1

UN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULOS GENERALIZADOS DE CONCEPTOS FORMALES

JARNISHS BELTRAN MEJIA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA

PROGRAMA DE MATEMATICA

CARTAGENA

2007

UN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULOS GENERALIZADOS DE CONCEPTOS FORMALES

JARNISHS BELTRAN MEJIA

ELIAS SALAZAR BUELVAS

Asesor

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al titulo de Matemático

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA

PROGRAMA DE MATEMATICA

CARTAGENA

2007

A la memoria de mi madre

AGRADECIMIENTOS

- A mi familia, por su apoyo en todo momento.
- A mis compañeros del programa, por este tiempo de lucha.
- A mis amigos, por estar cuando los necesite.
- A los buenos profesores, por que además de enseñarme a ser un buen profesional me enseñaron a ser una mejor persona.
- A los malos profesores por que me enseñaron el camino que no se debe tomar en la academia.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN . . . 1

1. CAPITULO 1. CONCEPTOS PRELIMINARES . . . 2
   - 1.1. Sobre conjuntos clásicos . . . 2
   - 1.2. Sobre conjuntos difusos . . . 5
2. DE LOS RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES CLÁSICOS A LOS RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES DIFUSOS . . . 7
   - 2.1. Retículo de conceptos formales . . . 7
   - 2.2. Retículos de conceptos formales en el sentido difuso. Diferentes propuestas . . . 9
3. UN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULOS GENERALIZADOS DE CONCEPTOS FORMALES . . . 14
   - 3.1. TEOREMA PRINCIPAL . . . 14
   - 3.2. LA PROPUESTA DE POLLANDT Y BĔLOHLAVEK ES REALMENTE UNA GENERALIZACIÓN EN EL SENTIDO DIFUSO DE RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES . . . 27
4. EJEMPLOS . . . 29
5. CONCLUSIÓN . . . 32

BIBLIOGRAFÍA . . . 33

INTRODUCCIÓN

El análisis de conceptos formales, desde el genero particular de análisis de datos en el ambiente clásico, tiene la forma de una tabla con filas correspondientes a objetos y columnas correspondientes a atributos, y tablas de entradas que contienen ceros y unos dependiendo de si un objeto tiene o no el atributo. El ambiente clásico es apropiado para atributos que son débiles, esto es, cada objeto tiene o no el atributo; si lo tiene se nota con 1 y sino se nota con 0. Pero muchos atributos son difusos en vez de débiles, de aquí la necesidad de generalizar en el sentido difuso.

Hay varias propuestas de generalización para el caso difuso. Una de ellas es la generalización natural; considerada en primer lugar por Burusco y Fuentes - Gonzalez (1994) ver[7] y luego mejorada por Polland (1997) y Bělohlavek (1998) Ver [2]. Hay otras propuestas, una de ellas es la llamada propuesta parcial en el sentido difuso, que fué hecha por Ben Yania y Jaova (2001), Bělohlavek (2005) y por Krajči (2004).

Este trabajo se desarrolla en cuatro capítulos, el primero de ellos se dedica a establecer todas las definiciones preliminares necesarias para probar el teorema principal; el segundo capítulo se dedica a un paseo por las distintas propuestas para generalizar los retículos de conceptos formales; el tercero estará dedicado al estudio de la prueba de nuestro teorema principal; y probaremos que la propuesta de Krajči es equivalente a la de Pollandt y Bělohlavek y, por último, en el cuarto capítulo daremos un ejemplo.

1. CAPITULO 1. CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo nos referimos a los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, tales conceptos serán de gran importancia para el desarrollo de nuestros objetivos.

1.1. Sobre conjuntos clásicos

Notaremos los conjuntos por letras mayúsculas: $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}, \cdots, \mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ y los elementos con letras minúsculas:a, b, $c, \cdots, x$, y, z. Utilizamos la notación $x \in \mathbb{S}$ para indicar que x es un elemento de $\mathbb{S}$ o que x pertenece a $\mathbb{S}$. Si x no pertenece a $\mathbb{S}$ escribimos $x \notin \mathbb{S}$.

Definición 1.1.1 (Subconjunto). Decimos que un conjunto $\mathbb{A}$ es un subconjunto del conjunto $\mathbb{B}$ y escribimos $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, si para todo $a \in \mathbb{A}$ también $a \in \mathbb{B}$.

Definición 1.1.2 (Igualdad entre conjuntos). Decimos que un conjunto $\mathbb{A}$ es igual al conjunto $\mathbb{B}$, si y solo si $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ y $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$

Definición 1.1.3 (Producto cartesiano). Dados dos conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, definimos su producto cartesiano por

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a,\ b)/a \in \mathbb{A}\ \wedge\ b \in \mathbb{B}\}$$

Definición 1.1.4 (Relación - Clases). Dados dos conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, decimos que $\mathbb{R}$ es una relación de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ si $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$; una relación $\mathbb{R}$ en $\mathbb{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$.
Dada una relación $\mathbb{R}$ en $\mathbb{A}$, decimos que $\mathbb{A}$ es:

- Reflexiva: si para todo $a \in \mathbb{A}$, $(a,\ a) \in \mathbb{R}$.
- Antisimétrica: si $(a,\ b) \in \mathbb{R}$ y $(b,\ a) \in \mathbb{R}$ implica que $a = b$.
- Transitiva: si $(a,\ b) \in \mathbb{R}$ y $(b,\ c) \in \mathbb{R}$ entonces $(a,\ c) \in \mathbb{R}$.
- Simétrica: si $(a,\ b) \in \mathbb{R}$ entonces $(b,\ a) \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.5 (Conjunto parcialmente ordenado). Un conjunto $\mathbb{L}$ no vacío, se dice parcialmente ordenado si existe en $\mathbb{L}$ una relación $\leq$ reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 1.1.6 (Conjunto acotado). Sea $\mathbb{B}$ un conjunto ordenado y $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, si existe un $b \in \mathbb{B}$ tal que $a \leq b$ para todo $a \in \mathbb{A}$, se dice que $\mathbb{A}$ es **acotado superiormente** y $b \in \mathbb{B}$ es una **cota superior de** $\mathbb{A}$.
Por otro lado, si existe un $b \in \mathbb{B}$ tal que $b \leq a$ para todo $a \in \mathbb{A}$ se dice que $\mathbb{A}$ es **acotado inferiormente** y $b \in \mathbb{B}$ es una **cota inferior**.

Definición 1.1.7 (Supremo - Ínfimo). Sea $\mathbb{B}$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, $\mathbb{A}$ acotado superiormente. Supongamos que existe $b \in \mathbb{B}$ tal que:

- b es una cota superior de $\mathbb{A}$.
- Si $a \leq b$ entonces a no es cota superior de $\mathbb{A}$. Entonces b se llama el **supremo de** $\mathbb{A}$ o mínima cota superior de $\mathbb{A}$.
- b es cota inferior de $\mathbb{A}$.
- Si $b \leq a$ entonces a no es una cota inferior de $\mathbb{A}$. Entonces b se llama el **ínfimo de** $\mathbb{A}$

Definición 1.1.8 (Función). Dados dos conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ decimos que f es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$, si $f \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, además para todo $a \in \mathbb{A}$, existe un único $b \in \mathbb{B}$ tal que $(a,\ b) \in f$.

Definición 1.1.9 (Función inyectiva - sobreyectiva - biyectiva). Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conjuntos, y sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$.
Decimos que f es **inyectiva** si $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$ para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$.
Decimos que f es **sobreyectiva** si para todo $b \in \mathbb{B}$ existe $a \in \mathbb{A}$ tal que $b = f(a)$.
Decimos que f es **biyectiva** si es sobreyectiva e inyectiva.

Definición 1.1.10 (Isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados). Dados $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conjuntos parcialmente ordenados, decimos que $\mathbb{A}$ es isomorfo a $\mathbb{B}$ si existe una función biyectiva $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ tal que para todo $a_1,\ a_2 \in \mathbb{A}$, se tiene que

$$a_1 \leq a_2 \textit{ si y solo si } \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$$

Definición 1.1.11 (Retículo). Sea $\mathbb{L}$ un conjunto parcialmente ordenado dotado de dos operaciones binarias denotadas por $\wedge$ y $\vee$, y definidas por $a \vee b = \sup\{a,\ b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a,\ b\}$. Si para todo $a,\ b \in \mathbb{L}$, $a \wedge b$ y $a \vee b$ existen y pertenecen a $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}$ se llama un retículo.

Definición 1.1.12 (Retículo completo). Un retículo $\mathbb{L}$ se dice completo si para todo $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{L}$, existen

$$\bigwedge \mathbb{A} = \inf\{x|x \in \mathbb{A}\} \ y \ \bigvee \mathbb{A} = \sup\{x|x \in \mathbb{A}\}$$

en $\mathbb{L}$.

Definición 1.1.13 (conjunto sup-denso e inf-denso). Sea $\mathbb{L}$ un retículo completo, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{L}$, se dice que $\mathbb{A}$ es sup-denso en $\mathbb{L}$, si para todo $\imath \in \mathbb{L}$, existe $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ tal que $\imath = \vee\mathbb{B}$.
$\mathbb{A}$ es inf- denso en $\mathbb{L}$, si para todo $\imath \in \mathbb{L}$, existe $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ tal que $\imath = \wedge\mathbb{B}$.

Definición 1.1.14 (Retículos Isomorfos). Dados dos retículos $\mathbb{S}$ y $\mathbb{L}$, se dicen isomorfos si existe una biyección $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{L}$ tal que para todo $a,\ b \in \mathbb{S}$ se tiene que:

(i) $a \leq b$ si y solo si $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, $\forall a,\ b \in \mathbb{S}$.

(ii) $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$
$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ $\forall a,\ b \in \mathbb{S}$.

Lema 1.1.1. *Sean $\mathbb{L}$ y $\mathbb{S}$ retículos. Consideremos $\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{S}$ y $\psi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{L}$ tales que φ y ψ son biyectivos, preservan el orden y $\varphi^{-1} = \psi$. Entonces φ es un isomorfismo de retículos.*

Demostración.

(i) $\varphi(a_1 \wedge a_2) = \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2)$. $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{L}$. En efecto, sean $a_1,\ a_2 \in \mathbb{L}$ y $s_1, s_2 \in \mathbb{S}$ tales que

$$\varphi(a_1) = s_1 \qquad \psi(s_1) = a_1$$
$$\varphi(a_2) = s_2 \qquad \psi(s_2) = a_2$$

tal elección es válida pues φ y ψ son biyecciones.
$a_1 \wedge a_2 \leq a_1$ y $a_2 \wedge a_1 \leq a_2$, luego $\varphi(a_1 \wedge a_2) \leq \varphi(a_2)$ y $\varphi(a_1 \wedge a_2) \leq a_2$ así

$$\varphi(a_1 \wedge a_2) \leq \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2)$$

Por otro lado, por un razonamiento análogo tenemos que:

$$\begin{gathered}
\psi(s_1 \wedge s_2) \leq \psi(s_1) \wedge \psi(s_2)\\
\varphi(\psi(s_1 \wedge s_2)) \leq \varphi(\psi(s_1) \wedge \psi(s_2))\\
s_1 \wedge s_2 \leq \varphi(a_1 \wedge a_2)\\
\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \leq \varphi(a_1 \wedge a_2)
\end{gathered}$$

Así

$$\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) = \varphi(a_1 \wedge a_2).$$

(ii) $\varphi(a_1 \vee a_2) = \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
a_1 &\leq a_1 \vee a_2 && y \ \ a_2 \leq a_1 \vee a_2 \ \ \textit{luego}\\
\varphi(a_1) &\leq \varphi(a_1 \vee a_2) && y \ \ \varphi(a_2) \leq \varphi(a_1 \vee a_2) \ \ \textit{así}\\
\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) &\leq \varphi(a_1 \vee a_2)
\end{aligned}$$

Por otro lado, con un razonamiento análogo tenemos que

$$\psi(s_1) \vee \psi(s_2) \leq \psi(s_1 \vee s_2)$$

de donde

$$\begin{gathered}
\varphi(\psi(s_1) \vee \psi(s_2)) \leq \varphi(\psi(s_1 \vee s_2)) \ \ \textit{luego}\\
\varphi(a_1 \vee a_2) \leq s_1 \vee s_2\\
\varphi(a_1 \vee a_2) \leq \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2)
\end{gathered}$$

Así

$$\varphi(a_1 \vee a_2) = \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2)$$

Definición 1.1.15 (Conexión de Galois). Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, decimos que f y g forman una conexión de Galois si:

(i) $a_1 \leq a_2$ implica que $f(a_1) \leq f(a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$.

