluido; por tanto el dominio del fluido W es la parte de L exterior a $\overline{S}$. El potencial ϕ satisface

$$(\nabla^2 - l^2)\phi = 0 \quad en \quad W \tag{2.1}$$

y la condición limitada

$$\phi_y - K\phi = 0 \quad sobre \quad F, \tag{2.2}$$

donde $K = \omega^2/g$ y g es la aceleración de la gravedad. Puede no fluir a través de la capa rígida así que

$$\phi_y = 0 \quad sobre \quad B, \tag{2.3}$$

y también puede no fluir a través de la superficie de cualquier estructura dentro del fluido, así que

$$\phi_n = 0 \quad sobre \quad S, \tag{2.4}$$

donde n denota una coordenada normal medida desde S.

Para el caso particular de dos barras, esta condición se convierte en

$$\phi_x(+b \pm 0, y) = 0 \quad sobre \;\; S_+ \;\; y \;\; \phi_x(-b \pm 0, y) = 0 \;\; sobre \;\; S_-. \tag{2.5}$$

El presente trabajo está relacionado con problemas que involucran barras verticales, así que S debe ser una unión de líneas sobre valores constantes de x.

Para l fijo, el problema (2.1)-(2.4) define un problema de autovalores donde K es el parámetro espectral.

Para una solución ϕ correspondiente a un K particular la cantidad

$$H[\phi; K] = \int_W |\nabla\phi|^2 dxdy + K \int_F |\phi|^2 dx \qquad (2.6)$$

es proporcional al tiempo medido de energía del movimiento por unidad de longitud del eje z. Si, para un ϕ no nulo, $H[\phi; K]$ es ilimitado entonces K pertenece al espectro continuo del operador relevante; si por el contrario $H[\phi; K] < \infty$ entonces K es un autovalor y la correspondiente autofunción ϕ describe los llamados "modos atrapados".

Como $x \to \pm\infty$, las soluciones de las ecuaciones (2.1)-(2.3) son de la forma

$$\phi = C_{\pm} e^{i\alpha x} \cosh k(y+h) + O\Big([x^2 + y^2]^{-1/2}\Big), \qquad (2.7)$$

donde k es la única raíz positiva de

$$K = k \tanh kh \qquad (2.8)$$

y $\alpha = \sqrt{k^2 - l^2}$ es real. Así el espectro continuo que corresponde a $k > l$ que es equivalente a $K > l \tanh lh$. Note que en la profundidad del agua $h \to \infty$ y así $k \to K$ y en este caso $\cosh k(y+h)$ debe ser remplazado por e^{Ky} en (2.7).

Para las soluciones de (2.1)-(2.4) que tiene energía finita, esta es suficiente por la condición de radiación y se tiene,

$$\phi_x \mp i\alpha\phi = o(1) \quad \textit{cuando} \quad x \to \pm\infty. \qquad (2.9)$$

18

Otra condición surge del factor que la limitación de W no es uniforme debido a la presencia de las puntas de las barras sumergidas y cada angulo entre las barras y F o B. Así hay un requerimiento adicional que es

$$\phi \in H^1_{loc}(W), \tag{2.10}$$

esto es para cada conjunto abierto $E \subset W$ tal que $\overline{E}$ es subconjunto compacto de $\overline{L}$,

$$\int_E |\phi|^2 dxdy + \int_E |\nabla\phi|^2 dxdy < \infty. \tag{2.11}$$

Las ecuaciones (2.1)-(2.4) y (2.9) junto con la condición (2.10) constituyen el planteamiento del problema homogéneo de ondas de agua para barras verticales que serán investigadas en este trabajo.

