Juan Cárdenas Guerra - Germán Buelvas Medina

MATEMATÍCAS PREVIAS AL CÁLCULO

MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO

Autores

Juan Cárdenas Guerra

Germán Buelvas Medina

MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO

Autores: Juan Cárdenas Guerra – Germán Buelvas Medina
ISBN: 978-959-5439-46-7

Rector:	Édgar Parra Chacón
Vicerrector Académico:	Federico Gallego Vásquez
Vicerrector de Investigaciones:	Leonardo Puerta Llerena
Vicerrector Administrativo:	Gaspar Palacio Mendoza
Secretaría General:	Katia Joly Villarreal

515 / C266
Cárdenas Guerra, Juan
Matemáticas previas al cálculo / Juan Cárdenas Guerra y Germán Buelvas Medina; Freddy Badrán Padauí, editor -- Cartagena de Indias: Editorial Universitaria c2022
311 páginas; -- x -- centímetros; Ilustraciones
Incluye referencias bibliográficas (p. 311)
ISBN: 978-959-5439-46-7
1. Ecuaciones funcionales – Enseñanza 2. Cálculo – Enseñanza 3. Análisis numéricos – Enseñanza 4. Cálculo numérico – Modelos matemáticos 5. Análisis funcional – Enseñanza I. Badrán Padauí, Freddy, editor
CEP: Universidad de Cartagena. Centro de Recursos para el Aprendizaje y la Investigación. Biblioteca José Fernández de Madrid.

Editor: Freddy Badrán Padauí
Jefe de Sección de Publicaciones
Universidad de Cartagena
Diseño de Portada: Jorge L. Barrios A.

Primera Edición: Cartagena, 2022.
Diseño de cubierta: Jorge L. Barrios A.
Corrección de estilo: Freddy Badrán Padauí.

Editorial Universitaria, Centro calle de la Universidad, Cra. 6, Nº ,100 – 36 Claustro de San Agustín primer piso, Cartagena de Indias, 2022.

Impreso en Colombia - Printed in Colombia/ Se imprimieron 200 ejemplares

Índice general

Prefacio

Históricamente, la enseñanza y el aprendizaje en el área de las matemáticas han sido un proceso difícil de desarrollar pero importante dentro del ámbito académico y, posiblemente por esta razón, se ha utilizado como filtro para acceder a la educación superior.

Con el desarrollo de nuevos sistemas de educación, los países afrontan el reto de mejorar la estructura del currículo en matemáticas y de esta forma poder ofrecer más oportunidades para todos los estudiantes. Uno de estos retos es el curso de precálculo, dado que desempeña un rol importante ya que se convierte en el puente entre las matemáticas de bachillerato y la universitaria.

No es discutible que en los inicios de las carreras universitarias se presente el mayor riesgo de deserción, debido a que en esta etapa los estudiantes confrontan sus expectativas con la realidad de sus conocimientos académicos, haciéndose notorio la existencia de un desfase entre la preparación del estudiante en la educación media para los recién egresados y los requerimientos de la educación superior para los recién admitidos.

La intención de este libro es darle al estudiante en su inicio de carrera universitaria más opciones y oportunidades para un mejor desempeño en los cursos de cálculo, para esto se tuvo en cuenta teorías que permiten integrar toda la temática básica que cimienta los conocimientos necesarios para cursos en matemáticas posteriores, apoyados en el uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas; es así, como se elaboró material didáctico, con guías de trabajo en el software WxMaxima y ayuda audiovisual (videos) para el apoyo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes basado en la teoría APOS, el texto contiene:

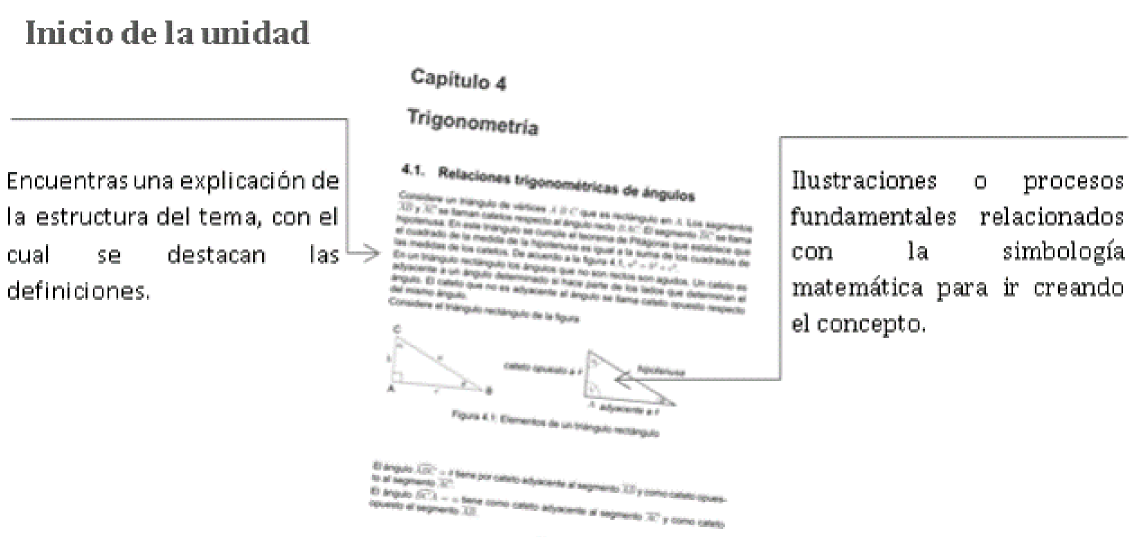
1. 24 guías de trabajo con software WxMaxima, estas deberán ser trabajadas en salas de informática con el fin de desarrollar las dos primeras etapas de la Teoría APOS, Acción-Proceso. Aquí el estudiante mirará el “comportamiento” de lo que se pretende estudiar para posteriormente en el aula desarrollar la segunda parte de Objeto-Esquema, donde se va a conceptualizar matemáticamente, basado en la abstracción reflexiva y el aprendizaje cooperativo.

2. 47 vídeos de apoyo audiovisual, donde los estudiantes tienen otra herramienta para repasar los temas, estudiar ejemplos y ejercicios que le permitan afianzar los conocimientos después de la clase o para adelantar lecturas.

Se recomienda al docente que debe estar familiarizado con la teoría anteriormente mencionada para un uso más provechoso de este libro cuyo propósito es el tratamiento moderno de los temas intermedios entre el álgebra básica y el cálculo, conocidos generalmente como precálculo o matemáticas previas al cálculo.

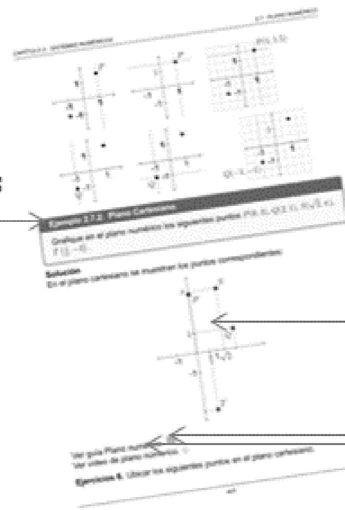
Estructura del libro

Es una propuesta pedagógica enfocada en teoría APOS, en un curso de precálculo basado en conceptos básicos con ayudas audiovisuales y uso de software como lo es WxMaxima, creado con el ánimo de incentivar el uso de las tecnologías en el área de las matemáticas. El libro comprende seis unidades que comprende la siguiente estructura:



Desarrollo de contenidos

Cajas o recuadros con las definiciones. Propiedades, ejemplo o teoremas.



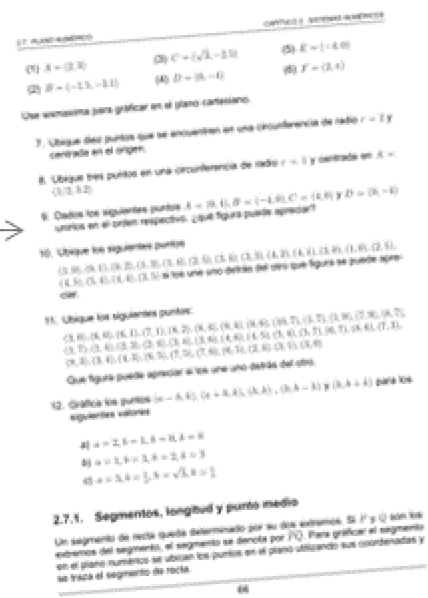
Gráficos ilustrativos.

Enlace para ir a Wx-maxima, donde encontrara instrucciones para ejecutar y ejercicios para resolver.

Enlace para ir al video que complementara la explicación del ejemplo.

Además encuentras

Al final de la sesión encontrara una serie de ejercicios.



Capítulo 1

Sistemas de numeración

1.1. Numerales y sistemas de numeración

Las matemáticas aparecieron originariamente como parte de la vida diaria del hombre y si es válido el principio biológico de la supervivencia de los mejores adaptados, entonces la raza humana probablemente no deja de estar relacionada con el desarrollo de conceptos matemáticos por el hombre. De las nociones históricas primitivas del número, magnitud y formas, que de manera gradual surgieron un sinnúmero de experiencias, generando así el proceso de evolución de los sistemas numéricos y debe quedar referenciado que esta evolución fue un proceso largo y completamente improbable que un descubrimiento haya sido la obra de un hombre individual o una única tribu, como por ejemplo el uso del fuego hace unos 400.000 años.

La conciencia del número es suficientemente extendida y clara, como para sentir la necesidad de expresar estas propiedades con un lenguaje simbólico. Podría pensarse que los dedos de la mano pueden usarse fácilmente para expresar conjunto de dos, tres, cuatro o cinco elementos, con las dos manos un conjunto hasta de diez elementos y si se usan los dedos de los pies un conjunto hasta de veinte elementos; cuando el uso de los dedos no era suficiente o inadecuados se debió utilizar pequeños montones de piedras para representar la cantidad correspondiente con otro conjunto, se asumiría que estos pequeños montones fueran de diez (un sistema decimal) como consecuencia anatómica de los dedos de las manos.

Los números son el medio mediante el cual se expresan las cantidades con las que se trata en el día a día. Históricamente civilizaciones han contemplado sus propios sistemas, como el mesopotámico, egipcio, babilónico, hindú entre otros [4]. Las siguientes imágenes muestran algunos símbolos usados por algunas culturas para representar el número:

Símbolo	Cantidad	Símbolo	Cantidad
I	1	∩∩	20
II	2	∩∩∩	30
III	3	∩∩ ∩∩	40
IIII	4	𓍢	100
III II	5	𓆼	1,000
III III	6	𓂭	10,000
IIII III	7	𓆐	100,000
IIII IIII	8	𓁨	1,000,000
III III III	9	13	∩III
∩	10	342	𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩ II

Cuadro 1.1: Numeración egipcia

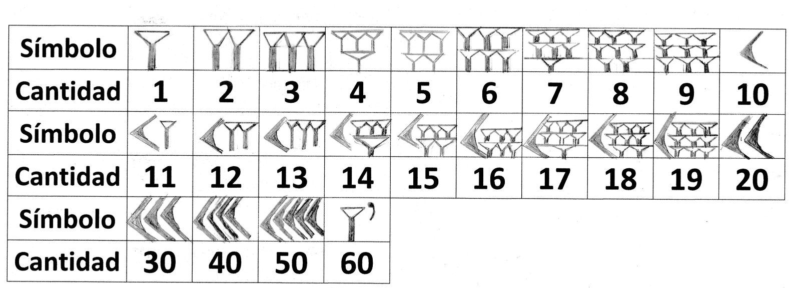


Figura 1.1: Numeración mesopotámica

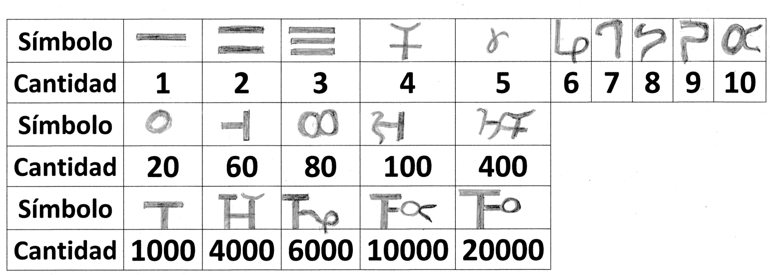


Figura 1.2: Numeración hindú

Símbolo	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
Cantidad	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Símbolo	百	千								
Cantidad	**100**	**1000**								
Símbolo	万	十万								
Cantidad	**10000**	**100000**								

Figura 1.3: Numeración china

Los números arábigos que son semejantes a 0123456789 donde se especula que tiene orígenes en la China y que tienen gran acogida, debido a la facilidad en el momento de sacar cuentas, con su principal fuerte posicional: con respecto a la posición numérica, en donde podemos distinguir el 23 del 32 [4]. Garantizándonos así la facilidad de sumar, restar, multiplicar o dividir números grandes, en la siguiente forma:

Forma natural de la suma

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 4 & 6 \\
+ & 7 & 8 & 7 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 3 \\
 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 7 & 8 & 6 \\
+ & 5 & 4 & 9 \\
\hline
 & 1 & 2 & \\
1 & 2 & 1 & 5 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 9 & 8 & 6 \\
+ & 5 & 9 & 2 \\
\hline
1 & 4 & & 8 \\
 & 1 & 7 & \\
\hline
1 & 5 & 7 & 8
\end{array}
$$

Como el sistema es posicional, solo es de mantener la posición correspondiente de cada cifra, por lo que se puede ejecutar la suma por cualquier sentido escogido.

Forma tradicional de la suma

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1\,1} \\
25463 \\
+\quad 5784 \\
\hline
31247
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1\,1} \\
9854578 \\
+\quad 520146 \\
\hline
10374724
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1} \\
128324 \\
+\ 249125 \\
\hline
377449
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\,1} \\
546 \\
+\ 275 \\
\hline
821
\end{array}
$$

Forma tradicional de la resta

$$
\begin{array}{r}
8 \\
-\ 2 \\
\hline
6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
12356 \\
-\quad 5687 \\
\hline
6669
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
9648 \\
-\ 8235 \\
\hline
1413
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
7854 \\
-\ 4568 \\
\hline
3286
\end{array}
$$

Forma tradicional de la multiplicación

$$
\begin{array}{r}
4526 \\
\times \quad 3 \\
\hline
13578
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25648 \\
\times \quad 26 \\
\hline
153888 \\
51296 \\
\hline
666848
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
546 \\
\times \quad 275 \\
\hline
2730 \\
3822 \\
1092 \\
\hline
150150
\end{array}
$$

Forma tradicional de la división

$$
\begin{array}{l|l}
546 & 2 \\
\cline{2-2}
14 & 273 \\
\ \ 06 & \\
\ \ \ \ 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
2356 & 20 \\
\cline{2-2}
\ \ 35 & 117.8 \\
\ \ 156 & \\
\ \ \ \ 160 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
512 & 4 \\
\cline{2-2}
11 & 128 \\
\ \ 32 & \\
\ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
1100 & 8 \\
\cline{2-2}
\ \ 30 & 137.5 \\
\ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

1.2. Primeros inicios con las operaciones entre números

El primer encuentro con los sistemas de numeración y sus símbolos se encuentran en los primeros años de escuela. El primer conjunto de números con el cual se tiene contacto es el conjunto de números naturales, este se representa como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Se aprenden operaciones como suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Se organizan las operaciones con algunas restricciones, y una que otra omisión, que posteriormente cuando se tiene un grado de madurez de dominio de las propiedades, se extienden de forma clara en cada propiedad:
Como encontraremos en los siguientes enunciados que nos manifestaron en primaria.

- la suma de dos números naturales cualesquiera es un número natural.
- la resta de dos números naturales es un número natural.
- el producto de dos números naturales es un número natural.

- la raíz cuadrada de un número natural es un número natural.

Cuando algunas de estas expresiones no es posible, simplemente nos dicen que "*esta operación no se puede*" o bien se trabajará en otro curso posterior a este.
Algunos ejemplos posibles en los que usted ha podido tener la experiencia de vivir en la escuela primaria:

Calcular expresioses como

- 5-2 si se puede
- 2-5 no se puede
- $7 \div 3$ no se puede
- $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$
- $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$
- $\sqrt{5}$ no se puede
- $\sqrt{2}$ no se puede

Diga cuánto es

- 4-4
- $\sqrt{144}$
- $\sqrt[5]{32}$

"No se puede" en este contexto significa que los resultados no son números naturales. Pero existen otros sistemas numéricos donde estas operaciones si tienen sentido.
Luego se habla de propiedades para las operaciones en donde las descripciones verbales predominan sobre el uso de símbolos.

- **Clausurativa:** Las operaciones definidas entre números del mismo conjunto producen números del mismo conjunto.

  Por ejemplo si se suman o multiplican dos números naturales se obtiene otro número natural.

- **Conmutativa:**

  Si al intercambiar el orden de los números que se operan generan el mismo resultado. Por ejemplo $5 + 2$ y $2 + 5$, generan el mismo resultado.

- **Distributiva el producto con respecto a la suma:**

  El producto de un número por una suma de dos números se puede obtener como la suma de dos productos de números, más específicamente, es igual a la suma del producto de dicho número con cada uno de los sumando. Por ejemplo $2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$.

A medida que se avanza en los años escolares se va refinando el lenguaje y se van incorporando nuevos conjuntos de números y nueva simbología junto con un lenguaje más formal para la descripción de las propiedades. Algo como

Propiedad clausurativa de suma y producto

Suma Si x y y son números naturales entonces $x + y$ es un número natural.

Producto Si x y y son números naturales entonces $x \cdot y$ es un número natural.

Ejemplo 1.2.1. Propiedad clausurativa de suma y producto

- La suma de los números naturales 5 y 6 es 11 y este es un número natural. La suma de los números naturales 10 y 15 es 25 y este es un número natural.
- El producto de los números naturales 5 y 6 es 30 y este es un número natural. El producto de los números naturales 10 y 15 es 150 y este es número natural.

La suma y el producto de números naturales son operaciones conmutativas. Esto quiere decir que el orden en que se operen los números no altera el resultado.

Propiedad conmutativa de la suma y el producto

Suma Si x y y son números naturales entonces $x + y = y + x$.

Producto Si x y y son números naturales entonces $x \cdot y = y \cdot x$.

Ejemplo 1.2.2. Conmutatividad de la suma

- El orden en que se sumen los números 5 y 6 no altera el resultado.

$$5 + 6 = 11 \qquad \text{y} \qquad 6 + 5 = 11$$

- El orden en que se multipliquen los números 10 y 15 no altera el producto.

$$10 \cdot 15 = 150 \qquad \text{y} \qquad 15 \cdot 10 = 150$$

La potenciación no es conmutativa ya que el orden en que se operan los números es importante para la determinación del resultado. El intercambio de posición de los números 2 y 3 en las operación potenciación 2^3 y 3^2 generan resultados distintos.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad \text{y} \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

¿Qué otros ejemplos pueden dar? ¿Es posible con el 4 y el 2?

Observe los siguientes enunciados y confirme su veracidad.

- $5 - 13 = -8$, pero -8 no hace parte del conjunto de los números naturales.
- $7/3$ no hace parte del conjunto de los números naturales.
- $\sqrt{7}$ no hace parte del conjunto de los números naturales.

Todas estas operaciones y restricciones están ligadas a un concepto que se estudiará en mayor detalle más adelante, pero que se mencionará aquí para ilustrar la importancia de las propiedades de los números y el sentido en que se usarán. El concepto es el de *función*.

Una función es una regla, dada explícitamente o no, que asocia a un elemento de un conjunto de partida (dominio) un único elemento del conjunto de llegada (codominio). Si la regla se llama f y x es un elemento del dominio, al elemento que f le asigna a x se le simboliza por $f(x)$. Para indicar que f es una función desde el dominio A hasta el codominio B se escribe $f : A \to B$ y para indicar que x es asignado a $f(x)$ se escribe también $x \mapsto f(x)$.

Ejemplo 1.2.3. Función

Por ejemplo $f : \{1, 4, 9, 16\} \to \mathbb{N}$ donde la regla es que a cada elemento del conjunto de partida se le asocia la raíz cuadrada de dicho número en el conjunto de llegada. En símbolos, para $n \in \{1, 2, 4, 9, 16\}$, $f(n) = \sqrt{n}$.

Ejemplo 1.2.4. Función

Por ejemplo $f : \{1, 2, 3, \cdots\} \to \mathbb{N}$ donde la regla es a cada elemento del conjunto de partida se le asocia un número impar en el conjunto de llegada. En símbolos para $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$, $f(n) = 2n - 1$.

La variable en una función, en el caso anterior n, puede pensarse como un contenedor, en el cual puede escribirse cualquier expresión que tenga sentido para la función así como para la expresión que define la función. Cuando sea el caso, la función puede pensarse como un instrumento que transforma lo que se le pase en el contenedor.

El dominio de la función del ejemplo anterior 1.2.4 es el conjunto $\{1, 4, 9, 16\}$. Podemos definir otra función haciendo el dominio más grande, por ejemplo

Ejemplo 1.2.5. Función

Si $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ entonces definimos $g : C \to \mathbb{N}$ por $g(x) = \sqrt{x}$ para $n \in C$ y esta sería otra función. Tiene la misma regla de asignación que f pero actúa sobre un conjunto de números diferente.

Observe que en el dominio de la función f en el ejemplo 1.2.4 o en el del ejemplo 1.2.5 no podrían estar números como 2 porque $f(2) = \sqrt{2} = g(2)$ no es un valor que esté en el conjunto de llegada $\mathbb{N}$.
En lo que sigue se estudiarán algunas propiedades mencionadas anteriormente pero en un contexto más amplio y otras adicionales pero en el conjunto de los números reales.

Capítulo 2

Sistemas numéricos

2.1. Números reales y sus propiedades

2.1.1. Convenciones

En las expresiones que se mostrarán, una expresión literal como x o y, representa un contenedor en el cual puede ubicarse cualquier expresión que tenga sentido en el contexto. Por ejemplo si decimos que x es un número natural, entonces debemos pensar en cualquier número que se encuentre dentro del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ o cualquier combinación de operaciones que produzcan números naturales.
Para indicar el producto de los números x y y se usa la yuxtaposición, es decir, un símbolo al lado del otro, $xy,$ o un punto centrado entre los factores $x \cdot y.$
Se usarán paréntesis ( ), llaves { } o corchetes [ ] para agrupar cuando sea conveniente y así evitar confusiones sobre el orden de las operaciones.
A menudo encontrará operaciones o grupos de operaciones entre símbolos de agrupación. Algunas opciones para llevar a cabo las operaciones planteadas son:

(1) Realizar todas las operaciones entre ellos, antes de hacer las operaciones que existan dentro, con otros términos por fuera de los mismos. Cuando hay símbolos de agrupación anidados, es decir, signos de agrupación dentro de signos de agrupación se deben realizar las operaciones desde las más interiores hacia las más exteriores, totalizando, cuando sea posible los resultados en un mismo nivel de agrupación.

(2) Aplicar la propiedad distributiva en forma reiterada hasta eliminar los símbolos de agrupación.

(3) Una combinación de (1) y (2) proporciona el camino más adecuado para reducir un sistema que involucra más símbolos de agrupación en diversos niveles.

2.1.2. Orden de evaluación o precedencia

Para evitar ambigüedades en el orden en que deben hacerse las operaciones se han acordado algunas reglas básicas llamadas *orden de precedencia* de operaciones. Para cambiar el orden en que se hacen las operaciones por defecto se utiliza algún símbolo de agrupación. Tenga en cuenta que en las calculadoras y en software el único signo de agrupación es el paréntesis.

- La suma y la resta están en el mismo nivel y generalmente se realizan en el orden de aparición.
- La multiplicación y la división están en el mismo nivel y generalmente se realizan en el orden de aparición.
- La operación de multiplicación o división tiene preferencia a la de adición o resta cualquiera que sea el lado del número donde aparezca.
- Los exponentes tienen preferencia sobre las sumas y multiplicaciones, y tendrían que ser colocados únicamente como superíndice a la derecha de su base.
- La evaluación de funciones tiene precedencia sobre las operaciones anteriores y se evalúan por defecto en la expresión más cercana.

Ejemplo 2.1.1. Precedencia de sumas y productos

Halle el valor de $7+2\times5$ y explique el orden de precedencia de las operaciones. ¿Que se debe hacer para realizar primero la suma?¿Cúanto es el resultado en este último caso?

Solución La respuesta algebraica de $7 + 2 \times 5$ es 17 porque primero se realiza la multiplicación y luego la adición. Los símbolos de agrupación, se pueden utilizar para evitar confusiones, por lo que la expresión anterior también puede ser escrita como $7 + (2 \times 5)$. Es posible cambiar el orden de precedencia. Si queremos indicar que primero se hace la suma $7 + 2$ y luego se multiplica por 5 debemos escribir, obligatoriamente, $(7 + 2) \times 5$ cuyo resultado es $45.$

Ejemplo 2.1.2. Precedencia de potenciación, sumas y productos

Simplifique cada expresión.

(a) $6 + 1 \times 8.$ ¿Cómo se debe escribir la expresión para forzar primero la suma?

(b) $3+6^2.$ ¿Cómo se debe escribir la expresión para forzar primero la potenciación de la suma de 3 y 6?

Solución

(a) $6+1\times 8 = 6+8 = 14$. Para forzar la adición sobre la multiplicación, se escribe $(6+1)\times 8 = 7\times 8 = 56$.

(b) $3+6^2 = 3+36 = 39$. Para forzar la adición sobre la potenciación, se escribe $(3+6)^2 = (9)^2 = 81$.

Ejemplo 2.1.3. Precedencia de resta, potenciación y división

Explique cómo es el orden de precedencia de las operaciones en el cálculo de $13-5\cdot 6^2\div 2$. ¿Cómo debe escribir la expresión si primero quiere hacer la resta $13-5$.

Solución
Para realizar $13-5\cdot 6^2\div 2$ primero se resuelve 6 al cuadrado. Como la división y la multiplicación tienen el mismo orden de precedencia, la próxima operación puede ser, resolver 6^2 entre 2 y luego resolver por 5 o multiplicar 6^2 por 5 y luego dividir por 2. En todo caso, alguna de las combinaciones anteriores debe hacerse antes de hacer la resta. Por tanto el resultado es -77.

$$13-5\cdot 36\div 2 = 13-180\div 2 = 13-90 = -77$$

$$13-5\cdot 36\div 2 = 13-5\cdot 18 = 13-90 = -77$$

Si en la operación inicial queremos primero la resta entre 13 y 5 debemos alterar el orden de precedencia y escribir $(13-5)*6^2/2$. De nuevo se hace primero 6^2 y se multiplica por el resultado de la resta y luego se divide por 2.

$$(13-5)\cdot 6^2/2 = 8\cdot 36/2 = 8\cdot 18 = 144$$
$$(13-5)\cdot 6^2/2 = 8\cdot 36/2 = 288\div 2 = 144$$

Ejemplo 2.1.4.

Determine el orden de precedencia en las siguientes expresiones:

- $7+15/3$
- $3\times 10\times 4+15-4$
- $20-30\times 15+25/5$

Ejemplo 2.1.5. Simplificar

Simplifique $7-4[5-23(7+3(5-45)]$ usando el orden de precedencia de los símbolos de agrupación.

Solución

$$\begin{array}{rl}
5-45=-40 & 7-4[5-23(7+23(-40))] \\
3(-40)=-120 & 7-4[5-23(7+(-120))] \\
7+(-120)=-113 & 7-4[5-23(-113)] \\
-23(-113)=2599 & 7-4[5+2599] \\
5+2599=2604 & 7-4[2604] \\
-4[2604]=-10416 & 7-10416=-10409
\end{array}$$

$$\underbrace{7-\underbrace{4[\underbrace{5-\underbrace{23(\underbrace{7+\underbrace{3(\underbrace{5-45}_{-40})}_{-120}}_{-113})}_{2599}}_{2604}]}_{10416}}_{-10409}$$

2.1.3. El conjunto de los números reales, suposiciones básicas

Suponemos la existencia de un conjunto de números que se llamará conjunto de los números reales con dos operaciones básicas: suma y producto. Estas dos operaciones satisfacen la propiedad commutativa y clausurativa. Además se acepta que satisfacen las siguientes propiedades

Intercambio de posición de los números en la suma y multiplicación.

Al intercambiar los números en las operaciones de suma y multiplicación se observa que el resultado no se altera. Es decir $x+y=y+x$ y $xy=yx$.

Existencia de elementos neutros de la suma y el producto

Existen números 0 y 1 en los números reales tales que

$$x+0=0+x=x \qquad \text{y} \qquad x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

Debido a estos resultados al número 0 se le conoce como el elemento neutro con respecto a la operación suma y al número 1 se le conoce como elemento neutro con respecto a la operación multiplicación. Al operar un número dado con el respectivo elemento neutro de la operación se obtiene el número dado.

Ejemplo 2.1.6. Elemento neutro con respecto a la suma en los números reales

1. $5+0=5$
2. $20+0=20$
3. $-15+0=-15$
4. $\pi+0=\pi$
5. $-4+0=-4$
6. $1254+0=1254$

Ejemplo 2.1.7. Elemento neutro con respecto a la multiplicación en los números reales

1. $12 \cdot 1 = 12$
2. $20 \cdot 1 = 20$
3. $15 \cdot 1 = 15$
4. $(5+6) \cdot 1 = 5+6$
5. $23 \cdot 1 = 23$
6. $\pi \cdot 1 = \pi$
7. $500 \cdot 1 = 500$
8. $45 \cdot 1 = 45$
9. $-15 \cdot 1 = -15$

Existencia de inverso aditivo

Para cada número x existe otro número y tal que $x + y = y + x = 0$. A este número y se le conoce como el inverso aditivo u opuesto de x

El inverso de x se acostumbra a llamar $-x$. Es decir, si y es un número tal que $x + y = 0$ entonces $y = -x$. El opuesto de 0 es 0 y el único número real que es opuesto de si mismo.

Ejemplo 2.1.8. Elemento opuesto con respecto a la suma de algunos números reales

1. El opuesto de 12 es -12 debido a que $12 + (-12) = 0$
2. El opuesto de -10 es 10 debido a que $-10 + 10 = 0$
3. El opuesto de π es $-\pi$ debido a que $\pi + (-\pi) = 0$
4. El opuesto de 5 es -5 debido a que $5 + (-5) = 0$
5. El opuesto de $-(-2)$ es -2 debido a que $-(-2) + (-2) = 0$
6. El opuesto de $-(-(-a))$ es $-(-a)$ debido a que $-(-(-a)) + (-(-a)) = 0$
7. El opuesto de 1 es -1 debido a que $1 + (-1) = 0$

Definición 2.1.1: Posibilidad de la resta

La resta de un número x con un número y, notada $x - y$, se define como la suma de x con el opuesto aditivo de y, es decir:

$$x - y = x + (-y).$$

Observe que la resta de y con x es la suma de y con el opuesto de x, $y - x = y + (-x)$ y el opuesto de x puede ser diferente del opuesto de y. Así que la resta no es commutativa. $3 - 5 = 3 + (-5) = -2$ y $5 - 3 = 5 + (-3) = 2$.