(ii) $b_1 \leq b_2$ implica que $g(b_2) \leq g(b_1)$ para todo $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$.

(iii) $a \leq g(f(a))$ y $b \leq f(g(b))$ para todo $a \in \mathbb{A}$ y $b \in \mathbb{B}$.

Usualmente f y g también se llaman un par adjunto de Ore

Definición 1.1.16 (Monoide conmutativo). Una estructura $\langle \mathbb{L},\ \otimes,\ 1\rangle$ se llama un monoide conmutativo si $\otimes$ es conmutativo, asociativo y $a \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes a = a$ para todo $a \in \mathbb{L}$, $\mathbb{L}$ no vacío,

Definición 1.1.17 (Función monótona creciente y monótona decreciente). Sea $\mathbb{L}$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ decimos que f es monótona creciente en el primer y segundo argumento si $a_1 \leq a_2$ implica que $f(a_1,\ a) \leq f(a_2,\ a)$ y $f(a,\ a_1) \leq f(a,\ a_2)$ respectivamente, para todo $a_1,\ a_2,\ a \in \mathbb{L}$
Dualmente, f es monótona decreciente en el primer y segundo argumento si $a_1 \leq a_2$ implica que $f(a_2,\ a) \leq f(a_1,\ a)$ y $f(a,\ a_2) \leq f(a,\ a_1)$ respectivamente, para todo $a_1,\ a_2,\ a \in \mathbb{L}$.

Definición 1.1.18 (Retículo residuado completo). Una estructura $\langle \mathbb{L},\ \wedge,\ \vee,\ \otimes, \longrightarrow,\ 0,\ 1\rangle$ se llama un retículo residuado completo si:

(i) $\langle \mathbb{L}, \wedge, \vee,\ 0,\ 1\rangle$ es un retículo completo con 0 y 1 elementos máximos y mínimos universal respectivamente.

(ii) $\langle \mathbb{L}, \otimes,\ 1\rangle$ un monoide conmutativo.

(iii) $\otimes$ y $\longrightarrow$ forman un par adjunto. Donde $x \longrightarrow y := \text{máx}\{z \in \mathbb{L}/x \otimes z \leq y\}$

Definición 1.1.19 (Función continua a izquierda). Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ retículos completos y $\mathbb{L}$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{L}$, f se dice continua a izquierda en el primer argumento si $f(a,\ b) \leq l$ vale para $b \in \mathbb{B}$ y $l \in \mathbb{L}$ y para todo $a \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A}$, entonces $f(\sup \mathbb{X},\ b) \leq l$.
Dualmente, f se dice continua a izquierda en el segundo argumento, si $f(a,\ b) \leq l$ vale para $a \in \mathbb{A}$ y $l \in \mathbb{L}$ y para todo $b \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{B}$, entonces $f(a, \sup \mathbb{Y}) \leq b$.

1.2. Sobre conjuntos difusos

Definición 1.2.1 (Conjunto difuso). Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal no vacío. Un conjunto difuso f sobre $\mathbb{U}$, es el conjunto dado por $\{(x,\ r)/x \in \mathbb{U}, r \in \mathbb{L}\}$, donde $\mathbb{L}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto difuso se caracteriza por una función $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{L}$, tal que $f(x)$ se interpreta como el grado de pertenencia a f de cada $x \in \mathbb{U}$. Además, por $\mathbb{L}^{\mathbb{U}}$ denotaremos la colección de todos los conjuntos difusos en un conjunto $\mathbb{U}$. Usualmente se considera $\mathbb{L} \subseteq [0,\ 1]$. Decimos que f es un subconjunto $\mathbb{L}$- difuso de $\mathbb{U}$ si $f \in \mathbb{L}^{\mathbb{U}}$.

Definición 1.2.2 (Relación $\mathbb{L}$-difusa). Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conjuntos no vacíos, $\mathbb{L}$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que R es una relación $\mathbb{L}$- difusa si $R \in \mathbb{L}^{\mathbb{A}\times\mathbb{B}}$.

Definición 1.2.3 (Contenencia de conjuntos difusos). Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{L}^{\mathbb{X}}$. Decimos que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ si y solo si $\mathbb{A}(x) \leq \mathbb{B}(x)$, para todo $x \in \mathbb{X}$.
Si $\mathbb{A} \in \mathbb{L}^{\mathbb{X}}$, entonces podemos escribir

$$\mathbb{A} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{L}$$
$$\mathbb{A} = \{(x,\ \mathbb{A}(x)) : x \in \mathbb{X}\}$$

En lugar de $(x,\ \mathbb{A}(x))$ escribiremos $x|\mathbb{A}(x)$.

2. DE LOS RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES CLÁSICOS A LOS RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES DIFUSOS

El análisis de concepto formal es un método de datos- labor sobre un método objeto - atributo representado por una matriz rectangular.
La construcción clásica de Ganter - Wille considera el caso débil, esto es, una matriz que contiene solo ceros y unos. Este es un ejemplo natural de una matriz objeto - atributo, pero muchos atributos son difusos en vez de débiles, de aquí la necesidad de generalizar en el sentido difuso.

En este capítulo se estudiaran las diferentes propuestas de generalizar en el sentido difuso los retículos de conceptos formales.

2.1. Retículo de conceptos formales

Definición 2.1.1 (Contexto formal). Un contexto formal es una tripleta $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ donde $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ son conjuntos de objetos y atributos respectivamente. $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ es una relación binaria. $\langle x,\ y\rangle \in \mathbb{I}$ significa que el objeto x tiene atributo y.

Definición 2.1.2 (Concepto formal). Un concepto formal en $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ es un par $\langle \mathbb{A},\ \mathbb{B}\rangle$ formado por un conjunto $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ de objetos y un conjunto $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y}$ de atributos tales que:

- $\mathbb{B}$ es la colección de todos los atributos compartidos por los objetos de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}$ es la colección de todos los objetos que comparten los atributos de $\mathbb{B}$.

Para $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ y $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{Y}$, pongamos

$$\mathbb{A}^{\uparrow} = \{y \mid \textit{para cada } x \in \mathbb{A} : \langle x,\ y\rangle \in \mathbb{I}\}$$
$$\mathbb{B}^{\downarrow} = \{x \mid \textit{para cada } y \in \mathbb{B} : \langle x,\ y\rangle \in \mathbb{I}\}$$

Esto quiere decir que, $\mathbb{A}^{\uparrow}$ es el conjunto de todos los atributos de $\mathbb{Y}$ compartidos por todos los objetos de $\mathbb{A}$, y $\mathbb{B}^{\downarrow}$ es el conjunto de todos los objetos de $\mathbb{X}$ que comparten todos los atributos de $\mathbb{B}$. Por tanto, un concepto formal es un par $\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\rangle$ para el cual $\mathbb{A}^{\uparrow} = \mathbb{B}$ y $\mathbb{B}^{\downarrow} = \mathbb{A}$

Definición 2.1.3 (retículo de conceptos formales). El conjunto de todos los conceptos formales en $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ con la relación $\leq$ dada por
$\langle \mathbb{A}_1,\ \mathbb{B}_1\rangle \leq \langle \mathbb{A}_2,\ \mathbb{B}_2\rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$(o equivalente, $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$) se llama un retículo de conceptos formales clásicos y lo denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$.

Ejemplo

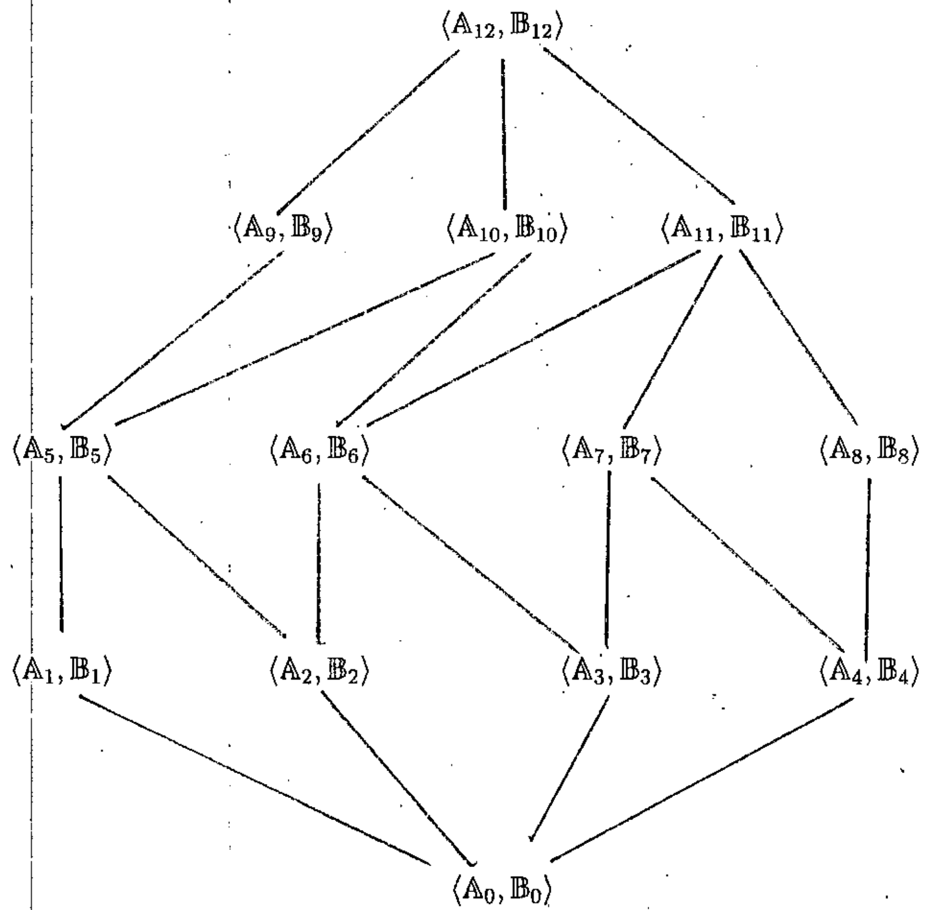
Dado $\mathbb{X} = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$, $\mathbb{Y} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $\mathbb{I} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \{0,\ 1\}$ como se muestra en la siguiente tabla.

I	a	b	c	d	e	f
1	0	1	1	1	1	0
2	1	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0	1
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	1	1	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Luego

$$\langle A_o,\ B_o\rangle = \langle \phi,\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}\rangle$$
$$\langle A_1,\ B_1\rangle = \langle \{a\},\ \{2,3,6\}\rangle$$
$$\langle A_2,\ B_2\rangle = \langle \{b\},\ \{1,2,3\}\rangle$$
$$\langle A_3,\ B_3\rangle = \langle \{c\},\ \{1,2,5\}\rangle$$
$$\langle A_4,\ B_4\rangle = \langle \{d\},\ \{1,4,5\}\rangle$$
$$\langle A_5,\ B_5\rangle = \langle \{a,b\},\ \{2,3\}\rangle$$
$$\langle A_6,\ B_6\rangle = \langle \{b,c\},\ \{1,2\}\rangle$$
$$\langle A_7,\ B_7\rangle = \langle \{c,d\},\ \{1,5\}\rangle$$
$$\langle A_8,\ B_8\rangle = \langle \{d,e\},\ \{1,4\}\rangle$$
$$\langle A_9,\ B_9\rangle = \langle \{a,b,f\},\ \{3\}\rangle$$
$$\langle A_{10},\ B_{10}\rangle = \langle \{a,b,c\},\ \{2\}\rangle$$
$$\langle A_{11},\ B_{11}\rangle = \langle \{b,c,d,e\},\ \{1\}\rangle$$
$$\langle A_{12},\ B_{12}\rangle = \langle \{a,b,c,d,e,f\},\ \phi\rangle$$

De lo anterior obtenemos el siguiente retículo de conceptos formales.



2.2. Retículos de conceptos formales en el sentido difuso. Diferentes propuestas

En esta sección se estudiaran las diferentes propuestas de generalizar en el sentido difuso los retículos de conceptos formales.

La propuesta de Burusco y Fuentes - Gonzalez

Burusco y Fuentes - Gonzalez son los primeros autores sobre el análisis formal de conceptos desde el punto de vista difuso.