Lema 1. *Para $\lambda > 0$ y $p, q \in (\mathbb{R})$, se tiene que*

$$(p+q)^2 \leq (1+\lambda)p^2 + (1+\lambda^{-1})q^2.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$, entonces para cualquier $p, q \in (\mathbb{R})$, $(\lambda^{1/2}p - \lambda^{-1/2}q)^2 \geq 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\lambda^{1/2}p)^2 - 2(\lambda^{1/2}p)(\lambda^{-1/2}q) + (\lambda^{-1/2}q)^2 &\geq 0 \\
\lambda p^2 - 2(\lambda^{1/2}p)(\lambda^{-1/2}q) + \lambda^{-1}q^2 &\geq 0 \\
2(\lambda^{1/2}p)(\lambda^{-1/2}q) &\leq \lambda p^2 + \lambda^{-1}q^2
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
(p+q)^2 &= p^2+q^2+2pq = p^2+q^2+2pq(\lambda^{1/2}\lambda^{-1/2}) \\
&= p^2+q^2+2(\lambda^{1/2}p)(\lambda^{-1/2}q) \\
&\leq p^2+q^2+\lambda p^2+\lambda^{-1}q^2 \\
&= (1+\lambda)p^2+(1+\lambda^{-1})q^2
\end{aligned}$$

es decir $(p+q)^2 \leq (1+\lambda)p^2+(1+\lambda^{-1})q^2$. ★

Teorema 2.1 (Teorema de unicidad de las soluciones para dos barras verticales). *Para la configuración mostrada en la figura 1, el problema de dos barras definido por las ecuaciones (2.1)-(2.3),(2.5) y (2.9)-(2.10) tiene sólo la solución trivial para el espectro continuo* $K > l\tanh lh$.

Demostración. Consideremos la configuración de dos barras verticales que se sumergen en un fluido de profundidad h, denotemos estas barras por

$$S_\pm = \{x = \pm b;\ -a_\pm < y < 0\}\ ,\ a_\pm > 0.$$

La superficie libre del fluido es $F = \{\ |x| \neq b;\ y = 0\} = F_- \cup F_0 \cup F_+$; donde las porciones de la superficie libre que se extienden al infinito son $F_\pm = \{\ \pm x > b;\ y = 0\}$ y la porción entre las barras es $F_0 = \{\ |x| < b;\ y = 0\}$. Primero que todo es conveniente establecer algunas propiedades de

$$w(x) = \int_{-h}^{0} \phi(x,y)\cosh k(y+h)dy \tag{2.12}$$

donde k es la única raíz positiva de $K = k\tanh kh$. Esta función (descrita por John en 1950, como la función de onda simple de orden cero) está dada para todo $x \in F$ ya que las barras son asumidas verticalmente.
Derivando (2.12) con respecto a x tenemos:

$$w_x(x) = \int_{-h}^{0} \phi_x(x,y)\cosh k(y+h)dy$$

y derivando nuevamente con respecto a x:

$$w_{xx}(x) = \int_{-h}^{0} \phi_{xx}(x,y)\cosh k(y+h)dy, \tag{2.13}$$

pero

$$\nabla^2\phi(x,y) = \phi_{xx}(x,y) + \phi_{yy}(x,y),$$

así que

$$\phi_{xx}(x,y) = \nabla^2\phi(x,y) - \phi_{yy}(x,y),$$

y como

$$(\nabla^2 - l^2)\phi \;=\; 0 \quad en \quad W, \quad entonces$$

$$\phi_{xx}(x,y) = l^2\phi(x,y) - \phi_{yy}(x,y)$$

por lo tanto

$$w_{xx}(x) = \int_{-h}^{0}[l^2\phi(x,y) - \phi_{yy}(x,y)]\cosh k(y+h)dy \tag{2.14}$$

De (2.14) tenemos

$$w_{xx}(x) = \int_{-h}^{0} l^2\phi(x,y)\cosh k(y+h)dy - \int_{-h}^{0}\phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} w_{xx} - l^2 w = & \int_{-h}^{0} l^2\phi(x,y)\cosh k(y+h)dy - \int_{-h}^{0}\phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy \\ & - \int_{-h}^{0} l^2\phi(x,y)\cosh k(y+h)dy \end{aligned}$$

es decir,

$$w_{xx} - l^2 w \;=\; -\int_{-h}^{0}\phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy$$