Existencia del inverso multiplicativo

Para cada número x distinto de 0 existe un número y tal que $xy = yx = 1$. A este número y se le conoce como el inverso multiplicativo de x.

El inverso de x se acostumbra a llamar x^{-1} o $1/x$. Es decir, si y es un número tal que $xy = 1$ entonces $y = x^{-1}$. El producto de un número x con su inverso multiplicativo se escribe $x(y^{-1}) = x \cdot \dfrac{1}{y}$.

Definición 2.1.2: División entre un número x y un número y

La división de un número x con un número y distinto de cero, notada x/y o $x \div y$, se define como el producto de x con el inverso multiplicativo de y, es decir,

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

Ejemplo 2.1.9. Elemento inverso con respecto a la multiplicación de algunos números reales

1. El inverso de 12 es $\dfrac{1}{12}$ debido a que $12 \cdot \dfrac{1}{12} = 1$
2. El inverso de -10 es $\dfrac{-1}{10}$ debido a que $-10 \cdot \dfrac{-1}{10} = 1$
3. El inverso de π es $\dfrac{1}{\pi}$ debido a que $\pi \cdot \dfrac{1}{\pi} = 1$
4. El inverso de 5 es $\dfrac{1}{5}$ debido a que $5 \cdot \dfrac{1}{5} = 1$
5. El inverso de $2/3$ es $\dfrac{1}{2/3}$ debido a que $2/3 \cdot \dfrac{1}{2/3} = 1$
6. El inverso de $\dfrac{3}{5}$ es $\dfrac{5}{3}$ debido a que $\dfrac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$
7. El inverso de 1 es $\frac{1}{1}$ debido a que $1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

Ejemplo 2.1.10. Inverso

Tomemos $a = 5 \neq 0$ y $b = 3$, así:

$$\frac{3}{5} = 3 \cdot 5^{-1}$$

o bien puede ser de la siguiente forma, si $a = 2$ y $b = 150$:

$$150 \cdot 2^{-1} = \frac{150}{2} = 75$$

Ejemplo 2.1.11. Observe los resultados de las siguientes operaciones

1. $5 + 7 = 7 + 5 = 12$
2. $15 + 42 = 42 + 15 = 57$
3. $4 + (-3) = (-3) + 4 = 1$
4. $1+2+3+4 = 4+3+2+1 = 10$
5. $10 \cdot 5 = 5 \cdot 10 = 50$
6. $\pi \cdot 200 = 200 \cdot \pi = 200\pi$
7. $12(1/3 + 5) = (5 + 1/3)12 = 64$

Propiedad asociativa

Al agrupar de diferentes formas bajo la operación adición y multiplicación se observa que se obtiene el mismo resultado, es decir:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Si se tiene una suma o multiplicación reiterada, se pueden agrupar con el fin de efectuar las operaciones de forma ordenada. Esta propiedad es útil cuando se requiere escoger los términos más adecuados para realizar una determinada operación. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.1.12. Asociar diferentes formas para operar.

1. $5+2+6 = (5+2)+6 = 5+(2+6)$
2. $5+b+2 = 5+2+b = (5+2)+b$
3. $5 \cdot 8 \cdot 4 = (5 \cdot 8) \cdot 4 = 5 \cdot (8 \cdot 4)$
4. $9 \cdot b \cdot 2 = (9 \cdot 2) \cdot b = 18 \cdot b$

Propiedad distributiva de la adición respecto a la suma

Para números reales x, y y z se tiene $x(y + z) = xy + xz$.

Básicamente lo que dice es que cuando en una multiplicación uno de los factores es una suma, el producto puede obtenerse haciendo los productos de los sumandos (y y z) por el otro factor (x) y luego sumando los resultados parciales (xy y xz).
Una forma sencilla de ver la distribución es la siguiente:

$$2(a+3) = (a+3) + (a+3) = 2a + 2 \cdot 3 = 2a + 6.$$

La propiedad distributiva puede pensarse como una estructura y las expresiones que intervienen pueden pensarse como contenedores que pueden albergar otras expresiones.

$$\square(\bigcirc + \triangle) = \square\bigcirc + \square\triangle.$$

El cuadrado fuera de la parte contenida en el paréntesis, representa el término que debe acompañar a cada uno de los miembros del paréntesis. Por tal razón el cuadrado está al lado del círculo y al lado del triángulo.
Cuando se da la suma y se escriben los factores, es decir, se da, $xy+xz$ y se escribe $xy + xz = x(y + z)$ se dice que se ha factorizado y x es el factor común.

Ejemplo 2.1.13. Desarrolle las siguientes operaciones haciendo uso de la distribución

1. $2xa^2(6 + xa) = 12xa^2 + 2x^2a^3$.
2. $3(5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 15 + 6 = 21$
3. $3/2(2 + b) = 3/2 \cdot 2 + 3/2 \cdot b = 3 + \frac{3b}{2}$
4. $(x + a)[(x^2 - b) + 2(y + 5)] = (x + a)(x^2 - b) + 2(x + a)(y + 5)$

Dominar todas estas propiedades es indispensable en el momento que use software. El orden jerárquico de las operaciones se sigue manteniendo, por lo que se debe hacer un uso cuidadoso de las mismas. Consulte la **Guía WxMaxima (click aquí o consulte el código QR al final del libro)**. Allí se presenta un uso básico de las propiedades de los números reales.

2.1.4. Propiedades de los números reales

En la sección 2.1.3 se presentaron las propiedades básicas que se dan por hecho y que se satisfacen en los números reales. En esta sección se presentarán propiedades adicionales que pueden deducirse del conjunto de propiedades básicas.

Ejemplo 2.1.14. Suma

Sean $a = -2$ y $b = -6$, determine $a + b$.

Solución
Remplazando los valores correspondientes se obtiene:

$$a + b = (-6) + (-2) = (-6) - (2) = -2 + (-6) = -8.$$

Teorema. 2.1.1: Multiplicación por -1

Para todo número real a, $(-1)a = -a$.

Lo anterior nos dice que el opuesto de 1 multiplicado por un número a es el opuesto de a.

Teorema. 2.1.2: El opuesto del opuesto

El opuesto de un número a es $-a$ y el opuesto de $-a$ es $-(-a)$.

$$-(-a) = a$$

El opuesto del opuesto de un número a es el mismo número a.

Ejemplo 2.1.15. Operaciones con -1

Tomemos los siguientes valores para a, $a = 3$ y $a = -7$, determine $-(-3)$ y $-(-(-7))$.

Solución

$$-(-3) = 3$$

$$-(-(-7)) = -(7) = -7.$$

Teorema. 2.1.3: Propiedad distributiva respecto a la resta

El producto de un número a con la diferencia de dos números b y c, es equivalente a la diferencia del producto de ab y ac. Es decir

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Ejemplo 2.1.16. Distribución

Sean los siguientes valores $a = 8$, $b = 10$ y $c = 5$, determine $8(10 - 5)$.

Solución

$$8(10 - 5) = 8 \cdot 10 - 8 \cdot 5 = 80 - 40 = 40$$

Teorema. 2.1.4: Multiplicación por cero

Todo número multiplicado por cero es cero. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

La multiplicación del número 0 con cualquier número real genera como resultado cero.

Ejemplo 2.1.17. Multiplicación por cero

Sea a un valor cualquiera, como por ejemplo $a = 9$, determine $a \cdot 0$:

Solución

$$0 \cdot 9 = 9 \cdot 0 = 0$$

Teorema. 2.1.5: Multiplicación de opuestos

$(-a)b = a(-b) = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$

Ejemplo 2.1.18. Multiplicación por números opuestos

Determine los resultados de las siguientes expresiones $a = (-25)12$ y $(-25)(-12)$.

Solución

$$(-25) \cdot 12 = 25 \cdot (-12) = -(25 \cdot 12) = -300.$$

Para el otro caso se tiene:

$$(-25) \cdot (-12) = 25 \cdot 12 = 300.$$

Teorema. 2.1.6: Opuesto de una suma

$$-(a + b) = -a - b.$$

Ejemplo 2.1.19. Suma con opuestos

Determine el resultado de las siguientes expresiones $-(5 + 8)$ y $-(4 + 3)$.

Solución

$$-(5 + 8) = -5 - 8 = -13$$

$$-(4 + 3) = -4 - 3 = -4 - 3 = -7.$$

Teorema. 2.1.7: Opuesto de la resta

$$-(a-b) = -a+b.$$

Ejemplo 2.1.20. Opuesto para una resta

Determine los resultados de las siguientes expresiones. $-(12-10)$.

Solución

$$-(12-10) = -12-(-10) = -12+10 = -2.$$

Teorema. 2.1.8: Inverso del inverso multiplicativo

Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

El inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de a es a.

Ejemplo 2.1.21. Inverso multiplicativo

Determine el resultado de $(6^{-1})^{-1}$.

Solución
Se tiene que

$$(6^{-1})^{-1} = \frac{1}{6^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{6}} = 6.$$

Teorema. 2.1.9: Inverso multiplicativo del producto

Si a y b son distintos de cero $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

El inverso multiplicativo para el producto de dos números reales distintos de cero es el producto de los inversos multiplicativos de cada factor.

Ejemplo 2.1.22. Inverso de un número

Determine el resultado de $(16 \cdot 7)^{-1}$.

Solución

$$(16 \cdot 7)^{-1} = \frac{1}{16 \cdot 7} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{7} = 16^{-1} \cdot 7^{-1}.$$

Teorema. 2.1.10: Teorema del factor cero

Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejemplo 2.1.23. Factor cero

Determine el valor de b, para que se cumpla $a \cdot b = 0$.

Se tiene que $a = 50$ que valor debe tomar b para que $50 \cdot b = 0$, se deduce que a b no le queda otro camino de tomar el valor de cero, así $b = 0$.
Lo mismo ocurre con a si b toma un valor distinto de cero, para que su producto sea cero.
o bien, como $50 \neq 0$:

$$50 \cdot b = 0$$

$$50^{-1} \cdot 50 \cdot b = 50^{-1} \cdot 0$$

$$b = 0.$$

Teorema. 2.1.11: Inverso multiplicativo de un cociente

Si a y b son números distintos de cero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Teorema. 2.1.12: Suma de cocientes

$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Ejemplo 2.1.24. Suma de fracciones

Determine el resultado de las siguiente sumas. a) $\frac{8}{5} + \frac{6}{4}$. b) $3 + \frac{1}{2}$

Solución

a) $\frac{8}{5} + \frac{6}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 5 \cdot 6}{5 \cdot 4} = \frac{32 + 30}{20} = \frac{62}{20} = \frac{31}{10}$.

b) $3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

Teorema. 2.1.13: Multiplicación de cocientes

$(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ejemplo 2.1.25. Multiplicación de fracciones

Determine el resultado del siguiente producto.

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{6}{4}.$$

Solución

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{6}{4} = \frac{8 \cdot 6}{5 \cdot 4} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}.$$

Teorema. 2.1.14: Simplificación para la división

Para $c \neq 0$, $(ac)/(bc) = (a/b)$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 2.1.26. Simplificación

Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 8}.$$

Solución

$$\frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{4}{3}.$$

Teorema. 2.1.15: Cociente de cocientes

Si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Ejemplo 2.1.27. Cociente

Determine el siguiente cociente $\frac{10}{5}$ entre $\frac{8}{6}$.

Solución

$$\frac{\frac{10}{5}}{\frac{8}{6}} = \frac{10 \cdot 6}{5 \cdot 8} = \frac{60}{40} = \frac{15}{10} = 1.5.$$

Teorema. 2.1.16: Cociente negativo

Si $b \neq 0$ se tiene $-(a/b) = (-a/b) = a/(-b)$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Ejemplo 2.1.28. Cociente negativo

Muestre las combinaciones de signo en fracción $-\frac{13}{11}$ y $-\frac{10}{2}$.

Solución

$$-\frac{13}{11} = \frac{-13}{11} = \frac{13}{-11}$$

o bien si $a = 10$ y $b = 2$ se obtiene:

$$-\frac{10}{2} = -5$$

$$\frac{-10}{2} = -5$$

$$\frac{10}{-2} = -5$$

En todos los casos se obtiene el mismo valor resultante.

Teorema. 2.1.17: Diferencia de dos cocientes

Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene $(a/b) - (c/d) = (ad - bc)/(bd)$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Ejemplo 2.1.29. Diferencia de dos cocientes

Muestre numéricamente el teorema anterior para $\frac{8}{5} - \frac{6}{4}$.

Solución

$$\frac{8}{5} - \frac{6}{4} = \frac{8 \cdot 4 - 5 \cdot 6}{5 \cdot 4} = \frac{32 - 30}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

2.2. Clasificación de los números reales

Históricamente para llegar a la estructura de los números reales, estos debieron evolucionar, pasando por distintas épocas y diversos procesos de razonamiento que conllevaron a ir mejorando la solución de diversos problemas que se presentaban, para dichos momentos donde no se contemplaba la solución.
De esta forma se presenta una breve información de los subconjuntos de los números reales, quienes contribuyeron a la evolución de los números reales y de forma expansiva se van adicionando mas elementos a cada conjunto hasta completar los números reales.

2.2.1. Números naturales

El conjunto de los números naturales se denota con $\mathbb{N}$ y se define como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}.$$

Un sistema de números usados para el conteo, estos presentan un orden y la existencia del número 1 como primer elemento de este conjunto.

2.2.2. Propiedades de los números naturales

1. Si se toman un n en los números naturales, podemos considerar que el 1, es el menor de todos los números naturales. Esto es 1 es menor que n para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Si fija un número natural k, entonces definimos sus sucesor como $k + 1$ donde $k + 1$ se encuentra en el conjunto de los naturales.

3. Si fija un número natural k que sea distinto de 1, entonces se define el antecesor como $k - 1$. Además, $k - 1$ se encuentra en los números naturales.

En los números naturales se definen las operaciones de suma y producto; si se suman dos números naturales el resultado es un número natural, de igual forma sucede con el producto. El producto de dos números naturales es un número natural. Por ejemplo: $2+5=7$ el 7 y $5\cdot 3=15$ el 15 son números naturales. Además contempla las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa, la suma distribuye con respecto al producto y el 1 es el elemento neutro con respecto al producto.
Sin embargo, estas propiedades no son suficientes para representar en una forma eficiente, desde un punto computacional, situaciones o transacciones que se presentan en el vivir diario: deudas, el nivel por debajo el mar, temperaturas bajo cero, etc.. Ya que se necesitaría un número y una descripción verbal que explique el sentido. Por ejemplo 1000 metros por encima del nivel del mar, o 1000 metros por debajo del nivel del mar. Se hace necesario construir un conjunto mas grande que no requiera mayor explicación una vez establecidas ciertas convenciones. Si se habla de metros bajo el nivel del mar se puede establecer que un signo menos delante del número indique metros bajo el nivel de mar. Por ejemplo, una expresión como $-100m$ indicaría 100 metros bajo el nivel, sin explicaciones adicionales. El conjunto que resuelve esta situación es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

2.2.3. Números enteros

El conjunto de los números enteros se denota con $\mathbb{Z}$ y se define como el conjunto formado por los números naturales, el número 0 y los opuestos de los números naturales, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}.$$

Los opuestos de los números naturales se llaman enteros negativos, los números naturales también se llaman enteros positivos.
En este conjunto quedan definidas las operaciones de suma y producto, con las propiedades: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia del elemento neutro bajo el producto (1) y la suma (0). En gran medida existen situaciones en la vida real, como por ejemplo: repartir 12 dulces entre 5 niños, o bien sea una pera entre dos niños, o ¿qué parte representa 15 minutos con respecto a una hora? Estas situaciones no pueden resolverse con números enteros, se hace necesario construir un conjunto más amplio que nos ayude a solucionar estos tipos de situaciones; este conjunto es el de los números racionales $\mathbb{Q}$.

2.2.4. Números racionales

El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números reales y está formado por los productos de números enteros con inversos multiplicativos de números enteros, se denota con $\mathbb{Q}$ y se define como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Cuando $b = 1$ se tiene $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$ de modo que

$$\left\{ \frac{a}{1} : a \in \mathbb{Z}, \right\} = \mathbb{Z}$$

y así los números enteros quedan incluidos en los números racionales así como los inversos multiplicativos de enteros distintos de cero.

Ejemplo 2.2.1. Números racionales

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{-5}{6}$
3. $\frac{1}{-9}$
4. $\frac{100}{99}$
5. $\frac{3}{12}$
6. 8
7. $\frac{12}{5}$
8. $\frac{3}{4}$
9. $\frac{1}{8}$

Todas las propiedades de los números enteros siguen siendo válidas en $\mathbb{Q}$, además se verifica la propiedad del inverso multiplicativo de todos los números racionales excepto el cero. Si $\frac{a}{b}$ se multiplica por su inverso, se obtiene $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, además $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$.

2.2.5. Números irracionales

El conjunto de los números reales que no son racionales se llaman irracionales, este conjunto se denota con $\mathbb{I}$.

Ejemplo 2.2.2. Números irracionales

Algunos ejemplos de números irracionales

1. π
2. $\sqrt{2}$
3. $\sqrt{11}$
4. $\sqrt[7]{17}$
5. $\sqrt[11]{53}$
6. $\sqrt{p}$ donde p es un número primo.
7. e
8. $\frac{a}{b} + \sqrt{p}$ donde a, b son números enteros y p un número primo.

2.2.6. Números decimales

Se entenderá como un número decimal, un número real escrito de la forma

$$y = b.d_1 d_2 \dots d_n \dots$$

donde b es un número entero el cual se llama parte entera, separado por una coma (representación española) o punto (representación anglosajona) de un conjunto de dígitos $d_1 d_2 \dots d_n \dots$ a los cuales se le llama parte fraccionaria, en la cual cada uno de ellos representa a un dígito, es decir, cada uno representa un número entre 0 y 9.
Las fracciones decimales tienen la forma $\dfrac{n}{10^m} = n\dfrac{1}{10^m}$ donde n es un número entero y m es un número natural.
Dependiendo de la forma de la parte fraccionaria, los números decimales se clasifican en

- **Decimal finito o exacto**.

  Si la parte fraccionaria tiene un número finito de dígitos. Por ejemplo 3.2 o 9.425467.

- **Decimal infinito**.

  La parte fraccionaria tiene un número infinito de dígitos $3.1415...$

- **Decimal periódico**.

  Si cierto grupo de dígitos se repiten infinitamente se dice que es un decimal periódico. El grupo de dígitos que se repite se llama periodo y se acostumbra a representar colocando una barra sobre ellos. Por ejemplo $1.9999999...$ en el cual se repite el nueve, se abrevia $1.\bar{9}$.

Todo decimal finito puede escribirse en la forma $\frac{n}{10^m \cdot 2^k}$ donde n es un número entero y m y k son números naturales.

Ejemplo 2.2.3. Representación decimales finitos

$$3.2 = \frac{32}{100}, \quad 9.425467 = \frac{9425467}{1000000}$$

Todo número racional se puede escribir de forma de un número decimal ya sea este finito o infinito periódico. El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es el conjunto de los números decimales infinitos no periódicos.

Ejemplo 2.2.4. Decimales

Expanda de forma decimal los siguientes racionales: $\dfrac{7}{50}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{-6}{4}$, $\dfrac{15}{12}$ y $\dfrac{5}{9}$.

Solución:

1. $\dfrac{7}{50} = 0.14$
2. $\dfrac{1}{3} = 0.3333333... = 0.\overline{3}$
3. $\dfrac{5}{2} = 2.5$
4. $\dfrac{-6}{4} = -1.5$
5. $\dfrac{15}{12} = 1.25$
6. $\dfrac{5}{9} = 1.\overline{5}$

Dado un número x decimal periódico finito o infinito es posible expresarlo en la forma racional. Se identifica primero el número entero del decimal x y la parte decimal que se repite en forma periódica. Luego se multiplica tantas veces la base 10 hasta iniciar con el decimal periódico. Por otro lado se multiplica al número x por la base 10 tantas veces, hasta que solo quede un periodo de la parte decimal, manteniendo la igualdad con el número x.
A estas dos expresiones se les halla la diferencia la cual ocasiona que se anule la parte periódica infinita y así poder obtener la representación de x en forma de fracción.

Ejemplo 2.2.5. Decimal periódico infinito

Dado el siguiente número decimal periódico infinito $1.1215151515... = 1.12\overline{15}$ encuentre el número racional correspondiente.

Solución:
En primera instancia tomemos $x = 1.12151515... = 1.12\overline{15}$. Posteriormente multipliquemos a x por 100 y por 10.000, que al restarlas hace que la parte infinita periódica se anule, manteniendo un sistema de ecuaciones estable.

$$100x = 112.\overline{15}$$
$$10000x = 11215.\overline{15}$$

Restando estas dos igualdades en el orden siguiente se obtiene:
$10000x - 100x = 11215.\overline{15} - 112.\overline{15}$
Realizando las operaciones se obtiene

$$9900x = 11103$$
$$x = \frac{11103}{9900}$$
$$x = \frac{3701}{3300}$$

Así se contempla que

$$1.12\overline{15} = \frac{3701}{3300}.$$

Dados dos números racionales cualesquiera siempre es posible encontrar otro número racional entre ellos, esto es, sean a y b números racionales, entonces $\frac{a+b}{2}$ es otro número racional que se encuentra entre a y b.
Por otro lado se podrá pensar que los números racionales cubren toda la recta real, pero esto no es cierto; si intenta resolver la siguiente pregunta. ¿Cuál es el valor de la longitud de un lado correspondiente a un cuadrado cuya área es de 5 unidades cuadradas? o ¿Cuál es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su radio? Estos tipos de números no son racionales y generan agujeros en los números racionales, una tarea que a lo largo de la historia ha consistido en generar números no racionales.

2.3. Valor absoluto

A menudo se acostumbra a trabajar con cantidades que usualmente son positivas, como las medidas de longitud, el tiempo, la medida de la masa de un cuerpo, entre otras cantidades; por lo que es recomendable garantizar el signo de cierta medida. Si desea que las cantidades o expresiones sean positivas o negativas ¿que aconsejaría para garantizar su signo?, por ejemplo se requiere que las siguientes expresiones sean positivas:
$5-8$, $1256-56845$, $12+a$, $2(-8+6)$, $(-1)^n$, con el fin de dar respuesta a la inquietud, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.3.1: Valor absoluto

El valor absoluto de un número real a es 0 si $a = 0$, es a si a es positivo y es $-a$ si a es negativo. El valor absoluto de a se denota por $|a|$.

Ejemplo 2.3.1. Valor absoluto

1. $|0| = 0$
2. $|-1| = 1$
3. $|3-8| = |-5| = 5$
4. $|e| = e$
5. $|-e| = e$
6. $|5-6-8| = |-9| = 9$

Ejercicios 1. Números decimales
Exprese los siguientes racionales en forma decimal.

1. $\frac{114}{100}$
2. $\frac{11}{32}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{5}{9}$
5. $\frac{7}{1000}$
6. $\frac{9}{8}$

Escriba los números decimales dados, si es posible, en forma de fracción.

7. $0.000141414...$
8. $1.123512351235...$
9. $5.717171...$
10. 3.141615
11. $2.2151515...$
12. $1.2345678912545789...$
13. 2.26
14. 0.235
15. 2.85

Determine el valor absoluto de las siguientes expresiones usando la definición.

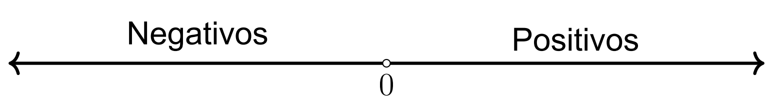
16. $|-45|$
17. $|100-250|$
18. $|-(-(-12))|$
19. $|-(-(-(-(-x))))|$

De un ejemplo donde no se cumpla cada enunciado.

20. Dados dos números racionales se puede encontrar un número entero entre ellos.
21. Dados dos números irracionales se puede encontrar un número natural entre ellos.

2.4. Ordenamiento de los números reales

Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado $\mathbb{R}^+$ tal que la suma y el producto de números positivos es positivo. Es decir, si x y y están en $\mathbb{R}^+$ entonces $xy \in \mathbb{R}^+$ y $x+y \in \mathbb{R}^+$. Se asume que $0 \notin \mathbb{R}^+$.
Una propiedad fundamental que se utilizará con frecuencia es la propiedad de tricotomía que establece lo siguiente:
Para un número real x se tiene, una y solo una de las tres posibilidades siguientes: $x=0$, $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$. Los opuestos de los números positivos se llaman números negativos y se representan con $\mathbb{R}^-$.



Ahora se establecerá cuál es el significado de **menor que** o **mayor que** y las desigualdades relacionadas.

(1) **Menor que:** $x < y$ se lee "x es menor que y" y significa que $y-x$ es positivo. Esto implica que un número es positivo si y solo si es mayor que cero ($(y-x) \in \mathbb{R}^+$).

(2) **Mayor que:** $y > x$ se lee "y es mayor que x" y significa que $x < y$. Esto implica que $x-y$ es negativo si y solo si es menor que cero ($-(x-y) \in \mathbb{R}^+$).

(3) **Menor o igual que:** $x \leq y$ se lee "x es menor o igual que y" y significa que $x < y$ o $x = y$.

(4) $x < y$ y $y < z$ se abrevia $x < y < z$.

(5) $x \leq y$ y $y < z$ se abrevia $x \leq y < z$.

(6) $x < y$ y $y \leq z$ se abrevia $x < y \leq z$.

(7) $x \leq y$ y $y \leq z$ se abrevia $x \leq y \leq z$.

Definición 2.4.1: Intervalo abierto

El conjunto de los números reales mayores que a y menores que b se escribe (a, b) y se llama intervalo abierto,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Ejemplo 2.4.1. Intervalo abierto

Ilustre en la recta el intervalo $(1, 2)$.

Solución

Se dibuja la recta real y se resaltan los puntos que se encuentran entre 1 y 2 como se muestra a continuación:

Definición 2.4.2: Intervalo cerrado

El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b se escribe $[a, b]$ y se llama intervalo cerrado,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Ejemplo 2.4.2. Intervalo cerrado

Ilustre en la recta el intervalo $[1, 2]$.

Solución

Se dibuja la recta real y se resaltan los puntos que se encuentran entre 1 y 2 e incluidos el 1 y el 2 como se muestra a continuación:

Definición 2.4.3: Intervalo semiabierto a derecha

El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b se escribe $[a, b)$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Ejemplo 2.4.3. Intervalo semiabierto a derecha

Ilustre en la recta el intervalo $[1, 2)$.

Solución

Se dibuja la recta real y se resaltan los puntos que se encuentran entre 1 y 2 e incluido solo el número 1 como se muestra a continuación:

Definición 2.4.4: Intervalo semiabierto a izquierda

El conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b se escribe $(a, b]$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Ejemplo 2.4.4. Intervalo semiabierto a izquierda.

Ilustre en la recta el intervalo $(1, 2]$.

Solución

Se dibuja la recta real y se resaltan los puntos que se encuentran entre 1 y 2 e incluye solo al número 2 como se muestra a continuación:

Definición 2.4.5: Intervalo abierto e infinito a derecha.

El conjunto de los números reales x tales que $x > a$ se escribe (a, ∞).

Definición 2.4.6: Intervalo cerrado e infinito a derecha

El conjunto de los números reales x tales que $x \geq a$ se escribe $[a, \infty)$.

Definición 2.4.7: Intervalo abierto e infinito a izquierda

El conjunto de los números reales x tales que $x < a$ se escribe $(-\infty, a)$.

Definición 2.4.8: Intervalo cerrado e infinito a izquierda

El conjunto de los números reales x tales que $x \leq a$ se escribe $(-\infty, a]$.

Con las anteriores representaciones gráficas y el conocimiento de los números positivos y negativos, se puede presentar otra forma de la definición de valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \text{ es un número positivo.} \\ 0, & \text{si } a \text{ es igual a cero.} \\ -a, & \text{si } a \text{ es un número negativo.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.4.5. Determine el valor absoluto

Si se sabe que $x < y$, halle $|y - x|$.

Como $x < y$, se tiene que $y - x > 0$ y por tanto $|y - x| = y - x$.

Ejemplo 2.4.6. Determine el valor de cada expresión

1. $|5 - 7| = |-2| = 2$
2. $|-2| - |-7| + |4| = 2 - 7 + 4 = (2 - 7) + 4 = -5 + 4 = -1$

Ejemplo 2.4.7. Verifique la siguiente condición

Verifique que $|a| = |-a|$

Se realizará la verificación considerando los diversos casos para a.

1. Si $a = 0$ entonces $-a = 0$ y $|a| = |0| = 0$ y $|-a| = |0| = 0$. Por tanto $|a| = |-a|$.
2. Si a es un número positivo, entonces $-a < 0$ y $|a| = a$ y $|-a| = -(-a) = a$. Por tanto $|a| = |-a|$.
3. Si a es un número negativo, entonces $-a > 0$ y $|-a| = -a$ y $|a| = -a$. Por tanto $|a| = |-a|$.

2.5. Propiedades de orden

Cuando se trabaja con el orden de los números reales, es indispensable conocer sus propiedades y tener el dominio de las mismas, por lo que se listan a continuación con un ejemplo.

1. Propiedad de tricotomía. Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y solo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$.

   Ejemplo 2.5.1. Tricotomía

   Compare el siguiente par de números: -2 y 5.

   Solución

   Dados los valores de a y b, esto es $a = -2$ y $b = 5$, este par de números solo puede cumplir una y solo una de las tres condiciones, en efecto

   $$-2 < 5.$$

2. Propiedad transitiva: si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

   Ejemplo 2.5.2. Transitiva

   Compare los números -20 y 1, 1 y 8. Compare -20 con 8.

   Solución

   Se tiene que $-20 < 1$ y por otro lado se tiene que $1 < 8$, se puede concluir que $-20 < 8$.

3. Propiedad del múltiplo positivo: si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$.

   Al multiplicar a ambos lados de una desigualdad por un número positivo los productos conservan el sentido de la desigualdad original.

   Ejemplo 2.5.3. Producto por un número positivo

   Multiplique por 3 la desigualdad $5 < 12$.

   Solución

   Sea $a = 5$, $b = 12$ y $c = 3$

   Observe que $a < b$ y al multiplicar por c en ambos lados de la desigualdad, por ser este $c > 0$ se cumple que:

$$5 < 12$$

$$5 \cdot 3 < 12 \cdot 3$$

$$15 < 36.$$

4. Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$.

   Al multiplicar a ambos lados de una desigualdad por un número negativo, los productos tienen el sentido contrario de la desigualdad original.

   Ejemplo 2.5.4. Producto por un número negativo

   Multiplique a ambos lados por -3 en la desigualdad $5 < 12$ y escriba la desigualdad resultante.