Definición 2.2.1 (*t*-**conorma**)**.** Sea $\mathbb{L}$ un retículo, una t- conorma sobre $\mathbb{L}$, es una operación binaria la cual es asociativa, conmutativa y tiene al $\mathbf{0}$ como elemento neutro (donde $\mathbf{0}$ es el extremo inferior universal)

Definición 2.2.2 (Negación). Sea $\mathbb{L} \subseteq [0,\ 1]$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{L}^X$, definimos la negación de $\mathbb{A}$ $(\neg\mathbb{A})$ por

$$\neg\mathbb{A}(x) = 1 - \mathbb{A}(x)$$

donde 1 es el elemento máximo universal de $\mathbb{L}$.
Consideremos la estructura $\langle \mathbb{L}, \leq, \prime, \oplus, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, donde $\langle \mathbb{L}, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ es un retículo com-

pleto acotado por $\mathbf{0}$ y 1, $'$ es una operación de complementación y $\oplus$ es una t-conorma sobre $\mathbb{L}$.(ellos consideran $\mathbb{L} = [0,\ 1]$)
Para un $\mathbb{L}$- contexto $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ definimos las siguientes funciones:
$\uparrow: \mathbb{L}^X \longrightarrow \mathbb{L}^Y$ y $\downarrow: \mathbb{L}^Y \longrightarrow \mathbb{L}^X$ por

$$\mathbb{A}^{\uparrow}(y) := \bigwedge_{x\in X} (\mathbb{A}(x)' \oplus \mathbb{I}(x,y))$$
$$\mathbb{B}^{\downarrow}(x) := \bigwedge_{y\in Y} (\mathbb{B}(y)' \oplus \mathbb{I}(x,y))$$

Para $\mathbb{A} \in \mathbb{L}^X$ y $\mathbb{B} \in \mathbb{L}^Y$.
Pongamos $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}) = \{\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\rangle \in \mathbb{L}^X \times \mathbb{L}^Y / \mathbb{A}^{\uparrow} = \mathbb{B},\ \mathbb{B}^{\downarrow} = \mathbb{A}\}$ y definamos un orden parcial $\leq$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$ dado por $\langle \mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1\rangle \leq \langle \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2\rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$ (si y solo si $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$). Luego $(\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}), \leq)$ es un retículo completo. (estos se prueba en [6])

La propuesta de Pollandt y Bělohlávek

Pollandt y Bělohlávek independientemente elaboraron la siguiente propuesta, además ambos consideran un retículo residuado completo, tal elección y en particular las propiedades de la implicación y la conjunción son cruciales, pues ellos forman un par adjunto.
Consideremos $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ un $\mathbb{L}$- contexto, esto es, $\mathbb{I} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{L}$ para conjuntos difusos $\mathbb{A} \in \mathbb{L}^{\mathbf{X}}$ y $\mathbb{B} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$, consideremos conjuntos difusos $\mathbb{A}^{\uparrow} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$, $\mathbb{B}^{\downarrow} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$, definidos por

$$\mathbb{A}^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x\in \mathbf{X}} (\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,\ y))$$
$$\mathbb{B}^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y\in \mathbb{Y}} (\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,\ y))$$

Pongamos $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}) = \{\langle \mathbb{A}, \mathbb{B}\rangle \in \mathbb{L}^{\mathbf{X}} \times \mathbb{L}^{\mathbb{Y}} | \mathbb{A}^{\uparrow} = \mathbb{B}, \mathbb{B}^{\downarrow} = \mathbb{A}\}$ y definamos un orden parcial $\leq$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$ dado por, $\langle \mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1\rangle \leq \langle \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2\rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$(si y solo si $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$). Luego $(\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}), \leq)$ es un retículo completo. (ver prueba [1], [2], [17])

La propuesta de Yahia y Krajči

Yahia e independientemente Krajči tiene una propuesta llamada **propuesta parcial en el sentido difuso** sus propuestas no son del todo diferentes, es mas, solo difieren en que Yahia considera un $\mathbb{L}$ - contexto $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ y Krajči considera un $\mathbb{L}$ - contexto dado por $\langle \mathbb{Y},\ \mathbb{X},\ \mathbb{I}^{-1}\rangle$, con $\mathbb{I}^{-1} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Y}\times\mathbf{X}}$ definido por $\mathbb{I}^{-1}(x,\ y) = \mathbb{I}(x,\ y)$. Además ambos consideran $\mathbb{L} = [0,\ 1]$.
Consideremos un $\mathbb{L}$- contexto $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ definamos $f : \{0,\ 1\}^{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$ y

$h : \mathbb{L}^{\mathbb{Y}} \longrightarrow \{0,\ 1\}^{\mathbb{X}}$ por

$$f(\mathbb{A})(y) = \bigwedge_{x \in \mathbb{A}} \mathbb{I}(x,\ y)$$

$$h(\mathbb{B}) = \{x \in X |\ para\ cada\ y \in \mathbb{Y} : \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x, y)\}$$

pongamos $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}) = \{\langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle \in \{0,\ 1\}^{\mathbb{X}} \times \mathbb{L}^{\mathbb{Y}} | f(\mathbb{A}) = \mathbb{B},\ h(\mathbb{B}) = \mathbb{A})\}$ y definamos un orden parcial $\leq$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$ dado por $\langle \mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1 \rangle \leq \langle \mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2 \rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$(si y solo si $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$). Luego $(\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}), \leq)$ es un retículo completo. (ver prueba [18])

Retículos de conceptos formales y conexión de Galois con funciones cubiertas

Definición 2.2.3 (Cubierta). Sea $\mathbb{L}$ un retículo residuado completo, una función de cubierta, es una función unaria $* : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ que satisface:

i. $\mathbf{1}^* = 1$

ii. $a^* \leq a$.

iii. $(a \longrightarrow b)^* \leq a^* \longrightarrow b^*$.

iv. $a^{**} = a^*$.

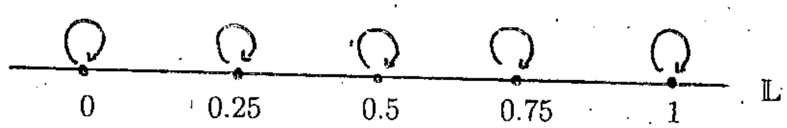
Para todo $a,\ b \in \mathbb{L}$

Ejemplo

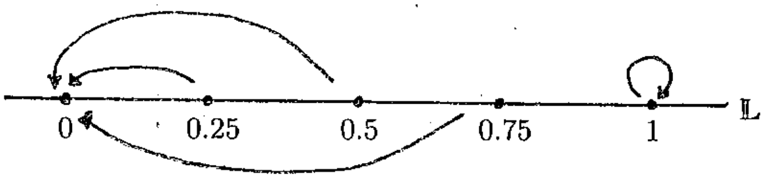
Función cubierta idéntica
$a^* = a$ para todo $a \in \mathbb{L}$.
Función cubierta globalizada

$$a^* = \begin{cases} 1, & si\ \ a = 1 \\ 0, & en\ otros\ casos \end{cases}$$

Si $\mathbb{L} = \{0,\ 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75,\ 1\}$ con el siguiente orden $0 \leq 0{,}25 \leq 0{,}5 \leq 0{,}75 \leq 1$. Entonces la función cubierta idéntica es:



y la función cubierta globalizada es:



Consideremos un $\mathbb{L}$- contexto $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$. Sea x^* y y^* funciones cubiertas para un $\mathbb{L}$- conjunto $\mathbb{A} \in \mathbb{L}^{\mathbb{X}}$ ($\mathbb{L}$-conjunto de objetos), $\mathbb{B} \in \mathbb{L}^{Y}$($\mathbb{L}$- conjunto de atributos), definimos $\mathbb{L}$- conjuntos $\mathbb{A}^{\uparrow} \in \mathbb{L}^{Y}$ y $\mathbb{B}^{\downarrow} \in \mathbb{L}^{X}$ dados por

$$\mathbb{A}^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x \in X} (\mathbb{A}(x)^{x^*} \longrightarrow I(x,y))$$

$$\mathbb{B}^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{x \in X} (\mathbb{B}(y)^{y^*} \longrightarrow I(x,y))$$

Pongamos $\mathcal{B}(\mathbb{X}^{x^*},\ \mathbb{Y}^{y^*},\ I) = \{\langle \mathbb{A},\mathbb{B}\rangle \in \mathbb{L}^{\mathbb{X}} \times \mathbb{L}^{\mathbb{Y}} | \mathbb{A}^{\uparrow} = \mathbb{B}, \mathbb{B}^{\downarrow} = \mathbb{A}\}$ y definamos un orden parcial $\leq$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{X}^{x^*},\ \mathbb{Y}^{y^*},\ I)$ dado por, $\langle \mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1\rangle \leq \langle \mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2\rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$(si y solo si $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$).Los operadores $\uparrow$ y $\downarrow$ forman una conexión de Galois. Luego $(\mathcal{B}(\mathbb{X}^{x^*},\ \mathbb{Y}^{y^*},\ \mathbb{I}), \leq)$ se llama un retículo de conceptos formales con función interior inducida por $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$.

Generalización de Krajči

Dados conjuntos $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ de objetos y atributos, consideremos un contexto difuso como una tripleta $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ donde $\mathbb{I}$ es una $\mathbb{L}$- relación entre $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$, es decir, $\mathbb{I} \in \mathbb{L}^{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}$. Además, consideremos $\mathbb{L}_{\mathbf{X}}$ conjuntos $\mathbb{A}$ de objetos y $\mathbb{L}_{\mathbb{Y}}$- conjuntos $\mathbb{B}$ de atributos, esto es, $\mathbb{A} \in \mathbb{L}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{X}}$ y $\mathbb{B} \in \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{Y}}$. Krajči asume que $\mathbb{L}_{\mathbf{X}}$ y $\mathbb{L}_{\mathbb{Y}}$ son retículos completos y $\mathbb{L}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Por conveniencia, denotaremos todos los ordenes parciales sobre $\mathbb{L}_{\mathbf{X}}$, $\mathbb{L}_{\mathbb{Y}}$ y $\mathbb{L}$ por $\leq$. También, el ínfimo y el supremo en $\langle \mathbb{L}_{\mathbf{X}}, \leq\rangle$ y $\langle \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}, \leq\rangle$ lo denotaremos por $\wedge$ y $\vee$.
Krajči asume que hay una operación $\otimes : \mathbb{L}_{\mathbf{X}} \times \mathbb{L}_{\mathbb{Y}} \longrightarrow \mathbb{Y}$ tal que
$a_1 \leq a_2$ implica que $a_1 \otimes b \leq a_2 \otimes b$
$b_1 \leq b_2$ implica que $a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2$
Si $a_j \otimes b \leq c$, para todo $j \in J$, entonces $\left(\bigvee_{j\in J} a_j\right) \otimes b \leq c$
Si $a \otimes b_j \leq c$, para todo $j \in J$, entonces $a \otimes \left(\bigvee_{j\in J} b_j\right) \leq c$ para todo conjunto indizado J y todo $a,\ a_j \in \mathbb{L}_{\mathbf{X}}$ y $b,\ b_j \in \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}$ y $c \in \mathbb{L}$, entonces , Krajči introduce funciones $\nearrow: \mathbb{L}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{Y}}$ y $\swarrow: \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{Y}} \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{X}}$ definidas por

$$\mathbb{A}^{\nearrow}(y) = \bigvee \{b \in \mathbb{L}_{\mathbb{Y}} | \forall x \in \mathbb{X} : \mathbb{A}(x) \otimes b \leq \mathbb{I}(x,\ y)\}$$

$$\mathbb{B}^{\swarrow}(x) = \bigvee \{a \in \mathbb{L}_{\mathbf{X}} | \forall y \in \mathbb{Y} : a \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{Y}} \leq \mathbb{I}(x,\ y)\}$$

y define un concepto formal en $\langle \mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}\rangle$ como un par $\langle \mathbb{A},\mathbb{B}\rangle \in \mathbb{L}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{X}} \times \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{Y}}$ tales que $\mathbb{A}^{\nearrow} = \mathbb{B}$ y $\mathbb{B}^{\swarrow} = \mathbb{A}$.
pongamos $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}) = \{\langle \mathbb{A},\mathbb{B}\rangle \in \mathbb{L}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{X}} \times \mathbb{L}_{\mathbb{Y}}^{\mathbb{Y}} | \mathbb{A}^{\nearrow} = \mathbb{B},\ \mathbb{B}^{\swarrow} = \mathbb{A}\}$ y $\langle \mathbb{A}_1,\mathbb{B}_1\rangle \leq \langle \mathbb{A}_2,\mathbb{B}_2\rangle$ si y solo si $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$(si y solo si $\mathbb{B}_2 \subseteq \mathbb{B}_1$). $(\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}), \leq)$ se llama un

retículo de conceptos formales generalizados.
El estudio de esta propuesta es el objetivo principal de este trabajo y se realizará en el siguiente capitulo.

3. UN TEOREMA BÁSICO SOBRE RETÍCULOS GENERALIZADOS DE CONCEPTOS FORMALES

En este capítulo estudiaremos como en base al teorema básico para retículos de conceptos formales clásicos, se formula el teorema básico para retículos de conceptos formales generalizados, además se estudiará la demostración de tal teorema.

