

**CONSTRUCCION DE 3 VARIEDADES
Y
CUBIERTAS RAMIFICADAS**

**CONSTRUCCION DE 3 VARIEDADES Y
CUBIERTAS RAMIFICADAS**

IVONNE REINA GONZALEZ

**UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
PROGRAMA DE MATEMATICAS
CARTAGENA
2000**

**CONSTRUCCION DE 3 VARIEDADES Y
CUBIERTAS RAMIFICADAS**

IVONNE REINA GONZALEZ
//

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título
de Matemático Puro

RUBEN DARIO ORTÍZ O. M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad de Cartagena
Asesor

**UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIAS
PROGRAMA DE MATEMATICAS
CARTAGENA
2000**

4

*A mis padres y Oliva
con todo mi amor.*

AGRADECIMIENTOS

A Rubén Dario Ortiz O., Asesor, por sus valiosas orientaciones, constante dedicación, apoyo e interés al asesorarme este trabajo.

A la profesora Magnolia por sus correcciones y observaciones y a Miguel Angel por haberme brindado un espacio de su tiempo.

A mis compañeros y profesores de Matemáticas.

A Richard, por su constante apoyo y paciencia.

A mis padres, amigos y familiares.

A Jaime Castillo, Ingeniero de Sistemas, por su valiosa ayuda en la transcripción de este trabajo.

CONTENIDO

CAPITULO 1. PRELIMINARES	1
1.1. Algunos conceptos de Topología	1
1.2. Topología Cociente	6
1.3. Variedades	8
1.4. Clasificación para superficies compactas	13
CAPÍTULO 2. LEVANTAMIENTO DE TRAYECTORIAS Y DE HOMOTOPIAS	26
2.1. Construcción del Toro a partir de la esfera	26
2.2. Cubiertas	30
2.3. Teorema del Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías	34
CAPITULO 3. GENERALIZACION DE LA CONSTRUCCION Y VARIETADES DE DIMENSION 3	43
3.1. Característica de Euler	43
3.2. Generalización de la construcción	46
3.3. Variedades de dimensión 3	47
APENDICE	56
CONCLUSIONES	62
BIBLIOGRAFIA	63
ANEXO	65

CONSTRUCCION DE 3 - VARIEDADES Y CUBIERTAS RAMIFICADAS

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es realizar una escritura más clara del artículo "*Construcción de 3 - Variedades y Cubiertas Ramificadas*" de la Dra. Débora Maria Tejada (Universidad Nacional de Colombia, Medellín) tomado de la revista *Lecturas Matemáticas*, Vol. 18 (1997), páginas 3 - 21. En la cual se esbozan todos los detalles técnicos para facilitar una mejor comprensión del mismo.

INTRODUCCION

Este trabajo se realizó con base en el artículo "*Construcción de 3 - Variedades y Cubiertas Ramificadas*" de la Dra. Débora María Tejada (Universidad Nacional de Colombia, Medellín) publicado en la revista *Lecturas Matemáticas*, Vol. 18 (1997), páginas 3 - 21.

Este trabajo sirve para la familiarización y entendimiento de artículos recientemente escritos y publicados en el área de las Matemáticas o en cualquier otro campo de la Investigación.

Las superficies en S^3 son cosa de nuestra experiencia cotidiana, de manera que resulta razonable estudiarlas matemáticamente. Pero si observamos esta idea en forma crítica, podemos cuestionarnos acerca de la existencia de superficies en S^4 ... o en S^n ... o, inclusive , superficies que no están en ningún espacio euclidiano en absoluto. Para construir una definición de una superficie así no podemos apoyarnos en nuestra experiencia directa del mundo real, sino en nuestros conocimientos matemáticos de las superficies en S^3 .

A comienzos del Siglo XX, el Matemático francés Henri Poincaré conjeturó que toda 3 - variedad cerrada cuyo grupo fundamental es trivial es homeomorfa a S^3 . Esta conjetura fue aprobada, para $n > 4$, por S. Smale en 1960.

A partir de esto, han sido muchos los matemáticos que han trabajado en este campo. Vale la pena destacar el trabajo realizado por Freedmann y Donaldson, al mostrar por primera vez ejemplos de variedades puramente topológicas en 1980. A partir de este acontecimiento, a las dimensiones 2 y 3 se les empieza a catalogar como "Topología de Dimensión Baja".

La creación de la topología algebraica data del siglo XIX, donde solo se conocían métodos geométricos como "cortar y pegar", pero toda esta teoría quedo olvidada hasta que en 1976, W. Thurston redescubre el método geométrico riemanniano en el estudio de 3 - variedades. Thurston además publicó unas notas donde introduce nuevas e importantes ideas, las cuales han sido de mucha utilidad para los topólogos de dimensión baja hasta hoy día.

En el capítulo 1 se establece la terminología, las definiciones y los resultados matemáticos más importantes para facilitar al lector una eficaz comprensión del contenido general de este trabajo. Así mismo, se definirá de manera adecuada lo que es una variedad y se estudiará en particular lo que es una 2 - variedad o superficie y se describe la geometría de las superficies en el espacio tridimensional.

En el capítulo 2, se construirá el Toro a partir de la esfera, se establecerá el término "cubierta" y finalmente se enunciará el teorema de Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías, el cual nos será de gran utilidad en la construcción de las variedades de dimensión 2 o superficies que será descrita en este capítulo.

En el capítulo 3, se definirá la Característica de Euler, se generalizará la construcción vista en el Capítulo 2, se verá el concepto de cubierta ramificada y por último se construirá el método diseñado por Montesinos para la construcción de variedades de dimensión 3.

2

Capítulo 1.

Preliminares

El presente capítulo recopila todas las definiciones y hechos básicos de Topología y Geometría para así facilitar al lector una completa comprensión del contenido expuesto en los capítulos posteriores y por consiguiente del tema general de esta monografía. De igual forma, se dará una clara explicación de lo que son las variedades y se estudiará en particular la 2 - variedad o superficie. Los resultados de las secciones 1.1 y 1.2 se han tomado de [Mu] y los de la sección 1.3 y 1.4 de [Ma] y [Arm].

1.1. ALGUNOS CONCEPTOS DE TOPOLOGIA

Definición 1.1.1

Una **topología** en un conjunto X es una colección J de subconjuntos de X que cumplen las siguientes propiedades:

- (1) \emptyset y X están en J
- (2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de J está en J .
- (3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de J está en J .

Un conjunto X para el cual una topología J ha sido aplicada es llamado un **espacio topológico**.

Definición 1.1.2.

Sea X un espacio topológico con la topología J . Se dice que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** si U pertenece a la colección J .

Definición 1.1.3.

Sea X un espacio topológico con la topología J . Si Y es un subconjunto de X , la colección $J_Y = \{Y \cap U / U \in J\}$ es una topología en Y , llamada la **topología subespacio** de X ; sus conjuntos abiertos consisten en todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y .

Definición 1.1.4.

Sea X un espacio topológico. Un punto $p \in X$ es un **punto de acumulación** o **punto límite** (también llamado punto de aglomeración o punto derivado) de un subconjunto A de X si y sólo si todo conjunto abierto G que contiene a p contiene algún punto de A diferente de p , es decir,

$$\text{Si } G \text{ es abierto } p \in G \text{ entonces } (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de los puntos de acumulación de A , denotado por A' , se llama **conjunto derivado** de A .

Definición 1.1.5.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X . La **clausura** de A denotada por \bar{A} se define así: si $\{F_i : i \in I\}$ es la clase de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A , entonces

$$\bar{A} = \bigcap_i F_i$$

Observación 1.1.1. (*Caracterización de la clausura de A con respecto a los puntos de acumulación de A*)

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X . Entonces la clausura de A es la unión de A con el conjunto de sus puntos de acumulación, esto es:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Un punto $p \in X$ es un punto de clausura o un punto de adherencia de $A \subset X$ si y sólo si p pertenece a la clausura de A , esto es $p \in \bar{A}$.

Definición 1.1.6.

Un subconjunto A de un espacio topológico X es denso si $\bar{A} = X$.

Definición 1.1.7.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X . Un punto $p \in A$ es un punto interior de A si p pertenece a algún conjunto abierto G que esté contenido en A :

$$p \in G \subset A \text{ donde } G \text{ es abierto}$$

El conjunto de los puntos interiores, denotado por $\text{Int}(A)$ se llama interior de A .

Definición 1.1.8.

El Exterior de A , simbolizado por $\text{Ext}(A)$, es el interior del complemento de A , esto es $\text{Int}(A^c)$. La frontera de A , denotada por $\text{Fr}(A)$, es el conjunto de los puntos que no pertenecen ni al interior ni al exterior de A .

Definición 1.1.9.

Sea U un conjunto abierto. Si U contiene un punto x , decimos que U es una vecindad de x .

Definición 1.1.10.

Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si y sólo si verifica el axioma siguiente:

Dados dos puntos diferentes cualesquiera $a, b \in X$, cada uno pertenece a un conjunto abierto y estos conjuntos abiertos son disjuntos.

En otras palabras, existen conjuntos abiertos G y H tales que

$$a \in G, b \in H \text{ y } G \cap H = \emptyset$$

Definición 1.1.11.

Sean X y Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Si f y $f^{-1}: Y \rightarrow X$ son continuas, entonces decimos que la función f es un **homeomorfismo** de X a Y y que los espacios X y Y son **homeomorfos**.

Definición 1.1.12.

Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es **continua** si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Definición 1.1.13.

Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par U, V de subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X cuya unión es X . El espacio X es **conexo** si no existe una separación de X .

Definición 1.1.14.

Sea X un espacio arbitrario. Definimos la **relación de equivalencia** en X designada por $x \sim y$, si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x y a y . Las clases de equivalencia son llamadas las **componentes** o "componentes conexas" de X .

Definición 1.1.15.

Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X , denotada por $x \sim y$, si existe un arco en X de x a y . Las clases de equivalencia son llamadas las **arco-componentes** de X .

Definición 1.1.16.

Dados los puntos x y y del espacio X , un **arco** en X de x a y es una función continua $f: [a, b] \rightarrow X$ tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X es **arco-conexo** si todo par de puntos de X pueden unirse por un arco en X .

Definición 1.1.17.

Un espacio X es **localmente conexo** en x si para toda vecindad U de x , existe una vecindad conexa V de x contenida en U . Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice simplemente que es **localmente conexo**.

Definición 1.1.18.

Un espacio X es **localmente arco - conexo** en x si para toda vecindad U de x , existe una vecindad arco - conexa V de x contenida en U . Si X es localmente arco - conexo en cada uno de sus puntos, se dice simplemente que es **localmente arco - conexo**.

Definición 1.1.19.

Sea X un espacio topológico. La **compactación de Alexandrov** o **compactación** se define con un punto de X que se denota por X_∞ , donde $X_\infty = X \cup \{\infty\}$. El punto ∞ es llamado punto al infinito y es distinto de todos los demás puntos.

1.2. TOPOLOGÍA COCIENTE

Una de las principales motivaciones de la Topología Cociente está en la Geometría donde construimos objetos geométricos como las superficies haciendo uso de las técnicas de "cortar y pegar". El toro, por ejemplo, puede ser construido tomando un rectángulo, apropiadamente juntamos sus bordes y los "pegamos", como en la Figura 1.1. La Formalización de esta construcción implica el concepto de topología cociente.

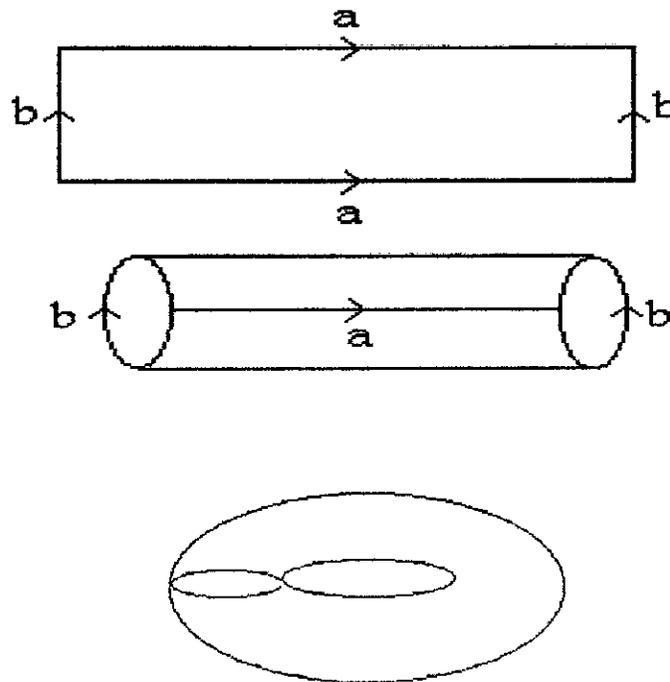


Figura 1.1.

Definición 1.2.1.

Sean X y Y espacios topológicos; sea $p: X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p es llamada la **aplicación cociente**, si un subconjunto U de Y es abierto en Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Dos clases especiales de aplicaciones cociente son las aplicaciones abiertas y las aplicaciones cerradas. Recordemos que una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación abierta si para cada conjunto abierto U de X , el conjunto $f(U)$ es abierto en Y . Y decimos que f es cerrada si para cada conjunto cerrado A de X , el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y . Se sigue de la definición que si $p: X \longrightarrow Y$ es una aplicación sobreyectiva y continua que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente.

Definición 1.2.2.

Sea X un espacio, A un conjunto y $p: X \longrightarrow A$ una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología J en A relativa a la cual p es una aplicación cociente; es llamada la **topología cociente** inducida por p .

La topología J está claramente definida de tal forma que le permita consistir de aquellos subconjuntos U de A tal que $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Veamos que J es una topología (Ver Definición 1.1.1). Los conjuntos \emptyset y A son abiertos porque $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $p^{-1}(A) = X$. Las condiciones (2) y (3) se siguen de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} p^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} p^{-1}(U_{\alpha}) \\ p^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) &= \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \end{aligned}$$

(Ver [Mu]).

Definición 1.2.3.

Sea X un espacio topológico, y X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X . Sea $p: X \longrightarrow X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p , el espacio X^* es llamado un **espacio cociente** de X .

Algunos matemáticos llaman a X^* un *espacio de descomposición* o un *espacio de identificación* de X . Lo llaman así porque X^* ha sido obtenido "identificando" todos los elementos en cada clase partición a un solo punto".

1.3 VARIEDADES

Las variedades están alrededor de nosotros en muchos aspectos. Como observadores del mundo tri - dimensional, estamos familiarizados con dos - variedades: la superficie de un balón, una donut, la superficie de una casa o un árbol o una malla de voleibol. En este capítulo se definirá el concepto de variedad, siguiendo como objetivo hacer entender las variedades como objetos geométricos, traduciendo propiedades geométricas (topológicas) en algebraicas.

Definición 1.3.1.

Sea n un entero positivo. Una **variedad n-dimensional** o una **n - variedad** es un espacio de Hausdorff, tal que cada punto tiene una vecindad abierta homeomorfa a la bola abierta n -dimensional:

$$U^n = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$$

donde $| \cdot |$ representa la normal usual en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.3.1.

El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es una variedad n - dimensional. Podemos demostrar que la esfera unidad de dimensión n

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1 \}$$

es una n - variedad.

En efecto, para el punto $x = (1, 0, \dots, 0)$, el conjunto $\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0 \}$ es una vecindad con las propiedades exigidas, como puede verse por proyección ortogonal sobre el hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} definido por $x_1 = 0$. Para cualquier otro punto $x \in S^n$, existe una rotación que transforma x en el punto $(1, \dots, 0)$. Esta rotación es un homeomorfismo de S^n sobre sí mismo; por tanto x tiene también una vecindad del tipo deseado.

Como se desprende del ejemplo anterior, una n -variedad puede ser conexa o no conexa, compacta o no compacta. En cualquier caso una n -variedad es siempre localmente compacta.

Las variedades conexas de dimensión n , $n > 1$, están divididas en dos clases: orientables y no orientables.