   Solución

   Sea $a = 5$, $b = 12$ y $c = -3$

   Vemos que $a < b$ y al multiplicar por c en ambos lados de la desigualdad, por ser este $c < 0$ se cumple que:

$$5 < 12$$

$$5 \cdot (-3) > 12 \cdot (-3)$$

$$-15 > -36.$$

5. Si $a \neq 0$ es $a^2 > 0$. El cuadrado de un número real distinto de cero siempre es positivo.

   Ejemplo 2.5.5. El cuadrado de un número distinto de cero es positivo

   Tome el número -3 y verifique el signo de su cuadrado.

Solución Sea $a = -3$, entonces $(-3)^2 = 9$, el cual es positivo. Otra forma de verificar es usando las propiedades anteriores: $-3 < 0$ y multiplicando por un número $c = -3$ en ambos lados de la desigualdad y como este es negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Esto es:

$$-3 < 0$$

$$(-3)(-3) > 0(-3)$$

$$9 > 0$$

6. Desigualdad de los opuestos. Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular si $a < 0$, es $-a > 0$.

Ejemplo 2.5.6. Comparación de opuestos de una desigualdad

Como es la desigualdad del opuesto de $6 < 11$.

Solución

Tomemos $6 < 11$, con la propiedad anterior y tomando $c = -1$, se determina que es cierto.

$$-6 > -11$$

7. El producto positivo de dos números. Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Ejemplo 2.5.7. El producto positivo de dos números

Si el producto de dos números es 12, determine como son los signos de cada par de números que cumple con esta condición.

Solución

El 12 es un número positivo y existen muchos números cuyo producto es 12. Por ejemplo -3 y -4, 3 y 4, 12 y 1, -12 y 1. En general si a es número real que no es cero, los números a y $12/a$ así como $-a$ y $-12/a$ tienen producto 12. La condición que deben cumplir es que ambos números tengan el mismo signo.

8. El cociente positivo de dos números. Si $\dfrac{a}{b} > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Ejemplo 2.5.8. Cociente positivo

¿Qué signo le corresponden a los números que generan el siguiente cociente $\dfrac{3}{5}$?

Solución

Dada la fracción $\frac{3}{5}$ la cual es positiva, y se escoge un par de números como $a = -3$ y $b = -5$, así se tiene que $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} > 0$, cualquier par de números que generan a $\frac{3}{5}$, ambos deben tener el mismo signo.

9. La uniformidad si $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$. Al sumar una misma cantidad a ambos lados de una desigualdad el sentido de la desigualdad se conserva.

Ejemplo 2.5.9. Uniformidad bajo la suma

Adicione las siguientes desigualdades $6 < 9$ y $10 < 15$.

Solución

Tomemos las siguientes desigualdades $6 < 9$ y $10 < 15$, al adicionar estas dos desigualdades en el respectivo orden, la desigualdad de mantiene, esto es:

$$6 + 10 < 9 + 15$$

$$16 < 24$$

10. El inverso multiplicativo de u número distinto de cero. Si $a > 0$ entonces $1/a > 0$, si $a < 0$ entonces $1/a < 0$.

Ejemplo 2.5.10. Inverso multiplicativo

Determine el signo del inverso multiplicativo de 5.

Solución

Sea $a = 5$, entonces la fracción $\frac{1}{5}$ es mayor que cero, así es positivo.

11. Los inversos de dos números positivos. Si $0 < a < b$ entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Ejemplo 2.5.11. Los inversos multiplicativos

Determine el orden de los inversos de $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{2}$.

Solución

Sea $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{1}{2}$, donde $0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, considere ahora los inversos de a y b, en efecto $a^{-1} = 8$ y $b^{-1} = 2$, organizando los resultados se obtiene:

$$0 < 2 < 8.$$

Otra forma es tomar un número mayor que cero para multiplicar la desigualdad, se toma positivo con el objetivo de mantener la desigualdad. El número adecuado a la situación es 16, debido a que 16 es divisible por 8 y por 2.

$$0 < 16 \cdot \frac{1}{8} < 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 < 2 < 8$$

12. Propiedad transitiva. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

Ejemplo 2.5.12. Transitividad

Si $5 \leq 10$ y $10 \leq 10$ ¿Cómo es 5 con respecto a 10?

Solución

Dado que $5 \leq 10$ y $10 \leq 10$ entonces $5 \leq 10$.

La propiedad no se cumple si los dos números no son positivos. Observe que $-4 < 2$ pero $\frac{1}{2} = 0.5$ no es menor que $\frac{1}{-4} = -0.25$.

13. Una característica de la propiedad de la tricotomía. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

Ejemplo 2.5.13. Propiedad de la tricotomía

Determine los valores de a para que se cumpla $a \leq 10$ y $10 \leq a$.

Solución

Dado que $a \leq 10$ y $10 \leq a$, la única forma en la que se pueden cumplir esta dos condiciones, es que $a = 10$.

14. Suma del cuadrado de dos números. Para números reales cualesquiera a y b se tiene $a^2 + b^2 \geq 0$. Si alguno de los dos números no es cero entonces $a^2 + b^2 > 0$.

Ejemplo 2.5.14. Suma de cuadrados

Determine el signo de $2^2 + (-3)^2$.

Solución

Dados los valores $a = 2$ y $b = -3$, sus cuadrados correspondientes son $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, cuya suma es $4 + 9 = 13$. Este es un número mayor que cero.

15. Para $a > 0$:

$$|x| < a \text{ si y solo si } -a < x < a.$$

Es decir, x satisface la condición $|x| < a$ si y solo si $x \in (-a, a)$.

16. Para $a > 0$:

$$|x| \leq a \text{ si y solo si } -a \leq x \leq a.$$

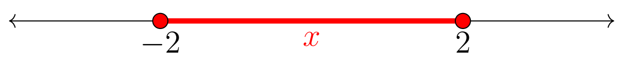
Es decir, x satisface la condición $|x| \leq a$ si y solo si $x \in [-a, a]$.

Ejemplo 2.5.15. Valor absoluto

Determine los valores de x, para los que se cumple $|x| \leq 2$.

Solución

De acuerdo a la propiedad anterior $|x| \leq 2$ si y solo si $-2 \leq x \leq 2$, por lo que los valores que puede tomar x están en el intervalo $[-2, 2]$.



17. Para $a > 0$

$$|x| > a \text{ si y sólo si } x < a \text{ o } x > a.$$

18. No existe ningún número real a tal que $x \leq a$ para todo real x. Es decir, no existe un número real que sea mayor que todos los números reales.

19. Si x tiene la propiedad que $0 \leq x < h$ para cada número real positivo h, entonces $x = 0$.

2.6. Potenciación, logaritmación y propiedades

2.6.1. Potenciación

Observe lo qué sucede cuando se toma un número a en los reales y se opera bajo la multiplicación varias veces.

$$\begin{aligned}
&a \cdot a \\
&a \cdot a \cdot a \\
&a \cdot a \cdot a \cdot a \\
&\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{veces}}
\end{aligned}$$

El uso de una representación simbólica para resumir expresiones cortas y complejas, para este tipo de multiplicaciones reiteradas, es:

$$\begin{aligned}
a \cdot a &= a^2 \\
a \cdot a \cdot a &= a^3 \\
a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^4 \\
\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{veces}} &= a^n
\end{aligned}$$

Definición 2.6.1: Potenciación

Cuando se mantiene el número que multiplica, el cual recibirá el nombre de base (a) y el número de veces que se multiplica a este número se reconoce como n, que se ubica en la parte superior derecha de a, el cual se denomina exponente a^n.

Desarrollar las destrezas tanto del software como de las propiedades básicas de los números reales.(Dar click aquí o consulte el código QR al final del libro)

Propiedades de la potenciación

Sea a un número real, para un entero positivo n se define:

$$a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{ veces}}, \quad n > 1 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{n-\text{ veces}}, \quad n > 1 \tag{2.3}$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0 \tag{2.4}$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0 \tag{2.5}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0 \tag{2.6}$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a > 0 \tag{2.7}$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}, \quad a > 0 \tag{2.8}$$

$$(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}, \quad m \text{ y } n \text{ pares} \tag{2.9}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad a > 0 \tag{2.10}$$

$$(-a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-a}, \quad a > 0, \quad n \text{ impar} \tag{2.11}$$

Algunos ejemplos.

Ejemplo 2.6.1. Producto de potencias

Simplifique la expresión $a^{-3} \cdot a^3$

Solución

Partiendo de la expresión dada y al utilizar las propiedades se obtiene:

$$a^{-3} \cdot a^3 = \frac{1}{a^3} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \left(\frac{a}{a}\right)^3 = 1^3 = 1$$

Ejemplo 2.6.2. Simplifique la expresión

$$a^3 \cdot a^{-5} = a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} \cdot \frac{1}{a \cdot a} = 1 \cdot \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

Cuando se realizan operaciones con potencias, es de considerar las siguientes propiedades.

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo 2.6.3. Desarrolle el siguiente producto de potencias de igual base

$$3^5 \cdot 3^8 = 3^{5+8} = 3^{13}$$

(II) $(ab)^n = a^n b^n$

Ejemplo 2.6.4. Desarrolle la potencia de un producto

$$(3 \cdot 5)^{15} = 3^{15} \cdot 5^{15}$$

(III) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo 2.6.5. Desarrolle la potencia de un cociente

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{15} = \frac{3^{15}}{5^{15}}$$

(IV) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Si $m < n$ debe ser $a \neq 0$.

Ejemplo 2.6.6. Desarrolle el cociente de potencias de igual base

$$\frac{6^8}{6^2} = 6^{8-2} = 6^6$$

Las propiedades anteriores deben aplicarse con cuidado. Se deben verificar las condiciones que establecen su validez.
Es incorrecto concluir que $\sqrt[2]{(-2)^2} = -2$ porque existe una regla que dice $\sqrt[n]{a^n} = a$. Observe que la regla impone la condición que a debe ser mayor que cero. Sin embargo, existe una regla que establece que $(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$ si m y n son pares, por lo tanto

$$\sqrt[2]{(-2)^2} = \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |-2|^{\frac{2}{2}} = 2.$$

Observe que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por otro lado, $(-a)^n = ((-1)(a))^n = (-1)^n a^n$ si n es impar y que $(-a)^n = a^n$ si n es par.

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \text{ es par} \\ -a^n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para hallar $a^{\frac{m}{n}}$ cuando $m \geq n$ se hace la división de m entre n, si el residuo es r y el cociente es q entonces $m = nq + r$ y entonces

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{nq+r}{n}} = a^{\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}} = a^q a^{\frac{r}{n}}.$$

En conclusión cuando $m \geq n$ se tiene que $a^{\frac{m}{n}} = a^q a^{\frac{r}{n}}$ donde q es el cociente al dividir m entre n y r es el residuo correspondiente.

Ejemplo 2.6.7.

Simplifique las siguientes expresiones (a) $2^{3/2}$ (b) $4^{8/5}$ (c) $\sqrt[5]{3^{14}}$

Solución

(a) Como $\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ entonces $3 = 2 \times 1 + 1$ y por lo tanto

$$2^{3/2} = 2^1 \times 2^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

(b) Como $\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$ entonces $8 = 5 \times 1 + 3$ y por lo tanto

$$4^{8/5} = 4^1 \times 4^{3/5} = 4\sqrt[5]{4^3}.$$

(c) Primero observe que $\sqrt[5]{3^{14}} = 3^{\frac{14}{5}}$. Como $\begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}$ entonces $14 = 5 \times 2 + 4$ y por lo tanto

$$3^{14/5} = 3^2 \times 3^{4/5} = 9\sqrt[5]{3^4}.$$

Así que $\sqrt[5]{3^{14}} = 9\sqrt[5]{3^4}$.

Ver vídeo de potenciación

Ejercicios 2. Potenciación
Calcular el valor exacto de cada expresión:

1. $2^5 + 3^2$
2. $3^4 - 4^2$
3. $(-8)^3 - (-8)^2$
4. $(0.2)^2 - (0.5)^2$
5. $(-3)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^4$
6. $3 \cdot 2^3 - (2-5)^2 + 5^0$
7. $3^0 + 3^{-1} - 3^{-2} + 3^{-3}$
8. $(0.00001)^0 + (0.0001)^2$
9. $5^{11} + 5^{11} + 5^{11} + 5^{11} + 5^{11}$
10. $\dfrac{(3^2)^2 \cdot (2^3)^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^7}{(2 \cdot 3^2)^5 \cdot (3^5 \cdot 2^2)^2 \cdot 2^7 \cdot 3^3}$
11. $\left[\dfrac{4^5 \cdot 5^5 \cdot (2/3)^{-5}}{(2+5)^4 \cdot ((2^3 \cdot 3^2)^5 + 2^4)^4}\right]^0$

Hallar los resultados de las siguientes expresiones:

12. $a^8 \cdot a^4 \cdot a^{10}$
13. $x^{a+3b} \cdot x^{5a-4b}$
14. $y^{n+2m}(y^{4n-m} + y^{n+m} - y^{5n+8m})$
15. $\dfrac{(x^{2n-3} \cdot y^{n-2})^3}{x^{n-8} \cdot y^{3n-7}}$
16. $\left(\dfrac{x^{p+q}}{(x^{p-q})^{p+q} \cdot \left(\dfrac{x^{p-q}}{x^{p+q}}\right)^{p-q}}\right)$

Desarrolle mediante WxMaxima los ejercicios anteriores, ver Guía de Potencias.

2.6.2. Coeficientes binomiales

La idea básica es dar una fórmula para la expansión de $(a+b)^n$ cuando n es un número natural.

Definición 2.6.2:

Se define el factorial de 0, notado 0!, como $0! = 1$. Para $n > 1$ se define el factorial como $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Ejemplo 2.6.8. Factorial

Determine los siguientes factoriales

$1!, \quad 2!, \quad 3!, \quad 4!, \quad 5!. \quad 6!, \quad 7!$

Solución

1. $1! = 1, \quad 2! = 1 \times 2 = 2, \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6, \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

   Pueden usarse los factoriales previos para calcular el siguiente

2. $$5! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4}_{4!} \times 5 = 4! \times 5 = 24 \times 5 = 120$$

3.
$$6! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}_{5!} \times 6 = 5! \times 6 = 120 \times 5 = 720$$

4.
$$7! = 6! \times 7 = 720 \times 7 = 5040$$

Los ejemplos quedan incluidos en la siguiente regla

Teorema. 2.6.1: Factorial

$$n! = (n-k)!(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdots (n-1) \cdot n$$

Si $k = 1$ se tiene $n! = (n-1)! \times n$. Si se empieza en $(n+1)$, con $k = 1$ se tiene

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Ejemplo 2.6.9. Factorial

Calcular $7!$

Pero esta no es la única forma de expresarlo. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
7! &= (7-1)! \times 7 = 6! \times 7 \\
7! &= (7-2)! \times (7-1) \times 7 = 5! \times 6 \times 7 \\
7! &= (7-3)! \times (7-2) \times (7-1) \times 7 = 4! \times 5 \times 6 \times 7
\end{aligned}$$

En general

$$n! = (n-1)! \times n = (n-2)! \times (n-1) \times n = (n-3)! \times (n-2) \times (n-1) \times n \quad (2.12)$$

y así sucesivamente.
En las calculadoras científicas el factorial puede calcularse usando la tecla con el símbolo $\boxed{!}$.

Definición 2.6.3: Combinatoria

Se define para los enteros no negativos n y k, con $k \leq n$, el combinatorio de n y k notado $\binom{n}{k}$ de la siguiente manera

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ejemplo 2.6.10. Combinatoria

Calcular las siguientes combinatorias:

$$1.\binom{3}{0}, \qquad 2.\binom{3}{1}, \qquad 3.\binom{6}{4}$$

Solución

1. $\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!}$. Como $0! = 1, \quad 3! = 6,$ y $(3-0)! = 3!$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!} = \frac{6}{3!(1)} = \frac{6}{6} = 1.$$

2. $\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!}$. Como $1! = 1, \quad 3! = 6,$ y $(3-1)! = 2! = 2$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{6}{2!1!} = \frac{6}{(2)(1)} = 3.$$

3. $\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!}$. Como $6! = 720, \quad 4! = 24,$ y $(6-4)! = 2! = 2$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{720}{2!4!} = \frac{720}{48} = 15.$$

En las calculadoras científicas el combinatorio puede calcularse usando la tecla con el símbolo $\boxed{\text{nCp}}$.
En WxMaxima podemos ver la guía o consulte el código QR al final del libro Coeficientes binomiales.

Teorema. 2.6.2: Propiedades de los combinatorios

Para números naturales n y k con $k \leq n$

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Lo anterior puede usarse para simplificar cálculos. Por ejemplo si $n = 10$ y $k = 4$ entonces puede afirmarse que

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{10-3} = \binom{10}{7}$$

de modo que si calcula $\binom{10}{3}$ se tiene inmediatamente el valor de $\binom{10}{7}$ porque ambos tienen el mismo valor. Otras igualdades para este mismo caso son

$$\binom{10}{0}=\binom{10}{10},\quad \binom{10}{1}=\binom{10}{9},\quad \binom{10}{2}=\binom{10}{8},\quad \binom{10}{4}=\binom{10}{6},$$

El cálculo de $\binom{6}{4}$ puede hacerse de una manera más directa mediante una simplificación considerando la fórmula dada en (2.12). Según esta fórmula $6! = 6\times 5\times 4!$

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}=\frac{6\times 5\times 4!}{4!2!}=\frac{6\times 5}{2!}=\frac{30}{2}=15.$$

Mediante combinatorios se pueden expandir binomios elevados a una potencia entera usando

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots\\ &+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^{n-n}b^n.\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^n = (a+(-b))^n &= \binom{n}{0}a^n(-b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1+\cdots\\ &+\binom{n}{k}a^{n-k}(-b)^k+\cdots+\binom{n}{n}a^{n-n}b^n.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Se puede ver de la expresión anterior que para hallar el término que va en la posición j de la expansión de $(a+b)^n$, se debe calcular,

$$\binom{n}{j-1}a^{n-(j-1)}b^{j-1}. \tag{2.15}$$

Ejemplo 2.6.11. Combinatorias

Desarrolle usando combinatorios

$$1.(a+b)^2 \qquad 2.(a-b)^2 \qquad 3.(a+b)^3 \qquad 4.(a-b)^3.$$

Solución

1.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^{2-0}b^0+\binom{2}{1}a^{2-1}b^1+\binom{2}{2}a^{2-2}b^2\\ &= \binom{2}{0}a^2b^0+\binom{2}{1}a^1b^1+\binom{2}{2}a^0b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= \binom{2}{0}a^{2-0}(-b)^0 + \binom{2}{1}a^{2-1}(-b)^1 + \binom{2}{2}a^{2-2}(-b)^2\\ &= \binom{2}{0}a^{2}(-b)^0 + \binom{2}{1}a^{1}(-b)^1 + \binom{2}{2}a^{0}(-b)^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^{3-0}b^0 + \binom{3}{1}a^{3-1}b^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}b^2 + \binom{3}{3}a^{3-3}b^3\\ &= \binom{3}{0}a^{3}b^0 + \binom{3}{1}a^{2}b^1 + \binom{3}{2}a^{1}b^2 + \binom{3}{3}a^{0}b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \binom{3}{0}a^{3-0}(-b)^0 + \binom{3}{1}a^{3-1}(-b)^1 + \binom{3}{2}a^{3-2}(-b)^2 + \binom{3}{3}a^{3-3}(-b)^3\\ &= \binom{3}{0}a^{3}(-b)^0 + \binom{3}{1}a^{2}(-b)^1 + \binom{3}{2}a^{1}(-b)^2 + \binom{3}{3}a^{0}(-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.12. Combinatorias

Expandir usando combinatorios:

$$1.(2x^3+y)^4 \qquad 2.(2x^3-y)^4 \qquad 3.\left(1+\frac{2}{y}\right)^4 \qquad 4.\left(1-\frac{2}{x}\right)^4$$

Solución

Primero calculemos todas las combinaciones necesarias

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$$

y que

$$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1, \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{2} = 6$$

1.

$$\begin{aligned}
\left(2x^3+y\right)^4 &= \binom{4}{0}\left(2x^3\right)^{4-0}(y)^0+\binom{4}{1}\left(2x^3\right)^{4-1}(y)^1+\binom{4}{2}\left(2x^3\right)^{4-2}(y)^2\\
&+\binom{4}{3}\left(2x^3\right)^{4-3}(y)^3+\binom{4}{4}\left(2x^3\right)^{4-4}(y)^4\\
&=\binom{4}{0}\left(2x^3\right)^{4}(y)^0+\binom{4}{1}\left(2x^3\right)^{3}(y)^1+\binom{4}{2}\left(2x^3\right)^{2}(y)^2\\
&+\binom{4}{3}\left(2x^3\right)^{1}(y)^3+\binom{4}{4}\left(2x^3\right)^{0}(y)^4\\
&=(1)(16)x^{12}+4(8)x^9y+6(4)x^6y^2+4(2)x^3y^3+y^4\\
&=16x^{12}+32x^9y+24x^6y^2+8x^3y^3+y^4
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(2x^3+(-y)\right)^4 &= \binom{4}{0}\left(2x^3\right)^{4-0}(-y)^0+\binom{4}{1}\left(2x^3\right)^{4-1}(-y)^1+\binom{4}{2}\left(2x^3\right)^{4-2}(-y)^2\\
&+\binom{4}{3}\left(2x^3\right)^{4-3}(-y)^3+\binom{4}{4}\left(2x^3\right)^{4-4}(-y)^4\\
&=\binom{4}{0}\left(2x^3\right)^{4}(-y)^0+\binom{4}{1}\left(2x^3\right)^{3}(-y)^1+\binom{4}{2}\left(2x^3\right)^{2}(-y)^2\\
&+\binom{4}{3}\left(2x^3\right)^{1}(-y)^3+\binom{4}{4}\left(2x^3\right)^{0}(-y)^4\\
&=(1)(16)x^{12}+4(8)x^9(-y)+6(4)x^6(-y)^2+4(2)x^3(-y)^3+(-y)^4
\end{aligned}$$

como $(-y)^2=y^2$, $(-y)^3=-y^3$ y $(-y)^4=y^4$, se tiene entonces

$$\left(2x^3-y\right)^4=16x^{12}-32x^9y+24x^6y^2-8x^3y^3+y^4$$

3.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{y}\right)^4 &= \binom{4}{0}(1)^{4-0}\left(\frac{2}{y}\right)^0+\binom{4}{1}(1)^{4-1}\left(\frac{2}{y}\right)^1+\binom{4}{2}(1)^{4-2}\left(\frac{2}{y}\right)^2\\
&+\binom{4}{3}(1)^{4-3}\left(\frac{2}{y}\right)^3+\binom{4}{4}(1)^{4-4}\left(\frac{2}{y}\right)^4\\
&=\binom{4}{0}(1)^{4}\left(\frac{2}{y}\right)^0+\binom{4}{1}(1)^{3}\left(\frac{2}{y}\right)^1+\binom{4}{2}(1)^{2}\left(\frac{2}{y}\right)^2\\
&+\binom{4}{3}(1)^{1}\left(\frac{2}{y}\right)^3+\binom{4}{4}(1)^{0}\left(\frac{2}{y}\right)^4
\end{aligned}$$

Como $\left(\frac{2}{y}\right)^2 = \frac{2^2}{y^2} = \frac{4}{y^2}$, $\left(\frac{2}{y}\right)^3 = \frac{2^3}{y^3} = \frac{8}{y^3}$, $\left(\frac{2}{y}\right)^4 = \frac{2^4}{y^4} = \frac{16}{y^4}$.

$$\left(1+\frac{2}{y}\right)^4 = 1 + \frac{8}{y} + \frac{24}{y^2} + \frac{32}{y^3} + \frac{16}{y^4}$$

4.

$$\begin{aligned}
\left(1+\left(-\frac{2}{y}\right)\right)^4 &= \binom{4}{0}(1)^{4-0}\left(-\frac{2}{y}\right)^0 + \binom{4}{1}(1)^{4-1}\left(-\frac{2}{y}\right)^1 + \binom{4}{2}(1)^{4-2}\left(-\frac{2}{y}\right)^2 \\
&+ \binom{4}{3}(1)^{4-3}\left(-\frac{2}{y}\right)^3 + \binom{4}{4}(1)^{4-4}\left(-\frac{2}{y}\right)^4 \\
&= \binom{4}{0}(1)^{4}\left(-\frac{2}{y}\right)^0 + \binom{4}{1}(1)^{3}\left(-\frac{2}{y}\right)^1 + \binom{4}{2}(1)^{2}\left(-\frac{2}{y}\right)^2 \\
&+ \binom{4}{3}(1)^{1}\left(-\frac{2}{y}\right)^3 + \binom{4}{4}(1)^{0}\left(-\frac{2}{y}\right)^4 \\
&= 1 - \frac{8}{y} + \frac{24}{y^2} - \frac{32}{y^3} + \frac{16}{y^4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6.13. Término de un binomio

Halle el término número 3 en la expansión de $(2x^3 - y)^4$.

Solución

Este ejercicio lo hicimos anteriormente y el término número 3 es $24x^6y^2$. Lo haremos ahora nuevamente usando la fórmula en (2.15) donde ahora $j = 3$. Esto muestra que no es necesario hacer la expansión completa, para calcular los términos deseados. Observe que $(2x^3 + (-y))^4$. La fórmula para el término j es

$$\binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^{j-1},$$

donde $n = 4$ $j = 3$, $a = 2x^3$ y $b = -y$. Como $\binom{n}{j-1} = \binom{4}{3-1} = \binom{4}{2}$, se tiene que el término es

$$\binom{4}{2}(2x^3)^2(-y)^2 = 6(2^2x^6)(-y)^2 = 24x^6y^2.$$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro vídeo sobre binomios 01 ⊙ y vídeo sobre binomios 02. ⊙

Ejemplo 2.6.14. Término de un binomio

Halle el término 25 en la expansión de $(1 + x)^{200}$.

El término 25 viene dado por

$$\binom{200}{24}(1)^{200-24}x^{24} = \binom{200}{24}x^{24}.$$

Desarrolle usando WxMaxima el ejemplo anterior, ver guía Coeficientes binomiales.

Ejercicios 3.
Halle el término 15 de los siguientes binomios.

1. $(1+x)^{23}$
2. $(2x+y)^{18}$
3. $2(3n-2y)^{28}$
4. $(1/3x-5)^{50}$
5. $(x-t)^{31}$
6. $(2-h)^{24}$

Expanda los siguiente binomios:

7. $(1+2y)^5$
8. $(3y+x)^9$
9. $(5h+6)^{10}$
10. $(5-\pi x)^{12}$
11. $\left(4t+\dfrac{2}{x}\right)^7$
12. $(7-mt^2)^9$

2.6.3. Logaritmos

Anteriormente, se estudió la potenciación que consiste en hallar el resultado dada una base y el exponente. Por ejemplo, dada 2^3 se calcula 8. En lo que sigue se ilustra una operación que sigue el proceso inverso. Dada la base y el resultado, se debe calcular el exponente. Es decir, dado $2^? = 8$ se debe hallar el exponente al cual debe elevarse 2 para que la igualdad se cumpla. En este caso el número buscado es 3. Una forma sencilla de hallar la respuesta adecuada a esta igualdad es usando WxMaxima, ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Logaritmos. Abajo se muestra en azul la entrada correspondiente en WxMaxima y el resultado entre corchetes.

(% i1) solve([2^x=8], [x]);

Nos arroja como resultado $[x = 3]$

Utilice software o su calculadora para determinar el exponente correspondiente de cada ecuación.

1. $3^y = 9$
2. $2^x = 32$
3. $3^a = 81$
4. $5^b = 1$
5. $11^x = 121$
6. $7^k = 16807$

Considere los resultados de las siguientes expresiones en WxMaxima, usando el comando log$()$.

Ver guía de logaritmos en WxMaxima.

En forma simbólica determinemos el exponente de la expresión $2^x = 8$, como $x = \log_2 8$ a lo que corresponde cuantas veces se debe multiplicar el 2 para generar el número 8. Para calcular logaritmos en otras bases utilizando los logaritmos en una base conocida se utiliza un cambio en la base del logaritmo, esta técnica se estudiará mas adelante.

$\longrightarrow$ log(8)/log(2)
(% i1)

Ejercicios 4.
Determine los siguientes logaritmos:

(1) $\log_e \pi$
(2) $\log_5 12$
(3) $\log_3 3$
(4) $\log_4 8$
(5) $\log_e e$
(6) $\log_e e^2$
(7) $\log_e e^5$
(8) $\log_{e^3} e^7$
(9) $\log_{10} 10000$
(10) $\log_{10} 10^8$

Buscar en cada caso el valor del exponente y que hace cierta la igualdad.

7. $2^y = 32$
8. $3^y = 9$
9. $2^y = 36$
10. $10^y = 100$
11. $10^y = 1$
12. $a^y = a^\pi$
13. $z^y = 1.$
14. $e^y = 4$
15. $a^y = 1$
16. $a^y = a^m$
17. $a^y = a.$

Definición 2.6.4:

Sea a un número real positivo y sea $x > 0$. Se dice que el logaritmo de base a de x es y si y solo si $a^y = x$.

$$\log_a x = y \text{ si y sólo si } a^y = x.$$

La expresión $\log_{10}$ se abrevia como log y se lee *logaritmo decimal*. La expresión $\log_e$ se abrevia ln y se lee *logaritmo natural*.

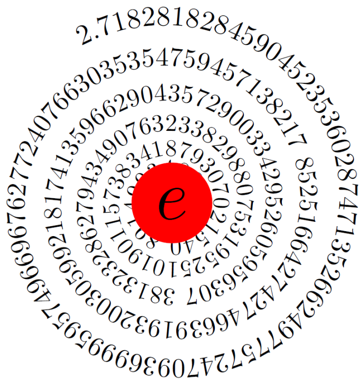


Figura 2.1: Número de Euler con 234 cifras decimales

En algunos textos [1] y lenguajes de programación, la expresión log se utiliza exclusivamente para el logaritmo natural. Se debe consultar que tipo de notación usan los libros antes de usar sus fórmulas o funciones.
Es importante verificar que la expresión a la cual se le calcula el logaritmo sea mayor que cero.
Considere algunos ejemplos de logaritmos

Ejemplo 2.6.15. Logaritmo vs potencia

Muestre la equivalencia del logaritmo con la potenciación.

Solución
$\log_2 32 = 5$ si solo si $2^5 = 32$.

Ejemplo 2.6.16. Logaritmos

Hallar los siguientes logaritmos:

$$1.\ \log_5 125 \qquad 2.\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \qquad 3.\ \log_2 \sqrt{2}$$

Solución

1. Se debe buscar un número $y \in \mathbb{R}$ tal que $\log_5 125 = y$. De acuerdo a la definición esto ocurre si y sólo si $5^y = 125$. Si uno prueba entre los números 1,2,3,4 encuentra que el valor $y = 3$ es la solución. Esto es $\log_5 125 = 3$.
2. Se debe buscan un número y tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{8}$. Por inspección se puede ver que
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1^3}{2^3} = \dfrac{1}{8}$. Por tanto $y = 3$ satisface la condición y $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$.