3.1. TEOREMA PRINCIPAL

Consideremos $(\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I}), \leq)$ un retículo de conceptos formales clásicos. El siguiente teorema describe su estructura básica.

Teorema 3.1 (Teorema básico sobre retículos de conceptos formales clásicos).

1. *El conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$ bajo la relación $\leq$ es un retículo completo donde el* inf *y* sup *esta dado por*

$$\bigwedge_{j\in J} \langle \mathbb{A}_j, \mathbb{B}_j\rangle = \left\langle \bigcap_{j\in J} \mathbb{A}_j, \left(\bigcup_{j\in J} \mathbb{B}_j\right)^{\downarrow\uparrow} \right\rangle$$

$$\bigvee_{j\in J} \langle \mathbb{A}_j, \mathbb{B}_j\rangle = \left\langle \left(\bigcup_{j\in J} \mathbb{A}_j\right)^{\uparrow\downarrow}, \bigcap_{j\in J} \mathbb{B}_j \right\rangle$$

2. *Un retículo completo $\mathbb{V}$ es isomorfo a $\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y},\ \mathbb{I})$ si y solo si existen funciones $\beta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{V}$, $\alpha : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}$ tales que*

   (i) $\beta(\mathbb{X})$ es sup*- denso en $\mathbb{V}$.*

   (ii) $\alpha(\mathbb{Y})$ es inf*-denso en $\mathbb{V}$.*

3. *Para todo $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$ se tiene que $\alpha(y) \geq \beta(x)$ si y solo si $\langle x,\ y\rangle \in \mathbb{I}$.*

La demostración del teorema anterior se encuentra en [10] tal teorema es fundamental para la formulación del teorema que se dará a continuación.

De ahora en adelante asumiremos que $\mathbb{L}$ es un conjunto parcialmente ordenado, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ son retículos completos, $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{L}$ es una función monótona y continua a izquierda en ambos argumentos. $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son conjuntos no vacíos y R es una relación $\mathbb{L}$-difusa sobre su producto cartesiano; de no ser que se diga lo contrario. Definimos las siguientes funciones: si $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$,

$$\nearrow : \mathbb{D}^{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$$
$$g \longrightarrow \nearrow(g) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\nearrow(g)(a) = \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g(b) \leq R(a,\ b)\}$$

Simétricamente, si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\swarrow : \mathbb{C}^{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{D}^{\mathbb{B}}$$
$$f \longrightarrow \swarrow (f) : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$$
$$\swarrow (f)(b) = \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\}$$

Decimos que un concepto formal es un par $\langle g;\ f\rangle \in \mathbb{B}^{\mathbb{D}} \times \mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ tal que $\nearrow (g) = f$ y $\swarrow (f) = g$. Definimos $\langle g_1, f_1\rangle \leq \langle g_2, f_2\rangle$ si y solo si $g_1 \leq g_2$(si y solo si $f_2 \leq f_1$). El conjunto de tales conceptos formales con el orden $\leq$ lo llamaremos retículo de conceptos formales generalizados y lo denotaremos por $\mathcal{L}$.

Teorema 3.2 (Teorema básico sobre retículos de conceptos formales generalizados).

1. *El retículo de conceptos formales generalizados $\mathcal{L}$ es un retículo completo en el cual*

$$\bigwedge_{i\in I} \langle g_i, f_i\rangle = \left\langle \bigwedge_{i\in I} g_i, \nearrow \left(\swarrow \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right)\right)\right\rangle$$
$$\bigvee_{i\in I} \langle g_i, f_i\rangle = \left\langle \swarrow \left(\nearrow \left(\bigvee_{i\in I} g_i\right)\right), \bigwedge_{i\in I} f_i\right\rangle$$

2. *Por otro lado, sea $O_{\mathbb{L}}$ el elemento mínimo de $\mathbb{L}$ y $O_{\mathbb{C}} \cdot d = O_{\mathbb{L}}$ y $c \cdot O_{\mathbb{D}} = O_{\mathbb{L}}$ para todo $c \in \mathbb{C}$ y $d \in \mathbb{D}$. Entonces un retículo completo $\mathbb{V}$ es isomorfo a $\mathcal{L}$ si y solo si existen funciones $\alpha : \mathbb{A} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V}$ y $\beta : \mathbb{B} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{V}$ tales que*

   (1a) α es no creciente en el segundo argumento.

   (1b) β es no decreciente en el segundo argumento.

   (2a) $\alpha[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$ es inf- *denso en $\mathbb{V}$.*

   (2b) $\beta[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ es sup- *denso en $\mathbb{V}$.*

3. *Para todo $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{B}$, $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{D}$, $\alpha(a,c) \geq \beta(b,d)$ si y solo si $c \cdot d \leq R(a,b)$.*

Lema 3.1.1. *Las funciones $\nearrow$ y $\swarrow$ forman una conexión de Galois, es decir,*

1a) $g_1 \leq g_2$ implica que $\nearrow (g_1) \geq \nearrow (g_2)$.

1b) $f_1 \leq f_2$ implica que $\swarrow (f_1) \geq \swarrow (f_2)$.

2a) $g \leq \swarrow (\nearrow (g))$.

2b) $f \leq \nearrow (\swarrow (f))$.

Demostración.

1a) Sea $a \in \mathbb{A}$, $g_1 \leq g_2$, esto es, $g_1(b) \leq g_2(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Para todo $c \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{B}$ tenemos que $c \cdot g_1(b) \leq c \cdot g_2(b)$ (pues $\cdot$ es monótona en el segundo argumento). Por tanto si $(\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_2(b) \leq R(a,b)$ entonces $(\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_1(b) \leq R(a,b)$. Esto es,$\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_2(b) \leq R(a,b)\} \subseteq \{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_1(b) \leq R(a,b)\}$, esto implica que $\nearrow (g_1)(a) \geq \nearrow (g_2)(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$, así $\nearrow (g_1) \geq \nearrow (g_2)$.

1b) Sea $b \in \mathbb{B}$. $f_1 \leq f_2$, esto es, $f_1(a) \leq f_2(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Para todo $d \in \mathbb{D}$ y $a \in \mathbb{A}$, se tiene que $f_1(a) \cdot d \leq f_2(a) \cdot d$(pues $\cdot$ es monótona en el primer argumento). Por tanto si $(\forall a \in \mathbb{A}) f_2(a) \cdot d \leq R(a,b)$ implica que $(\forall a \in \mathbb{A}) f_1(a) \cdot d \leq R(a,b)$ esto es $\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f_2(a) \cdot d \leq R(a,b)\} \subseteq \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f_1(a) \cdot d \leq R(a,b)\}$ esto implica que $\swarrow (f_1)(b) \geq \swarrow (f_2)(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Así $\swarrow (f_1) \geq \swarrow (f_2)$.

2a) Sea $b_o \in \mathbb{B}$, debemos probar que $g(b_o) \leq \swarrow (\nearrow (g))(b_o)$ $= \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \nearrow (g)(a) \cdot d \leq R(a,b)\}$. Consideremos el conjunto $X = \{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g(b) \leq R(a,b)\}$. Como $b_o \in \mathbb{B}$, tenemos que $c \cdot g(b_o) \leq R(a,\ b_o)$. Puesto que $c \in X \subseteq \mathbb{C}$ y $\cdot$ es monótona a izquierda en el primer argumento, se tiene que $\sup X \cdot g(b_o) \leq R(a, b_o)$. Pero la definición de $\nearrow$ implica que $\sup X = \nearrow (g)(a)$ para $a \in \mathbb{A}$. Luego para $a \in \mathbb{A}$, $\nearrow (g)(a) \cdot g(b_o) \leq R(a, b_o)$, luego
$g(b_o) \in \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \nearrow (g)(a) \cdot d \leq R(a,b)\}$ de donde
$g(b_o) \leq \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \nearrow (g)(a) \cdot d \leq R(a,b)\} = \swarrow (\nearrow (g))(b_o)$.

2b) Sea $a_o \in \mathbb{A}$, debemos probar que $f(a_o) \leq \nearrow (\swarrow (f))(a_o)$ $= \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \swarrow (f)(b) \leq R(a_o, b)\}$. Consideremos el conjunto $Y = \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f(a) \cdot d \leq R(a,b)\}$. Como $a_o \in \mathbb{A}$, tenemos que $f(a_o) \cdot d \leq R(a_o,\ b)$. Puesto que $d \in Y \subseteq \mathbb{D}$ y $\cdot$ es monótona a izquierda en el segundo argumento, se tiene que $f(a_o) \cdot \sup Y \leq R(a_o, b)$. Pero la definición de $\swarrow$ implica que $\sup Y = \swarrow (f)(b)$ para $b \in \mathbb{B}$. Luego para $b \in \mathbb{B}$, $f(a_o) \cdot \swarrow (f)(b) \leq R(a_o, b)$, luego
$f(a_o) \in \{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \swarrow (f)(b) \leq R(a_o, b)\}$ de donde
$f(a_o) \leq \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \swarrow (f)(b) \leq R(a_o, b)\} = \nearrow (\swarrow (f))(a_o)$.

$\widehat{\text{oo}}$

Corolario 3.1.1.

1a) $\nearrow (\swarrow (\nearrow (g))) = \nearrow (g)$.

1b) $\swarrow (\nearrow (\swarrow (f))) = \swarrow (f)$.

2) $g \leq \swarrow (f)$ *si y solo si* $f \leq \nearrow (g)$.

Demostración.

1a) $g \leq \swarrow (\nearrow (g))$, luego $\nearrow (g) \geq \nearrow (\swarrow (\nearrow (g)))$. Por otro lado, por (3.1.1) parte (2b) se tiene que $\nearrow (g) \leq \nearrow (\swarrow (\nearrow (g)))$.

1b) $f \leq \nearrow(\swarrow(f))$, luego $\swarrow(f) \geq \swarrow(\nearrow(\swarrow(f)))$. Por otro lado $\swarrow(f) \leq \swarrow(\nearrow(\swarrow(f)))$ por la parte (2a) de (3.1.1).

2) Si $g \leq \swarrow(f)$, entonces $\nearrow(g) \geq \nearrow(\swarrow(f)) \geq f$. Si $f \leq \nearrow(g)$ entonces $\swarrow(f) \geq \swarrow(\nearrow(g)) \geq g$.

∞

Lema 3.1.2.

1. *Para todo* $\{g_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{D}^{\mathbb{B}}$

$$\nearrow\Big(\bigvee_{i\in I} g_i\Big) = \bigwedge_{i\in I} \nearrow(g_i)$$

2. *Para todo* $\{f_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$

$$\swarrow\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big) = \bigwedge_{i\in I} \swarrow(f_i)$$

Demostración.

1. Consideremos $\{g_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{D}^{\mathbb{B}}$.
$\bigvee\limits_{i\in I} g_i \geq g_j$ para $j \in I$, esto implica que $\nearrow(g_j) \geq \nearrow(\bigvee\limits_{i\in I} g_i) = u$ para todo $j \in I$. Puesto que $\mathbb{C}$ es un retículo completo y u es una cota inferior para todo $\nearrow(g_j)$, $j \in I$, tenemos que $v = \bigwedge\limits_{i\in I} \nearrow(g_i) \geq \nearrow(\bigvee\limits_{i\in I} g_i) = u$.
Recíprocamente, sea $a \in \mathbb{A}$. Denotemos por $u = \nearrow(\bigvee\limits_{i\in I} g_i)(a)$
y $v = \bigwedge\limits_{i\in I} \nearrow(g_i)(a)$. Probemos que $v \leq u$, es decir,
$v = \bigwedge_{i\in I} \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_i(b) \leq R(a,\ b)\}$

$\leq \sup\left\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \bigvee_{i\in I} g_i(b) \leq R(a,\ b)\right\} = u.$
Consideremos $Q_i = \{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot g_i(b) \leq R(a,\ b)\}$ y $v_i = \sup Q_i$ así $v = \bigwedge_{i\in I} v_i$. Para todo $c \in Q_i$ y todo $b \in \mathbb{B}$ tenemos que $c \cdot g_i(b) \leq R(a, b)$, puesto que $\cdot$ es continua a izquierda en el primer argumento, se tiene que $\sup Q_i \cdot g_i(b) \leq R(a, b)$, esto es, $v_i \cdot g_i(b) \leq R(a, b)$ y como $v \leq v_i$ y $\cdot$ es monótona en el primer argumento se tiene que

$$v \cdot g_i(b) \leq v_i \cdot g_i(b) \leq R(a, b)$$

Ahora de la continuidad a izquierda, en el segundo argumento, se tiene que que $v \cdot \bigvee_{i\in I} g_i(b) \leq R(a, b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$.
De donde $v \in \left\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \bigvee_{i\in I} g_i(b) \leq R(a,\ b)\right\}$ luego