Ahora calculemos

$$\int_{-h}^{0}\phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy,$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= \cosh k(y+h), \qquad && dv = \phi_{yy}(x,y)dy, \\ du &= k \sinh k(y+h)dy, \qquad && v = \phi_y(x,y), \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{0} \phi_{yy}(x,y) \cosh k(y+h)dy = uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} vdu$$

pero

$$uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} vdu = \phi_y(x,y)\cosh k(y+h)\Big|_{-h}^{0} - k\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy$$

y utilizando las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{0} \phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy &= \phi_y(x,0)\cosh kh \\ &- k\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \end{aligned}$$

Ahora calculemos

$$\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy,$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= \sinh k(y+h), \qquad && dv = \phi_y(x,y)dy, \\ du &= k \cosh k(y+h)dy, \qquad && v = \phi(x,y), \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy = uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} vdu$$

pero

$$uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} vdu = \phi(x,y)\sinh k(y+h)\Big|_{-h}^{0} - k\int_{-h}^{0} \phi(x,y)\cosh k(y+h)dy$$

procediendo de manera análoga a lo que se hizo anteriormente se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy &= \phi(x,0)\sinh kh - k\int_{-h}^{0}\phi(x,y)\cosh k(y+h)dy \\ &= \phi(x,0)\sinh kh - kw(x) \qquad (2.15)\end{aligned}$$

retomando

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{0} \phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy &= \phi_y(x,0)\cosh kh \\ &\quad - k\int_{-h}^{0}\phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \\ &= \phi_y(x,0)\cosh kh - k[\phi(x,0)\sinh kh - kw(x)] \\ &= \phi_y(x,0)\cosh kh - k\phi(x,0)\sinh kh + k^2w(x)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}w_{xx} - l^2 w &= -\int_{-h}^{0}\phi_{yy}(x,y)\cosh k(y+h)dy \\ &= k\phi(x,0)\sinh kh - \phi_y(x,0)\cosh kh - k^2w(x)\end{aligned}$$

así por (2.2) y(2.8)

$$\begin{aligned}w_{xx} - l^2 w &= k\phi(x,0)\sinh kh - K\phi(x,0)\cosh kh - k^2w(x) \\ &= k\phi(x,0)\sinh kh - k\tanh kh\phi(x,0)\cosh kh - k^2w(x) \\ &= k\phi(x,0)\sinh kh - k\frac{\sinh kh}{\cosh kh}\phi(x,0)\cosh kh - k^2w(x) \\ &= k\phi(x,0)\sinh kh - k\sinh kh\phi(x,0) - k^2w(x) \\ &= k\phi(x,0)\sinh kh - k\phi(x,0)\sinh kh - k^2w(x) \\ &= -k^2w(x)\end{aligned}$$

es decir

$$w_{xx} - l^2 w = -k^2w(x)$$

y como $\alpha = \sqrt{k^2 - l^2}$ entonces

$$\begin{aligned} w_{xx} + k^2 w - l^2 w &= 0 \\ w_{xx} + (k^2 - l^2) w &= 0 \\ w_{xx} + \alpha^2 w &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

cuya solución general es

$$w(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \tag{2.17}$$

y por tanto la condición de radiación

$$\phi_x \mp i\alpha\phi = o(1) \quad con \quad x \to \pm\infty$$

produce

$$w(x) = 0 \qquad sobre \qquad F_{\pm} \tag{2.18}$$

Ahora $\phi_x(x, y)$ es continua a lo largo de $x = \pm b$ para $y \neq -a_{\pm}$.
Para $-a_{\pm} < y < 0$ se sigue de (2.5) y para $-h < y < -a_{\pm}$ es una consecuencia de las soluciones analíticas de (2.1). Esta continuidad de ϕ_x se sigue de las propiedades del potencial de velocidad que satisface (2.1)-(2.4) y (2.10). Ademas éste es continuo en las puntas de las barras sumergidas y para cada punta