[1] Calculus I, Tom M. Apostol

3. Se debe buscar un número y tal que $2^y = \sqrt{2}$. Claramente $y = \frac{1}{2}$ es la respuesta ya que $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Por tanto $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.6.17. Logaritmos

Hallar los siguientes logaritmos

(a) $\log 10^3$ (b) $\log_3 9$ (c) $\log_b b^n$ (d) $\log_b 1$

Solución

(a) Primero observe que $\log 10^3 = \log_{10} 10^3$. Por la definición de logaritmo $\log_{10} 10^3 = y$ si y solo si $10^y = 10^3$. Analizando estas expresiones vemos que para $y = 3$ la expresión a la izquierda de la igualdad es igual a la de la derecha. Por tanto $\log 10^3 = 3$.

(b) Primero observe que $\log_3 9 = \log_3 3^2$. Por la definición de logaritmo $\log_3 3^2 = y$ si y sólo si $3^y = 3^2$. Analizando estas expresiones vemos que para $y = 2$ la expresión a la izquierda de la igualdad es igual a la de la derecha. Por tanto $\log_3 9 = 2$.

Un análisis similar da la respuestas a los otros ítems.
Las calculadoras científicas tienen teclas especiales para el cálculo de logaritmos decimales y logaritmos naturales, otras tienen la capacidad de hallar logaritmos en cualquier base. Las teclas son $\boxed{\text{log}}$ para el logaritmo decimal y $\boxed{\text{ln}}$ para el logaritmo natural. Para el cálculo de otros tipos de logaritmos se debe utilizar el cambio de base, que se estudiará más adelante.

Ver guía Logaritmos en WxMaxima.

Propiedades

Cuando aparezca un símbolo o una expresión como base de un logaritmo se asumirá que es mayor que cero y distinta de 1.

Logaritmos básicos

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a a^m = m. \tag{2.16}$$

$$\log_a 1 = 0, \text{ si solo si } a^0 = 1$$

Logaritmo del producto de dos números positivos

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y. \tag{2.17}$$

Si $m = \log_a x$ y $n = \log_a y$ entonces $a^m = x$ y $a^n = y$. Se tiene entonces $xy = a^m a^n = a^{m+n}$ y por tanto

$$\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y.$$

Ejemplo 2.6.18. Logaritmos

Expresar como un solo logaritmo

(a) $\log_4 x + \log_4(7y)$

(b) $\log_2(x+1) + \log_2((z+y)^4)$

(c) $\log 5 + \log \pi$

(d) $\log 3 + \log 4$

Solución

(a) $\log_4 x + \log_4(7y) = \log_4((x)(7y)) = \log_4(7xy)$

(b) $\log_2(x+1) + \log_2((z+y)^4) = \log_2((x+1)(z+y)^4)$

(c) $\log 5 + \log \pi = \log(5\pi)$

(d) $\log 3 + \log 4 = \log(3 \times 4)$

Logaritmo de una potencia

$$\log_a b^m = m \log_a b. \tag{2.18}$$

Suponga que $z = \log_a b$ entonces $a^z = b$ y $b^m = (a^z)^m = a^{zm}$, de donde se concluye que

$$\log_a b^m = mz = m \log_a b.$$

Ejemplo 2.6.19.

Expresar como un solo logaritmo $\log_3(x^2+1) - \frac{1}{2}\log_3 x$

Solución

$$\begin{aligned}
\log_3(x^2+1) - \frac{1}{2}\log_3 x &= \log_3(x^2+1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\log_3 x \\
&= \log_3(x^2+1) + \log_3 x^{-\frac{1}{2}} \\
&= \log_3\left((x^2+1)(x^{-\frac{1}{2}})\right) \\
&= \log_3\left(\frac{x^2+1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Logaritmo del inverso multiplicativo

Para $x > 0$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x. \tag{2.19}$$

Sea $m = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$, entonces $a^m = \frac{1}{x}$. Se deduce entonces que $xa^m = 1$. Por tanto

$$\log_a(xa^m) = \log_a(1), \qquad \log(x) + \log_a(a^m) = 0$$

$$\log_a(x) + m\log_a a = 0, \quad \log_a x + m = 0$$

porque $\log_a a = 1$. De la última igualdad $m = -\log_a x$ y reemplazando el valor de m

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x.$$

Logaritmo de un cociente

Para $x > 0$ y $y > 0$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y. \tag{2.20}$$

Si $m = \log_a x$ y $n = \log_a y$ entonces $a^m = x$ y $a^n = y$. Se tiene entonces $\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ y por tanto $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n$. Reemplazando los valores de m y n se obtiene

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Cambio de base en logaritmos

Para cualquier $b > 0$, $b \neq 1$ se tiene

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{2.21}$$

Considere $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$. Aplicando $\log_b$ a ambos lados se tiene $\log_b(a^y) = \log_b x$. Aplicando la propiedad del logaritmo de una potencia $y\log_b a = \log_b x$. Resolviendo para y, se obtiene $y = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. Reemplazando la expresión para y,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Potencia de un logaritmo

$$a^{\log_a x} = x, \qquad a^x = e^{x\ln a} = e^{(\ln a)x} \tag{2.22}$$

Considere $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$ remplazando a y en esta ultima expresión se obtiene,

$$a^{\log_a x} = x$$

Considere a^x, aplicando ln se obtiene $\ln a^x = \ln a^x \cdot 1 = \ln a^x \cdot \ln e = \ln e^{\ln a^x} = \ln e^{x \ln a}$, así finaliza:

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Ver aquí o consulte el código QR al final del libro vídeo 01, vídeo 02 y vídeo 03 $\odot$ con respecto a los logaritmos.

Ejercicios 5.
Determine los siguientes logaritmos:

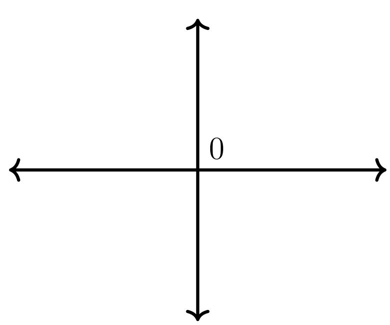
1. $\log_e \pi$
2. $\log_5 12$
3. $\log_3 3$
4. $\log_4 8$
5. $\log_e e$
6. $\log_e e^2$
7. $\log_e e^5$
8. $\log_{e^3} e^7$
9. $\log 100$
10. $\log 10^6$
11. $\log_{10} 100$
12. $\log_{10} 1000$
13. $\log_{10} 10000$
14. $\log_{10} 10^8$
15. $\log_2(1/8)$
16. $\log_5 125$
17. $\log(102.31)$
18. $\ln(3.19)$
19. $\ln(103)$

Determine el valor de x en cada expresión:

20. $\log_x 32 = 5$
21. $\log_x 81 = 2$
22. $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$
23. $\log_x 0.01 = -2$

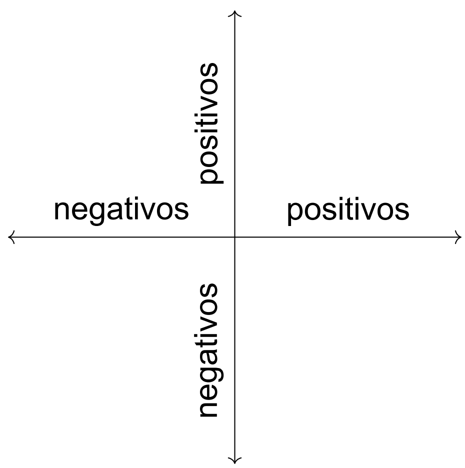
2.7. Plano numérico

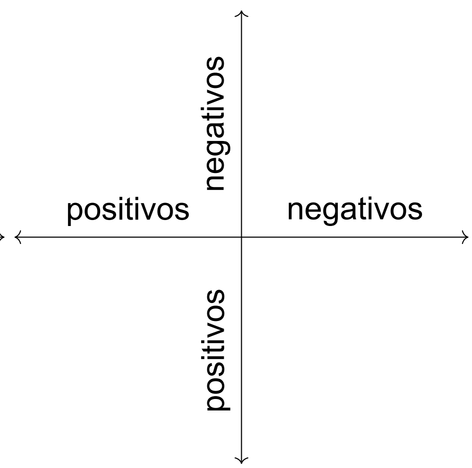
Anteriormente vimos que los números reales pueden ubicarse en una recta. Allí se pueden ilustrar algunas relaciones entre números reales, pero no es suficientes para ilustrar otras.



Existen otras maneras de representar relaciones entre números. Una de ellas consiste en tomar dos rectas reales y ubicarlas perpendicularmente, siendo su punto de corte el lugar correspondiente a 0 en ambas rectas. Este punto donde se cortan las dos rectas se llama origen del sistema de coordenadas. Tradicionalmente se le ha llamado eje y a la recta vertical y eje x a la recta horizontal. A cada recta se le da una orientación. Es común ubicar los números positivos en la parte superior de la recta vertical y números positivos a la derecha de cero en la recta horizontal, pero es posible cambiar por conveniencia la orientación de los ejes.

A esta configuración de las rectas se le llama plano numérico o plano cartesiano.



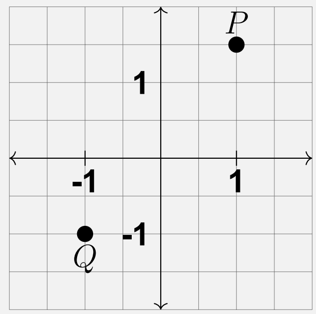


Un punto P del plano queda determinado por dos números. Uno ubicado en el eje x y otro ubicado en el eje y. Estos números se llaman coordenadas cartesianas del punto y se escriben (x, y). Para determinar estas coordenadas se trazan rectas perpendiculares a los ejes que pasen por el punto dado. Las coordenadas son los puntos de intersección de las rectas perpendiculares trazadas con los ejes respectivos.

De manera recíproca, dadas un par de coordenadas (x, y) estas representa un punto. Para ubicar el punto, se ubica la coordenada x en el eje x y se levanta una recta perpendicular a dicho eje que pase por x. De igual manera se ubica la coordenada y en el eje y y se traza una recta perpendicular al eje y que pase por y.

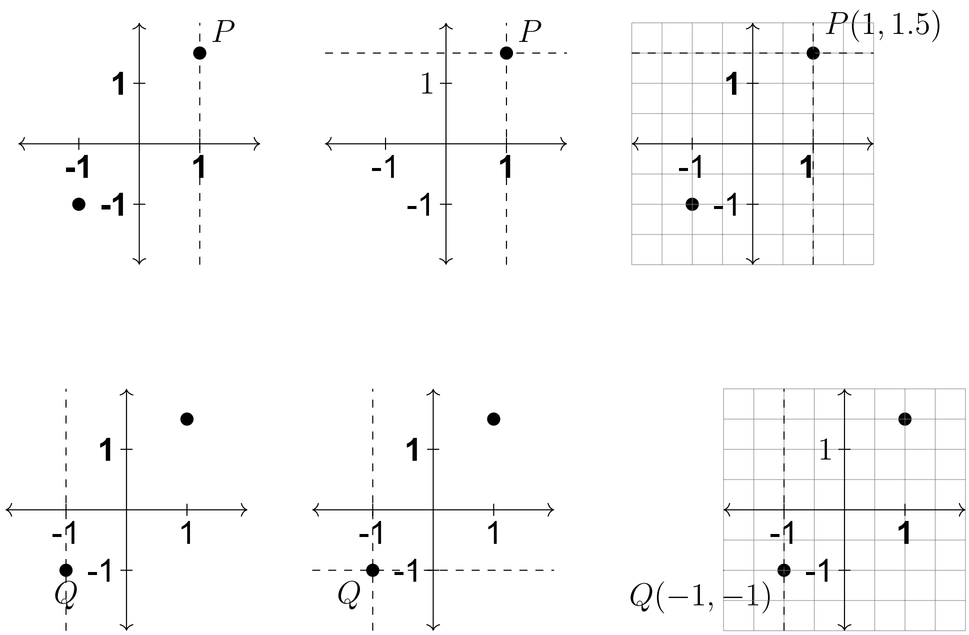
Ejemplo 2.7.1. Puntos en el plano

Diga cuales son las coordenadas de los puntos P y Q ubicados en el plano.



Puntos en el plano

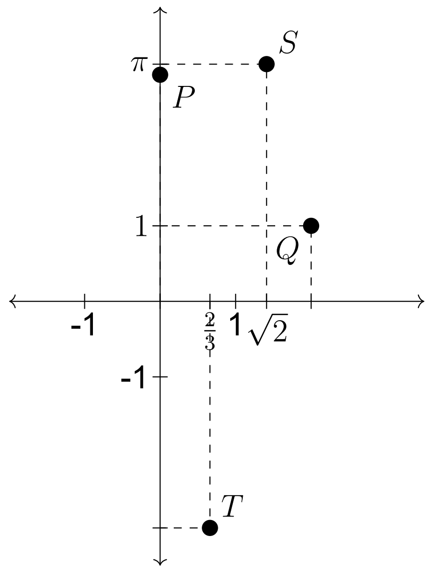
Solución



Ejemplo 2.7.2. Plano cartesiano

Grafique en el plano numérico los siguientes puntos $P(0,3)$, $Q(2,1)$, $S(\sqrt{2},\pi)$, $T\left(\frac{2}{3},-3\right)$.

Solución
En el plano cartesiano se muestran los puntos correspondientes:



Ver guía aquí o consulte el código QR al final del libro plano numérico
Ver video de plano númerico. ⊙

Ejercicios 6. Ubicar los siguientes puntos en el plano cartesiano.

(1) $A = (2, 3)$
(2) $B = (-1.5, -3.1)$
(3) $C = (\sqrt{3}, -2.5)$
(4) $D = (0, -4)$
(5) $E = (-4, 0)$
(6) $F = (2, \pi)$

Use WxMaxima para gráficar en el plano cartesiano.

7. Ubique diez puntos que se encuentren en una circunferencia de radio $r = 2$ y centrada en el origen.

8. Ubique tres puntos en una circunferencia de radio $r = 1$ y centrada en $A = (1/2, 3.2)$

9. Dados los siguientes puntos $A = (0, 4), B = (-4, 0), C = (4, 0)$ y $D = (0, -4)$ unirlos en el orden respectivo. ¿qué figura puede apreciar?

10. Ubique los siguientes puntos

    $(1, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 0), (1, 0), (2, 5), (4, 5), (5, 4), (4, 4), (3, 5)$ si los une uno detrás del otro que figura se puede apreciar.

11. Ubique los siguientes puntos:

    $(3,0),(6,0),(6,1),(7,1),(8,2),(8,4),(9,4),(8,6),(10,7),(1,7),(1,9),(7,9),(8,7),$
    $(1,7),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(3,6),(4,6),(4,5),(5,4),(5,7),(6,7),(8,6),(7,3),$
    $(8,3),(3,4),(4,3),(6,5),(7,5),(7,6),(6,5),(2,4),(3,1),(3,0)$

    Que figura puede apreciar si los une uno detrás del otro.

12. Grafica los puntos $(a-h,k)$, $(a+h,k)$, (h,k) , $(h,b-k)$ y $(h,b+k)$ para los siguientes valores

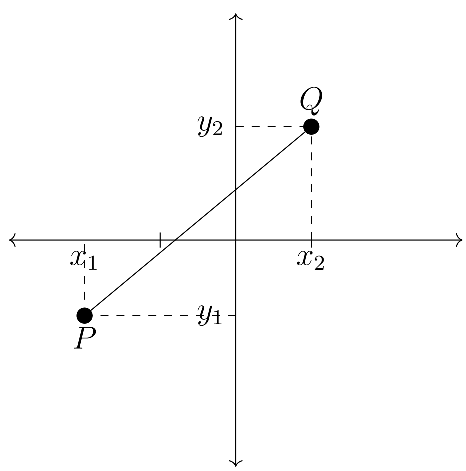
    a) $a=2$, $b=1$, $h=0$, $k=0$

    b) $a=1$, $b=3$, $h=2$, $k=3$

    c) $a=3$, $b=\frac{1}{2}$, $h=\sqrt{3}$, $k=\frac{e}{4}$

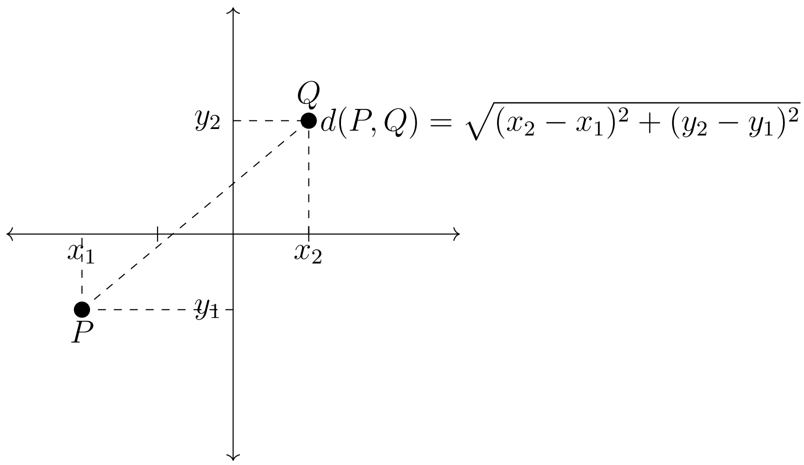
2.7.1. Segmentos, longitud y punto medio

Un segmento de recta queda determinado por su dos extremos. Si P y Q son los extremos del segmento, el segmento se denota por $\overline{PQ}$. Para graficar el segmento en el plano numérico se ubican los puntos en el plano utilizando sus coordenadas y se traza el segmento de recta.



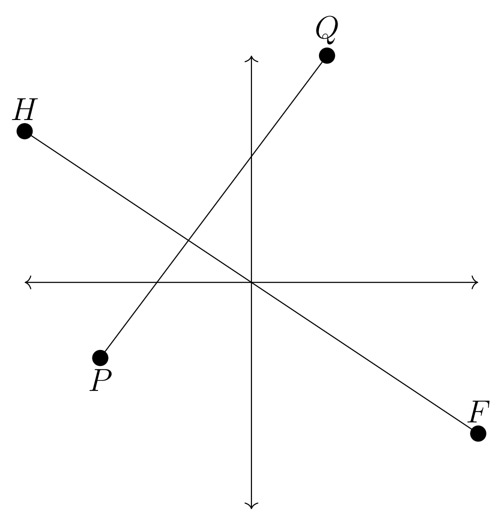
La longitud del segmento puede calcularse en término de las coordenadas de sus extremos. Más precisamente si P tiene coordenadas (x_1,y_1) y Q tiene coordenadas (x_2,y_2) entonces la distancia de P a Q denotada $d(P,Q)$, viene dada por

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{2.23}$$



Si se invierte el orden de los puntos la distancia no varía, es decir, $d(P,Q) = d(Q,P)$.

Ejemplo de segmento

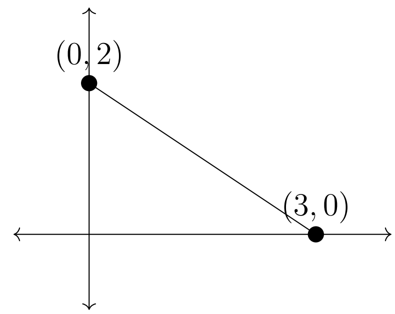


Ejemplo 2.7.3. Segmento

Para cada uno de los siguientes pares de puntos halle su posición en el plano, trace el segmento que determinan y halle la distancia entre ellos.

1. $(0,2)$ y $(3,0)$
2. $(-2,-3)$ y $(0,-4)$
3. $(2,500)$ y $(\frac{2}{3},300)$

Solución
Con la ecuación de distancia entre dos puntos se obtiene:



Remplazando en la ecuación (1) resulta:

$$d(A, B) = \sqrt{(0-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$$

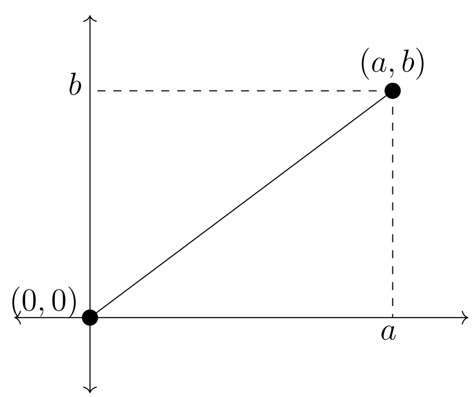
$$d(A, B) = \sqrt{(-2-0)^2 + (-3-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2-2/3)^2 + (500-(300))^2} = \sqrt{(4/3)^2 + (200)^2} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 22501}{3^2}} = \frac{4}{3}\sqrt{22501}$$

Ejemplo 2.7.4. Distancia al origen

Halle la distancia entre el origen y cualquier punto (a, b).

Solución



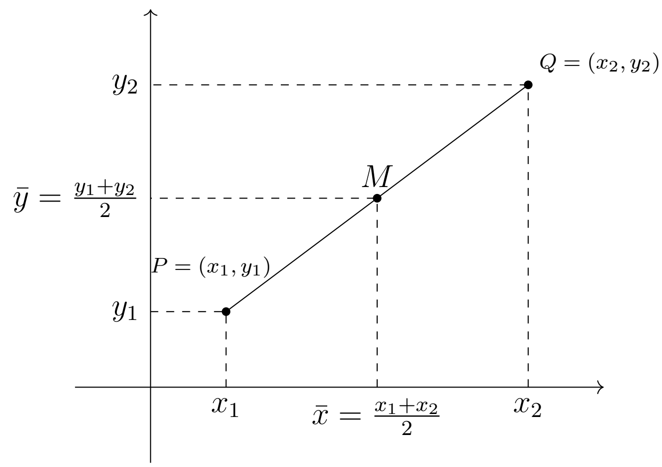
Las coordenadas del origen son $(0, 0)$ y el otro punto es (a, b). Así que la distancia entre los dos puntos son

$$d((0, 0), (a, b)) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si los extremos del segmento tienen coordenadas $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ y el punto medio del segmento es $M(\bar{x}, \bar{y})$ entonces $d(P, M) = d(M, Q)$ y

$$d(P, Q) = d(P, M) + d(M, Q) = 2d(P, M) = 2d(M, Q).$$

Para que las anteriores condiciones se cumplan entonces las coordenadas del punto medio deben ser



$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2.24}$$

Ejercicios 7. Plano cartesiano
Determine la longitud de los siguientes segmentos, cuyos extremos son:

1. $(-1, 3)$ y $(2, -2)$
2. $(2/3, 1/2)$ y $(-5/3, 2/5)$
3. $(2.5, -3)$ y $(0.5, 4)$
4. $(2a, 5a)$ y $(-a, 8a)$

Determine el punto medio de los siguientes segmentos, cuyos extremos son los siguientes:

5. $(0, 0)$ y $(5, 6)$
6. $(-1, 3)$ y $(2, -2)$
7. $(2/3, 1/2)$ y $(-5/3, 2/5)$
8. $(2.5, -3)$ y $(0.5, 4)$
9. $(2a, 5a)$ y $(-a, 8a)$
10. $(-5, \pi)$ y $(3, 4)$

Para cada uno de los siguientes pares de puntos halle las coordenadas del punto medio, trace el segmento que determinan y ubique el punto medio calculado anteriormente.

11. $(0,2)$ y $(3,0)$
12. $(-2,-3)$ y $(0,-4)$
13. $(2,500)$ y $(\frac{2}{3},300)$

Ver guía, click aquí o consulte el código QR al final del libro Plano numérico.
Determine la longitud de los segmentos, cuyos extremos son:

14. $(-1,3)$ y $(2,-2)$
15. $(2/3,1/2)$ y $(-5/3,2/5)$
16. $(2.5,-3)$ y $(0.5,4)$
17. $(2a,5a)$ y $(-a,8a)$

Determine el punto medio de los segmentos, cuyos extremos son los siguientes:

18. $(0,0)$ y $(5,6)$
19. $(-1,3)$ y $(2,-2)$
20. $(2/3,1/2)$ y $(-5/3,2/5)$
21. $(2.5,-3)$ y $(0.5,4)$
22. $(2a,5a)$ y $(-a,8a)$
23. $(-5,\pi)$ y $(3,4)$

2.8. Números complejos

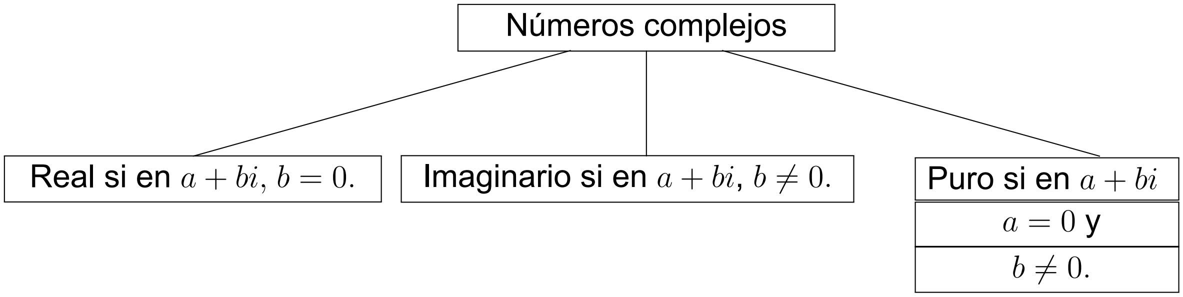
Se define i de tal manera que $i^2=-1$ e $i=\sqrt{-1}$. i se llama unidad imaginaria. Un número complejo es un número de la forma $a+bi$ donde a y b son números reales. La parte real del número complejo $a+bi$ es a y la parte imaginaria es b. En otras palabras, la parte imaginaria es la parte que aparece multiplicando a i. El número complejo $a-bi$ puede escribirse como $a+(-b)i$ o $(-b)i+a=-bi+a$.
Todo número real es complejo porque puede escribirse como $a=a+0i$. Es decir, un número complejo con parte imaginaria cero es un número real. Por ejemplo, los números 2 y π son complejos porque 2 puede escribirse como $2=2+0i$, y π puede escribirse como $\pi=\pi+0i$. El número 0 correspondiente a los números reales puede escribirse como $0=0+0i$ el cual es el cero complejo.
Un número complejo con parte imaginaria distinta de cero se llama número imaginario. Un número imaginario con parte real igual a cero se llama imaginario puro.
La parte imaginaria de $\frac{1}{2}$ es cero. La parte imaginaria de $\frac{1}{2}i$ es $\frac{1}{2}$ y la parte imaginaria de $-\frac{1}{2}i-4$ es $-\frac{1}{2}$.

1. $\pi, e, 1, 0$ son números complejos que son reales. Su parte imaginaria es cero.

2. $\pi i, 3-2i, \frac{7}{5}i-9, 8i$ son números complejos imaginarios, porque su parte imaginaria no es cero

3. $\pi i, 8i$ son números imaginarios puros porque su parte real es cero.

Con el siguiente esquema se visualiza los tipos de número complejos.



2.8.1. Representación gráfica de un número complejo

Un número complejo $a+bi$ puede representarse gráficamente como un punto del plano numérico. El punto que le corresponde es (a,b). Los números reales que son de la forma $a=a+0i$ corresponden a los puntos sobre el eje x que a su vez tienen la forma $(a,0)$ y los complejos que son imaginarios puros que son de la forma $ib=0+ib$ corresponden a puntos sobre el eje y que su vez tienen la forma $(0,b)$.

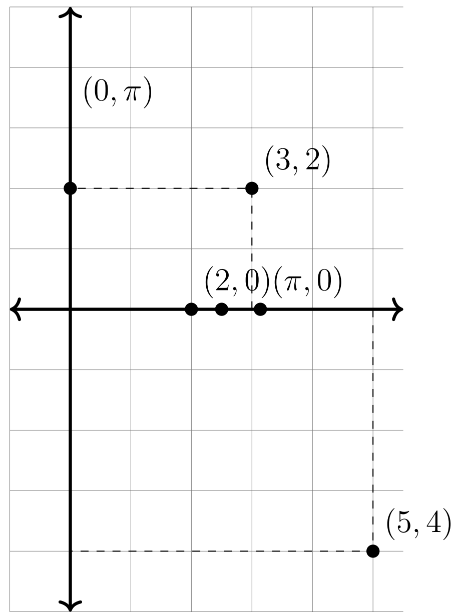
En general el número complejo $a+bi$ puede representarse como un punto del plano numérico con coordenadas (a,b).

Ejemplo 2.8.1. Número complejo

Ubique los siguientes números complejos en el plano:

$$2, \quad \frac{5}{2}, \quad \pi, \quad 2i, \quad i\pi, \quad 3+2i, \quad -4i+5$$

Solución
Ubique en el eje horizontal el imaginario puro y en el eje vertical el número real.



Definición 2.8.1: Norma de un número complejo

Se define la norma o módulo de un número complejo $a+bi$, notada $|a+bi|$, como

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Observe que la norma de un número complejo es la distancia entre el origen y el número complejo cuando se representa como punto en el plano, es decir, $|a+bi| = d((0,0),(a,b)) = \sqrt{a^2+b^2}$.

2.8.2. Operaciones con números complejos

Definición 2.8.2: Suma de números complejos

Se define la suma de los números complejos $a+bi$ y $c+di$ como

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(c+di)i$$

$$(a+bi)+(c+di) = \underbrace{(a+b)}_{\text{suma partes reales}} + \underbrace{(b+d)}_{\text{suma partes imaginarias}} i$$

Definición 2.8.3: Producto de números complejos

Se define el producto $(a+bi)(c+di)$ como

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Ejemplo 2.8.2. Producto de números complejos

Desarrolle los siguientes productos $(2+3i)(7-i)$ y $(a+bi)(a-bi)$.

Solución

$$\begin{aligned}(2+3i)(7-i) &= (2+3i)(7+(-1)i)\\ &= (2)(7)-(3)(-1)+((2)(-1)+(3)(7))i = 17+19i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi) &= (a+bi)(a+(-b)i)\\ &= (a)(a)-(b)(-b)+((a)(b)+(a)(-b))i = a^2+b^2.\end{aligned}$$

Definición 2.8.4: Conjugado de un número complejo

El conjugado del número complejo $a+bi$ es el número complejo $a-bi$.

Es decir el conjugado de un número complejo se consigue cambiando el signo a la parte imaginaria. El conjugado de $3-2i$ es $3+2i$. El conjugado de $-4i+45$ es $4i+45$. El conjugado de un número real es el mismo número real porque si a es real $a = a+0i = a-0i = a$.

La multiplicación de un número complejo por su conjugado da como resultado un número real que es la suma del cuadrado de la parte imaginaria con la suma del cuadrado de la parte real, es decir, si el número complejo es $a+bi$ entonces puede verse que

$$(a+bi)(a-bi) = (aa-abi-abi+(bi)(bi) = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2.$$

También observe que el producto de un número complejo y su conjugado es la norma al cuadrado,

$$|a+bi|^2 = a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi).$$

Definición 2.8.5: División de números complejos

Dados $a+bi$ y $c+di \neq 0$, la división $\dfrac{a+bi}{c+di}$ se define por

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}.$$

Es decir, para dividir $\dfrac{a+bi}{c+di}$ se multiplica $\dfrac{a+bi}{c+di}$ por el conjugado de la expresión en el denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2}(a+bi)(c-di).$$

Ejemplo 2.8.3. Conjugado

Hallar el conjugado del siguiente número complejo $\dfrac{1}{i}$.