$v \leq \sup\left\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \bigvee_{i\in I} g_i(b) \leq R(a,\ b)\right\} = u.$

2. Consideremos $\{f_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$.
$\bigvee\limits_{i\in I} f_i \geq f_j$ para todo $j \in I$, esto implica que $\swarrow (f_j) \geq \swarrow (\bigvee\limits_{i\in I} f_i) = u$ para todo $j \in I$. Puesto que $\mathbb{D}$ es un retículo completo y u es una cota inferior para todo $\swarrow (f_j)$, $j \in I$, tenemos que $v = \bigwedge\limits_{i\in I} \swarrow (f_i) \geq \swarrow (\bigvee\limits_{i\in I} f_i) = u$.
Recíprocamente, sea $b \in \mathbb{B}$. Denotemos por $u = \swarrow (\bigvee\limits_{i\in I} f_i)(a)$
y $v = \bigwedge\limits_{i\in I} \swarrow (f_i)(a)$. Veamos que $v \leq u$, esto es,
$v = \bigwedge_{i\in I} \sup \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f_i(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\}$
$\leq \sup \left\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \bigvee_{i\in I} f_i(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\right\} = u$.
Denotemos por $S_i = \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f_i(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\}$ y $v_i = \sup S_i$, así $v = \bigwedge_{i\in I} v_i$. Para todo $d \in S_i$ y todo $a \in \mathbb{A}$, tenemos que $f_i(a) \cdot d \leq R(a, b)$. Puesto que $\cdot$ es continua a izquierda en el segundo argumento, se tiene que $f_i(a) \cdot \sup S_i \leq R(a,b)$, esto es, $f_i(a) \cdot v_i \leq R(a,b)$ y como $v \leq v_i$ y $\cdot$ es monótona en el segundo argumento tenemos que

$$f_i(a) \cdot v \leq f_i(a) \cdot v_i \leq R(a,b)$$

y de la continuidad a izquierda, en el primer argumento, tenemos que $\bigvee_{i\in I} f_i(a) \cdot v \leq R(a,b)$ para todo $a \in \mathbb{A}$.
Luego $v \in \left\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \bigvee_{i\in I} f_i(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\right\}$, de donde
$v \leq \sup \left\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \bigvee_{i\in I} f_i(a) \cdot d \leq R(a,\ b)\right\} = u$.

$\widehat{\text{oo}}$

Definición 3.1.1 (Función singular). Sea $\mathbb{T}$ un conjunto cualquiera no vacío y $\mathbb{U}$ un conjunto parcialmente ordenado con elemento mínimo $\mathbf{0}_{\mathbb{U}}$, definimos

$$\begin{aligned} S_{t,u}^{\mathbb{T},\mathbb{U}} &: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{U} \\ x &\longrightarrow \mathbb{S}_{t,u}^{\mathbb{T},\mathbb{U}}(x) := \begin{cases} u, & \textit{si } x = t \\ \mathbf{0}_{\mathbb{U}}, & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos algunas propiedades básicas de estas funciones.

Lema 3.1.3.

$$f = \sup \left\{\mathbb{S}_{t,u}^{\mathbb{T},\mathbb{U}} : t \in \mathbb{T}\right\}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{T}$. De la definición de supremo puntual de conjunto de funciones tenemos que $\sup \left\{\mathbb{S}_{t,f(t)}^{\mathbb{T},\mathbb{U}} : t \in \mathbb{T}\right\}(x) = \sup \left\{\mathbb{S}_{t,f(t)}^{\mathbb{T},\mathbb{U}}(x) : t \in \mathbb{T}\right\}$, para todo $x \neq t$ se tiene que $S_{t,f(t)}^{\mathbb{T},\mathbb{U}}(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{U}}$, luego $\sup \left\{\mathbb{S}_{t,f(t)}^{\mathbb{T},\mathbb{U}}(x) : t \in \mathbb{T}\right\}$
$= f(x)$, de donde $\sup \left\{\mathbb{S}_{t,f(t)}^{\mathbb{T},\mathbb{U}} : t \in \mathbb{T}\right\}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}$. $\widehat{\text{oo}}$

Lema 3.1.4.

a) Para todo $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{B}$, $c \in \mathbb{C}$

$$\swarrow (\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}})(b) = \sup \{d \in \mathbb{D} : c \cdot d \leq R(a,b)\}$$

b) Para todo $a \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{B}$, $d \in \mathbb{D}$

$$\nearrow (S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}})(a) = \sup \{c \in \mathbb{C} : c \cdot d \leq R(a,b)\}$$

Demostración.

a) Por definición tenemos que
$\swarrow (\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}})(b) = \sup \left\{d \in \mathbb{D} : (\forall x \in \mathbb{A})\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(x) \cdot d \leq R(a,b)\right\}$. Puesto que $\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(x) \cdot d = \mathbf{0}_{\mathbb{C}} \cdot d = \mathbf{0}_{\mathbb{L}}$ para todo $x \neq a$, se tiene que
$(\forall x \in \mathbb{A})\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(x) \cdot d \leq R(x,b)$ si y solo si $\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(a) \cdot d \leq R(a,b)$, esto es,
$c \cdot d \leq R(a,b)$ para todo $d \in \mathbb{D}$, esto implica que

$$\left\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A})\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(a) \cdot d \leq R(a,b)\right\} = \{d \in \mathbb{D} : c \cdot d \leq R(a,b)\}$$

Así

$$\begin{aligned} \sup \left\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A})\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}(a) \cdot d \leq R(a,b)\right\} &= \swarrow (\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}})(b) \\ &= \sup \{d \in \mathbb{D} : c \cdot d \leq R(a,b)\} \end{aligned}$$

b) Por definición tenemos que
$\nearrow (S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}})(a) = \sup \left\{c \in \mathbb{C} : (\forall x \in \mathbb{B})c \cdot S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}(x) \leq R(a,x)\right\}$. Puesto que $c \cdot \mathbb{S}_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}(x) = c \cdot \mathbf{0}_{\mathbb{D}} = \mathbf{0}_{\mathbb{L}}$ para todo $x \neq b$, se tiene que
$(\forall x \in \mathbb{B})c \cdot S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}(x) \leq R(a,x)$ si y solo si $c \cdot S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}(b) \leq R(a,b)$, esto es,
$c \cdot d \leq R(a,b)$ para todo $c \in \mathbb{C}$, de donde

$$\left\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B})c \cdot S_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}(b) \leq R(a,b)\right\} = \{c \in \mathbb{C} : c \cdot d \leq R(a,b)\}$$

Así

$$\nearrow (\mathbb{S}_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}})(a) = \sup \{c \in \mathbb{C} : c \cdot d \leq R(a,b)\}$$

ōo

Primero probaremos la segunda parte del teorema para $V = \mathcal{L}$. Definamos

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{L}}(a,c) &= \left\langle \swarrow (\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}), \nearrow (\swarrow (\mathbb{S}_{a,c}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}))\right\rangle \\ \beta_{\mathcal{L}}(b,d) &= \left\langle \swarrow (\nearrow (\mathbb{S}_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}})), \nearrow (\mathbb{S}_{b,d}^{\mathbb{B},\mathbb{D}})\right\rangle \end{aligned}$$

$\alpha_{\mathcal{L}}$ y $\beta_{\mathcal{L}}$ son conceptos formales y la prueba es consecuencia inmediata de (3.1.1).

Lema 3.1.5.

a) $\alpha_{\mathcal{L}}$ *es no creciente en el segundo argumento.*

b) $\beta_{\mathcal{L}}$ *es no decreciente en el segundo argumento.*

Demostración.

a) Sean $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ tales que $c_1 \leq c_2$. Veamos que $\alpha_{\mathcal{L}}(a,c_1) \geq \alpha_{\mathcal{L}}(a,c_2)$ para un $a \in \mathbb{A}$ arbitrario. Es suficiente probar que $\swarrow (S^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_1}) \geq \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_2})$, esto es, $\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_1})(b) \geq \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_2})(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Puesto que $\cdot$ es monótona en el primer argumento tenemos que $c_1 \cdot d \leq c_2 \cdot d$. Si $c_2 \cdot d \leq R(a,b)$ entonces $c_1 \cdot d \leq R(a,b)$. Luego $\{d \in \mathbb{D} : c_1 \cdot d \leq R(a,b)\} \supseteq \{d \in \mathbb{D} : c_2 \cdot d \leq R(a,b)\}$. Por tanto $\sup\{d \in \mathbb{D} : c_1 \cdot d \leq R(a,b)\} \geq \sup\{d \in \mathbb{D} : c_2 \cdot d \leq R(a,b)\}$. Así que

$$\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_1})(b) \geq \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c_2})(b)$$

b) Sean $d_1,\ d_2 \in \mathbb{D}$ tales que $d_1 \leq d_2$. Veamos que $\beta_{\mathcal{L}}(b,d_1) \leq \beta_{\mathcal{L}}(b,d_2)$ para un $b \in \mathbb{B}$ arbitrario. Es suficiente probar que $\nearrow (S^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d_1}) \geq \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d_2})$, esto es, $\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d_1})(a) \geq \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{b,d_2})(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Puesto que $\cdot$ es monótona en el segundo argumento tenemos que $c \cdot d_1 \leq c \cdot d_2$. Si $c \cdot d_2 \leq R(a,b)$ entonces $c \cdot d_1 \leq R(a,b)$. Luego $\{c \in \mathbb{C} : c \cdot d_1 \leq R(a,b)\} \supseteq \{c \in \mathbb{C} : c \cdot d_2 \leq R(a,b)\}$. Por tanto $\sup\{c \in \mathbb{C} : c \cdot d_1 \leq R(a,b)\} \geq \sup\{c \in \mathbb{C} : c \cdot d_2 \leq R(a,b)\}$. Así que

$$\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d_1})(a) \geq \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d_2})(a)$$

ōo

Lema 3.1.6.

$$\alpha_{\mathcal{L}}(a,c) \geq \beta_{\mathcal{L}}(b,d) \ \ \textit{si y solo si } c \cdot d \leq R(a,b)$$

Demostración. Si $c \cdot d \leq R(a,b)$, entonces $c \in \{k \in \mathbb{C} : k \cdot d \leq R(a,b)\}$ luego $\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}(a) = c \leq \sup\{k \in \mathbb{C} : k \cdot d \leq R(a,b)\} = \nearrow (S^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(a)$. Para $x \neq a$ tenemos que $\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}(x) = 0_{\mathbb{C}} \leq \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(x)$ de aquí $\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c} \leq \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})$. Como $\nearrow$ y $\swarrow$ forman una conexión de Galois tenemos que $\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}) \geq \swarrow (\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d}))$, esto es, $\alpha_{\mathcal{L}}(a,c) \geq \beta_{\mathcal{L}}(b,d)$.
Recíprocamente, sea $x \in \mathbb{A}$, $u \in \{k \in \mathbb{C} : k \cdot d \leq R(x,b)\}$ si y solo si $u \cdot d \leq R(x,d)$. Puesto que $\cdot$ es continua a izquierda en el primer argumento tenemos que $\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(x) \cdot d = \sup\{k \in \mathbb{C} : k \cdot d \leq R(x,b)\} \cdot d \leq R(x,b)$. Así
$(\forall x \in \mathbb{A}) \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(x) \cdot d \leq R(x,b)$ y esto implica que
$d \in \left\{m \in \mathbb{D} : (\forall x \in \mathbb{A}) \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(x) \cdot m \leq R(x,b)\right\}$, luego
$d \leq \left\{m \in \mathbb{D} : (\forall x \in \mathbb{A}) \nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d})(x) \cdot m \leq R(x,b)\right\} = \swarrow (\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d}))(b)$.
Puesto que $\alpha_{\mathcal{L}}(a,c) \geq \beta_{\mathcal{L}}(b,d)$ entonces $\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}) \geq \swarrow (\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d}))$, de donde,

$d \leq \swarrow (\nearrow (\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,d}))(b) \leq \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c})(b)$. Como $\cdot$ es monótona en el segundo argumento se tiene que $c \cdot d \leq c \cdot \swarrow (S^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c})(b)$.
Por otro lado, $w \in \{m \in \mathbb{D} : c \cdot m \leq R(a,b)\}$ si y solo si $c \cdot w \leq R(a,b)$, puesto que $\cdot$ es continua a izquierda en el segundo argumento tenemos que
$c \cdot \sup \{m \in \mathbb{D} : c \cdot m \leq R(a,b)\} \leq R(a,b)$, esto implica que
$c \cdot \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c})(b) \leq R(a,b)$ por tanto

$$c \cdot d \leq c \cdot \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c})(b) \leq R(a,b)$$

$\widehat{oo}$

Lema 3.1.7. *Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$ y $\langle g, f\rangle$ un concepto formal, entonces:*

a) $\langle g, f\rangle = \inf \{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$.

b) $\langle g, f\rangle = \sup \{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\}$.