Considérese, primero, el caso $n = 2$. Se puede dotar de una orientación al plano euclídeo R^2 y, en general, a una pequeña región del plano, de varias maneras. Por ejemplo, se puede fijar cuál de las dos clases de sistemas de coordenadas del plano será considerada como positiva y cuál como negativa.

Consideraciones análogas se aplican a cualquier variedad conexa de dimensión 2, ya que cualquier punto tiene un entorno homeomorfo a un entorno de un punto del plano.

Ejemplo 1.3.2.

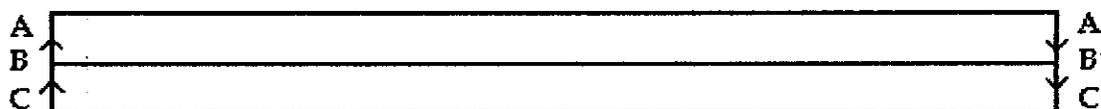
El ejemplo más simple de una variedad 2-dimensional que presenta este fenómeno, es la famosa banda de Möbius. Geométricamente podemos construir un modelo de banda de Möbius tomando una tira rectangular de papel, larga y estrecha, y pegando los extremos en sentidos opuestos (Ver Figura 1.2).

Matemáticamente, una banda de Möbius es un espacio topológico que se define como sigue. Designemos por X el siguiente rectángulo del plano:

$$X = \{(x, y) \in R^2 : -10 \leq x \leq +10, -1 < y < +1\}$$

Formemos entonces el espacio cociente de X obtenido al identificar los puntos $(10, y)$ y $(-10, -y)$ para $-1 < y < 1$. Obsérvese que los dos bordes del rectángulo correspondientes a $y = 1$ e $y = -1$ se omiten. Esta omisión es esencial; en caso contrario el resultado no sería una variedad (sería una variedad con borde). Podríamos también definirla mediante un subconjunto de R^3 que fuera homeomorfo al espacio cociente que acabamos de describir.

Como se quiera definir la banda de Möbius, la línea central de la tira rectangular pasa a ser un círculo tras la unión o identificación de los dos extremos (Ver Figura 1.2)



Unir el borde ABC al $A'B'C'$

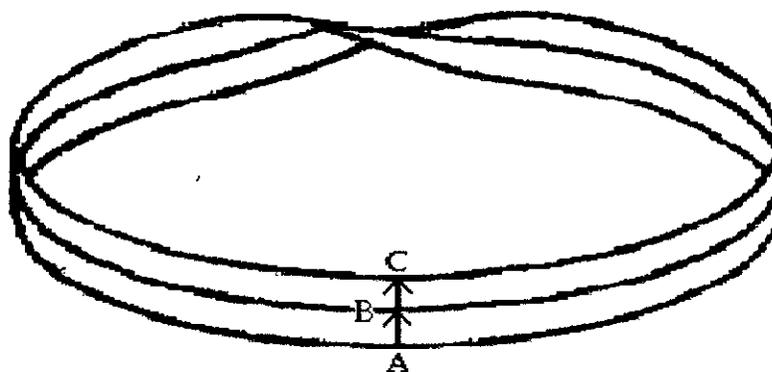


Figura. 1.2

Definición 1.3.2.

Una variedad 2 - dimensional conexa es **orientable** si todo camino cerrado conserva la orientación; una variedad 2 - dimensional conexa es no orientable si existe al menos un camino que invierte la orientación.

Considérese ahora la orientabilidad en variedades de dimensión 3. Podemos dotar de una orientación al 3 - espacio euclídeo, o a una pequeña región del mismo, fijando la clase de sistemas de coordenadas considerada como positiva y la clase considerada como negativa. Otra manera sería fijar el tipo de hélice, o rosca de tornillo, que se considera que avanza en sentido directo, y el que hace en sentido inverso. Podemos ahora decir que un camino cerrado de una 3 - variedad invierte o conserva la orientación según que un móvil que recorre el camino vuelva o no al punto inicial con los sentidos directo e inverso, que se han elegido inicialmente cambiados.

Existe una generalización de la banda de Möbius para dimensión 3, que nos proporciona un ejemplo sencillo de 3-variedad no orientable.

Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -10 \leq x \leq +10, -1 < y < +1, -1 < z < +1\}$$

Formemos un espacio cociente de X por identificación de los puntos $(10, y, z)$ y $(-10, -y, z)$ para $-1 < y < 1$ y $-1 < z < 1$. Este espacio puede ser considerado también como producto de la banda de Möbius ordinaria por el intervalo $\{z \in \mathbb{R} : -1 < z < 1\}$. En todo caso, el segmento $-10 \leq x \leq 10$ del eje x , pasa a ser un círculo después de la identificación.

Definición 1.3.3.

Una **superficie** es un espacio topológico en el cual cada punto tiene una vecindad homeomorfa al plano y para la cual dos puntos distintos tienen vecindades disjuntas.

El concepto topológico de superficie o variedad de dimensión 2 es una abstracción matemática del concepto familiar de superficie hecha de papel, lámina metálica, plástico u otro material delgado cualquiera. Un microbio inteligente, con un alcance visual limitado, que se arrastre sobre una superficie, no la distinguiría de un plano.

De ahora en adelante se hará referencia a una 2 - variedad conexa como una *superficie*. El ejemplo más sencillo de superficie compacta es la esfera S^2 ; otro ejemplo importante es el toro. Otro ejemplo de superficie compacta es el plano proyectivo real o simplemente plano proyectivo. Debido a que no es homeomorfo a ningún subconjunto del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , el plano proyectivo es mucho más difícil de visualizar que la esfera S^2 o el toro.

Definición 1.3.4.

El **plano proyectivo** es el espacio cociente de la esfera S^2 obtenido por identificación de cada par de puntos diametralmente opuestos.

A esta superficie también se le puede llamar plano proyectivo real. Recuérdese que un punto tiene coordenadas homogéneas (x_0, x_1, x_2) donde x_0, x_1, x_2 son números reales y al menos uno de ellos es distinto de cero. El término "homogéneas" significa que (x_0, x_1, x_2) y (x'_0, x'_1, x'_2) representan el mismo punto si y sólo si existe un número real (necesariamente $\neq 0$) tal que

$$x_i = \lambda x'_i \quad i = 0, 1, 2.$$

Si se interpreta (x_0, x_1, x_2) como coordenadas euclídeas ordinarias de un punto de \mathbb{R}^3 , se observa que (x_0, x_1, x_2) y (x'_0, x'_1, x'_2) representan el mismo punto del plano proyectivo si y sólo si están sobre una misma recta que pase por el origen.

Sea $H = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$ el hemisferio superior cerrado de S^2 . Tenemos que cada par de puntos de S^2 diametralmente opuestos, al menos uno se encuentra en H . Si los dos puntos se encuentran en H entonces están sobre el ecuador, que es el borde de H . Así pues, se puede definir también el plano proyectivo como el espacio cociente de H obtenido por identificación de puntos diametralmente opuestos del borde de H . Puesto que H es homeomorfo al disco unidad cerrado E^2 del plano,

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

el espacio cociente de E^2 obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde es un plano proyectivo. Pero E^2 puede sustituirse por cualquier espacio homeomorfo, en particular por un cuadrado. Así pues, un plano proyectivo se obtiene identificando los lados opuestos de un cuadrado tal como se indica en la Figura 1.3.

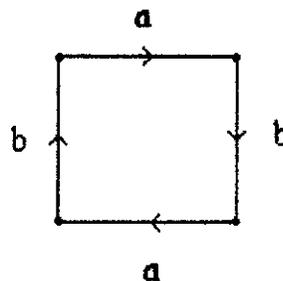


Figura 1.3.

El plano proyectivo no es orientable, en efecto, contiene un subconjunto homeomorfo a una banda de Möbius.

Definición 1.3.5.

Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Su **suma conexa**, designada por $S_1 \# S_2$, está formada practicando un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando entonces las dos superficies a lo largo del borde de estos agujeros. Para ser precisos, escojamos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ tales que D_1 y D_2 sean discos cerrados (es decir, homeomorfos a E^2). Sea S'_i el complementario del interior de D_i en S_i , $i = 1, 2$. Escojamos un homeomorfismo h del círculo borde de D_1 sobre el círculo borde de D_2 . Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x del borde de D_1 . Observando que $S_1 \# S_2$ es una superficie.

Ejemplos 1.3.3.

1. Si S_1 y S_2 son dos 2-esferas, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a S_1
2. Si S_1 y S_2 son dos toros, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a la superficie de un bloque que tenga dos agujeros que lo perforen. (Se supone que los agujeros no están tan juntos que sus bordes se toquen o intersecten).

1.4. CLASIFICACIÓN PARA SUPERFICIES COMPACTAS

Se describirá por ahora lo que se puede entender por "forma canónica" de una suma conexa de toros o planos proyectivos.

Recuérdese la descripción de un toro como un cuadrado con los lados opuestos identificados. Se puede obtener una descripción análoga de la suma conexa de dos toros así: representemos cada uno de los toros por T_1 y T_2 , como un cuadrado con los lados opuestos identificados, tal como lo muestra la Figura 1.4. Obsérvese que los cuatro vértices de cada cuadrado están identificados en un solo punto del toro correspondiente.

Para formar su suma conexas, tenemos, primero, que recortar un agujero circular en cada toro, lo cual podemos hacerlo como mejor convenga. Es conveniente cortar las regiones sombreadas en los diagramas. Designese por c_1 y c_2 los bordes de los agujeros, que están identificados tal como lo indican las flechas. Podemos representar también los complementarios de los agujeros en los dos toros de los pentágonos de la Figura 1.4, ya que las identificaciones de las aristas indicadas implican que los dos extremos del segmento c_i están identificados, $i=1,2$.

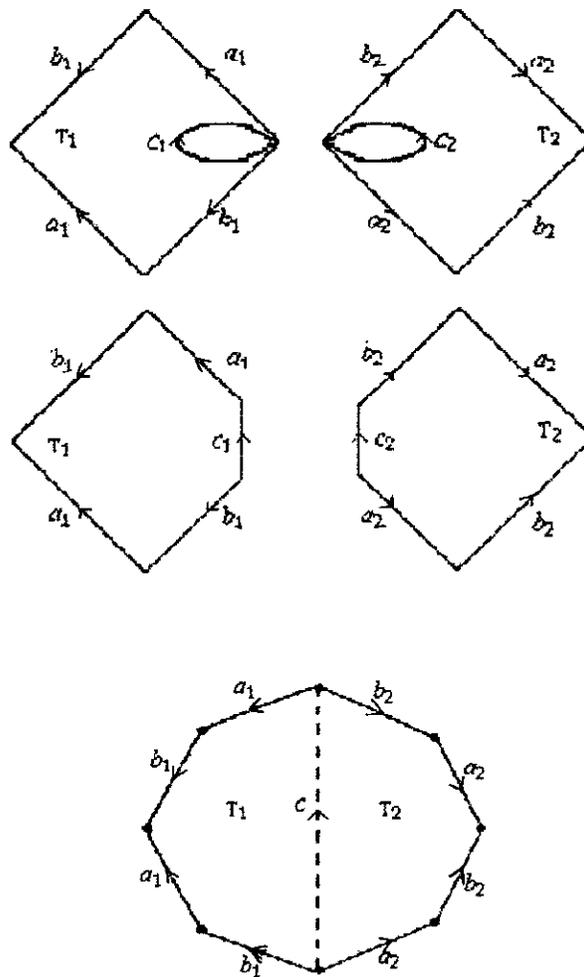


Figura 1.4

Identifíquese ahora, los segmentos c_1 y c_2 ; obtenemos el octógono de la Figura 1.4., en el cual los lados están identificados a pares, tal como está indicado. Obsérvese que los ocho vértices del octógono están identificados en un solo punto en $T_1 \# T_2$. Este octógono con las aristas identificadas a pares es nuestra "forma canónica" de la suma de dos toros.

El procedimiento para la suma conexa de planos proyectivos es análogo al del toro. Se ha considerado el plano proyectivo como el espacio cociente de un disco circular, al identificar los puntos diametralmente opuestos de su borde. Eligiendo un par de puntos diametralmente opuestos como vértices, el círculo del disco queda dividido en dos segmentos. Así, podemos considerar el plano proyectivo como obtenido a partir de un polígono de dos lados al identificarlos. (Ver Figura 1.5.)

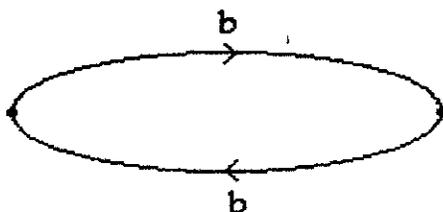


Figura 1.5.

El método es básicamente el mismo que el utilizado para obtener una representación de la suma conexa de 2 toros como espacio cociente de un octógono (Ver Figura 1.4.).

Representemos ahora la esfera como espacio cociente de un polígono con los lados opuestos identificados a pares. Se puede hacer tal como se muestra en la Figura 1.6. Podemos imaginar una esfera como una bolsa que tuviera una cremallera; si la cremallera está abierta, la bolsa puede aplanarse.

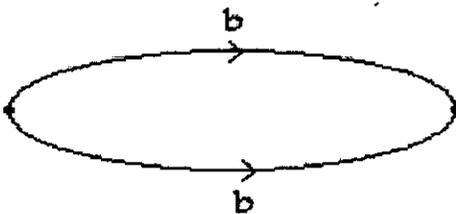


Figura 1.6.

Definición 1.4.1.

Una **triangulación** de una superficie compacta S consiste en una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cubren S , y una familia de homeomorfismos $\varphi_i: T'_i \rightarrow T_i$, $i=1, \dots, n$ donde T'_i es un triángulo del plano \mathbb{R}^2 , es decir, un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 limitado por tres rectas distintas.

Los subconjuntos T_i se llaman "triángulos". Los subconjuntos de T_i que son imágenes de vértices y aristas del triángulo T'_i se llaman también "vértices" y "aristas" respectivamente. Finalmente se impone la condición de que dos triángulos distintos T_i y T_j o son distintos o tienen un solo vértice común o tienen toda una arista común.

Ejemplo 1.4.1.

La superficie de un tetraedro ordinario del 3 - espacio euclídeo es homeomorfa a la esfera S^2 ; más aún, los cuatro triángulos satisfacen todas las condiciones de una triangulación de S^2 . En este caso, hay cuatro vértices y toda terna de vértices es el conjunto de vértices de un triángulo. Ninguna otra triangulación de una superficie cualquiera puede verificar esta propiedad.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Clasificación para superficies Compactas)

Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.

Demostración.

Sea S una superficie compacta. Veamos que S es homeomorfa a un polígono con los lados identificados a pares.

Primer paso.

Sea S triangulable y sean T_1, \dots, T_n los n triángulos tales que cada T_i tiene un lado e_i común con al menos uno de los triángulos T_1, \dots, T_{i-1} , $2 \leq i \leq n$.

Sea T_1 cualquiera de los triángulos, sea T_2 cualquier triángulo que contiene un lado común con T_1 , T_3 cualquier triángulo que tiene lado común con T_1 o con T_2 , etc. Si en algún punto no se puede continuar este proceso, entonces se tendrían dos conjuntos $\{T_1, \dots, T_k\}$ y $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tales que ningún triángulo

del primer conjunto tendría un lado o vértice común con ningún triángulo del segundo conjunto. Pero esto contradice la hipótesis de que S es conexa ya que se originaría una partición de S en dos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos.

Usando esta ordenación de los triángulos T_1, \dots, T_n y la elección de los lados e_i , $2 \leq i \leq n$, se puede construir un modelo de S , el cual será un polígono cuyos lados estén identificados a pares. Recuérdese que para cada T_i , existe un T'_i en \mathbb{R}^2 y un homeomorfismo $\varphi_i: T'_i \rightarrow T_i$. Supongamos que los triángulos T'_1, T'_2, \dots, T'_n son disjuntos dos a dos.