Solución
La expresión en el denominador es i y su conjugado es $-i$. Por tanto la división es

$$\frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i.$$

Ejemplo 2.8.4. Cocientes de complejos

Halle el siguiente cociente:

$$(3+4i) \div (i-3)$$

Solución
Observe que la expresión en el denominador es $i-3$ y su conjugado es $-i-3$ (sólo se le cambia el signo a la parte imaginaria). Por tanto

$$\frac{3+4i}{i-3} = \frac{(3+4i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} = \frac{-15i-5}{1^2+3^2} = \frac{-5-15i}{10} = -\frac{5}{10} - \frac{15}{10}i = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Las raíces de índice par de números negativos son números imaginarios.
Más precisamente, si a es negativo y n es par se tiene que $\sqrt[n]{a}$ como $i\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{-a}\,i$.
Por ejemplo $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\,i$ y $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$.
Para efectos algebraicos, un número complejo puede tratarse como un binomio y esta sujeto, en la mayoría de los casos, a las propiedades que se cumplen en los números reales, potenciación, radicación, etc.
Por ejemplo, para la unidad imaginaria i se tiene que $i^0 = 1$, $i^1 = i$ y $i^2 = -1$. Para calcular las otras potencias puede escribirse

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)i = -i \\ i^4 &= i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^{10} &= i^{4\times2+3} = i^{4\times2} i^2 = (i^4)^2(-1) = (1)^2(-1) = -1. \end{aligned}$$

Potencias de i

En general para un número natural n se tiene que $i^n = i^r$ donde r es el residuo al dividir n entre 4.

Es decir si n dividido 4 tiene cociente q y residuo r entonces $n = 4q + r$ y

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}i^r = (i^4)^q i^r = (1)^q i^r = i^r.$$

Ejemplo 2.8.5. Potencias de i

Halle las siguiente potencias complejas:
(a) i^6 (b) i^{827}

Solución

(a) La división por 4 nos da

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}.$$

Se observa que el residuo es 2, de modo que $i^6 = i^2 = -1$.

(b) La división por 4 nos da

$$\begin{array}{r|l} 8\ 2\ 7 & 4 \\ \cline{2-2} 0\ 2\ 7 & 2\ 0\ 6 \\ 3 & \end{array}.$$

Se observa que el residuo es 3, de modo que $i^{827} = i^3 = -i$.

Ver vídeo número complejo i. $\odot$

Ejemplo 2.8.6. Potencias complejas

Expandir (a) $(a + bi)^2$ (b) $(a - bi)^2$ (c) $(2 - 3i)^2$ (d) $(4 + (\sqrt{-2})^3)^2$

Solución
(a)

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 &= a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2(-1) = a^2 - b^2 + 2abi\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(a - bi)^3 &= (a + (-b)i) = a^3 + 3a^2(-bi) + 3a(-bi)^2 + (-bi)^3 \\ &= a^3 - 3a^2bi + 3a(-b)^2i^2 + (-b)^3i^3 \\ &= a^3 - 3a^2bi + 3ab^2(-1) - b^3(-i) \\ &= a^3 - 3ab^2 - 3a^2bi + b^3 = a^3 - 3ab^2 + (b^3 - 3a^2b)i\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(2-3i)^2 &= 2^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2 = 4 - 12i + 3^2 i^2 \\ &= 4 - 12i + 9(-1) = 4 - 9 - 12i = -5 - 12i\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(4+(\sqrt{-2})^3)^2 &= (4+(\sqrt{2}\,i)^3)^2 \\ &= 4^2 + 2(4)(\sqrt{2}\,i)^3 + ((\sqrt{2}\,i)^3)^2 \\ &= 16 + 8(\sqrt{2})^3 i^3 + (\sqrt{2}\,i)^6 \\ &= 16 + 8(\sqrt{2})^3 i^3 + (\sqrt{2})^6 i^6.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, que $(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$, $i^3 = -i$ y que $i^6 = -1$ entonce se concluye que

$$\begin{aligned}(4+(\sqrt{-2})^3)^2 &= 16 + 8(2\sqrt{2})(-i) + 8(-1) = 16 - 8 - 16\sqrt{2}i \\ &= 8 - 16\sqrt{2}i\end{aligned}$$

Guía de números complejos, click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejercicios 8. Halle el valor de cada expresión algebraica para los valores dados.

1. $x = -\dfrac{\sqrt{3}i+1}{2}$, $x^2 + x + 1$
2. $t = \dfrac{\sqrt{3}i-1}{2}$, $t^2 + t + 1$
3. $y = -\dfrac{\sqrt{\sqrt{13}+5}}{\sqrt{2}}$, $y^4 - 5y^2$
4. $y = \dfrac{\sqrt{\sqrt{13}+5}}{\sqrt{2}}$, $y^2(y^2-5)$
5. $y = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{\sqrt{2}}$, $-y^2(5-y^2)$
6. $y = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{\sqrt{2}}$, $-5y^2 + 4$

2.9. Aplicaciones de propiedades

Recordemos que los símbolos que se usan son contenedores y que podemos combinar las diversas expresiones para obtener cosas interesantes.

Ejemplo 2.9.1. Factorización

Expresar $24x^3 + 18y^2x^9$ como producto de factores.

Solución

Observe que $24 = 2^3 \times 3$ y $18 = 2 \times 3^2$. Las potencias con base común son las potencias con base 2, base 3 y las potencias con base x. De las potencias de base 2 la que tiene menor exponente es $2 = 2^1$. De las potencias de base 3, la que tiene menor exponente es $3 = 3^1$ y las de base x la que tiene menor exponente es x^3. Por tanto para determinar el factor común se usa $(2)(3)(x^3) = 6x^3$. Es decir, la multiplicación es de la forma

$$6x^3(\cdots + \cdots),$$

en donde los puntos deben reemplazarse por las cantidades adecuadas.

Para determinar estas cantidades, se divide cada sumando original por el factor común. Así,

$$\text{sumando original} = 24x^3, \text{ división } = \frac{24x^3}{6x^3} = 4x^{3-3} = 4x^0 = 4(1) = 4$$

$$\text{sumando original} = 18y^2x^9, \text{ división } = \frac{18y^2x^9}{6x^3} = 3y^2x^{9-3} = 3x^6y^2.$$

Por tanto

$$24x^3 + 18y^2x^9 = 6x^3(4 + 3x^6y^2).$$

Como se puede observar a la derecha, se obtiene la forma inicial del ejercicio, por lo que extraer el factor común es aplicar la propiedad distributiva de forma inversa.

Resolver los siguientes ejemplos en forma paralela con las guías que están diseñadas en WxMaxima, para este tema consultar Guia de factorización.

Ejemplo 2.9.2. Factorización

Factorizar

$$(x+1)^{1/2} - \frac{x}{2}(x+1)^{-1/2}.$$

Solución

Se observa que el factor común es $(x+1)$ y la potencia de menor exponente es $(x+1)^{-1/2}$. Por tanto se divide cada sumando entre el factor común

$$\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{-\frac{1}{2}}} = (x+1)^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} = (x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = (x+1)^1 = x+1$$

$$\frac{\frac{x}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} = \frac{x}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}(x+1)^0 = \frac{x}{2}.$$

De modo que

$$\begin{aligned}(x+1)^{1/2}-\frac{x}{2}(x+1)^{-1/2} &= (x+1)^{-1/2}\left(x+1-\frac{x}{2}\right)\\ &= (x+1)^{-1/2}(x+\frac{2-x}{2}) = (x+1)^{-1/2}\left(\frac{2x+2-x}{2}\right)\\ &= (x+1)^{-1/2}\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}(x+2)\\ &= \frac{1}{2}\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.3. Factorización

Factorizar

$$\frac{1}{3}(3x+1)^{-2/3}(3)(2x-3)^{1/2}-(3x+1)^{1/3}[\frac{1}{2}(2x-3)^{-1/2}(2)].$$

Solución

Usando las propiedades fundamentales de la potenciación se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{3}{3}\frac{(2x-3)^{1/2}}{(3x+1)^{2/3}}-\frac{2}{2}\frac{(3x+1)^{1/3}}{(2x-3)^{1/2}} &= \frac{(2x-3)^{1/2+1/2}-(3x+1)^{2/3+1/3}}{(3x+1)^{2/3}(2x-3)^{1/2}}\\ &= \frac{2x-3-3x-1}{(3x+1)^{2/3}(2x-3)^{1/2}}\\ &= \frac{-x-4}{(3x+1)^{2/3}(2x-3)^{1/2}}\\ &= -(x+4)(3x+1)^{-2/3}(2x-3)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Algunas veces el factor común no aparece inmediatamente. Una agrupación adecuada o reescritura de los términos puede llevar a tener un factor común.

Ejemplo 2.9.4. Factorización

Factorizar la siguiente expresión:

$$6x^2-7x+2.$$

Solución

Observe que $6x^2-7x+2$ puede reescribirse como $6x^2-4x-3x+2$, se expandió de tal manera que la adición de estos dos términos de variable x genere a $-7x$ y el producto de los coeficientes genere a $6 \cdot 2 = 12$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x + 2 &= 6x^2 - 4x - 3x + 2 \\ &= (6x^2 - 4x) + (-3x + 2). \end{aligned}$$

De los grupos formados se extrae un factor común

$$6x^2 - 7x + 2 = 2x(3x - 2) + (-1)(3x - 2).$$

Se puede notar cuenta que el factor común ahora es $(3x - 2)$ y

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x + 2 &= 2x(3x - 2) + (-1)(3x - 2) \\ &= (3x - 2)(2x - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.5. Factorizar agrupando términos

Factorizar la siguiente expresión $x^4 - x^2 + x^3 - x$.

Solución

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + x^3 - x &= (x^4 - x^2) + (x^3 - x) \\ &= x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + x) \\ &= (x^2 - 1)x(x + 1) \\ &= x(x^2 - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

La expresión $x^2 - 1$ también puede factorizarse si se suma cero de una manera conveniente, es decir si se le suma y se resta la misma expresión. En este caso conviene sumarle y restarle x

$$x^2 - 1 = x^2 + (-x + x) - 1 = (x^2 - x) + (x - 1) = x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x + 1).$$

Así que la factorización completa es,

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + x^3 - x &= (x^2 - 1)x(x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1)x(x + 1) \\ &= x(x - 1)(x + 1)^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.6. Expandir

Expanda las potencias $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$ usando la propiedad distributiva.

Solución

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= a(a+b) + b(a+b) = aa + ab + ba + bb \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Por tanto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En forma análoga se hace la otra potencia.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)a - (a-b)b \\ &= a(a-b) - b(a-b) = aa - ab - ba + bb \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Por tanto

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.7. Expansión

Expandir el producto $(a+b)(a-b)$. Verifique que se obtiene el mismo resultado al hacer $(a-b)(b+a)$.

Solución

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)a - (a+b)b = a(a+b) - b(a+b) \\ &= aa + ab - ba - bb = a^2 + ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Lo anterior significa que el producto de la suma de dos números por la diferencia entre ellos está dado por la diferencia de los cuadrados de los números. El orden de la diferencia esta dado por la expresión que tiene el signo menos.

Ejemplo 2.9.8. Expansión

Expandir (a) $(3-x)(3+x)$ (b) $(7x+12yz)(7x-12yz)$ (c) $(\sqrt{2}+x)(-\sqrt{2}+x)$.

Solución

(a) $(3-x)(3+x) = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$.

(b) $(7x+12yz)(7x-12yz) = (7x)^2 - (12yz)^2 = 7^2x^2 - 12^2y^2z^2 = 49x^2 - 144y^2z^2$.

(c) $(\sqrt{2}+x)(-\sqrt{2}+x) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$.

Ejemplo 2.9.9. Factorizar

Expresar como producto (a) $x^2 - 4^2$ (b) $x^2z^2 - 81$ (c) $16y^4 - 5$.

Solución

(a) $x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$.

(b) $x^2z^2 - 81 = (xz)^2 - 9^2 = (xz+9)(xz-9)$.

(c) $16y^4 - 5 = (4y^2)^2 - (\sqrt{5})^2 = (4y^2 - \sqrt{5})(4y^2 + \sqrt{5})$.

Ejemplo 2.9.10. Expansión

Expandir usando la propiedad distributiva
(i) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
(ii) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Solución

(I)

$$\begin{aligned}
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= (a-b)a^2 + (a-b)ab + (a-b)b^2 \\
&= aa^2 - ba^2 + aab - bab + ab^2 - bb^2 \\
&= a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - b^3.
\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= (a+b)a^2 + (a+b)(-ab) + (a+b)b^2 \\
&= aa^2 + a^2b + a(-ab) + b(-ab) + ab^2 + bb^2 \\
&= a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + b^3.
\end{aligned}$$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro Guía en WxMaxima sobre expansión.

Ejemplo 2.9.11. Determine el valor de x

Hallar el valor de x en los reales, tal que $x + 2/5 = 3/4$.

Solución
Sume a ambos lados el opuesto de $2/5$

$$\begin{aligned} x + 2/5 + (-2/5) &= 3/4 + (-2/5) \\ x + 0 &= ((3)(5) + (4)(-2))/20 \\ x &= 7/20, \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.12. Simplificar

Simplificar la siguiente expresión $20/6$.

Solución
Se descompone cada número en factores.

$$\frac{20}{6} = \frac{10 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{3}.$$

Ejemplo 2.9.13. Multiplicación de binomios

Aplique la propiedad distributiva

1. $(x + a)(x + b)$.
2. $(ax + b)(cx + d)$.

Solución

1.

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b) &= (x + a)x + (x + a)b \\ &= xx + ax + xb + ab \\ &= x^2 + (a + b)x + ab. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (ax + b)(cx + d) &= (ax)(cx) + (ax)d + b(cx) + bd \\ &= acx^2 + adx + bcx + bd \\ &= acx^2 + (ad + bc)x + bd. \end{aligned}$$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro Guia de factorización
y ver los vídeos $\odot$.

Ejercicios 9.
Factorice las siguientes expresiones algebraicas:

1. $P^4 - 2P^8$
2. $xyz - xyz^3 + xyz$
3. $24a + 32b - 22c + 14d$
4. $ac + ad + bc + bd$
5. $6a(c-2) + 9b(c-2)$
6. $-14m^2 + 29m^4 - 12$
7. $p^3 + 3p + 2p + 5$
8. $-4n^7 + 36n^3 - 24n^4 + 12n^3 - 16n^5$
9. $20m^3n + 35m^2n^3 + 10mn + 5m^4$
10. $-34m^5 + 11m^3 + 23m^4 + 19m^2 - m$
11. $\frac{25}{3}p^4 - \frac{2}{4}p^3$
12. $9a(n+m)+15b(n+m)-5ab(n+m)$
13. $49ab(x+2y) - 35ab(x+2y) - +56b(x+2y) - 7b(x+2y)$
14. $12(p+3) - 4q(p+3) - r(p+3) + 18(p+3)$
15. $\frac{3}{4}p - \frac{27}{12}p^3 + \frac{6}{12}p^2$
16. $(r^2+3)4 + (r^2+3)56 - 6(r^2+3) + 1(r^2+3)$
17. $-15c^2 + 24c^4 - 3c^2 + 51c^3 - 6c^2$
18. $m^5 - m^7 + m^9$

Multiplique las siguientes expresiones algebraicas

19. $(2a-3b)(a^2+6)$
20. $2/3(xy^3+z)(x+y)$
21. $\dfrac{x+1}{x}(2y - 3x^5)$
22. $(a+b)(a-2b)(x+y)$

2.10. Completación de cuadrados

A menudo es necesario completar un binomio de la forma ax^2+bx para convertirlo en la forma $a\left(x+\boxed{?}\right)^2 - \left(\boxed{?}\right)^2$ donde el signo de interrogación se reemplaza por una cantidad adecuada. Primero se trabajará el caso x^2+bx y luego el caso ax^2+bx+c.

(I) Caso x^2+bx. Se ordena en potencias descendentes respecto a x. Se suma y se le resta la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, es decir, la mitad del coeficiente de la variable con exponente 1.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Ejemplo 2.10.1. Completado cuadrado

Complete el cuadrado para $x^2 + 4x$.

Solución

Observe que el coeficiente de la potencia con exponente 1 es 4, es decir, $b = 4$. La mitad al cuadrado es $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4$. Así se obtiene,

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + (2)^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4.$$

Ejemplo 2.10.2. Completando cuadrado

Caso de la forma $ax^2 + bx$.

Solución

(II) Caso $ax^2 + bx$. Para trabajar este caso, primero se convierte al primer caso factorizando a.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx &= a\overbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}^{\text{completar}} \quad \text{mitad de } \tfrac{b}{a} \text{ es } \tfrac{1}{2}\tfrac{b}{a} \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \qquad = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

En WxMaxima se puede programar una fórmula para que determine automáticamente el término adecuado y necesario para completar el cuadrado, ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro guía Completando cuadrado.

Ejemplo 2.10.3. Completando cuadrados

Complete el cuadrado en las siguientes expresiones

a) $4x^2 + 12x$ b) $\dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x$

Solución

a) $4x^2 + 12x = 4(x^2 + 3x)$

$$\begin{aligned}
4(x^2+3x) &= 4\left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\\
&= 4\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\\
&= 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&= 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 3
\end{aligned}$$

b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}(x^2 - \frac{2}{3}x)$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) &= \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right)\\
&= \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\\
&= \frac{3}{4}\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\\
&= \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\\
&= \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{9}\\
&= \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10.4. Completando cuadrados

Escriba la expresión $x^2 - 2x + 4$ en la forma $a(x-h)^2 + k$,
en donde h y k son constantes que se debe elegir de forma adecuada.

Solución

Puesto que el resultado debe tener un término de la forma $(x-h)^2$ esto sugiere que podría completarse el cuadrado sin alterar la expresión. Como el término al cuadrado tiene coeficiente 1 se procede a completar el cuadrado en la variable x sumando la mitad del coeficiente de la variable con exponente 1.

$$x^2-2x+4=x^2-2x+1^2-1^2+4=(x-1)^2+3.$$

Así que $x^2-2x+4=a(x-h)^2+k$ con $a=1$, $h=1$ y $k=3$.

Ejemplo 2.10.5. Completando cuadrados

Escriba la expresión $3x^2+x-4$ en la forma $a(x-h)^2+k$,
en donde h y k son constantes que se debe elegir de forma adecuada.

Solución

Puesto que hay un término de la forma $(x-h)^2$ esto sugiere que podría completarse el cuadrado sin alterar la expresión. Siguiendo las recomendaciones, se factoriza 3 de $3x^2+x$

$$3x^2+x-4=3\left(x^2+\frac{1}{3}x\right)-4.$$

Luego se completa el cuadrado dentro del paréntesis, sumando y restando la mitad del coeficiente de x al cuadrado,

$$3x^2+x-4=3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)-4.$$

Dentro del paréntesis no se necesita, a $-\left(\frac{1}{6}\right)^2$, así que se utiliza la propiedad distributiva para extraer como factor común,

$$3x^2+x-4=3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)-3\left(\frac{1}{6}\right)^2-4$$

$$\begin{aligned}3x^2+x-4&=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-3\left(\frac{1}{36}\right)-4\\&=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)-4\\&=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)-4\\&=3\left(x-\underbrace{\left(-\frac{1}{6}\right)}_{h}\right)^2\underbrace{-\frac{49}{12}}_{k}.\end{aligned}$$

Es decir $3x^2 + x - 4 = a(x-h)^2 + k$, donde $a = 3$, $h = -\frac{1}{6}$ y $k = -\frac{49}{12}$.

Ejemplo 2.10.6. Completando cuadrado

Complete el cuadrado en x y y para la expresión

$$y^2 - 8y + x^2 - 4x + 20 = 9$$

y póngala en la forma $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ eligiendo h, k, r en forma adecuada.

Solución

Se asocian los términos en x y y a un lado de la igualdad y se completan los cuadrados en los paréntesis

$$\begin{aligned}(x^2-4x)+(y^2-8y) &= 9-20=-11\\ (x^2-4x+2^2-2^2)+(y^2-8y+4^2-4^2) &= -11.\end{aligned}$$

Dentro de los paréntesis no se necesitan los términos -2^2 y -4^2 así se sacan del paréntesis usando la propiedad distributiva y se suman al otro lado con signo opuesto para balancear la igualdad

$$\begin{aligned}(x^2-4x)+(y^2-8y) &= 9-20=-11\\ (x^2-4x+2^2-2^2)+(y^2-8y+4^2-4^2) &= -11\\ (x^2-4x+2^2)+(y^2-8y+4^2) &= -11+2^2+4^2\\ (x-2)^2+(y-4)^2 &= -11+4+16=9=3^2.\end{aligned}$$

Puede verse que $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$ tiene la misma estructura que

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

donde $h = 2$, $k = 4$ y $r = 3$.

Ejemplo 2.10.7. Completando cuadrado

Complete el cuadrado en x y y para la expresión

$$4y^2 + 32y + 9x^2 - 36x + 100 = 36$$

y póngala en la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ eligiendo h, k, a y b en forma adecuada.

Solución

$$\begin{aligned}
9x^2 - 36x + 4y^2 + 32y &= 36 - 100\\
9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 8y) &= -64\\
9(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 4(y^2 + 8y + 4^2 - 4^2) &= -64\\
9(x^2 - 4x + 2^2) - 9(2^2) + 4(y^2 + 8y + 4^2) &= -64\\
9(x-2)^2 + 4(y+4)^2 &= -64 + 9(2^2) + 4(4^2)\\
&= -64 + 36 + 64 = 36\\
9(x-2)^2 + 4(y+4)^2 &= 36.
\end{aligned}$$

Puesto que debe haber un 1 al lado derecho, se divide por 36 toda la expresión, y se simplifica a

$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y+4)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-(-4))^2}{9} = 1.$$

Entonces $h = 2$, $k = -2$, $a^2 = 4$ de donde $a = 2$ y $b^2 = 9$ de donde $b = 3$.

Ejemplo 2.10.8. Completando cuadrado

Escriba la expresión $ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$ en la forma $a(x-h)^2 + k$, en donde h y k son constantes que debe elegir en forma adecuada.

Solución

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c\\
x^2 + \frac{b}{a}x &= x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&= \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c\\
&= a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&= a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{ab^2}{4a^2}\\
&= a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Así se observa que $h=\dfrac{-b}{a}$ y $k=c-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro Guia completando cuadrados y ver vídeo 001 y vídeo 002. ⊙

Ejercicios 10. Complete el cuadrado de las siguientes expresiones

1. x^2+6x+5
2. x^2+4x+3
3. $x^4+x^2y^2+y^4$
4. $1+8x^4$
5. $x^{12}+64$
6. $(x-2)^2-4(x-2)-5$
7. $9x^{12}+23x^6+144$
8. $t^2-10t-24$
9. g^2-6g+8

2.11. Factorización

Se quiere descomponer x^2+3x+2 en dos factores de la forma $(x+n_1)(x+n_2)$ de tal manera que

$$x^2+3x+2=(x+n_1)(x+n_2)=x^2+(n_1+n_2)x+n_1n_2.$$

Se deben elegir n_1 y n_2 tal que $2=n_1n_2$ (términos constantes)) y $3=n_1+n_2$ (coeficiente de la variable con exponente 1).
Vemos que 2 y 1 son dos números cuyo producto es dos y su suma es tres por lo tanto

$$(x+3)(x+1)=x^2+3x+2.$$

Ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Factorización.
En general, para factorizar un trinomio de la forma x^2+bx+c, observe que el coeficiente del término cuadrado es 1, se buscan dos números n_1 y n_2 tal que $n_1\cdot n_2=c$ y $n_1+n_2=b$. La factorización es entonces

$$x^2+bx+c=(x+n_1)(x+n_2).$$

Aprendimos a factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ buscando números n_1 y n_2 tal que $n_1 \cdot n_2 = c$ y $n_1 + n_2 = b$.
Cuando este no es el caso, es decir cuando el coeficiente del término de orden dos ax^2+bx+c donde $a \neq 1$, se usan estrategias alternativas. Antes que nada, se sugiere ordenar el trinomio en orden descendente, de las potencias en la variable de interés. Una de ellas es transformar el problema en otro equivalente donde el coeficiente sea 1. Esto se hace mediante un cambio de variable; se escribe:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} \\ &= \frac{a^2x^2 + b(ax) + ac}{a} \\ &= \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}. \end{aligned}$$

Al hacer el reemplazo $u = ax$ en esta última expresión nos queda

$$ax^2 + bx + c = \frac{u^2 + bu + ac}{a}$$

que se reduce al caso anterior en el numerador, pero ahora con la variable u. Se continúa el ejercicio buscando dos números cuyo producto es ac y cuya suma es b y luego se simplifica.

Ejemplo 2.11.1. Factorización

Factorizar la siguiente expresión $6x^2 - 14x + 4$.

Solución
Hacemos la sustitución $u = 6x$ en

$$\begin{aligned} 6x^2 - 14x + 4 &= \frac{6(6x^2) - 14(6x) + (6)(4)}{6} \\ &= \frac{6^2x^2 + -14(6x) + (6)(4)}{6} \\ &= \frac{(6x)^2 - 14(6x) + 24}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{(6x)^2 - 14(6x) + 24}{6} = \frac{u^2 - 14u + 24}{6}.$$

Dos números que multiplicados dan 24 y sumados dan -14 son -12 y -2 así

$$\begin{aligned}\frac{u^2-14u+24}{6} &= \frac{(u-12)(u-2)}{6}\\ &= \frac{(6x-12)(6x-2)}{6}\\ &= \frac{6(x-2)2(3x-1)}{6}\\ &= 2(x-2)(3x-1).\end{aligned}$$

En conclusión

$$6x^2-14x+4 = 2(x-2)(3x-1).$$

Ver vídeo con click aquí o consulte el código QR al final del libro . ⊙

Ejemplo 2.11.2. Factorización

Factorizar $2x^2-3x+1$.

Solución
Se hará el cambio de variable $u=2x$.

$$\begin{aligned}2x^2-3x+1 &= \frac{2(2x^2-3x+1)}{2} = \frac{2^2x^2-3(2x)+(1)(2))}{2}\\ &= \frac{(2x)^2-3(2x)+2)}{2} = \frac{u^2-3u+2}{2}\\ &= \frac{(u-1)(u-2)}{2} = \frac{(2x-1)(2x-2)}{2}\\ &= \frac{(2x-1)2(x-1)}{2} = (2x-1)(x-1).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11.3. Factorización

Factorizar la siguiente expresión $8-4t^2-14t$.

Solución
Primero se ordenan las variables en orden descendente,

$$8-4t^2-14t = -4t^2-14t+8.$$

La idea es hacer el cambio de variable $u=-4t$

$$\begin{aligned}
-4t^2 - 14t + 8 &= \frac{-4(-4t^2 - 14t + 8)}{-4} = \frac{(-4)^2t^2 - 14(-4t) + (8)(-4)}{-4} \\
&= \frac{(-4t)^2 - 14(-14t) - 32}{-4} = \frac{u^2 - 14u - 32}{-4} \\
&= \frac{(u-16)(u+2)}{-4} = \frac{(-4t-16)(-4t+2)}{-4} \\
&= \frac{-4(t+4)(-2)(2t-1)}{-4} = -2(t+4)(2t-1).
\end{aligned}$$

Otra estrategia equivalente para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c consiste en descomponer el término bx en dos términos semejantes de tal manera que el producto de sus coeficientes numéricos coincida con el producto ac, generando así una expresión de cuatro términos $ax^2 + Mx + mx + c$, con $M + m = b$ y $Mm = ac$ esto garantiza que se pueda factorizar por agrupación $(ax^2 + Mx) + (mx + c)$.

Ejemplo 2.11.4. Factorización

Factorice la siguiente expresión $6x^2-14x+4$, por descomposición y agrupación de términos.

Solución

Se descompone el término del medio de tal manera que el producto sea 24 y la suma sea -14

$$6x^2 - 14x + 4 = 6x^2 - 12x - 2x + 4$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
6x^2 - 14x + 4 &= 6x^2 - 12x - 2x + 4 \\
&= (6x^2 - 12x) + (-2x + 4) \quad \text{se agrupan en par} \\
&= 6x(x-2) - 2(x-2) \quad \text{se aplica factor común} \\
&= (x-2)(6x-2) \\
&= 2(x-2)(3x-1).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11.5. Factorización

Factorizar la siguiente expresión $8 - 4t^2 - 14t$.

Solución

Descomponer el término del medio (después que esté ordenado), de tal manera que la descomposición cumpla lo siguiente: el producto corresponda $-4 * 8$ y la suma efectivamente sea la del centro -14 esto es: -16 y 2, con estas condiciones se obtiene:

$$\begin{aligned} -4t^2-14t+8 &= -4t^2-16t+2t+8 = (-4t^2-16t)+(2t+8) \\ &= -4t(t+4)+2(t+4) = (t+2)(-4t+2) \\ &= -2(t+2)(2t-1). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11.6. Factorización

Factorice usando factor común por agrupación. $2x^2-3x+1$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2x^2-2x-x+1 \\ &= (2x^2-2x)-(x-1) \\ &= 2x(x-1)-(x-1) \\ &= (x-1)(2x-1). \end{aligned}$$

Factorización de expresiones de la forma x^2-b^2

Una forma sencilla de memorizar, pero que tiene sus raíces con las propiedades fundamentales de los números reales, el método consiste en expandir para luego recurrir al factor común, esto es: convirtiendo este binomio en un cuatrinomio $x^2-b^2 = x^2+0+b^2 = x^2+bx-bx+b^2 = (x^2+bx)-(bx+b^2) = x(x+b)-b(x+b) = (x+b)\cdot(x-b)$ en lo que se resume a la forma

$$x^2-b^2 = (x-b)\cdot(x+b).$$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro vídeo 001 ⊙ vídeo 002 ⊙ vídeo 003 ⊙ vídeo 004 ⊙.

Ejercicios 11.
Factorice las siguientes expresiones algebraicas, usando WxMaxima, ver guía Factorización.