Demostración.

a) Sea $a \in \mathbb{A}$. Entonces $(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)})(a) = f(a)$ y $(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)})(x) = 0_{\mathbb{C}} \leq f(x)$ para los $x \neq a$. Entonces $\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c} \leq f$. Puesto que $\nearrow$ y $\swarrow$ forman una conexión de Galois tenemos que $\nearrow (\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c})) \leq \nearrow (\swarrow (f)) = f$, luego
$\langle g, f\rangle \leq \langle \swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}), \nearrow (\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,c}))\rangle = \alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a))$ para todo $a \in \mathbb{A}$ así
$\langle g, f\rangle \leq \inf \{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$.
Recíprocamente, por la parte (1) de 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\inf \{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\} &= \bigwedge_{a\in\mathbb{A}} \alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) = \bigwedge_{a\in\mathbb{A}} \left\langle \swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)}\right), \nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)}\right)\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \bigwedge_{a\in\mathbb{A}} \swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)}\right), \nearrow \left(\swarrow \left(\bigvee_{a\in\mathbb{A}} \nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)}\right)\right)\right)\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\nearrow$ y $\swarrow$ forman una conexión de Galois tenemos que $\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)} \leq \nearrow (\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)})) = \sup \left\{\nearrow (\swarrow (\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{x,f(x)})) : x \in \mathbb{A}\right\}$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Como

$$\begin{aligned} f = \sup \left\{\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{a,f(a)} : a \in \mathbb{A}\right\} &\leq \sup \left\{\nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{x,f(x)}\right)\right) : x \in \mathbb{A}\right\} \\ &\leq \nearrow \left(\swarrow \left(\sup \left\{\nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{x,f(x)}\right)\right) : x \in \mathbb{A}\right\}\right)\right) \\ &= \nearrow \left(\swarrow \left(\bigvee_{x\in\mathbb{A}} \nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{x,f(x)}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

esto es, $f \leq \nearrow \left(\swarrow \left(\bigvee_{x\in\mathbb{A}} \nearrow \left(\swarrow \left(\mathbb{S}^{\mathbb{A},\mathbb{C}}_{x,f(x)}\right)\right)\right)\right)$. Por tanto

$$\langle g, f\rangle \geq \inf \{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$$

b) Sea $b \in \mathbb{B}$. Entonces $(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})(b) = g(b)$ y $(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})(x) = 0_{\mathbb{C}} \leq g(x)$ para los $x \neq b$. Entonces $\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)} \leq g(x)$. Puesto que $\swarrow$ y $\nearrow$ forman una conexión de Galois tenemos que $\swarrow(\nearrow(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})) \leq \swarrow(\nearrow(g)) = g$, luego
$\langle g, f\rangle \geq \left\langle \swarrow(\nearrow(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})), \nearrow(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})\right\rangle = \beta_{\mathcal{L}}(b, g(b))$ para todo $b \in \mathbb{B}$ luego
$\sup\{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\} \leq \langle g, f\rangle$.
Recíprocamente, por la parte (1) de 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\sup\{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\} &= \bigvee_{b\in\mathbb{B}} \beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) = \bigvee_{b\in\mathbb{B}} \left\langle \swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)}\right)\right), \nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \swarrow\left(\nearrow\left(\bigvee_{b\in\mathbb{B}}\left(\swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)}\right)\right)\right)\right)\right), \bigwedge_{b\in\mathbb{B}} \nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\nearrow$ y $\swarrow$ forman una conexión de Galois tenemos que $\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)} \leq \swarrow(\nearrow(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)})) = \sup\left\{\swarrow(\nearrow(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{x,g(x)})) : x \in \mathbb{B}\right\}$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Luego

$$\begin{aligned} g = \sup\left\{\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{b,g(b)} : b \in \mathbb{B}\right\} &\leq \sup\left\{\swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{x,g(x)}\right)\right) : x \in \mathbb{B}\right\} \\ &\leq \swarrow\left(\nearrow\left(\sup\left\{\swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{x,g(x)}\right)\right) : x \in \mathbb{B}\right\}\right)\right) \\ &= \swarrow\left(\nearrow\left(\bigvee_{x\in\mathbb{B}} \swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{x,g(x)}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

esto es, $g \leq \swarrow\left(\nearrow\left(\bigvee_{x\in\mathbb{B}} \swarrow\left(\nearrow\left(\mathbb{S}^{\mathbb{B},\mathbb{D}}_{x,g(x)}\right)\right)\right)\right)$. Por tanto

$$\langle g, f\rangle \leq \sup\{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\}$$

ôo

Lema 3.1.8.

a) $\alpha_{\mathcal{L}}[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$ *es* inf-*denso en* $\mathcal{L}$.

b) $\beta_{\mathcal{L}}[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ *es* sup- *denso en* $\mathcal{L}$.

Demostración.

a) Puesto que $\langle g, f\rangle = \inf\{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$, se tiene que cualquier elemento de $\mathcal{L}$ puede ser expresado como el ínfimo de algún subconjunto de $\alpha_{\mathcal{L}}[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$.

b) Puesto que $\langle g, f\rangle = \sup\{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\}$, se tiene que cualquier elemento de $\mathcal{L}$ puede ser expresado como el supremo de algún subconjunto de $\beta_{\mathcal{L}}[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$. ☺

Hemos probado la segunda parte del teorema básico para el caso especial $\mathbb{V} = \mathcal{L}$. Ahora probemos los otros casos.
Primero asumamos que $\mathbb{V}$ es un retículo completo isomorfo a $\mathcal{L}$. Sea $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{V}$ un isomorfismo, definamos

$$\alpha(a, c) = \varphi(\alpha_{\mathcal{L}}(a, c))$$
$$\beta(b, d) = \varphi(\beta_{\mathcal{L}}(b, d))$$

Veamos que estas funciones cumplen las apropiadas.

Lema 3.1.9.

a) α es no creciente en el segundo argumento.

b) β es no decreciente en el segundo argumento.

Demostración.

a) Sea $c_1 \leq c_2$, luego tenemos que $\alpha_{\mathcal{L}}(a, c_1) \geq \alpha_{\mathcal{L}}(a, c_2)$. Puesto que φ es un isomorfismo tenemos que $\varphi(\alpha_{\mathcal{L}}(a, c_1)) \geq \varphi(\alpha_{\mathcal{L}}(a, c_2))$, esto es, $\alpha(a, c_1) \geq \alpha(a, c_2)$.

b) Sea $d_1 \leq d_2$, luego tenemos que $\beta_{\mathcal{L}}(b, d_1) \leq \beta_{\mathcal{L}}(b, d_2)$. Puesto que φ es un isomorfismo tenemos que $\varphi(\beta_{\mathcal{L}}(b, d_1)) \leq \varphi(\beta_{\mathcal{L}}(b, d_2))$, esto es, $\beta(b, d_1) \leq \beta(b, d_2)$. ☺

Lema 3.1.10.

a) $\alpha[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$ es inf*-denso.*

b) $\beta[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ es sup*-denso.*

Demostración.

a) Sea $v \in \mathbb{V}$. Sea $\langle g, f\rangle \in \mathcal{L}$ tal que $\varphi(\langle g, f\rangle) = v$(la existencia de v está garantizada ya que φ es una biyección). Entonces

$$\begin{aligned}\inf\{\alpha(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\} &= \inf\{\varphi(\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a))) : a \in \mathbb{A}\} \\ &= \varphi(\inf\{\alpha_{\mathcal{L}}(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}) \\ &= \varphi(\langle g, f\rangle) = v\end{aligned}$$

Así podemos expresar cualquier elemento de $\mathbb{V}$ como el ínfimo de algún subconjunto de $\alpha[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$

b) Sea $v \in \mathbb{V}$. Sea $\langle g, f\rangle \in \mathcal{L}$ tal que $\varphi(\langle g, f\rangle) = v$ entonces

$$\begin{aligned}\sup\{\beta(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\} &= \sup\{\varphi(\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b))) : b \in \mathbb{B}\}\\ &= \varphi(\sup\{\beta_{\mathcal{L}}(b, g(b)) : b \in \mathbb{B}\})\\ &= \varphi(\langle g, f\rangle) = v\end{aligned}$$

Así podemos expresar cualquier elemento de $\mathbb{V}$ como el supremo de algún subconjunto de $\beta[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ ©

Lema 3.1.11. *$\alpha(a, c) \geq \beta(b, d)$ si y solo si $c \cdot d \leq R(a, b)$.*

Demostración. $\beta_{\mathcal{L}}(b, d) \leq \alpha_{\mathcal{L}}(a, c)$ si y solo si $c \cdot d \leq R(a, b)$. $\beta_{\mathcal{L}}(b, d) \leq \alpha_{\mathcal{L}}(a, c)$ si y solo si $\varphi(\beta_{\mathcal{L}}(b, d)) \leq \varphi(\alpha_{\mathcal{L}}(a, c))$ si y solo si$\beta(b, d) \leq \alpha(a, c)$. luego $\alpha(a, c) \geq \beta(b, d)$ si y solo si $c \cdot d \leq R(a, b)$. ©

Con esto hemos probado una implicación. Probemos la otra.
Sean α y β con las propiedades apropiadas.

Lema 3.1.12.

a) para todo $a \in \mathbb{A}$, $c \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{V}$
$\alpha(a, c) \geq v$ si y solo si $(\forall b \in \mathbb{B})(\forall d \in \mathbb{D})(\beta(b, d) \leq v \longrightarrow \alpha(a, c) \geq \beta(b, d))$.

b) para todo $b \in \mathbb{B}$, $d \in \mathbb{D}$ y $v \in \mathbb{V}$
$\beta(b, d) \leq v$ si y solo si $(\forall a \in \mathbb{A})(\forall c \in \mathbb{C})(\alpha(a, c) \geq v \longrightarrow \alpha(a, c) \geq \beta(b, d))$.

Demostración.

a) Si $\alpha(a, c) \geq v$, entonces $\beta(b, d) \leq v$ implica que $\alpha(a, c) \geq \beta(b, d)$ esto significa que $c \cdot d \leq R(a, b)$.
Recíprocamente, Puesto que $\beta[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ es sup- denso, nuestro $v = \sup\{\beta(b_i, d_i) : i \in I\}$ para algún conjunto de pares $\{(b_i, d_i) : i \in I\}$. Esto implica que $\beta(b_i, d_i) \leq v$ para todo $i \in I$, de donde $\alpha(a, c) \geq \beta(b_i, d_i)$ para todo $i \in I$, es decir, $\alpha(a, c) \geq \sup\{\beta(b_i, d_i) : i \in I\} = v$

b) Si $\beta(b, d) \leq v$, entonces $\alpha(a, c) \geq v$ implica que $\alpha(a, c) \geq \beta(b, d)$ lo cual significa que $c \cdot d \leq R(a, b)$.
Recíprocamente, Puesto que $\alpha[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$ es inf- denso, nuestro $v = \inf\{\alpha(a_i, c_i) : i \in I\}$ para algún conjunto de pares $\{(a_i, c_i) : i \in I\}$. Esto implica que $\alpha(a_i, c_i) \geq v$ para todo $i \in I$, de donde $\alpha(a_i, c_i) \geq \beta(b, d)$ para todo $i \in I$, es decir, $v = \inf\{\alpha(a_i, c_i) : i \in I\} \geq \beta(b, d)$ ©

Ahora podemos definir la función $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{V}$ de la siguiente forma

$$\varphi(\langle g, f\rangle) = \inf\{\alpha(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$$

y veremos que φ así definido es el isomorfismo deseado.

Lema 3.1.13. *φ preserva orden.*

Demostración. $\langle g_1, f_1\rangle \leq \langle g_2, f_2\rangle$ si y solo si $f_1 \geq f_2$ si y solo si $f_1(a) \geq f_2(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Puesto que α es no creciente en el segundo argumento tenemos que $\alpha(a, f_1(a)) \leq \alpha(a, f_2(a))$, luego $\varphi(\langle g_1, f_1\rangle) = \inf\{\alpha(a, f_1(a)) : a \in \mathbb{A}\}$
$\leq \alpha(a, f_2(a))$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Esto implica que
$\varphi(\langle g_1, f_1\rangle) \leq \inf\{\alpha(a, f_2(a)) : a \in \mathbb{A}\} = \varphi(\langle g_2, f_2\rangle)$. $\hat{\circ\circ}$

Ahora definamos la función $\psi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{L}$ por $\psi(v) = \langle g_v, f_v\rangle$ tal que $f_v(a) = \sup\{c \in \mathbb{C} : \alpha(a, c) \geq v\}$
$g_v(b) = \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\}$ y veamos que $\psi = \varphi^{-1}$.
Primero probemos que $\langle g_v, f_v\rangle$ es realmente un concepto formal.