Sea $T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i$. Entonces T' es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Defínase una aplicación $\varphi: T' \rightarrow S$ por $\varphi|_{T'_i} = \varphi_i$, esta aplicación es continua por ser φ_i un homeomorfismo. φ es también una aplicación cerrada dado que T' es compacto y S es un espacio de Hausdorff. Por tanto, S tiene la topología cociente determinada por φ (Ver definición 1.2.3.)

El polígono deseado se construirá como un espacio cociente de T' . Por hipótesis, e_i , $2 \leq i \leq n$ es un lado del triángulo T_i y de otro triángulo T_j , $1 \leq j \leq i$. Por tanto, $\varphi^{-1}(e_i)$ consta de un lado del triángulo T'_i y un lado del triángulo T'_j .

Identificando los puntos que se aplican por φ en un mismo punto de e_i , se realiza la identificación de los dos triángulos T'_i y T'_j . Designemos por D el espacio cociente de T' obtenido por las dos identificaciones anteriores para cada uno de los lados e_i , $2 \leq i \leq n$. La aplicación $\varphi: T' \rightarrow S$ induce una aplicación $\psi: D \rightarrow S$ y como D es compacto, S es de Hausdorff y ψ es una aplicación cerrada, entonces S tiene la topología cociente inducida por ψ .

Se plantearán las dos siguientes consideraciones que serán utilizadas para probar que D es topológicamente equivalente a un disco cerrado.

(a) Sean A_1 y A_2 espacios disjuntos homeomorfos a E^2 , esto es, topológicamente equivalentes a discos cerrados. Sean B_1 y B_2 subconjuntos del borde de A_1 y A_2 respectivamente, que sean homeomorfos al intervalo cerrado $[0,1]$, y $h: B_1 \rightarrow B_2$ un homeomorfismo determinado.

Identificando los puntos que se corresponden por h , formemos un espacio cociente de $A_1 \cup A_2$. Luego el espacio cociente es también topológicamente equivalente a un disco. Esto significa que si identificamos dos discos a lo largo de un segmento común de sus fronteras, se obtiene de nuevo un disco.

(b) Al formar el espacio cociente D de T' se pueden hacer todas las identificaciones a la vez, o bien hacer primero la identificación correspondiente a e_2 , luego la correspondiente a e_3 , etc., y así sucesivamente.

Veamos ahora que D es un disco. T'_1 y T'_2 son topológicamente equivalentes a discos entonces por (a), el espacio cociente de $T'_1 \cup T'_2$ que se obtiene al identificar puntos de $\varphi^{-1}(e_2)$ es nuevamente un disco. Haciendo las identificaciones correspondientes al lado e_3 , se forma un espacio cociente de la unión de este disco y T'_3 , etc.

Por tanto se ha obtenido un polígono D tal que la superficie dada S resulta al identificar a pares los lados de D .

Indiquemos estas identificaciones con símbolos apropiados. Se dice que un par de lados es de primera especie si la letra que indica este par de lados aparece en el símbolo con los dos exponentes $+1$ y -1 . En caso contrario, se dice que el par es de segunda especie.

Supongamos que se tiene un polígono de por lo menos cuatro lados. Veamos en la Figura 1.7 que se puede eliminar un par de lados adyacentes de primera especie.

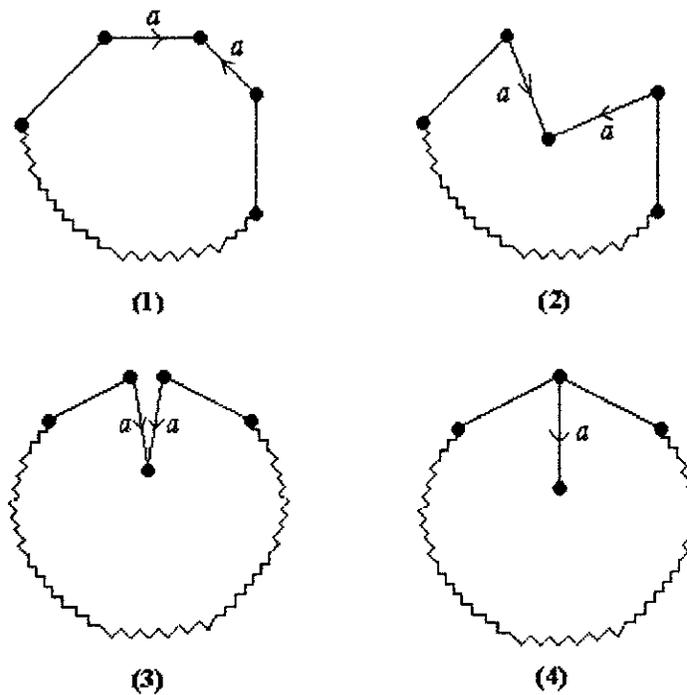


Figura 1.7

Este proceso puede continuar hasta que todos los pares de este tipo hayan sido eliminados o hasta que obtengamos un polígono con sólo dos lados. En este caso, este polígono cuyo símbolo será aa o aa^{-1} , será un plano proyectivo o una esfera, y se puede dar por terminada la demostración de este teorema.

Segundo paso.

En este paso se transformará un polígono de tal forma que todos los vértices pertenezcan a una sola clase de equivalencia.

Se dice que dos vértices son **equivalentes** si y sólo si están identificados. Algunas clases de equivalencia contienen sólo un vértice y otras contienen dos o tres vértices.

Supongamos que por lo menos hay dos clases de equivalencia distintas. Entonces existe un par de vértices adyacentes del polígono que no son equivalentes. Denotemos estos vértices por P_1 y P_2 (Ver Figura 1.8)

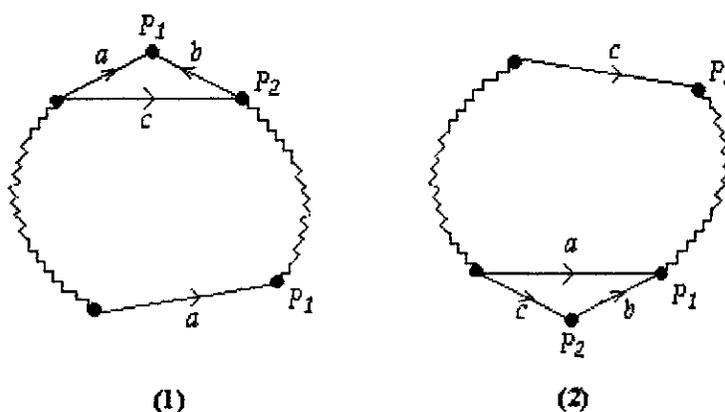


Figura 1.8

Dado que P_1 y P_2 no son equivalentes, los lados a y b no pueden estar identificados. Cortando a lo largo de c en la Figura 1.8 (1) y pegando los dos lados designados por a , resulta un nuevo polígono con un vértice menos en la clase de equivalencia de P_1 y uno más en la de P_2 (Ver Figura 1.8 (2)).

Realizando de nuevo el segundo paso, podemos reducir el número de vértices de la clase de equivalencia de P_1 , para así realizar el primer paso. De esta forma se va alternando el segundo y primer paso hasta que la clase de equivalencia de P_1 sea totalmente eliminada. Y si aún quedan mas de una clase de equivalencia de vértices, se repite el proceso para reducir su número. Finalmente se obtiene un polígono con todos los vértices identificados a uno solo.

Tercer paso.

En este paso se transforma la superficie de tal forma que todo par de lados de segunda especie sean adyacentes.

Supongamos que se tiene un par de lados de segunda especie que no sean adyacentes como lo ilustra la Figura 1.9

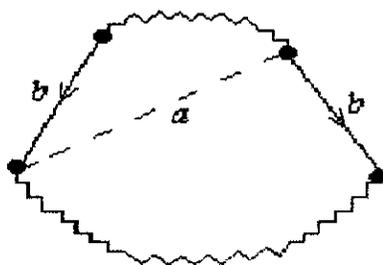


Figura 1.9

Cortando a lo largo de a e identificando a lo largo de b en la Figura 1.10 se obtienen dos lados que son adyacentes (Ver Figura 1.10).

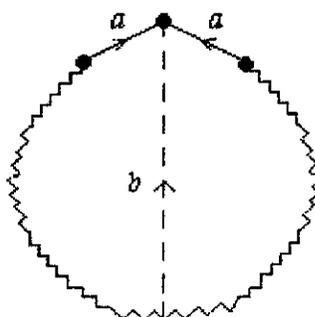


Figura 1.10

Se continua este proceso hasta que todos los pares de lados de segunda especie sean adyacentes. Si no hay pares de primera especie se habrá terminado el proceso ya que el símbolo del polígono será de la forma $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$, y por tanto la superficie es la suma conexa de n planos proyectivos.

Supóngase por el contrario que en este punto de la reducción existen por lo menos un par de lados de primera especie la cual se denotará con la letra c . Luego se puede afirmar que existe por lo menos otro par de lados de primera especie tal que estos dos pares se separan uno del otro, esto es, al recorrer el borde del polígono los lados de estos dos pares aparecen alternativamente. Por tanto, el símbolo será de la forma $c \dots c \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$ donde los puntos indican otras letras posibles.

Supongamos que los lados c no están separados por ningún otro par de lados de primera especie. Luego el polígono se asemeja al de la Figura 1.11, donde D y E designan sendas sucesiones de lados. Ningún lado de D está identificado con un lado de E . Lo cual contradice el hecho que los vértices inicial y final de cada uno de los lados c han de estar identificados, por el segundo paso.

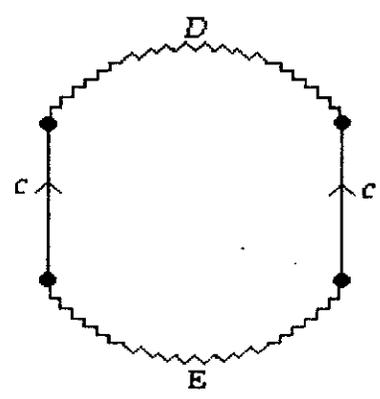


Figura 1.11

Cuarto paso.

Supongamos que se tienen dos pares de primera especie que se separan el uno al otro como se ilustra en la Figura 1.12. Veremos que se puede transformar el polígono de tal forma que los cuatro lados sean consecutivos a lo largo del perímetro del polígono.

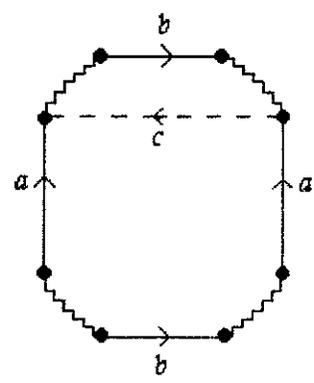


Figura 1.12

Cortando a lo largo de c e identificando a lo largo de b obtenemos la siguiente Figura:

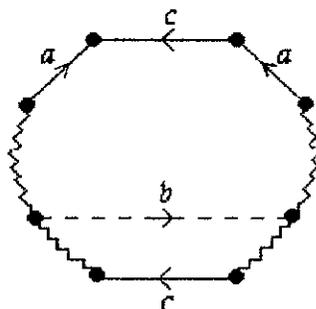


Figura 1.13

Cortando ahora a lo largo de d e identificando a lo largo de a se obtiene la Figura 1.14.

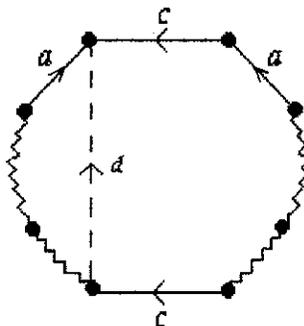


Figura 1.15

Se continúa este proceso hasta que todos los pares de primera especie estén en grupos adyacentes de cuatro lados tal como el $c d c^{-1} d^{-1}$ de la Figura 1.15.

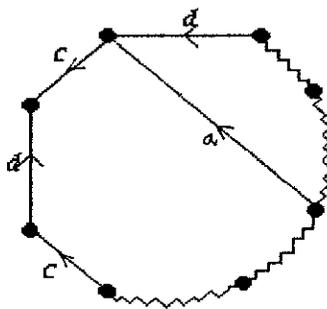


Figura 1.15

Si no hay pares de segunda especie, tenemos el resultado buscado ya que en dicho caso, el símbolo sería de la forma

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

Y la superficie es la suma conexa de n toros.

Así pues, se ha mostrado cómo cada una de las superficies compactas puede obtenerse como espacio cociente de un polígono con las aristas identificadas a pares. Por ejemplo, en la Figura 1.8 (b) y (c) observamos que el toro puede obtenerse de varias maneras.

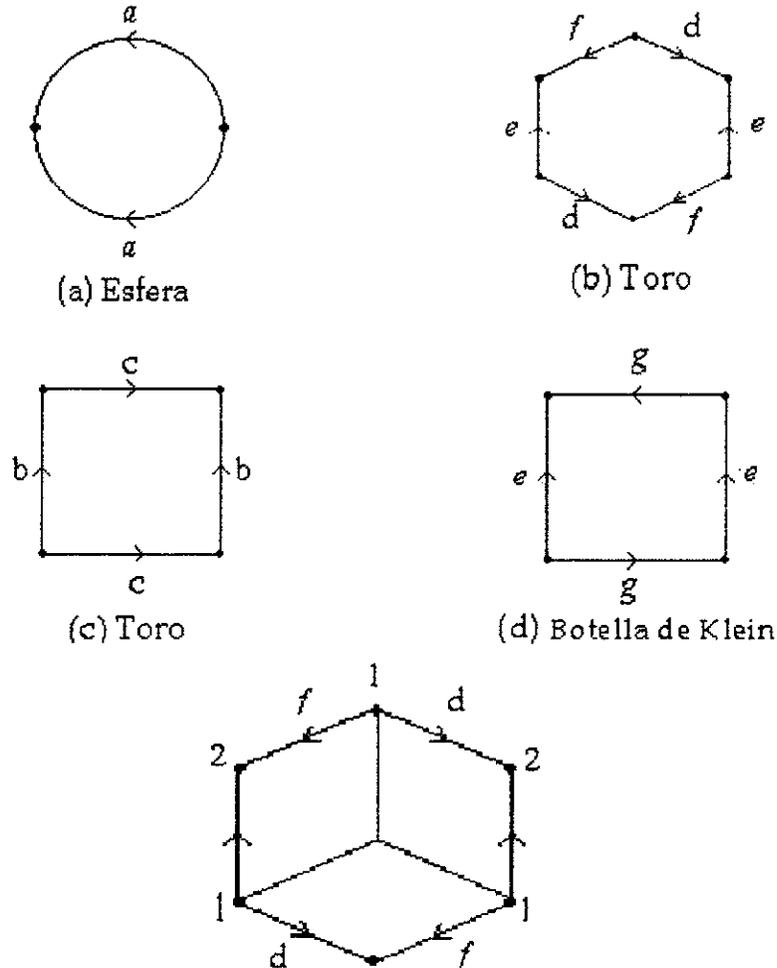


Figura 1.8

Obsérvese que si se tiene un número determinado de polígonos con un número total de lados par, y si sus lados se identifican por parejas, se obtiene una superficie cuyas componentes conexas son cerradas. La última gráfica de la Figura 1.8 ilustra otra forma de obtener un toro la cual consiste en identificar convenientemente los lados de tres cuadrilátero y al identificar los 12 vértices originales se convierten en sólo tres.

Consideraremos conveniente indicar simbólicamente cómo se lleva a cabo la identificación, mediante un diagrama como el de la Figura 1.8. Los lados que se identifican están indicados con la misma letra del alfabeto, y las identificaciones deben hacerse de forma que las direcciones indicadas por las flechas coincidan, esta construcción será descrita con más precisión en el Capítulo 2.

Capítulo 2.

Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías.

En el capítulo anterior vimos que un toro puede ser obtenido identificando de manera conveniente los lados de tres cuadriláteros y que al hacer la identificación los 12 vértices originales se convierten en 3. En el presente capítulo se considerará la construcción del toro representada en la última gráfica de la Figura 1.3 desde un punto de vista diferente y se estudiará el teorema de Levantamiento de Trayectorias y de Homotopías.