$$|\nabla\phi(x, y)| = O(\rho^{-1/2}) \quad cuando \quad \rho \to 0,$$

donde ρ es la distancia de un punto en el fluido hasta la punta. También, en cada ángulo entre F o B y una barra, ϕ es continuo arriba del límite del dominio del fluido y

$$|\nabla\phi(x,y)| = O(r^{-1+\delta}) \ \ cuando \ \ r \to 0,$$

donde r es la distancia de un punto en el fluido hasta el ángulo y $\delta > 0$. Estas propiedades del potencial de velocidad implican que w_x es continua a lo largo de $x = \pm b$. Por tanto de (2.16) y (2.18),

$$w_x = 0 \quad \text{para } |x| = b$$

y así sobre F_0

$$w(x) = C_1 \cosh \alpha x \ \ con \ \ \alpha = m\pi/b, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$

o

$$w(x) = C_2 \sinh \alpha x \ \ con \ \ \alpha = (2m-1)\pi/2b, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$

Así que sólo valores de K surgen desde $\alpha = n\pi/2b, \ \ n = 1, 2, ...,$ pueden ser autovalores del problema (2.1)-(2.3),(2.5) y (2.9)-(2.10). De lo anterior se tiene

$$\int_{F_0} |w_x|^2 dx = \alpha^2 \int_{F_0} |w|^2 dx \tag{2.19}$$

Las propiedades de w son ahora usadas para establecer ciertas cotas para ϕ. Notamos que para $(x, 0) \in F_\pm$ la ecuación (2.18) nos dá

$$\int_{-h}^{0} \phi(x,y) \cosh k(y+h) dy = 0,$$

y por tanto, de (2.15)

$$\phi(x,0) \sinh kh \ \ = \ \ \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y) \sinh k(y+h) dy$$

$$
\begin{aligned}
|\phi(x,0)\sinh kh| &= \left|\int_{-h}^{0}\phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy\right| \\
&\leq \int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)\sinh k(y+h)|dy \\
&= \int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)||\sinh k(y+h)|dy \\
|\phi(x,0)\sinh kh|^2 &\leq \left(\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)||\sinh k(y+h)|dy\right)^2
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$
|\phi(x,0)\sinh kh|^2 \leq \left(\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_{-h}^{0}\sinh^2 k(y+h)dy\right) \tag{2.20}
$$

Calculemos ahora

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{0}\sinh^2 k(y+h)dy &= \int_{-h}^{0}[\cosh^2 k(y+h)-1]dy \\
&= \int_{-h}^{0}\cosh^2 k(y+h)dy - \int_{-h}^{0}dy
\end{aligned}
$$

integrando por partes

$$
\int_{-h}^{0}\cosh^2 k(y+h)dy
$$

$$
\begin{aligned}
u &= \cosh k(y+h), & dv &= \cosh k(y+h)dy, \\
du &= k\sinh k(y+h)dy, & v &= \frac{1}{k}\sinh k(y+k),
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-h}^{0}\cosh^2 k(y+h)dy = uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0}vdu
$$

pero

$$
\begin{aligned}
uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0}vdu &= \frac{1}{k}\sinh k(y+h)\cosh k(y+h)\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0}\sinh^2 k(y+h)dy \\
&= \frac{1}{k}\sinh kh\cosh kh - \int_{-h}^{0}\sinh^2 k(y+h)dy
\end{aligned}
$$

es decir

$$\int_{-h}^{0} \cosh^2 k(y+h)dy = \frac{1}{k}\sinh kh \cosh kh - \int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy$$

continuando con nuestros cálculos tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy &= \int_{-h}^{0} \cosh^2 k(y+h)dy - \int_{-h}^{0} dy \\
&= \frac{1}{k}\sinh kh \cosh kh - \int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy - h \\
2\int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy &= \frac{1}{k}\sinh kh \cosh kh - h \\
\int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy &= \frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh - \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh
\end{aligned}$$

retomando (2.20)