Lema 3.1.14.

a) $\nearrow (g_v) = f_v$.

b) $\swarrow (f_v) = g_v$.

Demostración.

a) $\alpha(a, c) \geq v$ es equivalente a $(\forall d \in \mathbb{D})(\forall b \in \mathbb{B})(\beta(b, d) \leq v \longrightarrow \alpha(a, c) \geq \beta(b, d))$ esto es equivalente a $(\forall b \in \mathbb{B})(\forall d \in \mathbb{D})(\beta(b, d) \leq v \longrightarrow c \cdot d \leq R(a, b))$. Esto es equivalente a $(\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\} \leq R(a, b)$. Luego $\{c \in \mathbb{C} : \alpha(a, c) \geq v\} = \{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in \mathbb{B}) c \cdot \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\} \leq R(a, b)\}$ y por la definición de $f_v(a)$ y $\nearrow$ tenemos que $f_v(a) = \nearrow (g_v)(a)$ para todo $a \in \mathbb{A}$; así $f_v = \nearrow (g_v)$.

b) $\beta(b, d) \leq v$ es equivalente a $(\forall a \in \mathbb{A})(\forall c \in \mathbb{C})(\alpha(a, c) \geq v \longrightarrow \alpha(a, c) \geq \beta(b, d))$ esto es equivalente a $(\forall a \in \mathbb{A})(\forall c \in \mathbb{C})(\alpha(a, c) \longrightarrow c \cdot d \leq R(a, b))$. Esto es equivalente a $(\forall a \in \mathbb{A}) \sup\{c \in \mathbb{C} : \alpha(a, c) \geq v\} \cdot d \leq R(a, b)$. Luego $\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\} = \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) \sup\{c \in \mathbb{C} : \alpha(a, c) \geq v\} \cdot d \leq R(a, b)\}$. De la definición de $f_v(a)$ tenemos que $\sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\}$
$= \{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f_v(a) \cdot d \leq R(a, b)\}$ y por la definición de $\swarrow$ y $g_v(b)$ tenemos que $g_v(b) = \swarrow (f_v)(b)$ para todo $b \in \mathbb{B}$. $\hat{\circ\circ}$

Lema 3.1.15. *ψ preserva orden.*

Demostración. Si $v_1 \leq v_2$ entonces $\beta(b, d) \leq v_1$ implica que $\beta(b, d) \leq v_2$, luego $\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v_1\} \subseteq \{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v_2\}$, esto es, $g_{v_1}(b)$
$= \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v_1\} \leq \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v_2\} = g_{v_2}(b)$,
para todo $b \in \mathbb{B}$. Esto quiere decir, que

$$\psi(v_1) = \langle g_{v_1}, f_{v_1}\rangle \leq \langle g_{v_2}, f_{v_2}\rangle = \psi(v_2)$$

$\hat{\circ\circ}$

Lema 3.1.16. *$\varphi(\psi(v)) = v$, para todo $v \in \mathbb{V}$.*

Demostración. Sea $v \in \mathbb{V}$, puesto que $\beta[\mathbb{B} \times \mathbb{D}]$ es sup- denso v puede expresarse de la siguiente forma: $v = \sup\{\beta(b_i, d_i) : i \in I\}$ para algún conjunto de pares $\{(b_i, d_i) : i \in I\}$. Esto implica que $\beta(b_i, d_i) \leq v$ para todo $i \in I$. Si $a \in \mathbb{A}$ y $c \in \mathbb{C}$ tales que $\alpha(a, c) \geq v$, entonces $\beta(b_i, d_i) \leq \alpha(a, c)$ para todo $i \in i$, de aquí $c \cdot d_i \leq R(a, b_i)$ para todo $i \in I$.
Consideremos $\mathbb{X} = \{c \in \mathbb{C} : \alpha(a, c) \geq v\}$, nuestro $c \in \mathbb{X}$, luego $\sup \mathbb{X} \cdot d_i \leq R(a, b_i)$, de la definición de $f_v(a)$ tenemos que $f_v(a) \cdot d_i \leq R(a, b_i)$ para todo $i \in I$ y para todo $a \in \mathbb{A}$, esto implica que $\alpha(a, f_v(a)) \geq \beta(b_i, d_i)$ para todo $i \in I$. Luego $\alpha(a, f_v(a)) \geq \sup\{\beta(b_i, d_i) : i \in I\} = v$ por lo tanto $\varphi(\langle g_v, f_v \rangle) = \inf\{\alpha(a, f_v(a)) : a \in \mathbb{A}\} \geq v$.
Recíprocamente, sea $v \in \mathbb{V}$, puesto que $\alpha[\mathbb{A} \times \mathbb{C}]$ es inf- denso v puede expresarse de la siguiente forma: $v = \inf\{\alpha(a_i, c_i) : i \in I\}$ para algún conjunto de pares $\{(a_i, c_i) : i \in I\}$. Si $\alpha(a_i, c_i) \geq v$, entonces $c_i \in \{c \in \mathbb{C} : \alpha(a_i, c) \geq v\}$ de donde $c_i \leq \sup\{c \in \mathbb{C} : \alpha(a_i, c) \geq v\} = f_v(a_i)$ para todo $i \in I$. Como α es no creciente en el segundo argumento, tenemos $\alpha(a_i, c_i) \geq \alpha(a_i, f_v(a_i))$ para todo $i \in I$ y puesto que $\alpha(a_i, f_v(a_i)) \in \{\alpha(a, f_v(a)) : a \in \mathbb{A}\}$, tenemos que $\alpha(a_i, c_i) \geq \alpha(a_i, f_v(a_i)) \geq \inf\{\alpha(a, f_v(a)) : a \in \mathbb{A}\} = \psi(\langle g_v, f_v \rangle)$ para todo $i \in I$.
Así

$$v = \inf\{\alpha(a_i, c_i) : i \in I\} \geq \varphi(\langle g_v, f_v \rangle)$$

ŏo

Lema 3.1.17. *$\psi(\varphi(\langle g, f \rangle)) = \langle g, f \rangle$. Para todo $\langle g, f \rangle \in \mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $v = \varphi(\langle g, f \rangle) = \inf\{\alpha(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\}$. Es suficiente probar que $g = g_v$. $(\forall a \in \mathbb{A})(f(a) \cdot d \leq R(a, b))$ si y solo si $(\forall a \in \mathbb{A})(\alpha(a, f(a)) \geq \beta(b, d))$, esto es equivalente $\beta(b, d) \leq \inf\{\alpha(a, f(a)) : a \in \mathbb{A}\} = v$ de donde $\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f(a) \cdot d \leq R(a, b)\} = \{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\}$ usando la definición de $\swarrow$ y g_v tenemos que

$$\begin{aligned} \swarrow(f)(b) &= \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in \mathbb{A}) f(a) \cdot d \leq R(a, b)\} = \sup\{d \in \mathbb{D} : \beta(b, d) \leq v\} \\ &= g_v(b) \ \ \textit{para todo}\ b \in \mathbb{B} \end{aligned}$$

Así $g_v = \swarrow(f) = g$.
Luego, φ y ψ preservan orden, $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son funciones idénticas. Esto es realmente $\psi = \varphi^{-1}$ y φ y ψ son isomorfismos de retículos. Lo cual queríamos demostrar. ŏo

Para probar la parte (1) de 3.2, es suficiente ver que los resultados son conceptos formales. En efecto,

$$\swarrow\Big(\nearrow\Big(\swarrow\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big)\Big)\Big) = \swarrow\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big) = \bigwedge_{i\in I} \swarrow(f_i) = \bigwedge_{i\in i} g_i \quad y$$

$$\nearrow\Big(\bigwedge_{i\in I} g_i\Big) = \nearrow\Big(\bigwedge_{i\in I} \swarrow(f_i)\Big) = \nearrow\Big(\swarrow\Big(\bigvee_{i\in I} f_i\Big)\Big)$$

Por otro lado,

$$\swarrow\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right) = \swarrow\left(\bigwedge_{i\in I} \nearrow(g_i)\right) = \swarrow\left(\nearrow\left(\bigvee_{i\in I} g_i\right)\right) \quad y$$

$$\nearrow\left(\swarrow\left(\nearrow\left(\bigvee_{i\in I} g_i\right)\right)\right) = \nearrow\left(\bigvee_{i\in I} g_i\right) = \bigwedge_{i\in I} \nearrow(g_i) = \bigwedge_{i\in I} f_i.$$

3.2. LA PROPUESTA DE POLLANDT Y BĔLOHLAVEK ES REALMENTE UNA GENERALIZACIÓN EN EL SENTIDO DIFUSO DE RETÍCULOS DE CONCEPTOS FORMALES

Recordemos que Pollandt y Bĕlohlavek consideran un retículo residuado completo $\langle \mathbb{L}, \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, 0, 1\rangle$. Además consideran conjuntos $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ y una relación $\mathbb{I} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{L}$ definen aplicaciones $\uparrow : \mathbb{L}^{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$ y $\downarrow : \mathbb{L}^{\mathbb{Y}} \longrightarrow \mathbb{L}^{\mathbf{X}}$ tal que si $\mathbb{A} \in \mathbb{L}^{\mathbf{X}}$ y $\mathbb{B} \in \mathbb{L}^{\mathbb{Y}}$, entonces

$$\mathbb{A}^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x\in X} (\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y))$$

$$\mathbb{B}^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y\in Y} (\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y))$$

Notemos que en este caso $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{L}$ son los mismos y que las correspondientes coordenadas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{I}$ son intercambiables. Por tanto nuestras definiciones de $\nearrow(g)(a)$ y $\swarrow(f)(b)$ pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbb{A}^{\uparrow}(y) = \sup\{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X}) c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$$

de la misma forma

$$\mathbb{B}^{\downarrow}(x) = \sup\{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y}) d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$$

Teorema 3.3.

a) $\bigwedge_{x\in \mathbf{X}} (\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)) = \sup\{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X}) c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$

b) $\bigwedge_{y\in \mathbb{Y}} (\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)) = \sup\{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y}) d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$

Demostración.

a) Sea $u = \bigwedge_{x\in \mathbf{X}} (\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y))$ y $v = \sup\{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$, esto es $u = \inf\{\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y) : x \in X\}$. Veamos que $u = v$.
Si $u = \inf\{\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y) : x \in \mathbb{X}\}$, entonces $(\forall x \in \mathbb{X})\ u \leq \mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)$,

puesto que $\otimes$ y $\longrightarrow$ son un par adjunto, tenemos que $(\forall x \in \mathbb{X})\ u \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)$, esto es $u \in \{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$ de donde
$u \leq \sup \{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\} = v$.
Recíprocamente, sea $w \in \{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$, esto es, $(\forall x \in \mathbb{X})\ w \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)$, lo cual es equivalente a $(\forall x \in \mathbb{X}) w \leq \mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)$. Luego para cualquier $w \in \{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$ se tiene que $w \leq \bigwedge_{x \in \mathbf{X}} (\mathbb{A}(x) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)) = u$, así

$$v = \sup \{c \in \mathbb{L} : (\forall x \in \mathbb{X})\ c \otimes \mathbb{A}(x) \leq I(x,y)\} \leq u$$

b) Sea $u = \inf \{\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y) : y \in \mathbb{Y}\}$ y
$v = \sup \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$. Probemos que $u = v$.
Si $u = \inf \{\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y) : y \in \mathbb{Y}\}$, entonces
$(\forall y \in \mathbb{Y})\ u \leq \mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)$ y como $\longrightarrow$ y $\otimes$ forman un par adjunto, tenemos que $(\forall y \in \mathbb{Y})\ u \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)$, luego $u \in \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$, de donde $u \leq \sup \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\} = v$.
Recíprocamente, sea $w \in \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$, luego
$(\forall y \in \mathbb{Y})\ w \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)$, lo cual es equivalente a $(\forall y \in \mathbb{Y})\ w \leq \mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)$. Luego $w \leq \bigwedge_{y \in \mathbb{Y}} (\mathbb{B}(y) \longrightarrow \mathbb{I}(x,y)) = u$, esto para cualquier
$w \in \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\}$. Así

$$v = \sup \{d \in \mathbb{L} : (\forall y \in \mathbb{Y})\ d \otimes \mathbb{B}(y) \leq \mathbb{I}(x,y)\} \leq u$$

$\hat{o}o$

Por último probemos que $\otimes$ es continua a izquierda en ambos argumentos.