2.1. CONSTRUCCIÓN DEL TORO A PARTIR DE LA ESFERA.

Para empezar esta construcción, tomaremos una esfera S^2 y tres puntos diferentes en S^2 : x_1, x_2, x_3 . Sean a_j ($j = 1, 2$) trayectorias disjuntas en la esfera tales que a_j tenga punto inicial x_j y punto final x_{j+1} . Obtenemos una "línea quebrada" Q con vértices en los puntos dados. Cortemos ahora la esfera a lo largo de Q . En este sentido se dice que Q es el "complejo de fractura".

Luego se obtiene un espacio S homeomorfo a un cuadrilátero (Ver Capítulo 1), cuya frontera es la duplicación de todos los puntos del complejo de fractura Q excepto sus extremos x_1 y x_3 .

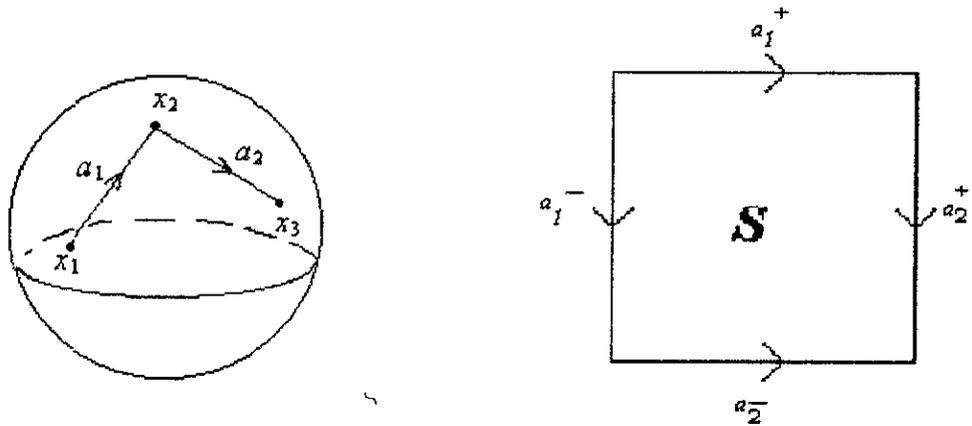


Figura 2.1.

En la Figura 2.1 se puede observar el cuadrilátero S , donde las flechas de los tramos indican el sentido original del corte. Como los tramos a_j aparecen duplicados en S , denotamos con a_j^+ (resp. a_j^-) al tramo que, al ser recorrido en el sentido de la flecha de corte, el interior del cuadrilátero S se encuentra al lado derecho (resp. al lado izquierdo). Para $j: 1, 2, 3$ obtenemos las siguientes réplicas S_1, S_2 y S_3 (Ver Figura 2.2)

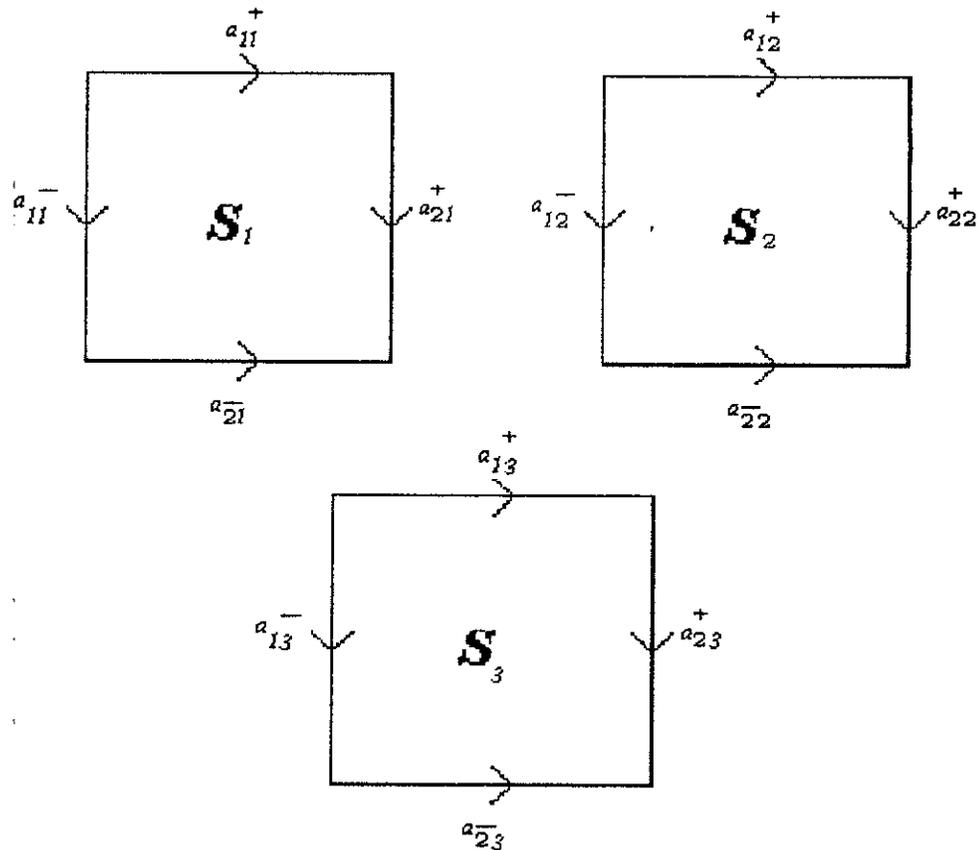


Figura 2.2.

Siguiendo la siguiente regla de pegamiento:

$$\begin{aligned} a_{11}^+ &\cong a_{12}^- \\ a_{12}^+ &\cong a_{13}^- \\ a_{13}^+ &\cong a_{11}^- \end{aligned} \quad (2.1)$$

Obtenemos la siguiente figura:

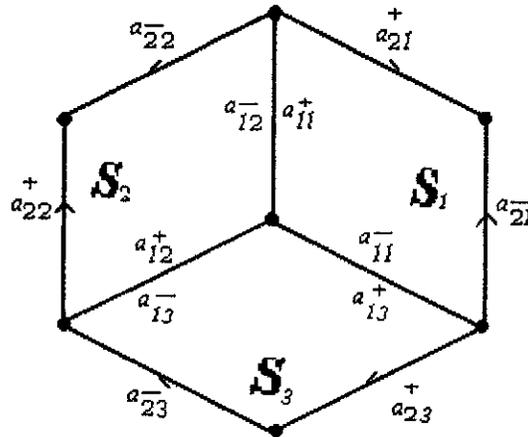


Figura 2.3

Y siguiendo la regla de pegamiento siguiente, obtenemos el toro.

$$\begin{aligned} a_{21}^+ &\cong a_{23}^- \\ a_{22}^+ &\cong a_{21}^- \\ a_{23}^+ &\cong a_{22}^- \end{aligned} \quad (2.2)$$

Identificamos primero a_{21}^+ y a_{23}^- , para así obtener:

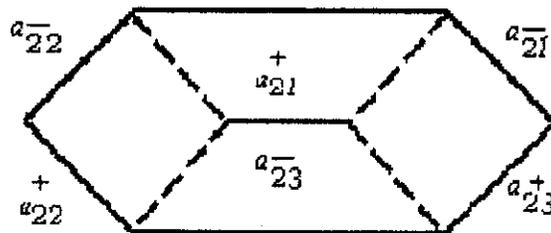


Figura 2.4

Se debe identificar ahora a_{22}^- con a_{23}^+ y a_{22}^+ con a_{21}^- para obtener el toro deseado. Procedamos a "torcer" la figura geométrica obtenida anteriormente y así:

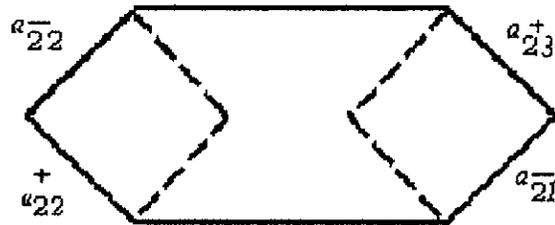


Figura 2.5

Finalmente, obtenemos el toro buscado:

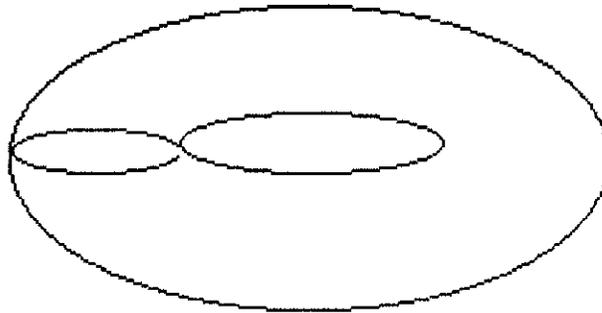


Figura 2.6

2.2. CUBIERTAS

Se dará primero una breve explicación del concepto de Espacio Cubierta, luego el concepto de cubierta y por último se aplicará toda esta teoría en un ejemplo el cual es puramente constructivo.

2.2.1. ESPACIO CUBIERTA

La teoría de espacios cubierta está estrechamente relacionada con el estudio del grupo fundamental (Ver Apéndice).

Definición 2.2.1.

Sea X un espacio topológico. Un **espacio cubierta** de X es un par formado por un espacio \tilde{X} y una aplicación continua $f: \tilde{X} \longrightarrow X$ de manera que verifique la siguiente condición: Todo punto $x \in X$ tiene una vecindad arco - conexa U tal que cada arco - componente de $f^{-1}(U)$ se aplica por f topológicamente sobre U (en particular se supone que $f^{-1}(U)$ no es vacío).

La función f se denomina una **cubierta** sobre X . De igual forma se puede decir que \tilde{X} es una cubierta de X y todo entorno que satisfaga la condición que se acaba de enunciar se llama **entorno elemental**.

En otras palabras, si para todo $x \in X$, una vecindad suficientemente pequeña de x se repite en el espacio \tilde{X} tantas veces como el cardinal de la preimagen de x , decimos que \tilde{X} es una cubierta de X .

Ejemplo 2.2.1

Definamos $f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ por

$$f(t) = (\text{sen } t, \text{cos } t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces el par (\mathbb{R}, f) es un espacio cubierta de la circunferencia unidad S^1 . Todo subintervalo abierto del círculo S^1 puede servir como entorno elemental.

Definición 2.2.4.

Decimos que ε es un **número de Lebesgue** de un recubrimiento de un espacio métrico X , si todo subconjunto de X de diámetro $< \varepsilon$ está contenido en algún miembro del recubrimiento.

Teorema 2.2.1.

Sea X un espacio métrico compacto. Para todo recubrimiento abierto de X existe un número de Lebesgue.

Demostración.

Sea $U = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto de X y supongamos que U no tiene número de Lebesgue. Luego para cada entero positivo n existe un subconjunto B_n tal que $0 < d(B_n) < 1/n$ y $B_n \not\subset U_i$ para todo $U_i \in U$.

Para cada n , escojamos un punto $b_n \in B_n$. Dado que U es compacto, la sucesión $\{b_1, b_2, \dots\}$ contiene una subsucesión $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \dots\}$ que converge a un punto $p \in U$. Dado que $p \in U$, entonces p pertenece a un conjunto abierto U_p del recubrimiento U . Luego existe una esfera abierta $S(p, \varepsilon)$ tal que $p \in S(p, \varepsilon) \subset U_p$. Y como $\{b_{i_n}\}$ converge a p , entonces existe un entero positivo i_{n_0} tal que $d(p, b_{i_{n_0}}) < \varepsilon/n$, $b_{i_{n_0}} \in B_{i_{n_0}}$ y $d(B_{i_{n_0}}) < \varepsilon/2$.

Por la desigualdad triangular se obtiene $B_{i_{n_0}} \subset S(p, \varepsilon) \subset U_p$. Lo cual contradice el que $B_{i_{n_0}} \not\subset U_i$ para todo U_i del recubrimiento U . Por tanto, U posee un número de Lebesgue.

Ejemplo 2.2.2.

En la construcción del toro que se hizo a partir de la esfera en la Sección 2.1 consideremos la función cociente $f_r = q \circ h_r : S_r \longrightarrow S^2 = (S/\cong)$ ($r=1, 2, 3$) inducida por la composición del homeomorfismo natural entre $h_r : S_r \longrightarrow S$ con la función cociente $q : S \longrightarrow S^2$, donde $S^2 = (S/\cong)$, esto es, S^2 se ha obtenido por medio de la identificación de los lados correspondientes en S .

La explicación geométrica se puede observar en la Figura 2.7, donde T ha sido obtenido por medio de la identificación de las copias S_i ($i = 1, 2, 3$).

Recordemos que la función inversa $f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ se encuentra definida así:

$$f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{(x, y, z) : f(x, y, z) \in \{x_1, x_2, x_3\}\} \quad (*)$$

Con base en (*), podemos observar que la imagen inversa de f de los puntos $\{x_1, x_2, x_3\}$ en la esfera los correspondientes puntos $\{x_1, x_2, x_3\}$ en el toro después de haber hecho las identificaciones.

Se puede definir de forma natural una función donde $f: T \longrightarrow S^2$ donde $T = (\bigcup_{r=1}^3 S_r / \cong)$ y $f = \bigcup_{r=1}^3 (f_r / \cong)$, de tal forma que $f|_{T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})}$ sea una cubierta sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

Veamos que $f|_{T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})}$ es una cubierta sobre $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

$T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ y $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ son arco-conexos y localmente arco-conexos ya que para toda vecindad U de un punto en $T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ y en $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$, existe una vecindad arco-conexa de ese punto contenida en U . Esto es, todo par de puntos que tomemos en $T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ y $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ se pueden unir por un arco (Ver Definiciones 1.1.14 y 1.1.16).

$f: T \longrightarrow S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ es continua ya que para cada $\{x'_1, x'_2, x'_3\} \in S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ el conjunto $f^{-1}(\{x'_1, x'_2, x'_3\})$ es un subconjunto abierto de T . Ahora, por ser f continua y $T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})$ un subespacio de T , entonces la función $f|_{T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\})} : T - f^{-1}(\{x_1, x_2, x_3\}) \longrightarrow S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ es continua.