1. P^4-2P^8
2. $xyz-xyz^3+xyz$
3. $24a+32b-22c+14d$
4. $ac+ad+bc+bd$
5. $6a(c-2)+9b(c-2)$
6. $-14m^2+29m^4-12$
7. $p^3+3p+2p+5$
8. $-4n^7+36n^3-24n^4+12n^3-16n^5$
9. $20m^3n+35m^2n^3+10mn+5m^4$
10. $-34m^5+11m^3+23m^4+19m^2-m$

11. $\frac{25}{3}p^4 - \frac{2}{4}p^3$
12. $9a(n+m)+15b(n+m)-5ab(n+m)$
13. $49ab(x + 2y) - 35ab(x + 2y) - +56b(x+2y) - 7b(x+2y)$
14. $12(p+3) - 4q(p+3) - r(p+3) + 18(p+3)$
15. $\frac{3}{4}p - \frac{27}{12}p^3 + \frac{6}{12}p^2$
16. $(r^2+3)4 + (r^2+3)56 - 6(r^2+3) + 1(r^2+3)$
17. $-15c^2 + 24c^4 - 3c^2 + 51c^3 - 6c^2$
18. $m^5 - m^7 + m^9$
19. $(a+b)(r-1) + (a-b)(r-1)$
20. $3x^3 + 9x^2 - 6x^5$
21. $3lm + 27nl + 15mr - 12nr$
22. $-36abn^3 + 12a^2n^3 - 4a^3bn - 8abn$
23. $(m+n-1)(m^2+1) - m^2$
24. $(3a+1)(a+b+c) - (3a+1) - (a+b+1)(3a+1)$
25. $5opq - 15opq + 10opq^3 + 25o^2pq$
26. $4r^2 + 11r^3 - 8r^5 + 7r^8 - r^4$
27. $9ab^3 - 6na^2b^3 + 3na^3b^3 - 15n^2a^4b^3$
28. $\frac{6}{12}xp + \frac{1}{2}xm - \frac{2}{4}yp - \frac{8}{16}ym$
29. $9m^6+12m^3+27m^5-36m^3-21m^2+15m + 24m^4$
30. $\frac{3}{4}lm - \frac{6}{7}rm + \frac{5}{6}ln - \frac{9}{8}rn$
31. $x^3-4x^5+6x^3-8x^2+19x^4-13x^2-22x^3$
32. $\frac{1}{2}pq - \frac{4}{3}p - \frac{8}{2}q + \frac{3}{2}pq + 13p - 1q$
33. $16n + 22nx - 12n + 13nx - 34n + 65n+19nx+19n+17nx+36n+11nx$
34. $7n(m+13) + (7m+8)$
35. $8(ab+c) + 3(4ab+9)$
36. $p^2 - 2p - 48$
37. $a^2 + 9a + 20$

Factorice las siguientes expresiones algebraicas, usando WxMaxima.

38. $m^2 + 9m + 18$
39. $x^2 + 13x + 40$
40. $n^2 + 9x + 14$
41. $x^2 + 6x + 8$
42. $q^2 + 2q - 63$
43. $a^2 - a - 6$
44. $81x^2 + 63x + 12$
45. $9p^2 + 21p + 10$
46. $25t^2 + 30t + 8$
47. $16b^2 + 12b - 18$
48. $49f^2 - 28f - 5$
49. $4y^2 + 2y - 12$
50. $16x^2 + 40x + 9$
51. $49p^2 + 56p + 15$
52. $9y^2 + 15y - 24$
53. $-4t^2 - 14t + 8$
54. $p^4 + 12p^2 + 25$
55. $x^8 + 14x^4 + 45$

56. $m^4 + 11m^2 + 24$
57. $a^2 - b^2$
58. $a^3 + b^3$
59. $9m^2p^4 - 16k^8r^2$
60. $36p^2 - 25k^6$
61. $4x^4 - 9r^2b^8$
62. $64a^2 - 16k^2$
63. $49n^2 - 25r^4$
64. $81x^4 - 16p^2$
65. $4m^6n^8 - 36p^4$
66. $25a^2b^4 - 81c^8d6$
67. $121x^6 - 9y^{12}c^4$
68. $4y^6y^4 - 49c^2p^{16}$
69. $3p^2 + 5k3p^2 - 5k$
70. $7r^4z^2 + 4a7r^4z^2 - 4a$
71. $8c^2d^4 + 2x^2y8c^2d^4 - 2x^2y$
72. $5p + 7r5p - 7r$
73. $2xy + 9r^2c2xy - 9r^2c$
74. $11op^3 - 2k11op^3 + 2k$
75. $\{3m^2n - 7ab^3\}\{3m^2n + 7ab^3\}$
76. $\{9p^2q - 5cd^3\}\{9p^2q + 5cd^3\}$
77. $\{4k + 6mp^4\}\{4k - 6mp^4\}$
78. $81x^8y^2z^{10} - 144a^6b^{12}c^4$
79. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 9$

2.12. Racionalización y simplificación

A menudo en los cálculos conviene multiplicar y dividir por una expresión adecuada con el ánimo de convertir la expresión dada en una expresión más simple. Otras veces conviene hacer una factorización para simplificar.

Ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Simplificación.

La expresión que generalmente se escoge es una que complemente cierta estructura conocida. Por lo general se escogen las cantidades teniendo en cuenta las siguientes directrices

1. Para completar la estructura $a^2 - b^2$ dada $(a+b)$ se multiplica por $(a-b)$ porque $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. Para completar la estructura $a^2 - b^2$ dada $(a-b)$ se multiplica por $(a+b)$ porque $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

3. Para completar la estructura $a^3 - b^3$ dada $(a-b)$ se multiplica por $(a^2 + ab + b^2)$ porque $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

4. Para completar la estructura $a^3 - b^3$ dada $(a^2 + ab + b^2)$ se multiplica por $(a-b)$ porque $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Ejemplo 2.12.1. Simplificación

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}.$$

Solución

Observe que en el numerador aparece una expresión cuadrada menos otra expresión. Esto sugiere que podría ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2$ y por tanto

$$\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}=x+\sqrt{2}.$$

Ejemplo 2.12.2. Simplificación

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt{7}-2x}{8x^3-7}.$$

Solución

Observe que en el denominador aparecen dos términos, una expresión al cubo menos otra expresión lo que sugiere que podría ser una diferencia de cubos. Se tiene por un lado que $8x^3=2^3x^3=(2x)^3$. Por el otro $7=(\sqrt[3]{7})^3$. Así

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{7}-2x}{8x^3-7}&=\frac{-(2x-\sqrt{7})}{(2x)^3-(\sqrt[3]{7})^3}\\&=\frac{-(2x-\sqrt{7})}{(2x-\sqrt{7})((2x)^2+(2x)(\sqrt[3]{7})+(\sqrt[3]{7})^2)}\\&=\frac{-1}{4x^2+2\sqrt[3]{7}x+(\sqrt[3]{7})^2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.12.3. Simplificación

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{x^2-2}{x^3-2^{3/2}}.$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2}{x^3-2^{3/2}} &= \frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{x^3-(\sqrt{2})^3}\\ &= \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2)}\\ &= \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.12.4. Racionalización

Eliminar los radicales en el numerador de la expresión

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

y simplificar.

Solución

Observe que al ser raíces cuadradas las cantidades $\sqrt{x+h}$ y $\sqrt{x}$ elevadas al cuadrado eliminan los radicales. Se puede entonces multiplicar en el numerador y el denominador por $(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$. Aprovechando que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, se escribe

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+x)} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+x)}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+x)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+x}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.12.5. Simplificación

Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{(x^4-b^8)(a-b)}{(x^2+a^4)(a^3-b^3)}.$$

Solución

En la expresión podemos identificar que es posible expandir x^4-b^8 y a^3-b^3, de esta forma podemos expresarla así:

$$\frac{(x^2-b^4)(x^2+b^4)(a-b)}{(x^2+a^4)(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{x^2-b^4}{a^2+ab+b^2}.$$

Ejemplo 2.12.6. Racionalización

Racionalizar el numerador

$$\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

Solución

Observe que al elevar las raíces cúbicas al cubo se simplifican los términos a $(\sqrt[3]{x+h})^3 = x+h$ y $(\sqrt[3]{x})^3 = x$. Por tanto, dado $\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}$ se busca una expresión que multiplicada con este término de $(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3$. Esta expresión buscada se obtiene de

$$\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3 = (\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\underbrace{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)}_{\text{buscada}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{h(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{h(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} \\
&= \frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}.
\end{aligned}$$

Usar guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Simplificación.

Ejercicios 12.

Racionalice cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{3}{1-\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{1}{5+\sqrt{3}}$
3. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$
4. $\dfrac{2}{\sqrt[7]{2}}$
5. $\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Racionalizar la siguiente fracción con parámetros:

7. $\dfrac{\sqrt[2]{a}}{2-\sqrt[2]{a}}$
8. $\dfrac{\sqrt[2]{a+b}}{\sqrt[2]{a+b}-\sqrt[2]{a-b}}$

9. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

10. $(a+b+\sqrt{a^2+b^2})$

11. $(3+\sqrt{a})(3-\sqrt{a})$

12. $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{n}}$

14. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

Realice las siguientes divisiones

15. $\dfrac{-15x^3}{5x}$

16. $\dfrac{x^{n+2}y^{n+1}}{x^{n+1}y^n}$

17. $\dfrac{x^3+3x^2-38x-10}{x-5}$

18. $\dfrac{x^5-2x^4-4x^2-3x-1}{x^3+2x-1}$

19. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$

20. $\dfrac{3x^3-x^2+2x+2}{x^2+x+1}$

21. $\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

22. $\dfrac{b^3-8}{b-2}$

23. $\dfrac{6m^2-m-30}{2m-5}$

2.13. Ecuaciones

Definición 2.13.1: Ecuación

Una ecuación esta constituida por dos expresiones relacionadas mediante el signo “=”.

Ejemplo 2.13.1. Ecuaciones

A continuación se presentan algunas ecuaciones.

Solución

1. $8=5+3$
2. $(x+3)^2=x^2+6x+9$
3. $8x+2=x(x+5)$
4. $3x+a=a^2+4$

Una variable es la representación de un elemento cualquiera dentro de un conjunto dado.
Consideremos dos tipos de ecuaciones algebraicas, unas denominadas identidades y las otras ecuaciones condicionadas.

Definición 2.13.2: Identidad

Una identidad es una ecuación que siempre es cierta para todos los valores posibles que tome la variable, como por ejemplo $5x = 2x+3x$, $(3x+15)/3-x = 5$.

Una ecuación condicional, es una ecuación algebraica que puede ser verdadera o falsa, de acuerdo a los valores que tome la variable dentro de conjunto dado.

Ejemplo 2.13.2. Ecuaciones

Estime el valor que puede tomar x para que sea cierta la ecuación:

$$(a).\quad 2x+4=10 \qquad\qquad (b).\quad x^2+2=6$$

Solución

(a). $2x+4 = 10$ es verdadera si x toma el valor de 3 y falsa para cualquier otro valor de x en el conjunto de los reales.

(b). $x^2+2=6$ es cierta si x toma los valores de 2 o -2, y es falsa para cualquier otros valores de x.

Así podemos definir como conjunto solución de la ecuación al conjunto de todas las x que hacen que la ecuación sea cierta.
La solución de una ecuación a menudo se le llama raíz de la ecuación y a la variable algunas veces se le denomina incógnita.
Cuando nos referimos a *resolver una ecuación*, significa que hay que hallar el conjunto solución de la ecuación. Es decir, hallar todos los posibles valores de la variable que hacen cierta la ecuación.

Ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Ecuaciones.

Ejemplo 2.13.3. Ecuaciones

Determine el valor de x para el cual la ecuación $1+3x=7$ es cierta.

Solución
$1+3x = 7$ cuando el número 2 se sustituye por la x, la ecuación original se transforma en una identidad numérica $1+6=7$.

Ejemplo 2.13.4. Ecuación

Analice la ecuación $\dfrac{1}{x+2} = 0$ y determine el valor que puede tomar x para que sea cierta.

Solución
La ecuación $\frac{1}{x+2} = 0$ no presenta solución, ya que no existe ningún valor para x que haga que la ecuación sea cierta.

2.13.1. Propiedades fundamentales de las ecuaciones

Si a los miembros de una ecuación se le suma o resta una misma cantidad la igualdad se mantiene.

Teorema. 2.13.1:

si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ o $a - c = b - c$.

Si a los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número (diferente de cero), la igualdad se mantiene.

Teorema. 2.13.2:

Si $a = b$ entonces $a * c = b * c$ o bien $a/c = b/c$ con c distinto de cero.

Si a los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia la igualdad se mantiene.

Teorema. 2.13.3:

Si $a = b$ y n un número entero distinto de cero, entonces $a^n = b^n$

Ejemplo 2.13.5. Ecuación

Determine el valor de x, para $3x - 5 = x + 7$

Solución
Usando las propiedades correspondientes a las ecuaciones se obtiene:

$$3x - 5 = x + 7$$

Usando la propiedad de adicionar en ambos lados una misma cantidad.

$$3x - x - 5 + 5 = x + (-x) + 7 + 5$$

Adicionando términos semejantes, se obtiene:

$$2x = 12$$

Multiplicando por el inverso de 2, este es $\frac{1}{2}$, en ambos lados de igualdad.

$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}12$$

y así:

$$x = 6$$

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro vídeo de Ecuaciones. $\odot$

Nota:

No puede concluirse que si $a^n = b^n$ entonces $a = b$. Por ejemplo $(-2)^2 = 2^2$, sin embargo $-2 \neq 2$.

Ejercicios 13.

Determine la solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

1. $5 + 6x = 2$
2. $5y + 1 = 6$
3. $b + 1 = -18$
4. $5 - 2x = 9$
5. $-2 - 5x = 0$
6. $x = 6 - x$
7. $5x - 9 = 3x + 5$
8. $2k + 7 = 12 - 3k$
9. $2 + 3x = 8 - x$
10. $-3x + 5 = 4 - x$
11. $x + 8 = 3x + 1$
12. $2x - 6 = 3x + 1$
13. $x - 6 = 18 - 7x$
14. $3x - 1 = x - 11$
15. $3x - 4 = x + 6$
16. $3x - 7 = 5x + 2$
17. $(5/2)x + 6 = 20$
18. $ax + 5 = 2$

Use WxMaxima y compare sus resultados en los ejercicios anteriores (Click aquí).

2.13.2. Ecuaciones lineales en una variable

Una ecuación de una variable x es lineal si la ecuación puede tomar la forma

$$ax + b = 0 \tag{2.25}$$

en donde $a \neq 0$.

- ☞ La linealidad hace referencia a que el máximo exponente de la variable es 1.
- ☞ El símbolo a representa a la constante que multiplica a la variable.
- ☞ El símbolo b representa el término independiente o constante.
- ☞ La variable no tiene que ser necesariamente x, puede ser cualquier símbolo que se designe como variable.
- ☞ Una vez definida la variable todos los demás símbolos son constantes.
- ☞ Es posible que b sea cero.
- ☞ Es posible que la ecuación inicialmente no tenga la forma en (2.25), pero después de una simplificación puede llevarse a esta forma.

Para resolver la ecuación en la forma $ax + b = 0$ se procede así

$$\begin{aligned} ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13.6.

En cada caso diga si la ecuación dada es lineal en la variable señalada, cuando lo sea indique el valor de a y el valor de b.

1. Variable t, $3t + 2 = 0$
2. Variable s, $xs + \frac{1}{2}$.
3. Variable α, $\beta\alpha + \gamma$.
4. Variable x, $3x^2 - x = 0$.
5. Variable x, $2(x - 5) = x - 4$.
6. Variable y, $y(y - 2) = 0$.
7. Variable z, $x(z + p) = x + 3z$.

Solución

1. La ecuación es lineal y ya está en la forma $ax + b$ con $a = 3$ y $b = 2$.
2. La ecuación es lineal y ya está en la forma $ax + b$. Como la variable es s, $a = x$ y $b = \frac{1}{2}$.
3. La ecuación es lineal y ya está en la forma $ax + b = 0$. Como la variable es α se tiene que $a = \beta$ y $b = \gamma$.
4. No es lineal, porque el máximo exponente de la variable es 2.
5. La expresión puede simplificarse a

$$\begin{aligned} 2(x - 5) &= x - 4 \\ 2x - 10 &= x - 4 \\ 2x - x - 10 + 4 &= 0 \\ x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

   Lo anterior indica que si es lineal y que $a = 1$ y $b = -6$.

6. Al simplificar se obtiene que $y(y - 2) = 0$ es equivalente a $y^2 - y = 0$. Como la variable es y y su máximo exponente es 2. La ecuación no es lineal.
7. Si es lineal, la variable z tiene exponente uno.

$$\begin{aligned} xz + px &= x + 3z \\ xz - 3z + px - x &= 0 \\ (x - 3)z + px - x &= 0 \end{aligned}$$

$a = x - 3$ y $b = px - x$.

Usar guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Ecuaciones lineales.

Ejercicios 14.
Determine la solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales:

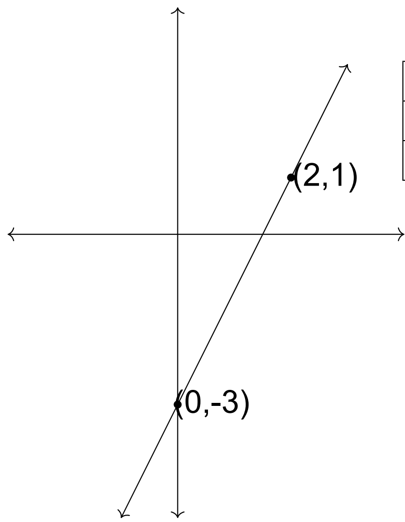
1. $5 + 6x = 2$
2. $5y + 1 = 6$
3. $b + 1 = -18$
4. $5 - 2x = 9$
5. $-2 - 5x = 0$
6. $x = 6 - x$
7. $5x - 9 = 3x + 5$
8. $2k + 7 = 12 - 3k$
9. $2 + 3x = 8 - x$
10. $-3x + 5 = 4 - x$
11. $x + 8 = 3x + 1$
12. $2x - 6 = 3x + 1$
13. $x - 6 = 18 - 7x$
14. $3x - 1 = x - 11$
15. $3x - 4 = x + 6$
16. $3x - 7 = 5x + 2$
17. $(5/2)x + 6 = 20$
18. $ax + 5 = 2$
19. $2x - 2 = x + 1$
20. $4(x + 1) - (2 - x) = 5(x - 2) - 4$
21. $3x - 8 = 10$
22. $-7x = 15 + 2x$
23. $5x + 13 = -12 - 5x$
24. $1/x = 1/a + 1/b$
25. $x + 1 = 8$
26. $0 = x - 10$
27. $-x + 15 = 20$
28. $2x - 15 = 50$
29. $5x + 14 = 35$

2.13.3. Ecuaciones lineales en dos variables

Las ecuaciones lineales con dos variables se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano y originan una linea recta.

Ejemplo 2.13.7.

Hallar la representación gráfica de la ecuación $y = 2x - 3$.



x	$y = 2x - 3$
0	-3
2	1

Ver vídeo de la gráfica.

Un conjunto de ecuaciones lineales reciben el nombre de sistema de ecuaciones lineales y la solución del sistema es el par ordenado que satisface todas las ecuaciones lineales.

Click aquí o consulte el código QR al final del libro guía de Simplificación.

Ejercicios 15.

Simplifique cada expresión y grafique:

1. $5y - 3 = x$
2. $2 = 2y + 2x$
3. $48y - 13 + 12y = 72y - 3 - 24x$
4. $6x + 12x - 9 - 8x + 10 + y = 0$
5. $2(3x - 1) + 7 = 8x - (3 - 2y)$
6. $-(4y - 6) + 9 = 7x - (1 - 6x)$
7. $3x - 1 = 2(y - 1)$
8. $7 - 6(x - 1) = 7 + 2(7y - 4)$
9. $3[2 - (3x - 6)] - 4(1 - 2x) = 4 - 5y$
10. $2(x + 2) - 5(2y - 3) = 3$
11. $21 - [5x - (3x - 1)] = 5y - 12$
12. $2 - 2m + [2m - (2 - p)] = 2$
13. $8 - 2(x - 3) = 4 + 2(y - 3)$
14. $10x - 4(x + 1) = 13 + 3y$
15. $\frac{2}{3}x = 7y$
16. $x + \frac{3y}{2} = \frac{x}{2} - 1$
17. $y + \frac{x + 3}{5} = 1 - x$
18. $\frac{3x - 5}{4} - \frac{x - 6}{12} = y$
19. $\frac{x - 2}{2} + \frac{x - 2(x - 4)}{6} = \frac{y}{3}$

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de dos, tres o más ecuaciones lineales con sus respectivas variables, donde se busca una solución común, se considera resolver el sistema.
Un sistema dos por dos, se considera de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + my = p \end{cases}$$

Donde a, b, c, d, m y p son números reales fijos.
Una solución de un sistema de ecuaciones lineales dos por dos (dos ecuaciones con dos variables), consiste en hallar el par de valores (x, y), que satisfacen ambas ecuaciones. Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.13.8. Sistemas lineales

Verificar que para el sistema de dos ecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x + 4y = 19. \end{cases}$$

Tiene como par solución a $(1, 4)$.

Solución
Dado que el par solución es $(x, y) = (1, 4)$, es decir $x = 1$ y $y = 4$, Para saber si es solución del sistema dos por dos, basta remplazarlas en cada una de las ecuaciones ya que debe satisfacer cada una de ellas.

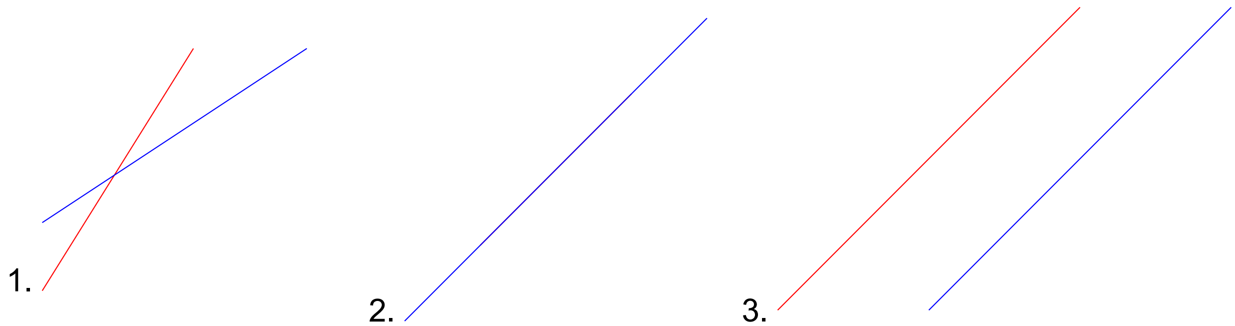
$$\begin{cases} 2(1) + 3(4) = 2 + 12 = 14 \\ 3(1) + 4(4) = 3 + 16 = 19 \end{cases}$$

Efectivamente, satisface las dos ecuaciones, por lo que se considera solución del sistema.
Cada ecuación lineal representada en el plano cartesiano, le corresponde el trazo de una recta, si se usa un sistema de ecuaciones dos por dos es de analizar que son dos rectas en el plano cartesiano, por lo que se consideran todas las posibilidades de compartir soluciones.
Los posibles casos para la existencia de soluciones son:

1. Una única solución, en tal caso las rectas se cortan en un único punto.

2. Infinitas soluciones, en tal caso las rectas se superponen.

3. No tenga solución, en tal caso las rectas son paralelas en el plano.



2.13.4. Resolver sistemas de ecuaciones dos por dos

Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.13.9. Método de eliminación de variables

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Determine la solución en caso que exista.

Solución

Para eliminar una variable combinando las dos ecuaciones, estas deben tener el mismo coeficiente y signo contrario, para que el caso se de, se multiplica la segunda ecuación por -3 y se ejecuta la suma correspondiente.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \qquad \Rightarrow -3x + 6y = -3 \end{cases}$$

Generando un nuevo sistema equivalente.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ -3x + 6y = -3 \end{cases}$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene como resultado:

$$10y = -10$$

$$y = -1$$

por otro lado podemos eliminar la variable y, pero en este caso se multiplica la segunda ecuación por 2, esto es:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \qquad \Rightarrow 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Generando un nuevo sistema de ecuaciones lineales, así:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene el siguiente resultado.

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

Como conclusión se tiene el par solución $(x, y) = (-1, -1)$, en otras palabras la solución es $x = -1$ y $y = -1$.

Definición 2.13.3: Método de eliminación de variables

El método consiste en eliminar una variable adicionando dos ecuaciones. Elegida una variable, se multiplican las ecuaciones por un número que convierta en inversos aditivos los coeficientes de la variable elegida.

Ejemplo 2.13.10. Método de sustitución de variables

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Determine la solución en el caso que exista.

Solución

En la segunda ecuación se despeja la variable x, con el fin de sustituir en la primera ecuación

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \qquad \Rightarrow x = 1 + 2y \end{cases}$$

$$3(1 + 2y) + 4y = -7$$

$$3 + 6y + 4y = -7$$

$$3 + 10y = -7$$

$$10y = -10$$

$$y = -1$$

Con $y = -1$ se sustituye en la ecuación que se despejó a x, esto es

$$x = 1 + 2y$$

$$x = 1 + 2(-1)$$

$$x = -1$$

Cuya solución es $x = -1$ y $y = -1$.
Usar con click aquí o consulte el código QR al final del libro guía para solucionar los ejemplos anteriores.

Definición 2.13.4: Método de sustitución de variables

Este método consiste en despejar una de las variables en una ecuación y sustituirla en la segunda, generando una ecuación con una variable para resolver.

Ejemplo 2.13.11. Método de igualación de variables

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Determine la solución en caso que exista.

Solución
En ambas ecuaciones se elige la misma variable para despejar, como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 & \Rightarrow x = \dfrac{-7 - 4y}{3} \\ x - 2y = 1 & \Rightarrow x = 1 + 2y \end{cases}$$

De esta forma se igualan las expresiones que se encuentran a la derecha de la variable x, así:

$$\frac{-7 - 4y}{3} = 1 + 2y$$

$$-7 - 4y = 3(1 + 2y)$$

$$-7 - 3 = 6y + 4y$$

$$-10 = 10y$$

$$y = -1$$

Se sustituye el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones que tienen despejada la variable x.

$$x = 1 + 2y = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1-$$

Por tanto la solución es $x = -1$ y $y = -1$.

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libroguía

Definición 2.13.5: Método de igualación de variables

Este método consiste en escoger la misma variable en ambas ecuaciones para despegar y posteriormente se igualan los resultados obtenidos, para generar una ecuación con una variable y resolver.

2.13.5. Sistemas de ecuaciones tres por tres

Usando los mismos argumentos de los sistemas dos por dos, se procede a solucionar los sistemas tres por tres. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.13.12. Usando el método de eliminación

Solucione el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (1) \\ x + y - 2z = 0 & (2) \\ x + 3y - 2z = 30 & (3) \end{cases}$$

por el método de eliminación de variables.

Solución

Se observa en el sistema de ecuaciones que la variable x, es candidata para la eliminación, solo basta multiplicar la ecuación por -1. Eliminemos la variable x con la ecuación (1) y (2).

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (1) \\ x + y - 2z = 0 \Rightarrow -x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x + y + z = 30$$

$$-x - y + 2z = 0$$

$$-----------$$

$$3z = 30$$

$$z = 10$$

En este caso se eliminaron dos variables x y y de tal forma que se obtiene el valor de $z = 10$.

Luego se toma la ecuación (2) y (3), con el mismo objetivo de eliminar a la variable x.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 & (2) \\ x + 3y - 2z = 30 \Rightarrow -x - 3y + 2z = -30 & (3) \end{cases}$$

Sumando estos dos resultados se genera:

$$x + y - 2z = 0$$

$$-x - 3y + 2z = -30$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$-2y = -30$$

$$y = 15$$

Ocurre que se eliminan dos variables x y z, generando el valor de $y = 15$. Con estos dos valores se halla la tercera variable faltante solo con remplazar en cualquiera de las tres ecuaciones lineales originales.

$$x + y - 2z = x + (15) - 2(10) = x - 5 = 0$$

y así

$$x = 5.$$

El conjunto solución es {5, 15, 10}.

Ejemplo 2.13.13. Usando el método de eliminación

Solucione el sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3z = 60 & (1) \\ 4x + 3y + 5z = 50 & (2) \\ 3x + 5y + 4z = 46 & (3) \end{cases}$$

por el método de eliminación de variables.

Solución

Se escoge la variable x para eliminar con las dos primeras ecuaciones, las cuales se multiplican por 4 y -5 respectivamente, con el fin de tener el coeficiente de la variable x como inversos aditivos.

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3z = 60 \Rightarrow 20x + 16y + 12z = 240 & (1) \\ 4x + 3y + 5z = 50 \Rightarrow -20x - 15y - 25z = -250 & (2) \end{cases}$$

Al adicionar estas ecuaciones se obtiene:

$$20x + 16y + 12z = 240$$

$$-20x - 15y - 25z = -250$$

$$-----------------$$

$$y - 13z = -10 \qquad (4)$$

Se obtiene una ecuación con dos variables, eliminemos a la variable x con (2) y (3) ecuación lineal, multiplicándolas por 3 y -4 respectivamente.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 50 \Rightarrow 12x + 9y + 15z = 150 & (2) \\ 3x + 5y + 4z = 46 \Rightarrow -12x - 20y - 16z = -184 & (3) \end{cases}$$

Adicionando estos resultados se obtiene:

$$12x + 9y + 15z = 150$$

$$-12x - 20y - 16z = -184$$

$$---------------------$$

$$-11y - z = -34 \qquad (5)$$

Con la ecuación (4) y (5) se elimina la variable y, con solo multiplicar por 11 la ecuación (4) y adicionar a la ecuación (5).

$$\begin{cases} y - 13z = -10 \Rightarrow 11y - 143z = -110 \\ -11y - z = -34 \Rightarrow \end{cases}$$

Adicionando resulta:

$$11y - 143z = -110$$

$$-11y - z = -34$$

$$---------------$$

$$-144z = -144$$

$$z = 1$$

Este valor $z = 1$, se reemplaza en la ecuación (4) para determinar a la variable y.

$$y - 13z = y - 13(1) = y - 13 = -10$$

$$y = 3.$$

Con estos dos valores $z = 1$ y $y = 3$, se hace la sustitución en (1), esto es:

$$5x + 4y + 3z = 5x + 4(3) + 3(1) = 5x + 12 + 3 = 5x + 15 = 60$$

$$5x = 45$$

$$x = 9$$

La solución del sistema es {9, 3, 1 }.
Ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.13.14. Aplicaciones

La diferencia de dos número es de 14 y la cuarta parte de su suma es 13. Halla dichos números.

Solución
Se definen las variables que intervienen en el problema, estas son los dos números que se están solicitando que cumpla con dos condiciones.
Sea x y y los dos números que se requiere, con las condiciones dadas, que se representarán como sigue:
La diferencia de los dos números es 14, que corresponde a

$$x - y = 14.$$

La cuarta parte de su suma es 13, le corresponde la siguiente expresión:
Generando así el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\frac{x+y}{4} = 13$$

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \dfrac{x+y}{4} = 13 \end{cases}$$

Resolviendo para las variables x y y, por el método de eliminación de variables.

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \dfrac{x+y}{4} = 13 \Rightarrow x + y = 52 \end{cases}$$

Adicionado estas ecuaciones, resulta:

$$x - y = 14$$

$$x + y = 52$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$2x = 66$$

$$x = 33$$

A x le corresponde el valor de 33, esto es $x = 33$.
Se remplaza este valor en cualquiera de las ecuación iniciales para hallar y, así:

$$x - y = 33 - y = 14$$
$$-y = 14 - 33 = -19$$
$$y = 19$$

Por tanto los números buscados son 33 y 19, para que cumpla con las condiciones dadas.