$$\begin{aligned}
|\phi(x,0)\sinh kh|^2 &\leq \Big(\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy\Big)\Big(\int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy\Big) \\
|\phi(x,0)|^2 \sinh^2 kh &\leq \frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy \\
k\frac{\sinh^2 kh}{\sinh kh \cosh kh}|\phi(x,0)|^2 &\leq \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy \\
k\frac{\sinh kh}{\cosh kh}|\phi(x,0)|^2 &\leq \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy \\
k \tanh kh|\phi(x,0)|^2 &\leq \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy
\end{aligned}$$

y como $K = k\tanh kh$

$$K|\phi(x,0)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy \qquad (2.21)$$

Integrando (2.21) sobre los intervalos $|x| > b$ nos resulta

$$K\int_{F_+\cup F_-} |\phi(x,0)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-} |\phi_y(x,y)|^2 dxdy \qquad (2.22)$$

Donde $W_{\pm} = \{|x| > b; -h < y < 0\}$ son las regiones del fluido por debajo de $F_{\pm}$.

Ahora tenemos que obtener una cota similar para la región del fluido por debajo de F_0. Tenemos que

$$w(x) = \int_{-h}^{0} \phi(x,y) \cosh k(y+h) dy$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= \phi(x,y), & dv = \cosh k(y+h)dy, \\ du &= \phi_y(x,y)dy, & v = \frac{1}{k}\sinh k(y+k), \end{aligned}$$

$$\int_{-h}^{0} \phi(x,y) \cosh k(y+h) dy = uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} v du$$

pero

$$\begin{aligned} uv\Big|_{-h}^{0} - \int_{-h}^{0} v du &= \frac{1}{k}\phi(x,y)\sinh k(y+h)\Big|_{-h}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \\ &= \frac{1}{k}\phi(x,0)\sinh kh - \frac{1}{k}\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \end{aligned}$$

es decir

$$\int_{-h}^{0} \phi(x,y)\cosh k(y+h)dy = \frac{1}{k}\phi(x,0)\sinh kh - \frac{1}{k}\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy$$

por tanto

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{k}\phi(x,0)\sinh kh - \frac{1}{k}\int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \\ &= \frac{1}{k}\Big[\phi(x,0)\sinh kh - \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy\Big] \end{aligned}$$

así que

$$kw(x) = \phi(x,0)\sinh kh - \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy$$

en consecuencia,

$$\phi(x,0)\sinh kh = kw(x) + \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \tag{2.23}$$

para $(x,0) \in F_0$. Ahora por lema anterior tenemos que para $\lambda > 0$

$$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2(\lambda^{1/2}p)(\lambda^{-1/2}q) \le (1+\lambda)p^2 + (1+\lambda^{-1})q^2$$

así que (2.23) queda

$$\begin{aligned}
|\phi(x,0)\sinh kh| &= \left| kw(x) + \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \right| \\
&\le |kw(x)| + \left| \int_{-h}^{0} \phi_y(x,y)\sinh k(y+h)dy \right| \\
&\le |kw(x)| + \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)\sinh k(y+h)|dy \\
&= |kw(x)| + \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)||\sinh k(y+h)|dy
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
|\phi(x,0)\sinh kh|^2 &\le \Big(|kw(x)| + \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)||\sinh k(y+h)|dy \Big)^2 \\
&\le (1+\lambda)|kw(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)||\sinh k(y+h)|dy \Big)^2 \\
&\le (1+\lambda)|k|^2|w(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1}) \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2|\sinh k(y+h)|^2 dy \\
&\le (1+\lambda)k^2|w(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1}) \int_{-h}^{0} |\phi_y(x,y)|^2 dy \int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy
\end{aligned}$$

$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh - \frac{h}{2}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh\frac{\sinh kh}{\sinh kh} - \frac{h}{2}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh \cosh kh}{2k\sinh kh} - \frac{h}{2}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh}{2k\frac{\sinh kh}{\cosh kh}} - \frac{h}{2}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh}{2k\tanh kh} - \frac{h}{2}\frac{k\tanh kh}{k\tanh kh}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - hk\tanh kh}{2k\tanh kh}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$
$$= (1+\lambda)k^2|w(x)|^2$$
$$+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2K}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy$$

esto es

$$|\phi(x,0)\sinh kh|^2 \leq (1+\lambda)k^2|w(x)|^2 + (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2K}\Big)\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy \qquad (2.24)$$

donde λ es elegida posteriormente por conveniencia.