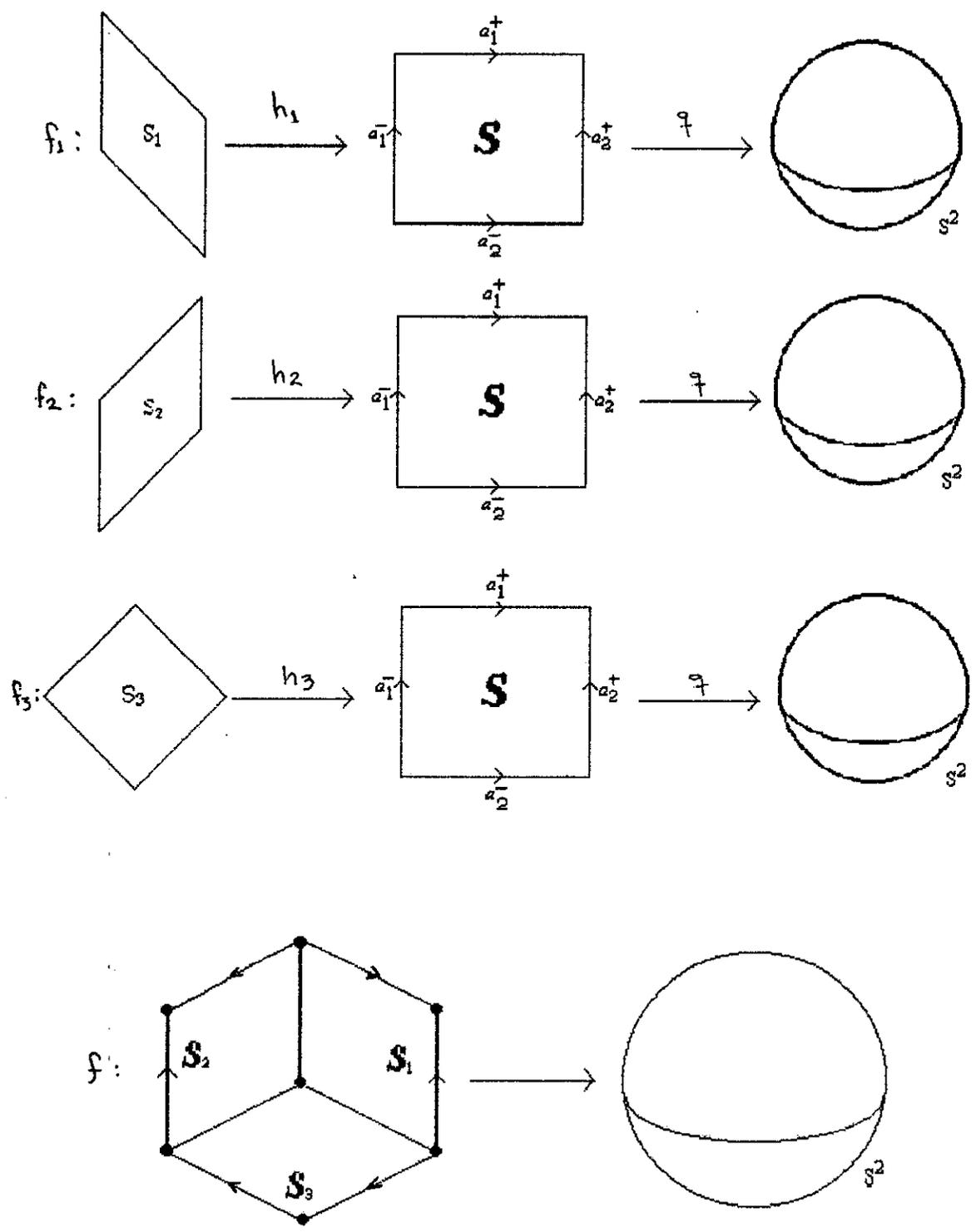


Figura 27

2.3. TEOREMA DE LEVANTAMIENTO DE TRAYECTORIAS Y DE HOMOTOPIAS

En esta sección se tratará de encontrar una relación entre la regla de pegamiento vista en la sección 2.1 y el grupo fundamental de $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$.

Definición 2.3.1.

Una **trayectoria** en un espacio topológico X es una aplicación continua de algún intervalo cerrado en X . Las imágenes de los extremos del intervalo se llaman **extremos** de la trayectoria, y se dice que una trayectoria une sus extremos. A uno de los extremos se le llama **origen** y al otro **punto final** de la trayectoria.

Definición 2.3.2.

Dos aplicaciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si y sólo si existe una aplicación continua $\varphi: X \times I \rightarrow Y, I = [0,1]$ tal que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}\varphi(x,0) &= f(x), \\ \varphi(x,1) &= g(x).\end{aligned}$$

Y decimos que φ es una **homotopía** de f a g . Si dos aplicaciones f y g son homotópicas, escribiremos $f \cong g$. Las clases de equivalencia se denominan clases de homotopía de aplicaciones. Desde el punto de vista geométrico, pongamos que $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Entonces, para todo $t \in I$,

$$\varphi_t: X \rightarrow Y$$

es una aplicación continua. Si consideramos el parámetro t como representante del tiempo, entonces, en el instante $t = 0$, tenemos la aplicación f , y al variar t , la aplicación φ_t varía con continuidad, de tal manera que en el instante $t = 1$ obtenemos la aplicación g . Por esta razón a una homotopía se le llama a menudo una deformación continua de una aplicación.

Definición 2.3.3.

El **producto de dos trayectorias** está sólo definido si el punto final de la primera trayectoria coincide con el origen de la segunda. Si se verifica esta condición, se

recorre la trayectoria producto recorriendo la primera trayectoria y a continuación la segunda, en el orden dado. En otras palabras, supongamos que

$$\begin{aligned} f: [a,b] &\longrightarrow X \\ g: [b,c] &\longrightarrow X \end{aligned}$$

son trayectorias tales que $f(b) = g(b)$ (suponemos que $a < b < c$). Entonces el producto $f \cdot g$ se define por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b] \\ g(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

que es una aplicación $[a,c] \longrightarrow X$.

Definición 2.3.4.

Si f y g son caminos en X tales que el extremo de f coincida con el origen de g , entonces $f \cdot g$ estará definido por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definición 2.3.5.

Sea X un espacio. Sea $*$ un punto de X . Una trayectoria en X que comienza y termina en $*$ es llamada un lazo con origen en $*$.

En otras palabras, una trayectoria se llama lazo, si sus extremos coinciden. El extremo común se dice que es base del lazo, o que se trata de un lazo con base en el extremo común.

Definición 2.3.6.

Dado $*$ en X , el conjunto de todos los lazos con base en $*$ es un grupo. Este grupo se llama el **grupo fundamental** o **grupo de Poincaré** de X en el punto base $*$, y se denota por $\pi_1(X, *)$.

El grupo fundamental de un espacio X se ha definido en este trabajo de tal forma que sus elementos son lazos en X que empiezan y terminan en un punto origen fijo $x_0 \in X$, pero se considera que ambos lazos determinan el mismo elemento del grupo fundamental si un lazo puede ser continuamente deformado al otro en el espacio X . (Todos los lazos que ocurren durante deformaciones pueden también empezar y terminar en x_0).

Teorema 2.3.1.

Sean $f: \tilde{X} \rightarrow X$ una cubierta, $x \in X$ y $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$. Si $\alpha: I \rightarrow X$, $I = [0, 1]$, es una trayectoria de X con origen en $\alpha(0) = x$, existe una única trayectoria $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ y tal que $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ (se dice que $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento de α con origen en \tilde{x}).

Demostración.

Supongamos que α está contenida en entorno elemental U . Luego si denotamos por W la arco - componente de $f^{-1}(U)$ que contiene a \tilde{x} entonces existiría una única trayectoria $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$ en W tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ y $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Por otra parte, α no siempre estará contenida en algún entorno elemental de U . Sin embargo, α puede ser expresada siempre como un producto finito de trayectorias mas pequeñas, donde cada una está de ellas está contenida en un entorno elemental para poder así aplicar el razonamiento del párrafo anterior a cada una de estas trayectorias.

Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento de X por entornos elementales luego $\{\alpha^{-1}(U_i)\}$ es un recubrimiento abierto de I . Por ser I un espacio métrico compacto, podemos hacer uso del Teorema 2.2.1. y decir entonces que existe un número de Lebesgue ε para el recubrimiento $\{\alpha^{-1}(U_i)\}$. Escojamos un entero n tal que $1/n < \varepsilon$ (Ver Definición 2.2.4.).

Dividiendo el intervalo I en los subintervalos: $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, ... , $[(n-1)/n, 1]$. Se puede observar que α aplica cada subintervalo en un entorno elemental de X . A partir de $[0, 1/n]$, se va definiendo $\tilde{\alpha}$ sobre cada uno de estos intervalos.

La unicidad de la trayectoria levantada es consecuencia del siguiente lema:

Lema 2.3.1.

Sea (\tilde{X}, f) un espacio cubierta de X , e Y un espacio conexo y localmente conexo. Dadas dos aplicaciones continuas $\alpha_0, \alpha_1 : Y \longrightarrow X$ tales que $f\alpha_0 = f\alpha_1$, el conjunto $\beta = \{y \in Y: \alpha_0(y) = \alpha_1(y)\}$ es vacío o es todo Y .

Demostración.

Dado que Y es conexo, basta probar que β es a la vez abierto y cerrado. Veamos primero que es cerrado. Sea y un punto de clausura de este conjunto y

$$x = f\alpha_0(y) = f\alpha_1(y).$$

Sea U un entorno elemental de x . Luego podemos encontrar por la Definición 2.2.1. un entorno conexo W de y tal que cada arco-componente de $f^{-1}(U)$ se aplica por f topológicamente sobre W . Ahora, como $f\alpha_0$ y $f\alpha_1$ son continuas y Y es localmente conexo, entonces existe unas vecindades que están contenidas en U , esto es, $f\alpha_0(W) \subset U$ y $f\alpha_1(W) \subset U$.

Sea V una componente de $f^{-1}(U)$. Luego como W corta a β y $\alpha_0(W)$ y $\alpha_1(W)$ son conexas, éstas deben estar contenidas en V . Por tanto, como f aplica topológicamente V sobre U , se tiene que $\alpha_0(y) = \alpha_1(y)$.

Veamos por medio del siguiente lema que si α' es otra trayectoria de X homótopa a α (homotopía relativa a los extremos), los levantamientos de α' y de α que comiencen en un mismo punto x son también homótopos.

Lema 2.3.2.

Sea (\tilde{X}, f) un espacio cubierta de X , y $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1 : I \longrightarrow X$ trayectorias en X con el mismo origen. Si $f\tilde{\alpha}_0 \sim f\tilde{\alpha}_1$, entonces $\tilde{\alpha}_0 \sim \tilde{\alpha}_1$; en particular $\tilde{\alpha}_0$ y α_1 tienen el mismo extremo.

Demostración.

Sea \tilde{x} el origen de $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$. Como por hipótesis $f\tilde{\alpha}_0$ y $f\tilde{\alpha}_1$ son homotópicas, entonces por la Definición 2.3.3, existe una aplicación $G : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} G(s, 0) &= f\tilde{\alpha}_0(s), \\ G(s, 1) &= f\tilde{\alpha}_1(s), \\ G(0, t) &= f\tilde{\alpha}_0(0) = f(\tilde{x}), \\ G(1, t) &= f\tilde{\alpha}_0(1). \end{aligned} \quad (*)$$

Dividiendo el intervalo I en los subintervalos: $[0 = s_0, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_{m-1}, s_m = 1]$ y $[0 = t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n = 1]$ de tal forma que G aplica cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en algún entorno elemental de X .

Como G aplica el rectángulo $[0, s_1] \times [0, t_1]$ en un entorno elemental del punto $f(x)$, podemos definir F sobre este rectángulo de tal forma que se cumpla (*). Usando el número de Lebesgue (Ver Definición 2.2.4), podemos encontrar números $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tales que F aplique cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en algún entorno elemental de X .

Veamos que existe una única aplicación $G: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $fG = F$ y $G(0, 0) = \tilde{x}$. Primero definimos G sobre el rectángulo $[0, s_1] \times [0, t_1]$ de manera que se verifiquen las propiedades requeridas. Esto se puede hacer, ya que F aplica este rectángulo en un entorno elemental del punto $f(\tilde{x})$.

Luego se puede generalizar la definición de G para los rectángulos $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_i]$, para $i = 2, 3, \dots, m$, de tal forma que dados dos rectángulos consecutivos, sus definiciones coincidan sobre su lado común.

Se ha definido así F sobre la banda $I \times [0, t_1]$ y así sucesivamente se podrá definir sobre $I \times [t_1, t_2], I \times [t_2, t_3]$, etc.

Por el Teorema 1 y el Lema 1, F es única y satisface las siguientes propiedades:

$$G(s, 0) = \tilde{\alpha}_0(s), \quad G(0, t) = \tilde{x},$$

$$G(s, 1) = \tilde{\alpha}_1(s) \text{ y } G \text{ aplica } \{1\} \times I \text{ en un solo punto } x_1 \text{ tal que}$$

$$f(x_1) = f\tilde{\alpha}_0(1) = f\tilde{\alpha}_1(1).$$

Luego F define una homotopía entre las trayectorias $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_1$. Por tanto, $\tilde{\alpha}_0 \sim \tilde{\alpha}_1$.

Corolario 2.3.1.

Si (\tilde{X}, f) es un espacio cubierto de X , entonces los conjuntos $f^{-1}(x)$ tienen el mismo cardinal, para todo $x \in X$. Dicho en otras palabras, el número de preimágenes de un punto cualquiera es constante para todo $x \in X$.

Demostración.

Sean $x_0, x_1 \in X$. Sean $\alpha: I \rightarrow X$ y $\tilde{\alpha}: I \rightarrow X$ trayectorias con origen en x_0 (resp. y_0) y punto final x_1 (resp. y_1). Se puede definir una aplicación $F: f^{-1}(x_0) \rightarrow f^{-1}(x_1)$ de tal forma que al tomar un punto $y_0 \in f^{-1}(x_0)$, y al levantar α a la trayectoria $\tilde{\alpha}$ sea tal que $f\tilde{\alpha} = \alpha$.

Como y_1 es el extremo de $\tilde{\alpha}$ entonces la aplicación $y_0 \rightarrow y_1$ es la aplicación deseada. De manera similar, se puede definir una aplicación $G: f^{-1}(x_1) \rightarrow f^{-1}(x_0)$ por medio de la trayectoria inversa $\tilde{\alpha}^{-1}$ definida por $\tilde{\alpha}^{-1}(t) = \tilde{\alpha}(1-t)$. Las aplicaciones F y G son inversas una de la otra, por tanto cada una es biyectiva.

A este cardinal común de los conjuntos $f^{-1}(x)$ se le denomina **grado de la cubierta** o **número de hojas** del espacio cubierta.

Dado un lazo cuyo origen o base es un punto $\ast \in X$ (Ver Definición 2.3.5), su levantamiento genera una permutación en $f^{-1}(\ast)$. Al deformar dos lazos homótopos, las propiedades algebraicas como lo es la permutación que se induce, no cambian. Un lazo y su clase de homotopía se representan de la misma forma.

Obsérvese que si $\alpha: I \rightarrow X$ es el lazo con origen en $\ast \in X$, y $\tilde{\alpha}: I \rightarrow X$ es el levantamiento de α con origen en $f^{-1}(\ast)$ (Ver Teorema 2.3.1) entonces su punto final también pertenecerá a $f^{-1}(\ast)$, lo cual nos indica que existe una función $p_\alpha: f^{-1}(\ast) \rightarrow f^{-1}(\ast)$, donde $p_\alpha(x)$ es el punto final del levantamiento que empieza en $x \in f^{-1}(\ast)$. Ya que α^{-1} es el lazo α recorrido en sentido contrario, podemos encontrar la inversa p_α^{-1} y decimos así que p_α^{-1} es una función biyectiva. Por tanto, p_α es una permutación.

α no tiene porqué ser un lazo. En efecto, dada una cubierta $f: \tilde{X} \rightarrow X$, $\tilde{X} = T$ y $X = S^2$ y un lazo $\alpha: I \rightarrow X$, $I = [0,1]$ basado en \ast , podemos encontrar tres levantamientos $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ y $\tilde{\alpha}_3$ en el toro T de α que no son necesariamente lazos.

Si $\alpha\beta$ es el producto de los lazos α y β (Ver Definición 2.3.3) entonces $p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta = p_\beta \circ p_\alpha$. En efecto, el lazo $\alpha\beta$ es el lazo formado por el producto o composición del lazo de α y β de la siguiente forma:

El lazo α comienza en x , hace un recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj y dándole la vuelta una sola vez a x , llega nuevamente a x . De aquí parte de manera análoga hasta el lazo β y hace un recorrido de manera similar hasta llegar finalmente al punto x (ver Figura 2.8).

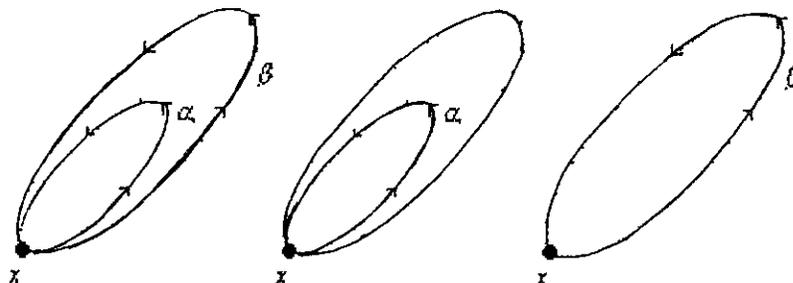


Figura 2.8

Observamos así que siendo $p_{\alpha\beta}(x)$ el punto de llegada del levantamiento $\alpha\beta$ que comienza en x , éste está compuesto por el producto de $p_\alpha(x)$ y $p_\beta(x)$, esto es, los puntos de llegada de los levantamientos α y β que comienzan en x . Por tanto, $p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta$

Como se puede ver en la definición A.2.1. del Apéndice, la función p es la representación del grupo fundamental $\pi_1(X, *)$ en el grupo simétrico $S_{f^{-1}(*)}$ de las permutaciones de $f^{-1}(*)$, la cual aplica un elemento del grupo fundamental α en su permutación p_α . En este trabajo, a la representación p se le llamará **monodromía de la cubierta**.