Ejemplo 2.13.15. Aplicación

Un estanque tiene dos grifos A y B. Si abrimos el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, salen en total 501 litro de agua. Si en cambio abrimos el grifo B durante 2 minutos y el A durante 1 minuto, entonces salen en total 401 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua arroja cada grifo en 1 minuto?

Solución
Determínese la cantidad de agua que arroja cada grifo en el estanque, identifiquemos la cantidad de agua con A y B respectivamente en un minuto.
Si abrimos el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, salen en total 501 litro de agua.

$$3A + B = 501$$

Si en cambio abrimos el grifo B durante 2 minutos y el A durante 1 minuto, entonces salen en total 401 litros de agua.

$$A + 2B = 401$$

Planteadas las ecuaciones de cada situación, se constituye el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 3A + B = 501 \\ A + 2B = 401 \end{cases}$$

Usando el método de eliminación para la variable B, recurrimos a multiplicar la primera ecuación por -2.

$$\begin{cases} 3A + B = 501 \Rightarrow -6A - 2B = -1002 \\ A + 2B = 401 \end{cases}$$

Al adicionar estas dos ecuaciones se obtiene:

$$-6A - 2B = -1002$$

$$A + 2B = 401$$

$$\text{— — — — — — — — — — — — — — —}$$

$$-5A = -601$$

Así, se tiene el valor de la variable A:

$$A = \frac{-601}{-5} = 601/5 = 120.2$$

Con este valor de A, se remplaza en la ecuación $A + 2B = 401$, en efecto:

$$\frac{601}{5} + 2B = 401$$

$$2B = 401 - \frac{601}{5} = \frac{401 \cdot 5 - 601}{5} = \frac{2005 - 601}{5} = \frac{1404}{5}$$

$$B = \frac{1404}{10} = 140.4$$

El grifo A arroja 120.2 litros de agua en un minuto y el grifo B arroja 140.4 litros de agua en un minuto.

Ejercicios 16.
Resuelva los siguientes sistemas lineales:

1. $\begin{cases} y - 13z = 10 \\ 8y + z = 34 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2y - 13z = 0 \\ -21y - 2z = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5y - 13z = 1 \\ -11y - z = -34 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3y - 13z = 5 \\ -3y - 4z = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 8y - 13z = 7 \\ -5y - z = -9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6y - 13z = 20 \\ 8y - 12z = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 6y - 13z = 20 \\ 2x - 8y - 12z = 4 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6y - 13z + w = 20 \\ 8y - 12z + 5w = 4 \\ 4y - z + w = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -3x + 3y = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x + 3y = 14 \\ 3x - y = -14 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2(x+4)}{3} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{9}{2} \\ x + 2y - \dfrac{1}{3}(3x - 2) = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} + \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{y-1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$

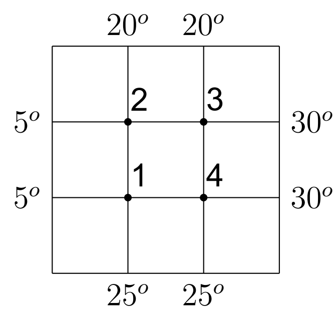
15. $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{3} + 4y = \dfrac{13}{3} \\ \dfrac{2(-2y+x)}{3} - \dfrac{3x}{2} = -\dfrac{13}{6} \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$

Resuelva los siguientes problemas:

17. Un aspecto importante en el estudio de la transferencia de calor es determinar la distribución de la temperatura en estado estable sobre una placa delgada cuando se conoce la temperatura presente alrededor de los bordes. Suponga que la placa mostrada en la figura representa la sección transversal de una viga de metal, con un flujo de calor insignificante en la dirección perpendicular a la placa. Sean $T_1, ..., T_4$ las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla que se muestra en la figura. En un nodo, la temperatura es aproximadamente igual al promedio de los cuatro nodos más cercanos —a la izquierda, arriba, a la derecha y abajo-. Por ejemplo,

    $T_1 = \dfrac{(5 + 25 + T_2 + T_4)}{4}$ o $4T_1 - T_2 - T_4 = 30$

    Escriba un sistema de cuatro ecuaciones cuya solución proporcione un estimado para las temperaturas $T_1, ..., T_4$ y resuelva el sistema. Ejercicio tomado del libro [6] Pag. 100.

18. Buscar dos números que sean solución de la ecuación $5x - 4y = 1$.

19. Determine un número de dos cifras cuya suma de sus dígitos es 10; y que, si se invierte el orden de sus cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial.

20. En un triangulo rectángulo, uno de sus ángulos es 12 grados mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

21. La razón entre las edades de dos personas es de 2/3. Sabiendo que se llevan 15 años de diferencia. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

22. Se mezclan dos tipos de líquido; el primero de 0.64 de ácido por cada litro y el segundo de 0.80 ácido por litro, obteniendo 50 litros de mezcla de 0.72 ácido por litro. ¿Cuántos litros se utilizó de cada liquido?

2.14. Ecuaciones cuadráticas

La ecuación cuadrática en la variable x tienen la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Los números b o c pueden ser cero, pero el número que acompaña a la variable con exponente 2 no puede ser cero.
Un número r es solución o raíz de la ecuación cuadrática si al reemplazarlo por la variable se obtiene la igualdad, es decir, si

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Si $b = 0$ entonces la ecuación es de la forma $ax^2 + c = 0$ y si $c = 0$ la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$.
La expresión $D = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación, y el tipo de las soluciones de la ecuación cuadrática dependen del signo de D.

(a) Si $D = b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tendrá una sola raíz real.

(b) Si $D = b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tendrá dos raíces reales distintas.

(c) Si $D = b^2 - 4ac < 0$ la ecuación tendrá dos raíces imaginarias conjugadas.

Para resolver una ecuación cuadrática se usan básicamente tres técnicas:

(I) **Factorización**.

Se agrupan todos los términos a un lado de la igualdad de tal manera que quede una expresión igual a cero. Luego se factoriza y se aplica el teorema del factor cero.

(II) **Completación de cuadrado**.

Se agrupan a un lado del signo igual los términos que involucran la variable y del otro lado las constantes. Luego se completa el cuadrado en la variable y se despeja.

(III) **Fórmula general**

Se usan la expresiones

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para calcular las raíces de la ecuación. De aquí se puede observar que

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$r_1 r_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$r_1 r_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$r_1 r_2 = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}.$$

$$r_1 r_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Es decir, la suma de las raíces es $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ y su producto es $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Ejemplo 2.14.1. Ecuaciones

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $2x^2 - 5 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$ c) $ax^2 + b = 0, a \neq 0.$

Solución

a)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5 &= 0 \\ 2x^2 &= 5 \\ x^2 &= \frac{5}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Se tienen entonces dos soluciones $r_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$ y $r_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$.

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} = \pm i \end{aligned}$$

Se tienen entonces dos soluciones $r_1 = i$ y $r_2 = -i$.

c)

$$
\begin{aligned}
ax^2 + b &= 0 \\
ax^2 &= -b \\
x^2 &= -\frac{b}{a} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{b}{a}}
\end{aligned}
$$

Se tienen entonces dos soluciones $r_1 = \sqrt{-\frac{b}{a}}$ y $r_2 = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Si $\frac{b}{a}$ es positivo, entonces $-\frac{b}{a}$ es negativo y las soluciones son imaginarias conjugadas. Si $\frac{b}{a}$ es negativo, entonces $-\frac{b}{a}$ es positivo y las soluciones son reales.

Ejemplo 2.14.2. Ecuación cuadrática

Resuelva por factorización $6x^2 - 14x + 4 = 0$.

Solución
Se factoriza la expresión

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 14x + 4 &= \frac{6(6x^2) - 14(6x) + (6)(4)}{6} \\
&= \frac{6^2x^2 - 14(6x) + 24}{6} \\
&= \frac{(6x)^2 - 14(6x) + 24}{6} \\
&= \frac{(6x - 12)(6x - 2)}{6} \\
&= \frac{6(x - 2)2(3x - 1)}{6} \\
&= 2(x - 2)(3x - 1).
\end{aligned}
$$

Resolver la ecuación original es equivalente a resolver la ecuación factorizada

$$2(x - 2)(3x - 1) = 0.$$

Aplicando el teorema del factor cero se tiene $x - 2 = 0$ o $3x - 1 = 0$. De $x - 2 = 0$ se concluye que $x = 2$. De $3x - 1 = 0$, se concluye que $3x = 1$ o $x = \frac{1}{3}$. Por tanto el conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$
Ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 2.14.3. Ecuación cuadrática

Resuelva completando cuadrado $6x^2 - 14x + 4 = 0$.

Solución

$$\begin{aligned}
6x^2 - 14x + 4 &= 0\\
x^2 - \frac{14}{6}x + \frac{4}{6} &= 0\\
x^2 - \frac{7}{3}x &= -\frac{2}{3}\\
x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{(2)(3)}\right)^2 &= -\frac{2}{3} + \left(\frac{7}{(2)(3)}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 &= -\frac{2}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \frac{49}{36}\\
\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 &= -\frac{(2)(12)}{(3)(12)} + \frac{49}{36} = -\frac{24}{36} + \frac{49}{36}\\
\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 &= \frac{-24 + 49}{36} = \frac{25}{36.}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 &= \frac{25}{36}\\
x - \frac{7}{6} &= \pm\sqrt{\frac{25}{36}} = \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}\\
x &= \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{7}{6} \pm \frac{5}{6}\\
x &= \frac{7 \pm 5}{6}
\end{aligned}$$

y las soluciones vienen dadas por $x_1 = \dfrac{7+5}{6} = 2$ y $x_2 = \dfrac{7-5}{6} = \dfrac{1}{3}$.
Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro video 001. ⊙ y video 002. ⊙

Ejemplo 2.14.4. Ecuación cuadrática

Resuelva usando la fórmula general, $6x^2 - 14x + 4 = 0$.

Solución
La fórmula general viene dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para este ejercicio $a = 6$, $b = -14$ y $c = 4$. Por tanto

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(6)(4)}}{2(6)}$$
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{12} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{12}$$
$$x = \frac{14 \pm 10}{12}$$

$x_1 = \dfrac{14+10}{12} = \dfrac{24}{12} = 2$ y $x_2 = \dfrac{14-10}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Ejemplo 2.14.5. Ecuación cuadrática

Dada la ecuación $x^2 = -x - 1$ determine la naturaleza de sus raíces usando el discriminante. Halle las soluciones.

Solución
La ecuación $x^2 = -x - 1$ es equivalente a la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Para esta ecuación cuadrática $a = 1, b = 1$ y $c = 1$. Por lo tanto el discriminante es $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$. De modo que las soluciones son imaginarias conjugadas y son:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{3}$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{3}.$$

Puede consultar la guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Discriminante. Puede encontrar la solución resolviendo la ecuación en máxima.

Ejercicios 17.
Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 + 15x + 56 = 0$
2. $x^2 + 3x - 88 = 0$
3. $x^2 - 4x - 45 = 0$
4. $x^2 - 37x = 0$
5. $5x^2 + 12x = 0$
6. $x^2 - 81 = 0$
7. $x^2 - 23x + 120 = 0$
8. $x^2 + x - 72 = 0$
9. $6x^2 - 19x + 10 = 0$

10. $x^2 + 3x - 88 = 0$
11. $x^2 - 4x - 45 = 0$
12. $5x^2 + 12x = 0$
13. $x^2 - 81 = 0$
14. $x^2 + x - 72 = 0$
15. $6x^2 - 19x + 10 = 0$
16. $39x^2 - 83x = 56$
17. $7x^2 - 13x - 1 = 0$
18. $(5x - 3)(2x + 1) = 46 - x$
19. $5x(x - 6) = x - 30$
20. $6x(x + 6) = x + 30$
21. $5x(x - 6) = x^2 - 20$

2.15. Ecuaciones que involucran valor absoluto

Recordar que el valor absoluto se define como

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si a y b son dos números reales, la distancia entre ellos es $|a - b|$.
Para resolver ecuaciones que involucran el valor absoluto, se aplican las propiedades del valor absoluto, caso por caso y luego se eligen las respuestas que satisfagan cada una de ellas. La solución es la unión del conjunto de soluciones de cada caso. Como práctica se le recomienda ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Valor absoluto.

Ejemplo 2.15.1. Valor absoluto

Hallar el conjunto solución de $|x - 2| = 4$.

Solución
Por la propiedad

$$|y| = \epsilon \text{ si y solo si } y = \epsilon \text{ o } y = -\epsilon$$

$$|\underbrace{x-2}_{y}| = \underbrace{4}_{\epsilon} \text{ si y solo si } x - 2 = 4 \quad \text{o} \quad x - 2 = -4$$

Caso i) Para el caso que $x - 2 = 4$ se tiene $x = 4 + 2 = 6$.
Caso ii) Para el caso que $x - 2 = -4$, se tiene $x = -4 + 2 = -2$.
Por tanto las soluciones son $x = 6$ y $x = -2$, o alternativamente, el conjunto solución es $\{-2, 6\}$.

Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro video. $\odot$

Ejemplo 2.15.2. Valor absoluto

Hallar el valor de t tal que $|t-5|+|t-4|=8$.

Solución

(1) Si $t-5 \geq 0$ y $t-4 \geq 0$ entonces $|t-5|=t-5$ y $|t-4|=t-4$. La ecuación se convierte en

$$|\underbrace{t-5}_{\geq 0}|+|\underbrace{t-4}_{\geq 0}|=t-5+t-4=8.$$

Al ser $t-5 \geq 0$ se tiene que $t \geq 5$ y la solución encontrada debe ser mayor o igual a 5. También al ser $t-4 \geq 0$ se tiene $t \geq 4$ y la solución encontrada debe ser mayor o igual a 4.

$$\begin{aligned} t-5+t-4&=8 \\ 2t-9&=8 \\ 2t&=8+9=17 \\ t&=\frac{17}{2} \end{aligned}$$

(2) Si $t-5 \leq 0$ y $t-4 \leq 0$ entonces $|t-5|=-(t-5)$ y $|t-4|=-(t-4)$. La ecuación se convierte en

$$|\underbrace{t-5}_{\leq 0}|+|\underbrace{t-4}_{\leq 0}|=-(t-5)+(-(t-4))=8.$$

Al ser $t-5 \leq 0$ se tiene que $t \leq 5$ y la solución encontrada debe ser menor o igual a 5. También al ser $t-4 \leq 0$ se tiene $t \leq 4$ y la solución encontrada debe ser menor o igual a 4.

$$\begin{aligned} -(t-5)-(t-4)&=8 \\ -t+5-t+4&=8 \\ -2t+9&=8 \\ -2t&=8-9=-1 \\ t&=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) Si $t-5 \leq 0$ y $t-4 \geq 0$ entonces $|t-5|=-(t-5)$ y $|t-4|=t-4$. La ecuación se convierte en

$$|\underbrace{t-5}_{\leq 0}|+|\underbrace{t-4}_{\geq 0}|=-(t-5)+t-4=8.$$

Al ser $t-5 \leq 0$ se tiene que $t \leq 5$ y la solución encontrada debe ser menor o igual a 5. También al ser $t-4 \geq 0$ se tiene $t \geq 4$ y la solución encontrada debe ser mayor o igual a 4.

$$\begin{aligned} -(t-5)+(t-4) &= 8 \\ -t+5+t-4 &= 8 \\ 1 &= 8. \end{aligned}$$

Como 1 no puede ser igual a 8, la ecuación no tiene solución en este caso.

(4) El último caso no es posible porque al ser $t-5 \geq 0$ y $t-4 \leq 0$ se debe tener $t \leq 4$ y $t \geq 5$ y no existe ningún número real que pueda ser menor que 4 y mayor o igual a 5 al mismo tiempo.

Por tanto las soluciones de la ecuación son $t = \frac{17}{2}$ y $t = \frac{1}{2}$.
De manera alternativa se puede decir que el conjunto solución es $\left\{\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right\}$.

Operaciones con el valor absoluto

Si x y y son dos números reales y n es un entero se cumple que:

- ✍ $|xy| = |x||y|$
- ✍ $|x/y| = |x|/|y|$ con y distinto de 0
- ✍ $|x| = \sqrt{x^2}$
- ✍ $|x^n| = |x|^n$

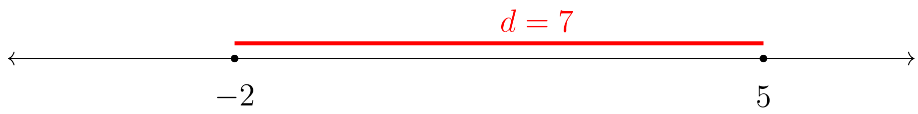
Dados dos puntos en la recta real a y b, se desea determinar la distancia que los separa, podemos pensar que esta se puede hallar de a hacia b o de b hacia a, de igual forma esta debe dar la misma medida, por lo que se requiere expresarla en forma positiva. Para hacer esto se usa el valor absoluto.

Definición 2.15.1: Distancia entre dos puntos en la recta real

Dados dos puntos a y b en la recta real, se define la distancia entre a y b como

$$d_{(a,b)} = |a-b| = |b-a|.$$

Considere los puntos a y b en la recta real, la distancia entre estos puntos es la longitud del segmento trazado desde a hasta b o desde b hasta a.
La distancia de -2 a 5 es $d = |-2-5| = |5-(-2)| = 7$. El segmento puede verse en la siguiente figura



Definición 2.15.2: Punto medio

Dados dos puntos en la recta real a y b, el punto medio (m) entre estos dos puntos se define como:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

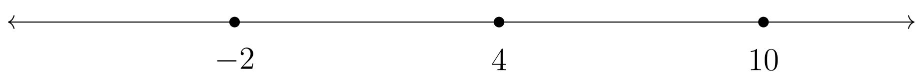
Ejemplo 2.15.3. Punto medio

Determine el punto medio entre -2 y 10.

Solución

Usando la definición de punto medio se tiene:

$$m = \frac{-2+10}{2} = \frac{8}{2} = 4$$



Ejercicios 18.

Hallar la distancia entre a y b:

1. 2 y 6
2. 5 y 10
3. 3 y 8
4. 1 y 7
5. -2 y 6
6. 12 y 6
7. -3 y -1
8. -5 y 0
9. -20 y 3
10. -7 y 30
11. -7 y 3
12. $2/3$ y 6

Determine el punto que se encuentra en el centro de:

13. 2 y 6
14. 0 y 10
15. 5 y 9
16. -4 y 6
17. -7 y -2
18. -50 y 60
19. 225 y 634
20. -5 y 2
21. 0 y 200
22. $-1/3$ y $2/5$

Determine la solución de cada ecuación.

23. $|x+2|=5$
24. $|3x+1|=5$
25. $|\frac{1}{4}-2|-|x+2|=0$
26. $|x-2|=-3$
27. $|x+2|+7=0$
28. $\left|\dfrac{3-x}{3}\right|-2=0$
29. $|x+1|=2x+1$
30. $|x^2-9|=0$
31. $|x^2+6x+4|=4$
32. $|3x+1|+1-x=0$
33. $\left|\dfrac{x}{2}+2\right|=7x-5$
34. $\left|9x+\dfrac{1}{3}\right|=|x-3|$

2.16. Ecuaciones que se reducen a lineales o cuadráticas

Existen ecuaciones que originalmente no son lineales o cuadráticas pero que pueden transformarse a una lineal o cuadrática mediante transformaciones algebraicas o cambios de variable adecuados. A esta ecuación transformada se le puede hallar la solución más fácilmente. No obstante, cuando se hacen estas transformaciones la solución de las ecuaciones transformadas pueden no ser soluciones de la ecuación original y por lo tanto se debe hacer la verificación en la ecuación inicial.

Ecuaciones con fracciones algebraicas

Ejemplo 2.16.1. Ecuaciones fraccionarias

Hallar las soluciones de $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2x-3}=0$

Solución

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x-3}=\frac{2x-3-1(x+1)}{(x+1)(2x-3)}=\frac{2x-3-x-1}{(x+1)(2x-3)}=0$$
$$\frac{x-4}{(x+1)(2x-3)}=0.$$

La expresión anterior es cero solo si el numerador es cero, es decir, si $x-4=0$. Así que $x=4$. Como este valor de x no hace cero ningún denominador, es la solución. La verificación es como sigue, reemplazando $x=4$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x-3}&=\frac{1}{4+1}-\frac{1}{2(4)-3}\\&=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=0.\end{aligned}$$

Usando WxMaxima de forma similar a las guías de ecuaciones puede resolverlas de forma fraccionarias. Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro Ecuaciones. y ver video. $\odot$

Ecuaciones con radicales

En este caso intervienen términos radicales. Para resolverla, se despeja uno de los radicales, se eleva cada lado a la potencia indicada por el índice del radical y se simplifica. Este paso se repite hasta que no queden radicales en la ecuación transformada. Luego se resuelve la ecuación que queda y se verifican las soluciones en la ecuación original.

Ejemplo 2.16.2. Ecuaciones con radicales

Hallar la solución de $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9}=-2$.

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9} &= -2\\
\sqrt{x+1}+2 &= \sqrt{2x+9}\\
(\sqrt{x+1}+2)^2 &= (\sqrt{2x+9})^2\\
(\sqrt{x+1})^2+2(2)(\sqrt{x+1})+2^2 &= 2x+9\\
x+1+4\sqrt{x+1}+4 &= 2x+9\\
4\sqrt{x+1} &= 2x+9-x-1-4\\
4\sqrt{x+1} &= x+4\\
(4\sqrt{x+1})^2 &= (x+4)^2\\
16(x+1) &= x^2+8x+16\\
16x+16 &= x^2+8x+16\\
0 &= x^2+8x+16-16x-16\\
0 &= x^2-8x\\
0 &= x(x-8).
\end{aligned}$$

De donde $x=0$ o $x=8$. Ahora se prueban las posibles soluciones en la ecuación original.
Para $x=0$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9}=\sqrt{0+1}-\sqrt{2(0)+9}=1-\sqrt{9}=-2,$$

es decir $x=0$ es solución.
Para $x=8$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9}=\sqrt{8+1}-\sqrt{2(8)+9}=3-\sqrt{25}=-2,$$

$x=8$ es solución. El conjunto solución es entonces $\{0,8\}$.

Ejemplo 2.16.3. Ecuaciones con radicales

Hallar la solución $\sqrt{x-2}-3x=-16$.

Solución

De la ecuación se nota enseguida que la cantidad bajo el signo radical debe ser mayor o igual a cero. Es decir, $x - 2 \geq 0$, o $x \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} - 3x &= -16 \\
\sqrt{x-2} &= 3x - 16 \\
(\sqrt{x-2})^2 &= (3x-16)^2 \\
x - 2 &= 9x^2 - 96x + 256 \\
9x^2 - 96x + 256 + 2 - x &= 0 \\
9x^2 - 97x + 258 &= 0 \\
(x-6)(9x-43) &= 0.
\end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación transformada son $x = 6$ y $x = \frac{43}{9}$. Se debe verificar en la ecuación original $\sqrt{x-2} - 3x = -16$.

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{6-2} - 3(6) = \sqrt{4} - 18 & = -16 & (\text{ 6 es solución }) \\
\sqrt{\dfrac{43}{9} - 2} - 3\left(\dfrac{43}{9}\right) = \sqrt{\dfrac{25}{9}} - \dfrac{43}{3} = -\dfrac{38}{3} & \neq -16 & (\ \tfrac{43}{9} \text{ no es solución }).
\end{array}$$

Ejemplo 2.16.4. Ecuaciones con radicales

Hallar las soluciones de $\sqrt[3]{x+1} - 3 = 0$.

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x+1} - 3 &= 0 \\
\sqrt[3]{x+1} &= 3 \\
(\sqrt[3]{x+1})^3 &= 3^3 \\
x + 1 &= 27 \\
x &= 26.
\end{aligned}$$

Ecuaciones lineales o cuadráticas por cambio de variable

Existen ecuaciones cuadráticas que se pueden evidenciar con un cambio de variable adecuado que aplique. Observar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.16.5. Ecuación cuadrática

Hallar el conjunto solución de $t^4 - 5t^2 + 6 = 0$.

Solución

Observe que los exponentes son enteros positivos y la variable con menor exponente es t^2, si se cambia la variable, poniendo $z = t^2$, entonces, $(z^2)^2 = (t^2)^2 = t^4$ y la ecuación puede reescribirse como

$$\underbrace{t^4}_{z^2} - 5\underbrace{t^2}_{z} + 6 = 0$$

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

la cual puede resolverse fácilmente para z

$$(z-3)(z-2) = 0$$

que tiene soluciones $z = 3$ y $z = 2$. Como $z = t^2$, esto es equivalente a tener $t^2 = z = 3$ o $t^2 = z = 2$. De aquí se obtiene que $t = \pm\sqrt{3}$ o $t = \pm\sqrt{2}$. De estos cuatro posibles valores de t debemos verificar cuáles son respuestas de la ecuación original.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3})^4 - 5(\sqrt{3})^2 + 6 &= 9 - 5(3) + 6 = 0\\
(-\sqrt{3})^4 - 5(-\sqrt{3})^2 + 6 &= 9 - 5(3) + 6 = 0\\
(\sqrt{2})^4 - 5(\sqrt{2})^2 + 6 &= 4 - 5(2) + 6 = 0\\
(-\sqrt{2})^4 - 5(-\sqrt{2})^2 + 6 &= 4 - 5(2) + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16.6. Ecuación cuadrática

Hallar la solución de $y^{-4} - 6y^{-2} + 9 = 0$.

Solución

Haga $u = y^{-2}$, entonces $u^2 = (y^{-2})^2 = y^{-4}$ y la ecuación se transforma en

$$\underbrace{y^{-4}}_{u^2} - 6\underbrace{y^{-2}}_{u} + 9 = 0$$

$$u^2 - 6u + 9 = 0, \text{ de donde } (u-3)(u-3) = 0.$$

Así $u = 3$. Como $3 = u = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{y}\right)^2$, entonces

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 3, \text{ y } \frac{1}{y} = \pm\sqrt{3}.$$

Se tiene por un lado $\dfrac{1}{y} = \sqrt{3}$ lo que implica $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Por otro lado $\frac{1}{y} = -\sqrt{3}$ lo que contempla $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ir con click aquí o consulte el código QR al final del libro Ecuaciones.

Ejercicios 19. Ecuaciones
Hallar la solución de las siguientes ecuaciones.

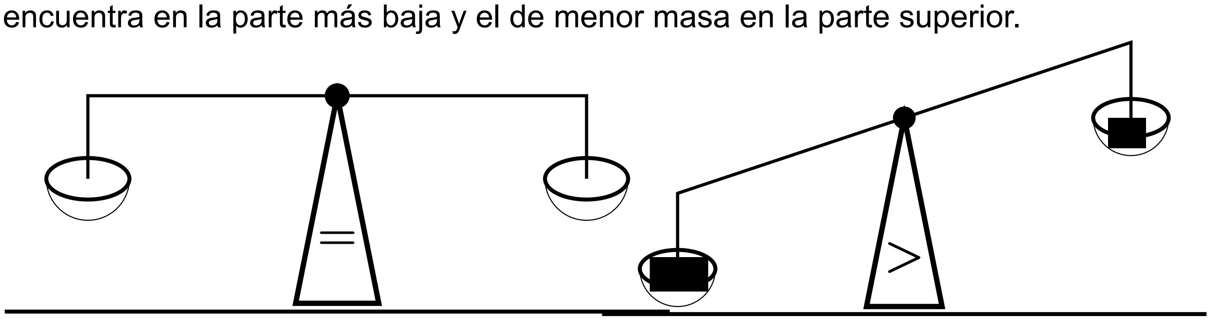
1. $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{x+5}=0$
2. $\dfrac{-4}{2x}+\dfrac{1}{3x-5}=0$
3. $\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{5x-1}=0$
4. $\sqrt{x+1}+8=0$
5. $\sqrt[3]{x+1}-3=0$
6. $\sqrt{x+1}-2\sqrt{3-x}=0$
7. $\sqrt[3]{x+1}-3\sqrt{2x+1}=0$
8. $y^{-4}+6y^{-2}+5=0$
9. $3\sqrt{x^2+1}+\dfrac{2}{x-3}=0$
10. $\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}=2$
11. $2x^4-2x+2=0$
12. $x^4+x^2=4$
13. $x^8-x^4-6=0$
14. $\dfrac{1}{(x+4)^2}-\dfrac{4}{(x+4)}+3=0$
15. $x^8+5x^4+6=0$
16. $(x+4)^4-4(x+4)^2+3=0$

2.17. Desigualdades

En la sección 1.1.1 se presentaron las desigualdades y sus propiedades con el fin de escribir el orden de los números reales. Por ejemplo, si x esta en la recta numérica, a la izquierda de 3, o si x es cualquier número real menor que 3, escribimos $x<3$.

2.17.1. Desigualdades lineales

Una desigualdad lineal es una expresión matemática del tipo $ax+b\geq 0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, o $ax+b<0$.
Una manera de visualizar las desigualdades, es relacionándolas con una balanza, en donde se interpreta el lado de mayor valor o de menor valor, que al colocar objetos en los extremos de la balanza, podemos identificar que el cuerpo de mayor masa se encuentra en la parte más baja y el de menor masa en la parte superior.



Para dar solución a las desigualdades que se puedan plantear, se hace necesario el uso de sus propiedades. Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.17.1. Desigualdad

¿Cuál es el conjunto de los números reales que hace que la siguiente desigualdad sea cierta?

$$5x + 2 < 12$$

Solución

$$5x + 2 - 2 < 12 - 2$$

$$5x < 10$$

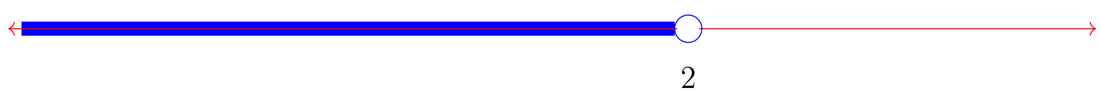
$$\frac{5x}{5} < \frac{10}{5}$$

$$x < 2$$

Por tanto las solución es el conjunto de todos los números reales menores a 2.

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

Ver video. $\odot$



Ejemplo 2.17.2. Desigualdad

¿Cuál es el conjunto de los números reales que hace que la siguiente desigualdad sea cierta?

$$2x + 1 < 0$$

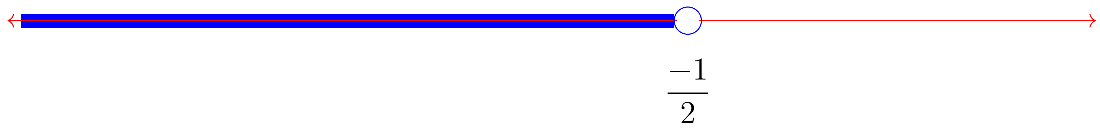
Solución

$$2x + 1 - 1 < 0 - 1$$

$$2x < -1$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{-1}{2}$$

$$x < \frac{-1}{2}$$



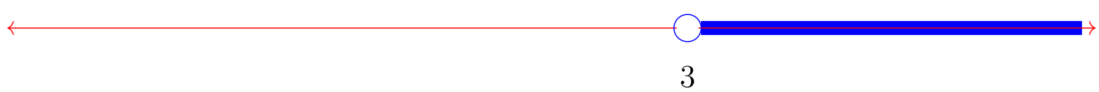
Ejemplo 2.17.3. Desigualdad

¿Cuál es el conjunto de los números reales que hace que la siguiente desigualdad sea cierta?

$$-3x + 9 < 0$$

Solución

$$-3x + 9 - 9 < 0 - 9$$
$$-3x < -9$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-9}{-3}$$
$$x > 3$$



Así el conjunto que hace que la desigualdad sea cierta es, el conjunto de todos los números reales mayores que 3.