Puesto que

$$w(x) = \int_{-h}^{0} \phi(x,y)\cosh k(y+h)dy$$

se tiene

$$\begin{aligned}|w(x)| &= \Big|\int_{-h}^{0} \phi(x,y)\cosh k(y+h)dy\Big| \leq \int_{-h}^{0} |\phi(x,y)\cosh k(y+h)|dy\\ &= \int_{-h}^{0} |\phi(x,y)||\cosh k(y+h)|dy\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}|w(x)|^2 &\leq \Big(\int_{-h}^{0} |\phi(x,y)||\cosh k(y+h)|dy\Big)^2\\ &\leq \int_{-h}^{0} |\phi(x,y)|^2 dy \int_{-h}^{0} |\cosh k(y+h)|^2 dy\\ &= \int_{-h}^{0} \cosh^2 k(y+h)dy \int_{-h}^{0} |\phi(x,y)|^2 dy\end{aligned}$$

esto es

$$|w(x)|^2 \leq \int_{-h}^{0} \cosh^2 k(y+h)dy \int_{-h}^{0} |\phi(x,y)|^2 dy \tag{2.25}$$

y como

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{0} \cosh^2 k(y+h)dy &= \int_{-h}^{0} \sinh^2 k(y+h)dy + \int_{-h}^{0} dy\\ &= \frac{1}{2k}\sinh kh\cosh kh - \frac{h}{2} + h\\ &= \frac{1}{2k}\sinh kh\cosh kh + \frac{h}{2}\end{aligned}$$

entonces de (2.25)

$$|w(x)|^2 \leq \Big(\frac{1}{2k}\sinh kh\cosh kh + \frac{h}{2}\Big)\int_{-h}^{0} |\phi(x,y)|^2 dy$$

$$
\begin{aligned}
|w(x)|^2 &\leq \left(\frac{1}{2k}\sinh kh \cosh kh \frac{\sinh kh}{\sinh kh} + \frac{h}{2}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&\leq \left(\frac{\sinh^2 kh \cosh kh}{2k\sinh kh} + \frac{h}{2}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{\sinh^2 kh}{2k\frac{\sinh kh}{\cosh kh}} + \frac{h}{2}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{\sinh^2 kh}{2k\tanh kh} + \frac{h}{2}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{\sinh^2 kh}{2k\tanh kh} + \frac{h}{2}\frac{k\tanh kh}{k\tanh kh}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{\sinh^2 kh + hk\tanh kh}{2k\tanh kh}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{\sinh^2 kh + hK}{2K}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy
\end{aligned}
$$

esto es

$$
|w(x)|^2 \leq \left(\frac{\sinh^2 kh + hK}{2K}\right)\int_{-h}^{0}|\phi(x,y)|^2 dy \tag{2.26}
$$

y así que

$$
|w_x(x)|^2 \leq \left(\frac{\sinh^2 kh + hK}{2K}\right)\int_{-h}^{0}|\phi_x(x,y)|^2 dy \tag{2.27}
$$

de la ecuación (2.24) tenemos

$$
\begin{aligned}
|\phi(x,0)|^2 \sinh^2 kh &\leq \frac{1}{2K}\Big[(1+\lambda)k^2 2K|w(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1})\sinh^2 kh - Kh\Big]\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
K|\phi(x,0)|^2 &\leq \frac{1}{2\sinh^2 kh}\Big[(1+\lambda)k^2 2K|w(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1})\sinh^2 kh - Kh\Big]\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2 dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+\lambda)\frac{k^2K|w(x)|^2}{\sinh^2 kh} \\
&+ (1+\lambda^{-1})\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2dy
\end{aligned}
$$