La representación p es de gran importancia cuando se construyen superficies ya que estas se pueden obtener por identificaciones convenientes de los bordes de polígonos.

Consideremos dos lazos α_1 y α_2 cuyo origen es el punto $*$ $\in S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$, y donde α_1 es el lazo que partiendo de $*$, rodea a x_1 en sentido contrario a las manecillas del reloj e intersecta a a_1 una única vez y α_2 es el lazo que partiendo de $*$, rodea a x_1 y a x_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj e intersecta a a_2 una única vez.

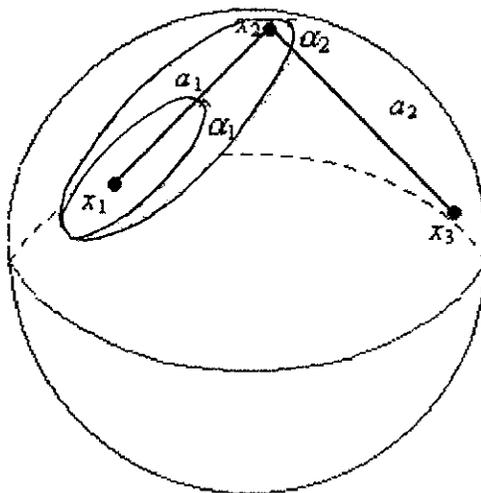


Figura 2.9

Teniendo en cuenta las identificaciones (2.1) y (2.2) donde (2.1) representa al lado a_1 y (2.2) representa al lado a_2 (Sección 2.1), observamos que el comportamiento de los segundos subíndices en (2.1) están en correspondencia con la permutación (123) y los de (2.2) con los de (132). Lo anterior nos permite definir la monodromía de la cubierta del Ejemplo 2.2.2 por la representación $p: \pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}, *) \longrightarrow S_3$ tal que $p\alpha_1 = (123)$ y $p\alpha_2 = (132)$

En general, se puede obtener una regla de identificación así:

Si p_{α_j} es la permutación asignada al lazo α_j , el lado a^+_{ji} perteneciente a la copia S_i se pegará al lado $a^-_{jp_{\alpha_j}(i)}$ de la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$.

donde $\alpha \longrightarrow p_\alpha$ es una representación del grupo fundamental de $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ en el grupo simétrico S_3

Identificando los lados de S_r ($r: 1, 2, 3$) de S se obtiene una superficie cerrada, orientable y conexa.

Se resumirá en la siguiente tabla las representaciones asociadas a la esfera y al toro. (Ver la obtención de esta tabla en el Anexo).

REPRESENTACION	SUPERFICIE
$\alpha_1 \rightarrow (1)(2)(3); \alpha_2 \rightarrow (123);$	Esfera 1
$\alpha_1 \rightarrow (123) ; \alpha_2 \rightarrow (12)(3);$	Esfera 2
$\alpha_1 \rightarrow (123) ; \alpha_2 \rightarrow (132);$	Toro

Capítulo 3.

Generalización de la construcción y Variedades de dimensión 3.

El objetivo de este capítulo es mostrar la generalización hecha por Montesinos (Ver [Mo1] y [Mo2]) de la construcción vista en el Capítulo 2. En la primera sección definiremos el concepto de Característica de Euler ya que es de fundamental importancia en la construcción, y se citarán algunos ejemplos de cómo ésta opera en superficies, para así seguir con la generalización de la construcción en la segunda sección. Y por último se trabajará la construcción en 3 - variedades.

3.1. CARACTERÍSTICA DE EULER DE UNA SUPERFICIE

Definición 3.1.1.

Sea X una superficie con una triangulación $\{T_1, \dots, T_n\}$. Sean

$$\begin{aligned} v &= \text{número total de vértices de } X, \\ l &= \text{número total de lados de } X, \\ t &= \text{número total de triángulos (en este caso } t = n) \end{aligned}$$

Entonces

$$\chi(X) = v - l + t$$

se llama *característica de Euler* de X .

Ejemplo 3.1.1.

La Figura 3.1. sugiere métodos uniformes de triangulación de la esfera (a) y del toro (b), con un número de triángulos tan grande como queramos.

Mediante estas triangulaciones, se puede comprobar que las características de Euler de una esfera y un toro son 2 y 0 respectivamente. También se comprobará que las características de Euler no dependen del número de líneas horizontales y verticales de los diagramas correspondientes a la esfera y al toro (Ver [Ma]).

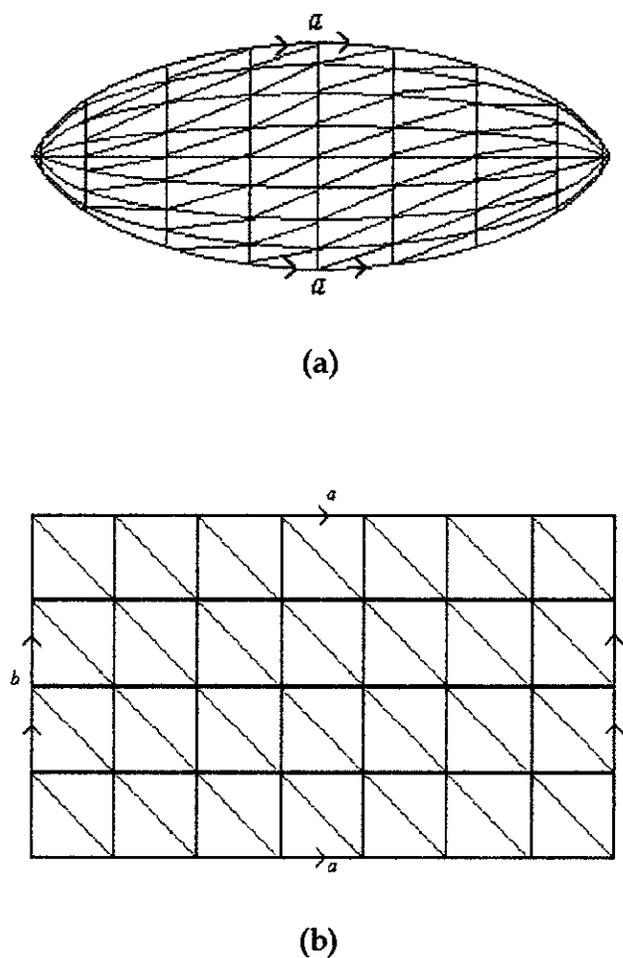


Figura 3.1.

Proposición 3.1.1.

Sean S_1 y S_2 superficies compactas. La característica de Euler de S_1 , S_2 y de su suma conexa $S_1 \# S_2$ están relacionadas por la fórmula

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

Demostración.

Dado que S_1 y S_2 son triangulables. Su suma conexa se puede formar quitando el interior de un triángulo de cada una de ellas e identificando los lados y vértices de los bordes de los triángulos suprimidos. La fórmula se obtiene entonces, contando vértices, lados y triángulos antes y después de formar la suma conexa.

Teorema 3.1.1.

Sean S_1 y S_2 superficies compactas. Entonces S_1 y S_2 son homeomorfas si y sólo si sus características de Euler coinciden y las dos superficies son ambas orientables o ambas no orientables.

Demostración.

Sea S_1 una superficie conexa compacta, con borde o sin él. Supongamos que se tiene una triangulación de S_1 y que al quitar el interior de un triángulo se genera una nueva superficie con borde S' . Luego el borde de S' tiene una componente más que el de S_1 y

$$\chi(S') = \chi(S_1) - 1;$$

esto es, la característica de Euler se reduce a 1.

Luego, si tenemos una superficie sin borde S_2 y se quitan los interiores de n triángulos dos a dos disjuntos, se obtiene una superficie con borde y

$$\chi(S_1) = \chi(S_2) - n.$$

Obtenemos así todas las superficies con borde con n componentes en el borde, haciendo uso del Teorema 1.4.1. Y observamos que la característica de Euler de S_1 está determinada por la de S_2 y la de S_2 por la de S_1 . Se deduce además que S_1 y S_2 son ambas orientables o ambas no orientables.

Mediante el anterior teorema y una obvia inducción, a partir de los resultados conocidos como la esfera, el toro y el plano proyectivo, obtenemos los siguientes valores para la característica de Euler de las diferentes superficies compactas (Ver [Ma] y [Arm]):

<i>Superficie</i>	<i>Característica de Euler</i>
Esfera	2
Suma conexa de n toros	$2 - 2n$
Suma conexa de n planos proyectivos	$2 - n$

Obsérvese que la característica de una superficie orientable es siempre par, mientras que la de una superficie no orientable puede ser par o impar.

3.2. GENERALIZACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN

Para la construcción general, tomaremos k puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ en S^2 , los cuales describen trayectorias disjuntas $a_j, j = 1, \dots, k - 1$ y forman un complejo de fractura Q cuyo origen y punto final son x_j y x_{j+1} respectivamente.

Si cortamos la esfera a lo largo de Q , obtenemos un espacio homeomorfo a un polígono S con $2(k - 1)$ lados. En efecto, en el Capítulo 2 cuando cortamos la esfera a lo largo del complejo de fractura Q formado por los tres puntos en x_1, x_2, x_3 en S^2 se obtuvo un espacio homeomorfo a un polígono de $n = 4$ lados y cuya frontera es la duplicación de todos los puntos de Q excepto sus extremos x_1 y x_3 . Luego para $k = 3$ puntos obtuvimos un espacio homeomorfo a un polígono con $2(k-1) = 2(3-1) = 2(2) = 4$ lados (Fig. 2.1)

De igual forma, para 3 puntos se obtienen 2 lados en el complejo de fractura, y al cortar a lo largo del complejo, se duplican. Luego obtenemos un polígono de $2 \cdot 2$ lados. Por consiguiente, dados k puntos, se obtendrán $(k-1)$ lados sobre el complejo de fractura y al cortar a lo largo del complejo se duplican. Luego, obtenemos $2(k-1)$ lados.

De igual manera, se tiene la generalización de la función cociente $f_r: S_r \longrightarrow (S/\cong)$, donde ahora f_r es una copia de S para todo $r = 1, 2, \dots, n$. (Ver Figura 3.2 (b)).

Sea $\ast \in S^2$ el origen de un lazo α_j ($j = 1, \dots, k-1$), el cual rodea los puntos x_1, \dots, x_j en sentido contrario a las manecillas del reloj e intersecta a Q en a_j (Ver Figura 3.2 (a)). De la misma manera, los lazos α_j generan libremente al grupo fundamental $\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_k\})$. En efecto, cada lazo α_j corta a a_j una sola vez (Ver Definición A.1.9.)

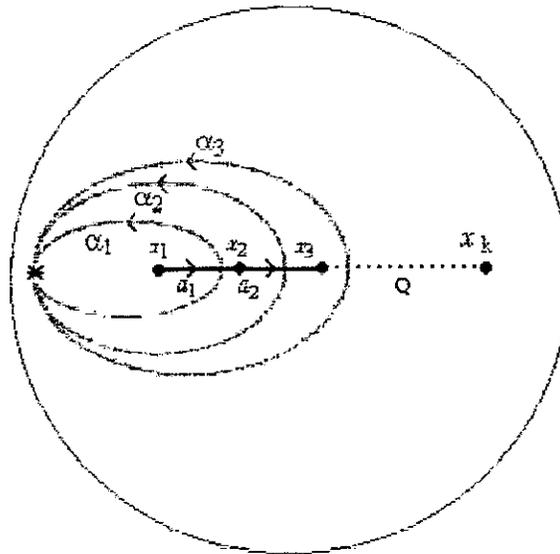


Figura 3.2 (a)

Siguiendo la generalización, una representación $\alpha \longrightarrow p_\alpha$ del grupo $\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_k\})$ en el grupo simétrico S_n de las permutaciones de n elementos permite identificar los lados de S_r siguiendo la siguiente regla de identificación:

*El lado a^*_{ji} situado en la copia S_i se pega con el lado $\bar{a}_{j\rho\omega}$ situado en la copia $S_{\rho\omega}$ ($j = 1, \dots, k-1; i = 1, \dots, n$).*

Para que la superficie obtenida sea cerrada y orientable, estos pegamientos se hacen de tal forma que identifiquen puntos que eran correspondientes en S antes del corte (Ver Figura 3.2(b))

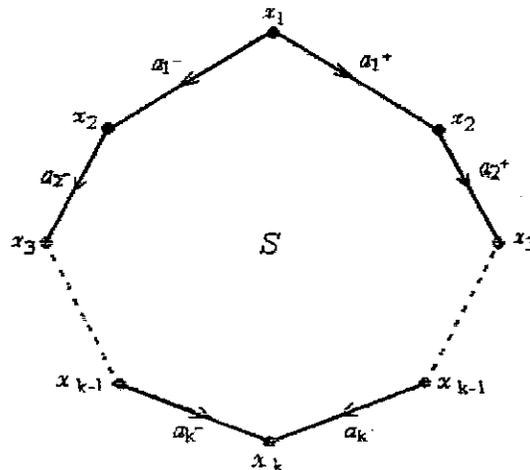


Figura 3.2 (b)

Sea $f: \tilde{X} \rightarrow S^2$ la función definida por $f(\tilde{x}) = f_i(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in S_i$, donde \tilde{X} es el espacio que se obtiene al hacer las identificaciones de las copias S_i y S^2 la esfera.

Como los lazos α_j ($j = 1, \dots, k-1$) intersectan a Q una sola vez (Ver Figura 2.9), entonces la monodromía de la cubierta,

$$f|_{(\tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\}))} : \tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\}) \longrightarrow S^2 - \{x_1, \dots, x_k\}$$

está dada por la representación $\alpha \rightarrow p_\alpha$, donde la función restricción $f|_{\tilde{X} - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_k\})}$, es la cubierta sobre $S^2 - \{x_1, \dots, x_k\}$ de grado n .

Si levantamos α_j , para que el levantamiento tenga su punto inicial en la copia S_i , el punto final deberá estar en la copia $S_{p\alpha_j(i)}$ y como este levantamiento corta un único lado una sola vez (ya que α_j corta a Q una sola vez), esto nos dice que estas dos copias deben estar pegadas a lo largo de ese lado.

Definición 3.2.1.

Una función $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$ es una **cubierta ramificada de grado n** si existe $K \subset Y$ tal que $f|_{f^{-1}(Y-K)}$ es una cubierta de grado n y $(Y-K)$ es denso en Y .

El conjunto K se llama el **conjunto de ramificación** de f . Luego la función $f: X \rightarrow S^2$ es una cubierta ramificada de grado n con conjunto de ramificación $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Dado que \tilde{X} es cerrada y orientable, se tiene que \tilde{X} es triangulable, luego por la Definición 3.1.1. podemos calcular su característica de Euler $\chi(\tilde{X})$.

Sean c , l y v el número de caras, lados y vértices de \tilde{X} . En esta poligonalización, c es igual al número n de copias de S , l es igual $n(k-1)$ (k es el número de puntos seleccionados en la esfera S^2 antes del corte) y v será la suma de los cardinales de las preimágenes de los puntos x_j ($j = 1, \dots, k$).

Sea β_j ($j = 1, \dots, k$) un lazo en $\pi_1(S^2 - \{x_1, \dots, x_k\})$ con el mismo comportamiento de α_j visto anteriormente y si se induce la permutación $p_{\beta_j} = c_{1j} c_{2j} \dots c_{ij}$ asociada a β_j , donde los c_{ij} 's son ciclos disjuntos no triviales (Ver Teorema A.2.2. del Apéndice), entonces el cardinal de $f^{-1}(x_j)$ es $r + (n - \sum_{i=1}^r L(c_{ij}))$, donde $L(c_{ij})$ es la longitud del ciclo c_{ij} , ($i = 1, \dots, r$) y r es el número de ciclos en la permutación. Finalmente, de la definición de los lazos α_j se tiene que

$$\beta_1 = \alpha_1 \cdot \beta_j = \alpha_j \alpha^{-1}_{j-1} \quad (j = 2, \dots, k-1)$$

$$\text{y } \beta_k = \alpha^{-1}_{k-1}.$$

Ejemplo 3.2.1.