Teorema 3.4. *Sea $\mathbb{C}$ un retículo completo, $\mathbb{L}$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathbb{D}$ un conjunto arbitrario. Sea $\otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{L}$ y $\longrightarrow : \mathbb{D} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $c \otimes d \leq l$ si y solo si $c \leq d \longrightarrow l$. Entonces $\otimes$ es continua a izquierda en ambos argumentos.*

Demostración. Es suficiente probar que es continua a izquierda en el primer argumento, pues $\otimes$ es conmutativa.
Si $c \otimes d \leq l$ para todo $c \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{C}$, entonces $c \leq d \longrightarrow l$ para todo $c \in \mathbb{X}$, con lo que $d \longrightarrow l$ es cota superior para todo $c \in \mathbb{X}$, puesto que $\mathbb{C}$ es un retículo completo, existe $\bigvee \mathbb{X}$. Luego $\bigvee \mathbb{X} \leq d \longrightarrow l$ esto es $\bigvee \mathbb{X} \otimes d \leq l$. $\hat{o}o$

4. EJEMPLOS

En esta sección mostraremos unos ejemplos.

1. Consideremos los conjuntos $B = \{b_1,\ b_2\}$ y $A = \{a_1,\ a_2\}$ de objetos y atributos respectivamente. Sea $L = \{0.0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 1.0\}$ un conjunto parcialmente ordenado, con $\leq$ dado por $0{,}0 \leq 0{,}1 \leq \cdots 0{,}9 \leq 1{,}0$(el orden usual). Además, consideremos los retículos completos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$, tales que $\mathbb{C} = \mathbb{D} = L$ y $c_1 \wedge c_2 = \text{mín}\{c_1, c_2\}$ y $c_1 \vee c_2 = \text{máx}\{c_1, c_2\}$ para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
   Sea $R : A \times B \longrightarrow L$ dado por:

R	b_1	b_2
a_1	0.5	0.5
a_2	0.7	0.8

   Consideremos $\bullet : \mathbb{B} \times \mathbb{D} \longrightarrow L$ dada por $c \bullet d = \text{máx}\{c, d\}$ para todo $c \in \mathbb{C},\ d \in \mathbb{D}$

   $$\begin{aligned} g_1 : B &\longrightarrow \mathbb{D} \\ b_1 &\longrightarrow 0{,}5 \\ b_2 &\longrightarrow 0{,}8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_1 : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a_1 &\longrightarrow 0{,}5 \\ a_2 &\longrightarrow 0{,}8 \end{aligned}$$

   Veamos que $\langle g_1, f_1 \rangle$ forman un concepto formal, probemos que

   1a) $\nearrow (g_1)(a_1) = f_1(a_1)$.
   1b) $\nearrow (g_1)(a_2) = f_1(a_2)$.
   2a) $\swarrow (f_1)(b_1) = g_1(b_1)$.
   2b) $\swarrow (f_1)(b_2) = g_1(b_2)$.

   Demostración.

   1a) $\nearrow (g_1)(a_1) = \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in B)\ c \cdot g_1(b) \leq R(a_1, b)\}$
   para b_1 tenemos que

   $$\{c \in \mathbb{C} : c \cdot g_1(b_1) \leq R(a_1, b_1)\} = \{0{,}0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5\}$$

   para b_2 tenemos que

   $$\{c \in \mathbb{C} : c \cdot g_1(b_2) \leq R(a_1, b_2)\} = \phi$$

   Luego $\nearrow (g_1)(a_1) = 0{,}5 = f_1(a_1)$.

   1b) $\nearrow (g_1)(a_2) = \sup\{c \in \mathbb{C} : (\forall b \in B)\ c \cdot g_1(b) \leq R(a_2, b)\}$
   para b_1 tenemos que

   $$\{c \in \mathbb{C} : c \cdot g_1(b_1) \leq R(a_2, b_1)\} = \{0{,}0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7\}$$

   para b_2 tenemos que

   $$\{c \in \mathbb{C} : c \cdot g_1(b_2) \leq R(a_2, b_2)\} = \{0{,}0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8\}$$

   Luego $\nearrow (g_1)(a_2) = 0{,}8 = f_1(a_2)$.

2a) $\swarrow(f_1)(b_1) = \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in A)\ f_1(a) \cdot d \leq R(a, b_1)\}$
para a_1 tenemos que

$$\{d \in \mathbb{D} : f_1(a_1) \cdot d \leq R(a_1, b_2)\} = \{0{,}0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5\}$$

para a_2 tenemos que

$$\{d \in \mathbb{D} : f_1(a_2) \cdot d \leq R(a_2, b_1)\} = \phi$$

Luego $\swarrow(f_1)(b_1) = 0{,}5 = g_1(b_1)$.

2b) $\swarrow(f_1)(b_2) = \sup\{d \in \mathbb{D} : (\forall a \in A)\ f_1(a) \cdot d \leq R(a, b_2)\}$
para a_1 tenemos que

$$\{d \in \mathbb{D} : f_1(a_1) \cdot d \leq R(a_1, b_2)\} = \{0{,}0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5\}$$

para a_2 tenemos que

$$\{d \in \mathbb{D} : f_1(a_2) \cdot d \leq R(a_2, b_2)\} = \{0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0{,}8\}$$

Luego $\swarrow(f_1)(b_2) = 0{,}8 = g_1(b_2)$.
Así $\langle g_1, f_1\rangle$ forman un concepto formal.
Análogamente considerando los mismos conjuntos y $R : A \times B \longrightarrow L$ dada por

R	b_1	b_2
a_1	0.5	0.5
a_2	0.0	1.0

$$\begin{aligned} g_1' : B &\longrightarrow \mathbb{D} \\ b_1 &\longrightarrow 0{,}5 \\ b_2 &\longrightarrow 1{,}0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_1' : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a_1 &\longrightarrow 0{,}5 \\ a_2 &\longrightarrow 1{,}0 \end{aligned}$$

Entonces $\langle g_1', f_1'\rangle$ es un concepto formal.

$$\begin{aligned} \langle g_1, f_1\rangle &= \langle\{b_1/0{,}5,\ b_2/0{,}8\}, \{a_1/0{,}5,\ a_2/0{,}8\}\rangle \quad y \\ \langle g_1', f_1'\rangle &= \langle\{b_1/0{,}5,\ b_2/1{,}0\}, \{a_1/0{,}5,\ b_2/1{,}0\}\rangle \end{aligned}$$

Cada uno de los conceptos anteriores forman un retículo de conceptos formales, pues todo conjunto en si mismo es un retículo completo. ♢

2. Cuando queremos estudiar la influencia de las cantidades de alcohol y colesterol en la evolución de la leucemia y la diabetes en dos poblaciones, las cuales se someten a exámenes bajo la supervisión de dos doctores, los resultados que ellos dan son los siguientes:
Para el primer doctor:
La relación entre alcohol y leucemia es del 50 %
La relación entre colesterol y leucemia es del 70 %
La relación entre alcohol y diabetes es del 50 %
La relación entre colesterol y diabetes es del 80 %

Además, el 50 % padecía leucemia, el 80 % padecía diabetes, el 50 % tenía presencia de alcohol y el 80 % tenia presencia de colesterol.

El segundo doctor
La relación entre alcohol y leucemia es del 50 %
La relación entre colesterol y leucemia es del 0 %
La relación entre alcohol y diabetes es del 50 %
La relación entre colesterol y diabetes es del 100 %
Además, el 50 % padecía leucemia, el 100 % padecía diabetes, el 50 % tenía presencia de alcohol y el 100 % tenia presencia de colesterol.

Luego de la investigación obtenemos la siguiente relación:

R	Leucemia	Diabetes
Alcohol	0.5 0.5	0.5 0.5
Colesterol	0.7 0.0	0.8 1.0

y los siguientes conjuntos difusos

$$\begin{aligned} g_1 : B &\longrightarrow \mathbb{D} \\ alcohol &\longrightarrow 0{,}5 \\ diabetes &\longrightarrow 0{,}8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_1 : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ alcohol &\longrightarrow 0{,}5 \\ colesterol &\longrightarrow 0{,}8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1' : B &\longrightarrow \mathbb{D} \\ leucemia &\longrightarrow 0{,}5 \\ diabetes &\longrightarrow 1{,}0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_1' : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ alcohol &\longrightarrow 0{,}5 \\ colesterol &\longrightarrow 1{,}0 \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos el siguiente concepto formal.

$$\langle g, f\rangle = \langle \{leucemia/\{0{,}5, 0{,}5\},\ diabetes/\{0{,}8, 1{,}0\}\},\ \{alcohol/\{0{,}5, 0{,}5\},\ colesterol/\{0{,}8, 1{,}0\}\}\rangle$$

Si queremos estudiar la presencia de alcohol, vemos que los doctores coinciden en que el colesterol y el alcohol influyen más sobre la leucemia, que sobre la diabetes.

5. CONCLUSIÓN

- Hemos probado una extensión del teorema básico sobre retículos de conceptos formales. Tal teorema caracteriza todos los retículos que son isomorfos a los retículos de conceptos formales generalizados.

  La idea fué usar dos retículos completos diferentes $\mathbb{D}$ para el conjunto B de objetos y $\mathbb{C}$ para el conjunto de atributos.

- Estudiamos la relación entre dos generalizaciones, en [14] se prueba que todo retículo de conceptos formales con función interior es isomorfo a algún retículo de conceptos formales generalizados. En [13] se prueba la relación entre la propuesta parcial en el sentido difuso y los retículos de conceptos formales generalizados. De lo anterior obtenemos el siguiente diagrama:

Retículo de conceptos formales generalizados

Retículo de conceptos formales $\mathbb{L}$- difusos con función interior

Retículo de conceptos formales $\mathbb{L}$-difusos

Retículo de conceptos formales difusos parciales

Retículo de conceptos clásicos

Bibliografía

[1] R. Bělohlavek *Lattices generated by binary relations (extend abstract).* in, Abstract of the Fourth international conference on fuzzy sets theory and its Applications. Liptovky Jan, Slovakia, (1998), P.11.

[2] R. Bělohlavek *Fuzzy Relational Systems.*Foundations and Principle Kluwer /plenum Publisher, New York, (2002).

[3] R. Bělohlavek, V. Sklenar, J. Zacpal *Concept lattices contrained by equivalence relations.* R. Bělohlavek,(Eds):CLA(2004),pp 55-66, ISBN 80 - 248-0597-9.

[4] R. Bělohlavek, V. Vychodil *Wath is fuzzy concept lattice?*,R. Bělohlavek, V. Snáel(Eds):CLA(2005),pp 34 - 45, ISBN 80-0863-3.

[5] A Burusco, R. Fuentes Gonzalez, *The Study of the interval - value contexts fuzzy sets and systems*, (2001) pp 439-452.

[6] A Burusco, R. Fuentes Gonzalez. *The Study of the* $\mathbb{L}$ *fuzzy concept lattices.* Math-ware & soft computing, 3 pp. 209 - 218. (1994).

[7] J. Galindo, *Notas de clases.*Departamento de lenguaje y ciencias de la computación, Universidad de Malaga, (2004).

[8] G. Ganter, R. Wille, *Formal concept analysis*, Mathematical foundation, Springer Verlang, (1999),ISBN 3- 540-627771-5.

[9] G.Grätzer *General lattice theory*, Basel:Birkhoser Verlay 1978.

[10] N. Hasser, J. Sullivan, *Real analysis*,Litthon Educational Publishing Inc 1971.

[11] U. HHLE, S.E. Rodabaugh, *Mathematics of fuzzy sets logic, topology and measure theory*, Klower Academic Publishers, Boston / Dordrecht/London 1999.

[12] S. Krajěi, *The basic theorem on generalized concept lattice*, V.Snáel, R. Belohlavek.(Eds): CLA 2004, pp. 25-33 ISBN 80-0597-9.

[13] S. Krajěi, *A generalized concept lattice*, Logic Journal of IGPL, 2005, 13(5): pp. 543-550.

[14] S. Krajči, *Every concept lattice with hedges is isomorphic to some generalized concep lattice*, V.Snáel, R. Belohlavek.(Eds): CLA 2005, pp. 1-9 ISBN 80-0863-3.

[15] V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra, *theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor & Francis Group, london and New York, 2003.

[16] J. Luna Torres, E. Salazar Buelvas *Compactness in the* $\mathbb{L}$*-fuzzy topologycal space*, fuzzy sets and system (2005), submitted.

[17] S. Pollandt, *fuzzy Begriffe*, Springer Verlag, Berlin / Heidelberg, 1997.

[18] S. Yania, Jauna, *Discovering knowledge from fuzzy concept lattice*, Kandel A, Last M, Bunke H, data mishing and computational intellence, pp. 167 - 190, Physica - verlag, 2001.