así que

$$
\begin{aligned}
K|\phi(x,0)|^2 &\leq (1+\lambda)\frac{l^2+\alpha^2}{\sinh^2 kh}K|w(x)|^2 \\
&+ (1+\lambda^{-1})\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\int_{-h}^{0}|\phi_y(x,y)|^2dy \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Integrando (2.28) sobre F_0 obtenemos

$$
\begin{aligned}
K\int_{F_0}|\phi|^2dx &\leq (1+\lambda)\frac{l^2+\alpha^2}{\sinh^2 kh}K\int_{F_0}|w|^2dx \\
&+ (1+\lambda^{-1})\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

y la integración de (2.26) a lo largo de F_0 resulta

$$
\int_{F_0}|w|^2dx \leq \frac{\sinh^2 kh + Kh}{2K}\int_{W_0}|\phi(x,y)|^2dxdy, \qquad (2.30)
$$

donde $W_0 = \{|x| < b; -h < y < 0\}$ es la porción del dominio del fluido situado directamente debajo de F_0.

Combinando (2.29) y (2.30) junto con (2.19), la ecuación (2.29) queda así

$$
\begin{aligned}
K\int_{F_0}|\phi|^2dx &\leq (1+\lambda)\frac{l^2+\alpha^2}{\sinh^2 kh}K\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2K}\Big)\int_{W_0}|\phi|^2dxdy \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
&= (1+\lambda)(l^2+\alpha^2)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big)\int_{W_0}|\phi|^2dxdy \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) l^2 \int_{W_0} |\phi|^2 dxdy \\
&+ (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \alpha^2 \int_{W_0} |\phi|^2 dxdy \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} |\phi_y|^2 dxdy \\
&= (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) l^2 \int_{W_0} |\phi|^2 dxdy \\
&+ (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} |\phi_x|^2 dxdy \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} |\phi_y|^2 dxdy \\
&= (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \Big(l^2 \int_{W_0} |\phi|^2 dxdy + \int_{W_0} |\phi_x|^2 dxdy \Big) \\
&+ (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} |\phi_y|^2 dxdy \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

esto es

$$
\begin{aligned}
K\int_{F_0} |\phi|^2 dx \;\leq\; & (1+\lambda)\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \Big(\int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\phi_x|^2) dxdy \Big) \\
+ & (1+\lambda^{-1})\Big(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} |\phi_y|^2 dxdy \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

la elección

$$
\lambda = \frac{\sinh^2 kh - Kh}{\sinh^2 kh + Kh}
$$

que es positivo ya que $K = k\tanh kh$ entonces (2.32) queda así

$$
\begin{aligned}
K\int_{F_0} |\phi|^2 dx \;\leq\; & \Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\phi_x|^2) dxdy \\
+ & \lambda\Big(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\Big) \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\phi_x|^2) dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
+ & \lambda^{-1}\left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
\leq & \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{\sinh^2 kh + Kh}\right)\left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{\sinh^2 kh - Kh}\right)\left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
\leq & \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy + \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
= & \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh} + \frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh} + \frac{\sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
= & \left(\frac{\sinh^2 kh + Kh + \sinh^2 kh - Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{\sinh^2 kh - Kh + \sinh^2 kh + Kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy \\
= & \left(\frac{2\sinh^2 kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy \\
+ & \left(\frac{2\sinh^2 kh}{2\sinh^2 kh}\right)\int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy
\end{aligned}
$$

de esto se deduce que

$$K\int_{F_0}|\phi|^2dx \;\leq\; \int_{W_0}(l^2|\phi|^2+|\phi_x|^2)dxdy + \int_{W_0}|\phi_y|^2dxdy$$

$$= \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\phi_x|^2 + |\phi_y|^2)dxdy$$

por tanto

$$K\int_{F_0} |\phi|^2 dx \;\leq\; \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy \tag{2.33}$$