Calculemos la característica de Euler del ejemplo dado por la regla de pegamiento del Capítulo 2, Figura 2.3.

En el ejemplo, tenemos que el número de caras es 3, el número de lados es 6, esto es, $n = 3$, $l = 6$ y $k = 3$. Calculemos el número de vértices. Tomemos $i = 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Para } j = 1, & \quad p_{\beta 1} = (123). \\ \text{Para } j = 2, & \quad p_{\beta 2} = (132) (132) = (123) \\ \text{Para } j = 3, & \quad p_{\beta 3} = (123). \end{aligned}$$

Observamos así que $r_j = 1$ ya que se trata de un solo ciclo de longitud $L(c_{1j}) = 3$, para $j = 1, 2, 3$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^3 [r_j + n - \sum_{i=1}^r L(c_{1j})] \\ &= (\sum_{j=1}^3 r_j) + 3(3) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^r L(c_{1j}) \\ &= 3 + 9 - 9 \\ &= 3. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \chi(X) &= v - l + c \\ &= 3 - 6 + 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Verificamos así que la característica de Euler es 0, lo cual confirma que la superficie que se obtiene es un toro (Ver Ejemplo 3.1.1)

3.3. VARIETADES DE DIMENSION 3.

Definición 3.3.1.

Un **nudo** es un subconjunto de S^3 homeomorfo a S^1 . Un nudo se puede imaginar como una "cuerda" infinitamente fina contenida en S^3 con extremos identificados.

En particular, un nudo es una curva cerrada simple en el 3 - espacio euclídeo. Es una abstracción matemática de nuestra idea intuitiva de un nudo hecho con un trozo de cuerda; los dos extremos de la cuerda deben considerarse empalmados, de manera que el nudo no pueda deshacerse.

Para la construcción de variedades de dimensión 3 son primordiales los siguientes elementos: la esfera S^3 , un nudo K contenido en S^3 , un complejo de fractura Q con el cual se pueda elegir un conjunto de generadores del grupo fundamental $\pi_1(S^3 - K)$ de K de tal forma que cada generador corte a Q una sola vez, y una representación de este grupo fundamental en el grupo de las permutaciones. Para obtener un complejo de fractura para un nudo dado K , se debe seguir el siguiente método diseñado por Montesinos:

Supongamos que $K \subset R^3$ (dado que $K \subset S^3$ y $S^3 \sim R^3 \cup \{\infty\}$, aunque K puede también estar contenido en $R^3 \cup \{\infty\}$, ver Definición 1.1.19). Sea P el plano xy y sean U_i bolas cerradas con centro en x_i ($i = 1, \dots, r$). Se deformará el nudo K de tal forma que quede contenido en la frontera de U_i y que en dicha frontera no se intercepte el nudo con él mismo. Además que los puntos de cruce x_i correspondan a la proyección del nudo K sobre el plano P .

Sean las regiones del nudo sobre la frontera de U_i , semicírculos máximos en esta esfera, los cuales al proyectarse sobre el plano P generan dos líneas perpendiculares entre sí. Sea P_i el punto máximo del semicírculo máximo con tercera coordenada positiva y Q_i el punto mínimo del semicírculo máximo con tercera coordenada negativa, tales que se proyecten sobre x_i . Sea d_i el segmento que une a P_i con Q_i (Ver Figuras 3.3 y 3.4 (a)).

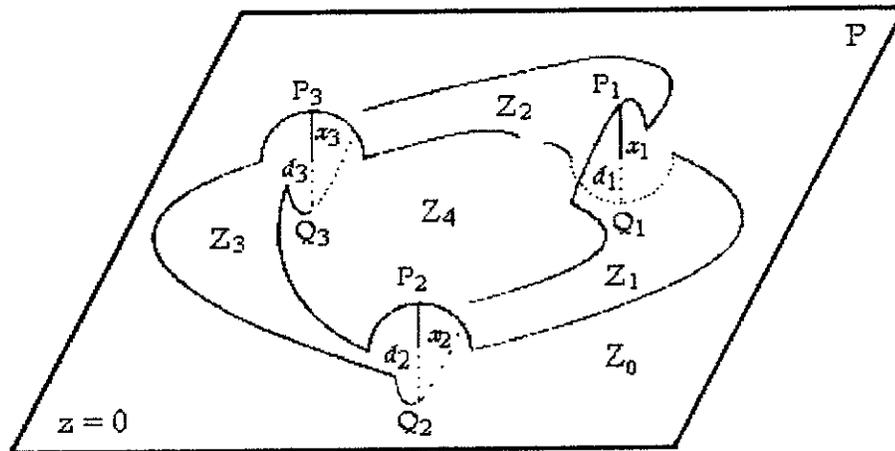


Figura 3.3

Se denotarán con el término "celdas" las componentes del complejo de fractura Q que necesitamos.

- Los puntos P_i y Q_i descritos anteriormente son las 0 - celdas de Q . Observamos que en total son seis: P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 y Q_3 (Ver Figura 3.3).
- Los segmentos d_i (sin sus extremos) y los segmentos del nudo que se obtienen al quitar las 0 - celdas, son las 1 - celdas de Q . Observamos en la Figura 3.3, que hay nueve en total: seis son los segmentos del nudo y tres son los segmentos d_i .

Se denotará Z_j ($j = 0, \dots, r + 1$), las $r + 2$ regiones que resultan de realizar la diferencia entre el plano P y la unión de $(U_i \cap P)$ con K , donde Z_0 es la región no acotada.

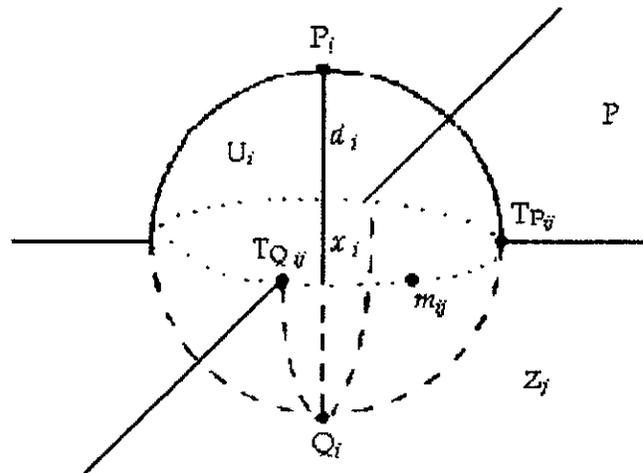


Figura 3.4 (a)

Denotemos con A_j la 2 - celda para cada Z_j ($j \neq 0$), las cuales serán construidas en los párrafos siguientes paso a paso. Decimos que x_i es vecino a Z_j si x_i es tal que la vecindad U_i limita con Z_j . Por ejemplo, para $i = 1$, el punto x_i es vecino a Z_0, Z_1, Z_2 y a Z_4 . En efecto, la vecindad limita con Z_0, Z_1, Z_2 y a Z_4 .

Sean T_{P_j} y T_{Q_j} los puntos de K y de la frontera de Z_j (en P) más cercanos (sobre K) a P_i y Q_i respectivamente y sea m_j al punto medio del arco cerrado $T_{Q_j} T_{P_j}$. (Ver Figura 3.4 (b)).

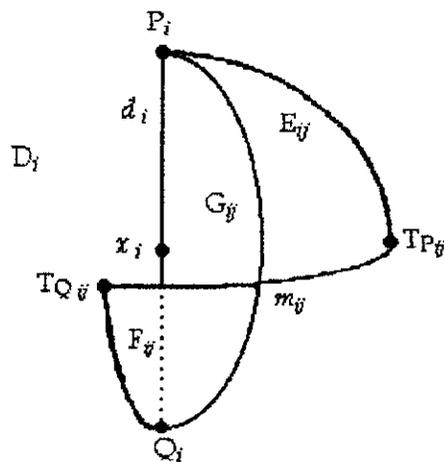


Figura 3.4(b)

Sean E_{ij} y F_{ij} las partes de la frontera de U_i con puntos extremos $T_{P_{ij}}, P_i$ y m_{ij} y $T_{Q_{ij}}, Q_i$ y m_{ij} respectivamente y G_{ij} el semicírculo formado por los puntos P_i, Q_i y m_{ij} . (Ver Figura 3.4 (b)). La superficie cerrada $D_i = E_{ij} \cup F_{ij} \cup G_{ij}$ es homeomorfa a un disco cerrado el cual podemos visualizar en la Figura 3.4 (b).

En la Figura 3.4 (b), tenemos 3 triángulos, 5 vértices y 7 lados. Luego, $t = 3, v = 5$ y $l = 7$ y utilizando la Definición 3.1.1 (de la Característica de Euler), tenemos que $\chi(D_i) = 1$. Por otra parte, al unir tres puntos cualesquiera en un disco dado M , tenemos 3 vértices, 3 lados y 3 triángulos. Luego, $\chi(M) = 1$. Por tanto, D_i es homeomorfo al disco M .

De la misma forma, para cada uno de los x_i vecinos a Z_j . Denotemos por A'_j la región que se obtiene al pegarle a Z_j todos sus discos vecinos D_i . Luego la 2 - celda A_j es $A'_j - U_i (d_i \cup T_{P_{ij}} P_i \cup Q_i T_{Q_{ij}})$.

Análogamente para cada una de las regiones Z_j acotadas, para obtener finalmente que las 2 - celdas del complejo Q son A_1, A_2, \dots, A_{r+1} (la 2 - celda A_1 se ilustra en la Figura 3.4 (c)).

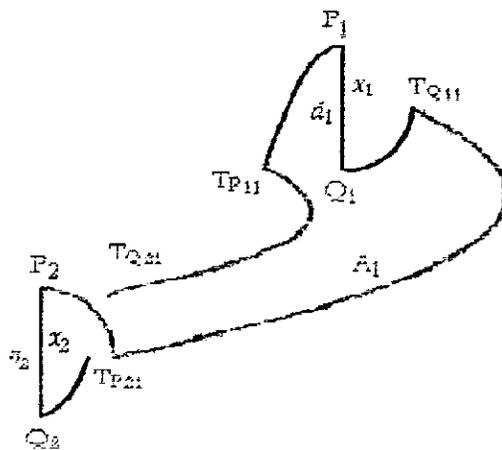


Figura 3.4 (c)

Buscaremos ahora el conjunto de generadores del grupo fundamental $\pi_1(S^3 - K)$ del nudo, de tal forma que cada generador sea libre, esto es, que intersekte a Q una sola vez. Elijamos otros generadores de $\pi_1(S^3 - K)$. Consideremos el nudo K como se definió al principio de la construcción. Sea $*$ el punto origen en Z_0 . Definamos el lazo α_j con origen en $*$, como aquel que avanza bajo el plano P y

dentro del complemento de U_j hasta atravesar P en un único punto de Z_j y que retorna al punto por "encima" del plano P (Ver Figura 3.5).

Como α_0 es el lazo de la región Z_0 , donde no existe construcción alguna, entonces es homotópicamente nulo, esto es, α_0 se contrae en el mismo origen.

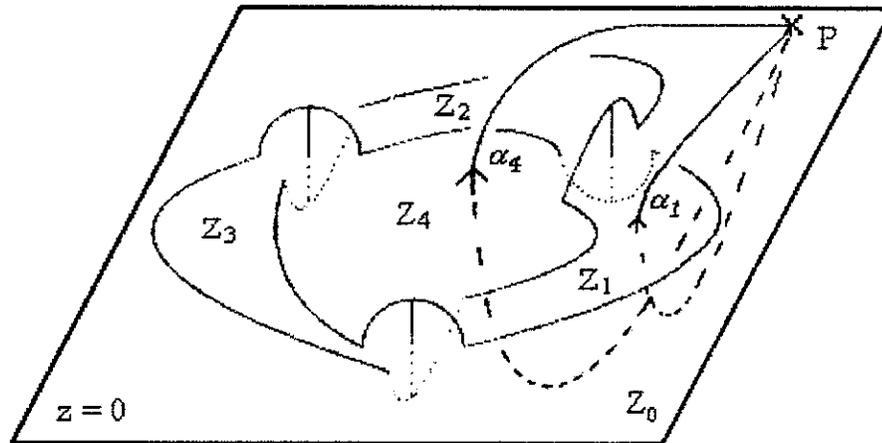


Figura 3.5.

Para la construcción de una vecindad de dimensión 3, tenemos que cortar S^3 a lo largo de Q , obteniendo así un "poliedro" S cuya frontera está representada por cada 2-celda A_j ($j = 1, \dots, r+1$), repetida dos veces, tal y como sucedía con las trayectorias en la sección 3.2 (Ver Figura 3.2 (b)). Como las 2-celdas A_j aparecen duplicadas en S , denotamos con A_j^+ y A_j^- las celdas donde la región Z_j pueden ser aproximadas con puntos de tercera coordenada positiva y por puntos de tercera coordenada negativa (respectivamente) después del corte.

Dada una representación $\alpha \longrightarrow p_\alpha$ del grupo fundamental de $S^3 - K$ en el grupo simétrico S_n de las permutaciones de n elementos, se define una regla de pegamiento así:

La 2-celda A_j^+ de la copia S_i se pegará a la 2-celda A_j^+ de la copia $S_{p_\alpha(i)}$.

Al aplicar esta regla a los lados de las copias S_r ($r = 1, \dots, n$) del poliedro S , se obtiene una 3-variedad la cual es una cubierta ramificada sobre S^3 con conjunto de ramificación el nudo K .

Apéndice.

Algunos conceptos de la Teoría de Grupos

A.1. GRUPO

Definición A.1.1.

Se dice que un conjunto no vacío G es un **grupo** si en él hay definida una operación \cdot tal que:

- (a) $a, b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$. Se dice entonces que G es cerrado respecto a \cdot .
- (b) Dados $a, b, c \in G$, se tiene que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (c) Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (e se llama elemento identidad o unidad de G).
- (d) Para todo $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$. Este elemento b se llama inverso de a en G y se describe como a^{-1} .

Definición A.1.2.

Se dice que un grupo G es un **grupo finito** si consta de un número finito de elementos. El número de elementos de G se llama **orden** de G .

Definición A.1.3.

Sean G y G' dos grupos entonces una aplicación $\varphi: G \longrightarrow G'$ es un **homomorfismo** si $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in G$.

Definición A.1.4.

El homomorfismo $\varphi: G \longrightarrow G'$ se llama **monomorfismo** si φ es inyectiva. Si φ es biyectiva se llama **isomorfismo**.

Teorema A.1.1.

Sean $(G, *)$ y $(G', *')$ dos grupos y sea $f: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de G en G' .

(a) Si e es el idéntico en G y e' es el idéntico en G' , entonces $f(e) = e'$.

(b) Si $a \in G$ entonces $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \in G'$.

Demostración.

(a) Sea $x = f(e)$. Entonces $x *' x = f(e) *' f(e) = f(e * e) = f(e) = x$. Luego $x *' x = x$.

Al multiplicar ambos miembros por x^{-1} , se obtiene $x = x *' x *' x^{-1} = x *' x^{-1} = e'$. Por tanto $f(e) = e'$.

(b) Por la propiedad (d) de la Definición A.1.1., dado $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e$. Luego por la parte (a) de este teorema, $f(a * a^{-1}) = f(e) = e'$ o bien $f(a) *' f(a^{-1}) = e'$, por ser f un homomorfismo. Análogamente $f(a^{-1}) *' f(a) = f(a) = e'$. Luego $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

Definición A.1.5.

Si S es un subconjunto de un grupo G , se dice que S **genera** G si todo elemento de G puede escribirse como producto de potencias positivas y negativas de S . Por ejemplo, si $G = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n = e\}$ es un grupo cíclico de orden n , entonces el conjunto $S = \{x\}$ genera G .

Ejemplo A.1.1.

Si el conjunto S genera el grupo G , ciertos productos de elementos de S pueden dar el elemento neutro de G . Por ejemplo,

(a) Si $x \in S$, entonces $x x^{-1} = e$.

(b) Si G es un grupo cíclico de orden n generado por $\{x\}$, entonces $x^n = e$.

Un producto de elementos de S que sea igual al elemento neutro se llama a menudo una **relación** entre los elementos del conjunto generador S .

Definición A.1.6.

Un subconjunto X de un grupo G es llamado un **conjunto libre de generadores** para G si todo $g \in G - \{e\}$ puede ser expresado en una única forma como un producto

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \quad (*)$$

donde x_i pertenece a X , x_i nunca es igual a x_{i+1} , y cada n_i es un entero no nulo. Decimos el **conjunto de generadores libres** porque por la unicidad de (*) no existe relaciones entre sus elementos.

Definición A.1.7.

Si G tiene un grupo libre de generadores, entonces es llamado un **grupo libre**.

Ejemplo A.1.2.

Si G es un grupo cíclico infinito formado por todas las potencias positivas y negativas de un elemento x , entonces G es un grupo libre sobre el conjunto $S = \{x\}$.

A. 2. GRUPO DE PERMUTACIONES**Definición A.2.1.**

Sea A un conjunto. Una **permutación** de S es una función biyectiva de S en S . Denotamos por $A(S)$ el conjunto de todas las permutaciones de S .

Definición A.2.2.

Si S es un conjunto que tiene n elementos entonces $A(S)$, el conjunto de todas las aplicaciones inyectivas de S sobre sí mismo con la composición de funciones, se denomina **grupo simétrico** de grado n , y se denota con S_n . Los elementos de S_n se llaman permutaciones. Dicho de otra forma, un grupo finito se puede representar por un grupo de permutaciones.

Definición A.2.3.

Si $\sigma, \tau \in A(S)$, el producto de σ por τ se define por :

$$(\sigma\tau)(s) = \sigma(\tau(s)) \text{ para todo } s \in S.$$

Definición A.2.4.

Si G es un grupo arbitrario, un homomorfismo de G en el grupo simétrico S_n se denomina una **representación de G por permutaciones**.

Los elementos de S_n se representan de la siguiente forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(n) \end{pmatrix}$$

Así, la multiplicación de dos elementos θ y $\sigma \in S_5$ sería:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con esta definición. La permutación identidad se puede expresar por:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} = (1) (2) (3) \dots (n)$$

Definición A.2.5.

Si $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, la permutación en S_n que envía i_1 en i_2 , i_2 en i_3 , ..., i_{r-1} en i_r , i_r en i_1 y deja los demás elementos de $\{1, \dots, n\}$ fijos se llama un **ciclo de longitud r** o un **r -ciclo** y se simboliza por $(i_1 i_2 i_3 \dots i_{r-1} i_r)$. De acuerdo con esta definición, los símbolos $(i_1 i_2 \dots i_r)$, $(i_r i_1 i_2 \dots i_{r-1})$, $(i_{r-1} i_r i_1 i_2 \dots i_{r-2})$, etc., representan la misma permutación.

Definición A.2.6.

Un conjunto de ciclos es **disjunto** si ellos no poseen elementos comunes.

Ejemplo A.2.1.

$\{(23), (145), (67)\}$ es un ciclo disjunto.
 $\{(145), (2461)\}$ no es un ciclo disjunto.

Teorema A.2.1.

Toda $\alpha \in S_n$ es un producto de ciclos disjuntos.

Demostración.

Considérese los elementos: $1, \alpha(1), \alpha^2(1), \alpha^3(1), \dots$; donde los exponentes representan la multiplicación de permutaciones. Se puede observar que en esta lista surgirán una que otra repetición.

Supóngase que $\alpha^r(1)$ es el primer elemento en repetirse; luego se debe tener que $\alpha^r(1) = 1$, ya que si existiera $0 < s < r$ tal que $\alpha^r(1) = \alpha^s(1)$ entonces $\alpha^{r-s}(1) = 1$, lo que contradice la escogencia de r .

Considérese el ciclo

$$\beta_1 = (1, \alpha(1), \alpha^2(1), \dots, \alpha^{r-1}(1))$$

y obsérvese que α y β_1 coinciden sobre estos r elementos.

Sea i el primer elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$ que no aparece en β_1 ; si se considera $i, \alpha(i), \alpha^2(i), \dots$ llegaremos a un segundo ciclo β_2 el cual es disjunto de β_1 , ya que si tuvieran un elemento j en común, los dos ciclos podrían obtenerse mediante $j, \alpha(j), \dots$ llegando a coincidir todos sus elementos.

Continuamos ahora, tomando un elemento que no aparezca ni en β_1 ni en β_2 y construimos un tercer ciclo β_3 , etc. Puesto que los elementos involucrados están en $\{1, 2, \dots, n\}$ este proceso termina en algún ciclo β_m . El producto $\beta_m \beta_{m-1} \dots \beta_3 \beta_2 \beta_1$ y la permutación α coinciden sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ es decir

$$\alpha = \beta_m \beta_{m-1} \dots \beta_3 \beta_2 \beta_1.$$

CONCLUSIONES

- 1) Se puede generalizar el concepto de superficie en S por medio del concepto de variedad. La 2 - variedad es llamada superficie y la variedad más sencilla de todas es la recta real. Una n -variedad es un espacio de Hausdorff, tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n - dimensional

$$U^n = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$$

- 2) Para la construcción de 2 y 3 - variedades, se necesitan los siguientes elementos: una esfera S^2 (respectivamente S^3) un subconjunto K de puntos de S^2 (resp. S^3), un complejo de fractura Q que permita escoger un sistema de generadores del grupo fundamental $\pi_1(S^2 - K)$ (resp. $\pi_1(S^3 - K)$) de K de tal forma que cada generador corte a Q una única vez, y una representación de este grupo en el grupo simétrico de las permutaciones.
- 3) El método constructivo diseñado por Montesinos permite calcular el grupo fundamental de la variedad construida y también identificarla siguiendo ciertas reglas de pegamiento. Así:
- Si la variedad es de dimensión 2, la regla es la siguiente:
“ Si p_{α_j} es la permutación asignada al lazo α_j , el lado $a^+_{j_i}$ que pertenece a la copia S_i se pegará al lado $a^-_{j p_{\alpha_j}(i)}$ de la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$ “
 - Y si la variedad es de dimensión 3, la siguiente regla:
“ La 2 - celda $A^+_{j_i}$ de la copia S_i se pegará a la 2 - celda $A^+_{j p_{\alpha_j}(i)}$ de la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$ “.

BIBLIOGRAFIA

- [Arm] Armstrong, M. *"Basic Topology"*, Springer, Berlin, 1987.
- [Ma] Massey, W. S. *"Introducción a la Topología Algebraica"*, Editorial Reverté, 1967.
- [Mo1] Montesinos, J. M. *"Sobre la conjetura de Poincaré y los Recubridores Ramificados"*, Tesis Universidad Complutense, Publicaciones de la Facultad de Ciencias, Madrid, 1972.
- [Mo2] Montesinos, J. M. *"3 - Manifolds as 3 - fold branched covers of S^3 "*, Quart. J. Math. Oxford 27 N° 2, 1976.
- [Mu] Munkres, J. *"Topology a First Course"*, Prentice-Hall, 1975.
- [Nu] Nuñez, V. *"Universal Links for $S^2 \times S^1$ "*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 182, N° 1, 1998.
<http://nyjm.albany.edu:8000/Pacj/1998/182-1-4.pdf>.
- [Su] Suarez, M.F. *"Números y Estructuras"*, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, 1982.

- [Te] Tejada, D.M. "*Construcción de 3 - Variedades y Cubiertas Ramificadas*", *Lecturas Matemáticas*, Vol. 18. , 1997.
- [Th] Thurston, W. T. "*Universal Links*", Preprint.

ANEXO

Dados los lazos α_1 y α_2 cuyo origen es el punto $\ast \in S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$, definidos de la misma forma como se hizo en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

La representación $\alpha_1 \longrightarrow (1)(2)(3)$, $\alpha_2 \longrightarrow (123)$ del grupo fundamental de $S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}$ en el grupo simétrico S_3 define la siguiente regla de pegamiento:

Si p_{α_j} es la permutación asignada al lazo α_j , el lado a^+_{ji} perteneciente a la copia S_i se pegará al lado $a^-_{jp_{\alpha_j}(i)}$ de la copia $S_{p_{\alpha_j}(i)}$.

vista en el Capítulo 2.

ESFERA 1.

Dados los lazos α_j , $j=1,2$. Tenemos los siguiente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \longrightarrow (1)(2)(3) & \alpha_2 \longrightarrow (123) \\ 1 \longrightarrow 1 & 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 2 & 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 3 & 3 \longrightarrow 1 \end{array}$$

Esto es, al lazo asociado α_1 le corresponde la permutación $(1)(2)(3)$ y al lazo asociado α_2 le corresponde la permutación (123) .

Esto define una representación $p: \pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}, \ast) \longrightarrow S_3$ tal que $p_{\alpha_1} = (1)(2)(3)$ y $p_{\alpha_2} = (123)$. Luego,

$$\begin{array}{ll} p_{\alpha_1(1)} = 1 & p_{\alpha_2(1)} = 2 \\ p_{\alpha_1(2)} = 2 & p_{\alpha_2(2)} = 3 \\ p_{\alpha_1(3)} = 3 & p_{\alpha_2(3)} = 1 \end{array}$$

Sea $j = 1$. Luego $p_{\alpha 1}$ es la permutación asignada al lazo α_1 y el lado $a_{1i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha 1}(i)} \in S_{p_{\alpha 1}(i)}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{11}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha 1}(1)} = \alpha_{11} \in S_1$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{12}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha 1}(2)} = \alpha_{12} \in S_2$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{13}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha 1}(3)} = \alpha_{13} \in S_3$.

Sea $j = 2$. Luego $p_{\alpha 2}$ es la permutación asignada al lazo α_2 y el lado $a_{2i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha 2}(i)} \in S_{p_{\alpha 2}(i)}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{21}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha 2}(1)} = \alpha_{22} \in S_1$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{22}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha 2}(2)} = \alpha_{23} \in S_2$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{23}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha 2}(3)} = \alpha_{21} \in S_3$.

Obtenemos así la siguiente tabla que presenta los pegamientos para obtener la Esfera 1:

	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$a_{11}^+ \in S_1 \cong a_{11}^- \in S_1$	$a_{21}^+ \in S_1 \cong a_{21}^- \in S_2$
$i = 2$	$a_{12}^+ \in S_2 \cong a_{12}^- \in S_2$	$a_{22}^+ \in S_2 \cong a_{23}^- \in S_3$
$i = 3$	$a_{13}^+ \in S_3 \cong a_{13}^- \in S_3$	$a_{23}^+ \in S_3 \cong a_{21}^- \in S_1$

ESFERA 2

Dados los lazos $\alpha_j, j=1,2$. Tenemos los siguiente:

$$\alpha_1 \longrightarrow (123)$$

$$1 \longrightarrow 2$$

$$2 \longrightarrow 3$$

$$3 \longrightarrow 1$$

$$\alpha_2 \longrightarrow (12)(3)$$

$$1 \longrightarrow 2$$

$$2 \longrightarrow 1$$

$$3 \longrightarrow 3$$

Esto es, al lazo asociado α_1 le corresponde la permutación (123) y al lazo asociado α_2 le corresponde la permutación (12)(3).

Esto define una representación $p: \pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}, \ast) \longrightarrow S_3$ tal que $p_{\alpha_1} = (123)$ y $p_{\alpha_2} = (12)(3)$

$$\begin{array}{ll} p_{\alpha_1(1)} = 2 & p_{\alpha_2(1)} = 2 \\ p_{\alpha_1(2)} = 3 & p_{\alpha_2(2)} = 1 \\ p_{\alpha_1(3)} = 1 & p_{\alpha_2(3)} = 3 \end{array}$$

Para $j = 1$. Luego p_{α_1} es la permutación asignada al lazo α_1 y el lado $a_{1i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1}(i)} \in S_{p_{\alpha_1}(i)}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{11}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1}(1)} = \alpha_{12} \in S_2$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{12}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1}(2)} = \alpha_{13} \in S_3$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{13}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1}(3)} = \alpha_{11} \in S_1$.

Para $j = 2$. Luego p_{α_2} es la permutación asignada al lazo α_2 y el lado $a_{2i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2}(i)} \in S_{p_{\alpha_2}(i)}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{21}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2}(1)} = \alpha_{22} \in S_2$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{22}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2}(2)} = \alpha_{21} \in S_1$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{23}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2}(3)} = \alpha_{23} \in S_3$.

Obtenemos así la siguiente tabla que presenta los pegamientos para obtener la Esfera 2:

	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$a_{11}^+ \in S_1 \cong a_{12}^- \in S_2$	$a_{21}^+ \in S_1 \cong a_{22}^- \in S_2$
$i = 2$	$a_{12}^+ \in S_2 \cong a_{13}^- \in S_3$	$a_{22}^+ \in S_2 \cong a_{21}^- \in S_1$
$i = 3$	$a_{13}^+ \in S_3 \cong a_{11}^- \in S_1$	$a_{23}^+ \in S_3 \cong a_{23}^- \in S_3$

TORO

Dados los lazos α_j , $j=1,2$. Tenemos los siguiente:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \longrightarrow (123) & \alpha_2 \longrightarrow (132) \\ \\ \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 3 \\ 3 \longrightarrow 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \end{array}$$

Esto es, al lazo asociado α_1 le corresponde la permutación (123) y al lazo asociado α_2 le corresponde la permutación (132).

Esto define una representación $p: \pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}, *) \longrightarrow S_3$ tal que $p_{\alpha_1} = (123)$ y $p_{\alpha_2} = (132)$

$$\begin{array}{ll} p_{\alpha_1(1)} = 2 & p_{\alpha_2(1)} = 3 \\ p_{\alpha_1(2)} = 3 & p_{\alpha_2(2)} = 1 \\ p_{\alpha_1(3)} = 1 & p_{\alpha_2(3)} = 2 \end{array}$$

Sea $j = 1$. Luego p_{α_1} es la permutación asignada al lazo α_1 y el lado $a_{1i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1(i)}} \in S_{p_{\alpha_1(i)}}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{11}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1(1)}} = \alpha_{12} \in S_2$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{12}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1(2)}} = \alpha_{13} \in S_3$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{13}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{1 p_{\alpha_1(3)}} = \alpha_{11} \in S_1$.

Sea $j = 2$. Luego p_{α_2} es la permutación asignada al lazo α_2 y el lado $a_{2i}^+ \in S_i$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2(i)}} \in S_{p_{\alpha_2(i)}}$. Por tanto,

Si $i = 1$ entonces el lado $a_{21}^+ \in S_1$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2(1)}} = \alpha_{23} \in S_3$.

Si $i = 2$ entonces el lado $a_{22}^+ \in S_2$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2(2)}} = \alpha_{21} \in S_1$.

Si $i = 3$ entonces el lado $a_{23}^+ \in S_3$ se pegará al lado $\alpha_{2 p_{\alpha_2(3)}} = \alpha_{22} \in S_2$.

Obtenemos así la siguiente tabla que presenta los pegamientos para obtener el toro:

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$a_{11}^+ \in S_1 \cong a_{12}^- \in S_2$	$a_{21}^+ \in S_1 \cong a_{23}^- \in S_3$
$i=2$	$a_{12}^+ \in S_2 \cong a_{13}^- \in S_3$	$a_{22}^+ \in S_2 \cong a_{21}^- \in S_1$
$i=3$	$a_{13}^+ \in S_3 \cong a_{11}^- \in S_1$	$a_{23}^+ \in S_3 \cong a_{22}^- \in S_2$