pero

$$\begin{aligned} K\int_{F} |\phi|^2 dx &= K\int_{F_+\cup F_-\cup F_0} |\phi|^2 dx = K\Big(\int_{F_+\cup F_-} |\phi|^2 dx + \int_{F_0} |\phi|^2 dx\Big) \\ &= K\int_{F_+\cup F_-} |\phi|^2 dx + K\int_{F_0} |\phi|^2 dx \end{aligned}$$

ahora la combinación de (2.33) con la correspondiente desigualdad (2.22) para el dominio exterior produce

$$K\int_{F} |\phi|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-} |\phi_y|^2 dxdy + \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy. \tag{2.34}$$

Comparando esta ecuación con la identidad de energía

$$K\int_{F} |\phi|^2 dx = \int_{W} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy, \tag{2.35}$$

que es una consecuencia de la fórmula de Green; produce

$$\begin{aligned} \int_{W} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy &\leq \frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-} |\phi_y|^2 dxdy + \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-} |\nabla\phi|^2 dxdy + \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} \int_{W} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy &= \int_{W_0} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy \\ &+ \int_{W_+\cup W_-} (l^2|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dxdy \end{aligned}$$

entonces

$$\int_{W_+\cup W_-}(l^2|\phi|^2+|\nabla\phi|^2)dxdy \;\leq\; \frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-}|\nabla\phi|^2 dxdy$$

así que

$$\int_{W_+\cup W_-}(l^2|\phi|^2+|\nabla\phi|^2)dxdy-\frac{1}{2}\int_{W_+\cup W_-}|\nabla\phi|^2 dxdy \;\leq\; 0$$

por tanto

$$\int_{W_+\cup W_-}\left(l^2|\phi|^2+|\nabla\phi|^2-\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right)dxdy\leq 0$$

es decir

$$\int_{W_+\cup W_-}\left(l^2|\phi|^2+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right)dxdy\leq 0 \tag{2.36}$$

De aquí se sigue que $\phi\equiv 0$ en $W_+\cup W_-$ y como ϕ es analítica ésta se anula en todo W. ★

Así, esto completa la prueba del Teorema 2.1.

Bibliografía

[1] Kuznetsov, N., McIver, P. & Linton, C.M. 1999 On uniqueness and trapped modes in the water-wave problem for vertical barriers. Russian Academy of Sciences & Dep. of Math., Loughborough University.

[2] Evans, D.V. & Porter, R. 1998 A example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water-wave problem involving a submerged body. *Proc. Roy. Soc. Lon.* A **454**, 3145-3165.

[3] Jarvis, R. J. 1971 The scattering of surface waves by two vertical plane barries. *J. Inst. Maths Applic.*, **7**, 207-215.

[4] Kuznetsov, N., Porter, R., Evans, D. V. & Simon, M. J. 1998 Uniqueness and modes for surface-piercing cylinders in oblique waves. *J. Fluid Mech.* **365**, 351-368.

[5] Kuznetsov, N., Porter, R. 1999 Uniqueness and trapped modes in the two dimensional water-wave problem. *Euro. J. Appl. Maths* (submitted).

[6] Levine, H. & Rodemich, E. 1958 Scattering of surface waves in and ideal fluid. Math. and Stat. Lab. Tech. Report No. 78, Stanford University.

[7] Linton, C. M. & Kuznetsov, N. G. 1997 Non-uniqueness in two dimensional water wave problems: numerical evidence and geometrical restrictions. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A **453**, 2437-2460.

[8] McIver, P. 1985 Scattering of surface waves by two surface-piercing vertical barriers. *IMA J. Appl. Math.* **35**, 1-17.

[9] Parsons, N. F. & Martin, P. M. 1994 Scattering of water waves by submerged curved plates and by surface-piercing flat plates. *Appl. Ocean Res.* **16**, 129-139.

[10] Simon, M. J. & Ursell, F. 1984 Uniqueness in linearised two dimensional water-wave problems. *J. Fluid Mech.* **148**, 137-154.