Ejemplo 2.17.4. Desigualdad

¿Cuál es el conjunto de los números reales que hace que la siguiente desigualdad sea cierta?

$$-3x + 9 \leq 0$$

Solución

$$-3x + 9 - 9 \leq 0 - 9$$
$$-3x \leq -9$$
$$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{-9}{-3}$$
$$x \geq 3$$

Así el conjunto que hace que la desigualdad sea cierta es, el conjunto de todos los números reales mayores e iguales a 3.

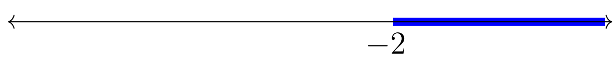
Ejercicios 20. Determine las solución de cada una de las siguientes desigualdades, usando las propiedades de la sección 1.1.1:

1. $2x + 6 < 4x + 2$
2. $6x - 5 \leq 2x + 6$
3. $5x - 5 < 4x + 6$
4. $3x + 6 < x - 1$
5. $7x + 8 \leq x - 6$
6. $5x + 9 \geq 2x + 6$
7. $5 \geq 2x + 3$
8. $9x + 7 \geq x - 4$
9. $2x + 1 > 4$
10. $7x + 6 > 25$
11. $4x - 3 > 4x + 5$
12. $2x + 7 \leq 4x + 14$

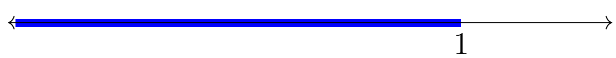
Grafique en la recta real la solución de cada desigualdad:

13. $x + 1 < 8$
14. $4x + 1 > 0$
15. $2x + 1 < 0$
16. $2x \leq -3$
17. $5x + 9 \leq 5$
18. $3x + 1 < 6x - 7$
19. $\frac{3}{4}x < x - 1$
20. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 8$

Diseñe una desigualdad lineal que tenga como solución, las siguientes representaciones gráficas:

21. 

22. 

23. 

Determine la solución de cada desigualdad :

24. $2x - 3 < 4 - 2x$
25. $5 + 3x \leq 4 - 2x$
26. $4 - 2t > t - 5$
27. $x + 8 \leq 3x + 1$
28. $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) > 3x$
29. $\dfrac{a+2}{4} \leq \dfrac{a-1}{3}$
30. $3x - 12 \leq \dfrac{5x-6}{4}$
31. $3(4 - x) > 18x + 5$
32. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} > 5 - \dfrac{x}{6}$

33. $-\frac{x}{4}-4\leq\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}$

34. $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$

35. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$

36. $\left(2-\frac{1}{3}x\right)(-3)+4\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)>0$

37. $x-\sqrt{2}>0$

La solución de las anteriores desigualdades compárelas con los resultados que arroja en WxMaxima, ver guía con click aquí o consulte el código QR al final del libro Desigualdades.

2.18. Desigualdades cuadráticas

Para solucionar una desigualdad cuadrática como por ejemplo $ax^2+bx+c<0$, se contempla solucionar primero la igualdad $ax^2+bx+c=0$ con el fin de determinar los valores donde surge el cambio de signo, esto es de positivo a negativo o de negativo a positivo, en nuestro caso actual nos interesa los que son negativos, es decir los que se encuentran por debajo de cero, $ax^2+bx+c<0$.
Nota: El estudiante debe dominar la factorización, con el objetivo de hacer uso de las propiedades del producto para números reales.
Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.18.1. Desigualdad

Halle los valores de t tal que $(t-1)(t+3)>0$

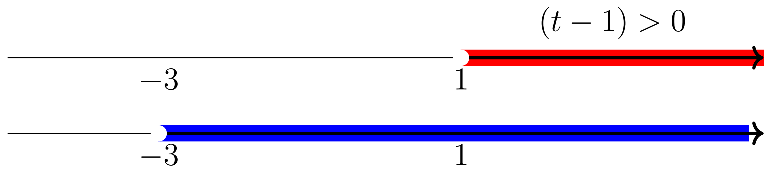
Solución
Se aplica la propiedad

$$a\cdot b>0 \text{ si y sólo si } (a>0 \text{ y } b>0) \text{ o } (a<0 \text{ y } b<0)$$

Donde $t-1$ hace las veces de a y $t+3$ hace las veces de b

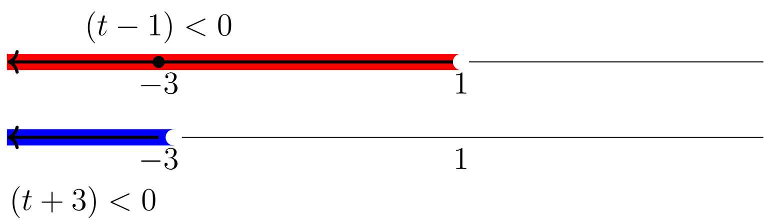
$$\underbrace{(t-1)}_{a}\underbrace{(t+3)}_{b}>0$$

(I) $t-1>0$ y $t+3>0$. La primera parte implica que $t>1$, es decir t debe estar en el intervalo $(1,\infty)$ y la segunda parte implica $t>-3$, es decir debe estar en el intervalo $(-3,\infty)$. La intersección de estos conjuntos de números es la respuesta buscada.



Se ve de la gráfica que ambos factores son mayores que cero si $t>1$, es decir, el conjunto solución para el caso en que ambos factores es mayor que cero es $(1,\infty)$.

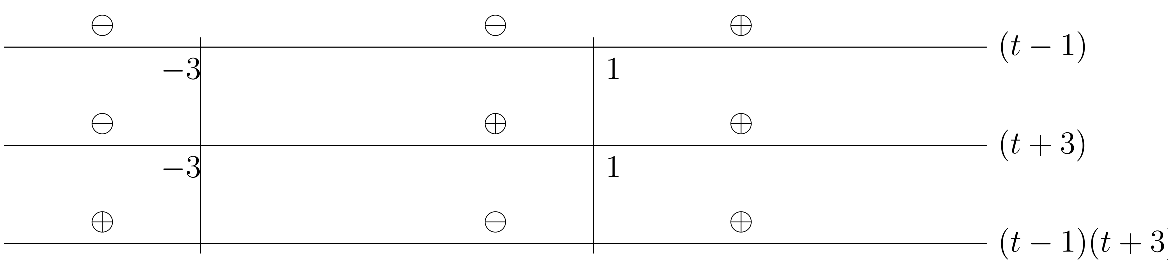
(II) $t-1<0$ y $t+3<0$. La primera parte implica que $t<1$, es decir t debe estar en el intervalo $(-\infty,1)$ y la segunda parte implica $t<-3$, es decir debe estar en el intervalo $(-\infty,3)$. La intersección de estos conjuntos de números es la respuesta buscada



Se observa de la gráfica que ambos factores son menores que cero si $t<-3$, es decir, el conjunto solución para el caso en que ambos factores son menores que cero es $(-\infty,-3)$.

La solución total es la unión del caso (i) con el caso (ii) por tanto $(t-1)(t+3)>0$ tiene por solución al conjunto $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$.

El análisis anterior puede hacerse un poco más resumido, solo basta colocar los signos que toma cada expresion en cada intervalo.



Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro vídeo. Click aquí $\odot$

Ejemplo 2.18.2. Desigualdades

Halle el conjunto solución de $x^2 - x > 0$.

Solución
Se aplicar la propiedad

$$ab > 0 \iff (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$$

Para ello se necesita expresar $x^2 - x$ como el producto de dos expresiones. Factorizando se tiene $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Se hace entonces el análisis de signo de los factores x y $x+1$ en el siguiente esquema.

$\ominus$	0	$\oplus$	1	$\oplus$	$x > 0$
$\ominus$	0	$\ominus$	1	$\oplus$	$x - 1 > 0, \quad x > 1$
$\oplus$	0	$\ominus$	1	$\oplus$	$x(x-1)$

Se deduce entonces que los valores posibles para x, que generan un producto positivo, es en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.
Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro vídeos. Click aquí $\odot$ Click aquí para ver guía

Ejemplo 2.18.3. Desigualdades

Hallar el conjunto solución de $\dfrac{x-1}{x+2} \leq 3$

Solución
Primero observe que resolver la desigualdad anterior es equivalente a resolver

$$\frac{x-1}{x+2} - 3 \leq 0$$

y el lado izquierdo puede simplificarse a

$$\frac{x-1}{x+2} - 3 = \frac{x-1}{x+2} - \frac{3}{1} = \frac{(x-1)(1) - 3(x+2)}{(x+2)(1)} = \frac{x-1-3x-6}{x+2} = \frac{-2x-7}{x+2}.$$

De modo que hallar el conjunto solución de la expresión original es equivalente a hallar el conjunto solución de la desigualdad

$$\frac{-2x-7}{x+2} \leq 0$$

Aplicaremos la propiedad

$$\frac{a}{b} \leq 0 \text{ si y solo si } (a \geq 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a \leq 0 \text{ y } b > 0)$$

donde

$$\frac{\overbrace{-2x-7}^{a}}{\underbrace{x+2}_{b}} \leq 0$$

Se hace el análisis de signo

$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$-2x-7 \geq 0, x \leq -\frac{7}{2}$
$-\frac{7}{2}$	-2		
$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$x+2 > 0, \quad x > -2$
$-\frac{7}{2}$	-2		
$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\dfrac{-2x-7}{x+2}$
$-\frac{7}{2}$	-2		

El conjunto solución es $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup (-2, \infty)$.

Ejemplo 2.18.4. Desigualdades

Hallar el conjunto solución de $-3x^3 + 4x^2 - x > 0$.

Solución
Factorizando la expresión se obtiene

$$-3x^3 + 4x^2 - x = x(-3x^2 + 4x - 1) = (-3x+1)(x-1)x > 0$$

Haciendo el análisis de signo para los factores

	0	$\frac{1}{3}$	1		
$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$		$\ominus$	$-3x+1 > 0, \ x < \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$
$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$		$\oplus$	$x-1 > 0, \quad x > 1$
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$		$\oplus$	$x > 0$
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$		$\ominus$	$(-3x+1)(x-1)x$

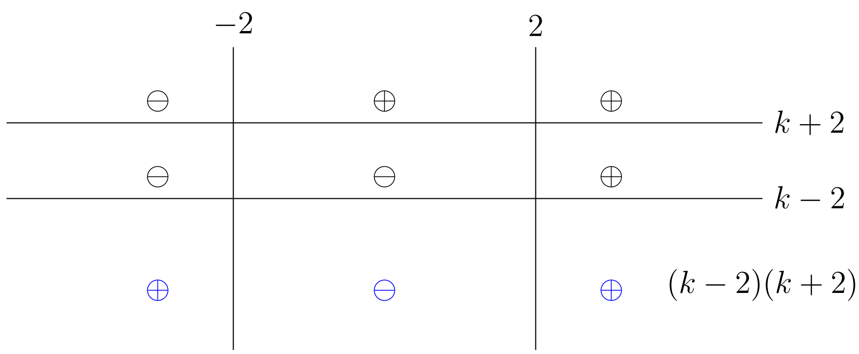
Las soluciones reales de la desigualdad están en $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, 1)$.

Ejemplo 2.18.5. Desigualdades

Halle todos los posibles valores de k para que la ecuación $x^2 + kx + 1 = 0$ tenga soluciones reales.

Solución

El discriminante de la ecuación es $D = k^2 - 4(1)(1) = k^2 - 4$. Las soluciones son reales cuando el discriminante es mayor o igual a cero, es decir, $D \geq 0$ lo cual es equivalente a $k^2 - 4 \geq 0$. Las soluciones de esta inecuación en la variable k es $(k-2)(k+2) \geq 0$



Así $k^2 - 4 \geq 0$. si k está en el intervalo $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Por lo tanto la ecuación cuadrática tiene solución en los reales si k cumple con esta condición.

$$k \in \{x : x \in \mathbb{R} - (-2, 2)\}$$

Ejercicios 21.

Determine la solución de cada desigualdad cuadrática:

1. $(x+2)(2x+5) < 0$
2. $x(x+5)(6x-12) \geq 0$
3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$
4. $\dfrac{x}{3x+8} < 2$
5. $3x^2 - x + 8 \leq x - 2$
6. $4x^2 + 7x - 1 \leq x^2 - 6$
7. $x^2 - x + 8 \geq 2x^2 - 2$
8. $3x^2 + 5x - 1 \leq 5x^2 - 6$
9. $2x^2 - x + 8 > 9x - 2$
10. $3x^2 + x - 1 \leq x^2 - 9$
11. $x^2 - x + 3 < x - 2$
12. $4x^2 + 7x - 1 \leq 6x^2 - 1$

13. $5x^2 - x + 8 \geq 2x^2 - 2$

14. $3x^2 + 7x - 1 \leq x^2 - 8$

15. $8x^2 - x + 8 > 2x - 9$

16. $x^2 - x - 6 < 0$

2.19. Desigualdades con valor absoluto

Ejemplo 2.19.1. Desigualdad

Hallar los valores de x tales que $|x - 2| < 4$.

Solución
Se usará la propiedad

$$|y| < \epsilon \text{ si y solo si } -\epsilon < y < \epsilon.$$

Sustituyendo los datos correspondientes se obtiene:

$$|\underbrace{x-2}_{y}| < \underbrace{4}_{\epsilon} \text{ si y solo si } -4 < x - 2 < 4$$

sumando 2 a cada término en la desigualdad

$$-4 + 2 < x - 2 + 2 < 4 + 2 \text{ si y solo si } -2 < x < 6.$$

El conjunto solución es el intervalo $(-2, 6)$.

Ejemplo 2.19.2. Desigualdad

Hallar el conjunto solución de $|3x - 5| > 25$.

Solución
Se usará la propiedad

$$|y| > \epsilon \text{ si y solo si } y > \epsilon \text{ o } y < -\epsilon.$$

Realizando la sustitución correspondiente se obtiene:

$$|\underbrace{3x-5}_{y}| > \underbrace{25}_{\epsilon} \text{ si y solo si } -25 > 3x - 5 \qquad \text{o} \qquad 3x - 5 > 25$$

$$\begin{aligned} -25 + 5 > 3x - 5 + 5 \qquad &\text{o} \qquad 3x - 5 + 5 > 25 + 5 \\ -20 > 3x \qquad &\text{o} \qquad 3x > 30 \\ \frac{-20}{3} > x \qquad &\text{o} \qquad x > \frac{30}{3} = 10 \end{aligned}$$

El conjunto solución es entonces $(-\infty, -\frac{20}{3}) \cup (10, \infty)$. Ver con click aquí o consulte el código QR al final del libro video. $\odot$

Operaciones con el valor absoluto

Si x y y son dos números reales y n es un entero positivo, entonces las siguientes expresiones son verdaderas:

1. $-|x| \leq x \leq |x|$
2. $|x| \leq n$ si y solo si $-n \leq x \leq n$
3. $n \leq |x|$ si y solo si $n \leq x$ o $x \leq -n$
4. Desigualdad triangular: $|x+y| \leq |x| + |y|$

Ejercicios 22. Desigualdad con valor absoluto.
Utilice las propiedades de valor absoluto para resolver cada desigualdad:

1. $|5x - 8| < 5$
2. $|x + 3| > 4$
3. $|2x + 1| < 3$
4. $\frac{1}{5} - 2|x + 1| \leq 0$
5. $\left|\frac{2 - x}{4}\right| - 1 \geq 0$
6. $|3 - x| > -2$
7. $|x - 4| + 3 \leq 0$
8. $-\frac{1}{3}|3 - 2x| + 3 \geq 1$
9. $\left|\frac{x}{4} - 5\right| \leq 0$

2.20. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

2.20.1. Ecuaciones exponenciales

Para resolver las ecuaciones exponenciales, se agrupan las expresiones que tienen las potencias, se factorizan las potencias y se aplican las propiedades de logaritmo para despejar x :

Ejemplo 2.20.1. Ecuación

Hallar el valor de x en $e^{x+1} = 2$.

Solución

$$\begin{aligned} e^{x+1} &= 2 \\ \ln(e^{x+1}) &= \ln(2) \\ x+1 &= \ln(2) \\ x &= \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

Ver vídeo. dando click aquí o consulte el código QR al final del libro ⊙ y Ver guía click aquí

Ejemplo 2.20.2. Ecuación

Resuelva para x cuando sea posible.

(a) $2^{x^2-2x+5} = 5$

(b) $3 = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} 2^{x^2-2x+5} &= 5 \\ x^2 - 2x + 5 &= \log_2 5 \\ x^2 - 2x + 5 - \log_2 5 &= 0 \end{aligned}$$

esta es una ecuación cuadrática con soluciones

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5 - \log_2 5)}}{2(1)}$$

lo cual da dos soluciones imaginarias conjugadas porque $(-2)^2 - 4(1)(5 - \log_2 5) < 0$.

(b)

$$\begin{aligned}(2)(3) &= e^x - e^{-x}\\ 6 &= e^x - \frac{1}{e^x}\\ 6 &= \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x}\\ 6e^x &= (e^x)^2 - 1\\ 0 &= (e^x)^2 - 6e^x - 1.\end{aligned}$$

Ponga $u = e^x$ entonces la ecuación queda en la forma $u^2 - 6u - 1 = 0$. Las soluciones vienen dadas por

$$\begin{aligned}u &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 481)(-1)}}{2(1)}\\ &= \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(4)(10)}}{2}\\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{10})}{2}\\ &= 3 \pm \sqrt{10}\end{aligned}$$

Entonces $e^x = 3 + \sqrt{10}$ o $e^x = 3 - \sqrt{10}$. Observe que la segunda opción no es posible ya que se tendría un valor de la exponencial negativo. De la primera opción se tiene entonces que $x = \ln(3 + \sqrt{10})$. Verificando

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{e^{\ln(3+\sqrt{10})} - e^{-\ln(3+\sqrt{10})}}{2}\\ &= \frac{3 + \sqrt{10} - \dfrac{1}{3 + \sqrt{10}}}{2}\\ &= \frac{\frac{(3+\sqrt{10})^2 - 1}{3+\sqrt{10}}}{2}\\ &= \frac{9 + 6\sqrt{10} + 10 - 1}{2(3 + \sqrt{10})}\\ &= \frac{18 + 6\sqrt{10}}{2(3 + \sqrt{10})} = \frac{6(3 + \sqrt{10})}{2(3 + \sqrt{10})} = 3\end{aligned}$$

Ejemplo 2.20.3. Ecuación

Hallar el valor de t si:

a) $2 = \dfrac{10e^{-0.5t}}{10 + 51(e^{-0.5t} - 1)}$ b) $5 = \dfrac{10e^{rt}}{10 + 10(e^{rt} - 1)}$

Solución

a)

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{10e^{-0.5t}}{10+51(e^{-0.5t}-1)} \\ 2(10+51(e^{-0.5t}-1)) &= 10e^{-0.5t} \\ 20+102(e^{-0.5t}-1) &= 10e^{-0.5t} \\ 20+102e^{-0.5t}-102 &= 10e^{-0.5t} \\ 102e^{-0.5t}-10e^{-0.5t} &= -20+102 \\ e^{-0.5t}(102-10) &= 82 \\ e^{-0.5t}92 &= 82 \\ e^{-0.5t} &= \frac{82}{92} = \frac{41}{46} \\ -0.5t &= \ln\left(\frac{41}{46}\right) \\ t &= \frac{1}{-0.5}\ln\left(\frac{41}{46}\right) = -2\ln\left(\frac{41}{46}\right) \approx 0.2301 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{10e^{rt}}{10+10(e^{rt}-1)} \\ 5 &= \frac{e^{rt}}{1+e^{rt}-1} \\ 5 &= \frac{e^{rt}}{e^{rt}} \\ 5 &= 1 \end{aligned}$$

Debido a que se tiene una inconsistencia, se concluye que no existe solución. Ver vídeo con click aquí o consulte el código QR al final del libro. $\odot$

Ejemplo 2.20.4. Ecuación

Hallar el valor de t

$$100 = P_0e^{kt} + \frac{1}{k}(e^{kt}-1)$$

Solución

$$\begin{aligned}
100 &= P_0 e^{kt} + \frac{1}{k}(e^{kt} - 1) \\
100 &= P_0 e^{kt} + \frac{1}{k} e^{kt} - \frac{1}{k} \\
100 &= e^{kt}\left(P_0 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \\
100 + \frac{1}{k} &= e^{kt}\left(P_0 + \frac{1}{k}\right) \\
e^{kt} &= \frac{100k+1}{kP_0+1} \\
\ln(e^{kt}) &= \ln\left(\frac{100k+1}{kP_0+1}\right) \\
\ln(e^{kt}) &= \ln\left(\frac{100k+1}{kP_0+1}\right) \\
kt &= \ln\left(\frac{100k+1}{kP_0+1}\right) \\
t &= \frac{1}{k}\ln\left(\frac{100k+1}{kP_0+1}\right)
\end{aligned}$$

Ver vídeo con click aquí o consulte el código QR al final del libro ⊙

Ejemplo 2.20.5. Ecuación

Hallar el valor de x, $e^{2x} + 2 = 3e^x$.

Solución

$$\begin{aligned}
e^{2x} + 2 &= 3e^x \\
e^{2x} - 3e^x + 2 &= 0
\end{aligned}$$

Ahora se reemplaza e^x por y, esto es $y = e^x$ y $y^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$ generando una nueva ecuación

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Resolviendo para y, se tiene:

$$\begin{aligned}
y^2 - 3y + 2 &= 0 \\
(y-2)(y-1) &= 0
\end{aligned}$$

Así, se tiene las dos opciones $y - 2 = 0$ o $y - 1 = 0$, de donde $y = 2$ o $y = 1$. Retomando la sustitución inicial de $y = e^x$ se puede determinar el valor correspondiente de x. Si $e^x = 2$ entonces $x = \ln(2)$. Si $e^x = 1$ entonces $x = 0$.

2.20.2. Ecuaciones logarítmicas

Ejemplo 2.20.6. Ecuación

Hallar el valor de x tal que $\log(x + 1) = 2$.

Solución
Primero note que se debe tener que $x + 1 > 0$ y que por tanto el valor de x debe ser mayor que -1. Por otro lado como no se indica base del logaritmo, se entiende que la base es 10, es decir, $\log(x + 1) = \log_{10}(x + 1)$. Como $\log(x + 1) = 2$ se debe tener que

$$x + 1 = 10^2$$

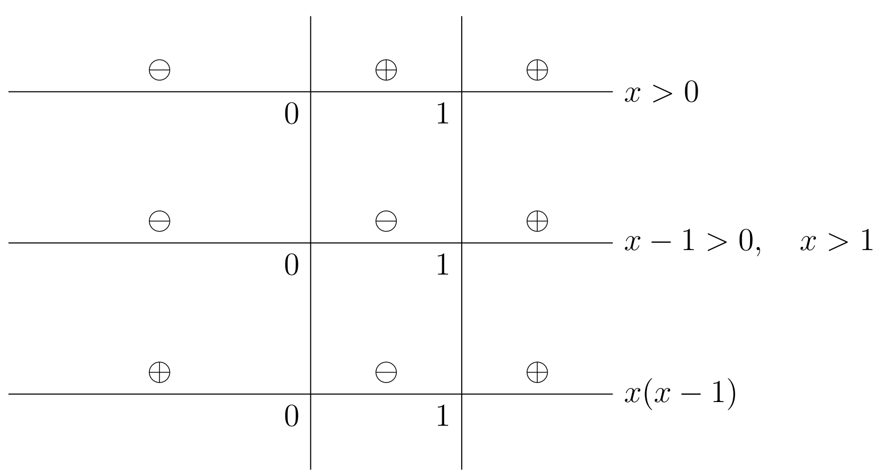
es decir $x + 1 = 100$ de donde se concluye que $x = 100 - 1 = 99$. Este valor de x es solución de la ecuación porque es mayor que -1.

Ver vídeo con click aquí o consulte el código QR al final del libro ⊙

Ejemplo 2.20.7. Ecuación

Halle el valor de x tal que $\ln(x^2 - x) = \frac{1}{2}$.

Solución
Primero observe que $x^2 - x$ debe ser mayor que cero, es decir, $x^2 - x > 0$. Lo cual produce una desigualdad que debemos resolver para hallar los valores plausibles de x.
$x^2 - x = x(x - 1) > 0$. Se hace entonces el análisis de signo de los factores x y $x + 1$.



Se deduce entonces que los valores posibles para x están en la unión de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$. Por otro lado, la ecuación ln$(x^2 - x) = \frac{1}{2}$ implica

$$x^2 - x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Como $e^{\frac{1}{2}} = 1.64.87$ se obtiene la ecuación cuadrática

$x^2 - x - 1.6487 = 0$ que puede resolverse usando la fórmula general con $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1.6487$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1.6487)}}{2(1)}$$

de donde se obtienen dos soluciones

$$x = -0.8779, \qquad x = 1.87793.$$

Ambas soluciones de la ecuación cuadrática caen en el conjunto $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$ y por tanto ambas son soluciones de la ecuación original ln$(x^2 - x) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2.20.8. Ecuación

Hallar el conjunto de posibles soluciones reales para la ecuación

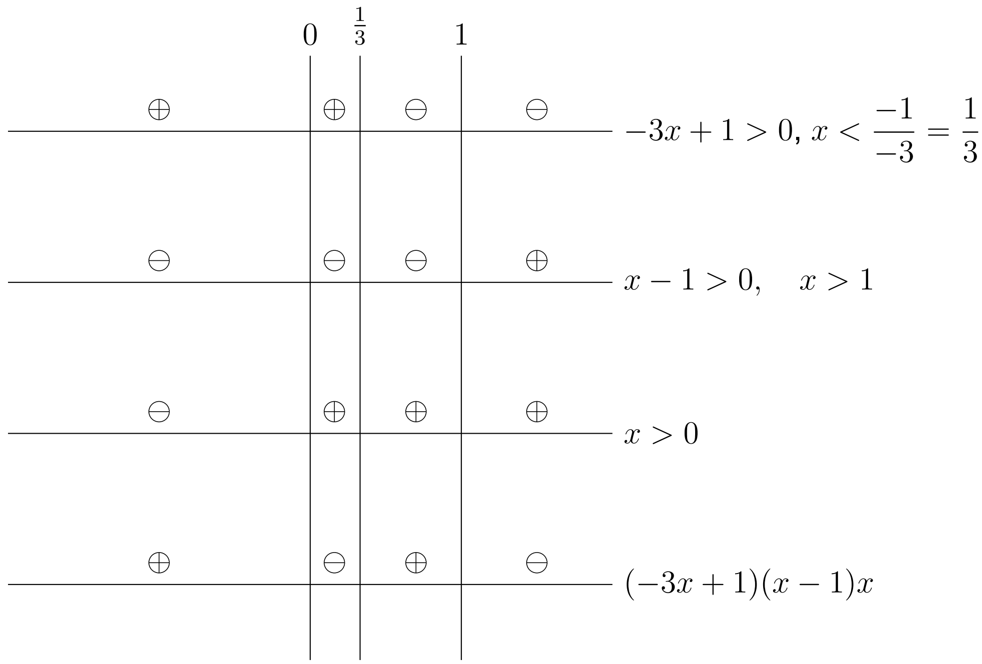
$$\log(-3x^3 + 4x^2 - x) = \sqrt{2}.$$

Solución

Primero se hallan los valores posibles para x. Se debe cumplir que $-3x^3+4x^2-x > 0$. Factorizando la expresión se obtiene

$$-3x^3 + 4x^2 - x = x(-3x^2 + 4x - 1) = (-3x + 1)(x - 1)x > 0.$$

Haciendo el análisis de signo para los factores



Las posibles soluciones reales de la ecuación están en $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, 1)$.

Ejemplo 2.20.9. Ecuación

Hallar las soluciones reales de la ecuación

$$\log(2x+1)+\log(-3x+4)=-1.$$

Solución

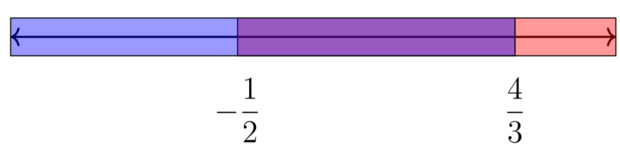
Primero se halla el conjunto de las posibles soluciones. Se debe cumplir que $2x+1>0$ y $-3x+4>0$.

De la primera restricción

$$\begin{aligned} 2x+1 &> 0 \\ 2x &> -1 \\ x &> \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

De la segunda restricción

$$\begin{aligned} -3x+4 &> 0 \\ -3x &> -4 \\ x &< \frac{-4}{-3}=\frac{4}{3} \end{aligned}$$



Se concluye entonces que las posibles soluciones están en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

Ahora procederemos a resolver la ecuación. Expresando todo como un solo logaritmo se tiene

$$\log(2x+1)+\log(-3x+4)=\log((2x+1)(-3x+4))=-1.$$

Lo que en notación exponencial significa

$$(2x+1)(-3x+4)=10^{-1}.$$

Debemos resolver entonces la ecuación

$$-6\,x^2+5\,x+4=0.1 \quad \text{o} \quad -6\,x^2+5\,x+3.9=0.$$

Resolviendo la ecuación anterior usando la fórmula general se obtienen las soluciones

$$x=-0.49086355933747, x=1.324196892670799.$$

Vemos que las dos soluciones caen en el intervalo de soluciones posibles, por tanto estos dos valores son soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 2.20.10. Ecuación

Resolver

$$7^{\log_7(5)}-6^{\log_3(2)}=5^{\log_5 x-\log_5 x^2}.$$

Solución

$$\begin{aligned}
7^{\log_7(5)}-3^{\log_3(2)} &= 5^{\log_5 x-\log_5 x^2}\\
5-2 &= 5^{\log_5\left(\frac{x}{x^2}\right)}\\
3 &= \frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\\
\frac{1}{3} &= x.
\end{aligned}$$

Ejercicios 23.

Determine los siguientes logaritmos:

1. $\log_2(4)$
2. $\log_3(9)$
3. $\log_2(32)$
4. $\log(1000)$
5. $\log_2(0.8)$
6. $\log_7(\sqrt{7})$
7. $\log_{\frac{1}{3}}(100)$
8. $\log_3 \sqrt[3]{81}$
9. $\log_3 \log_5 125$

Usando las propiedades de los logaritmos, solucione cada ecuación:

10. $\log x + \log 20 = 3$
11. $\log(x+1) = \log(x-1) + 3$
12. $\log x - \log(x+6) = 0$
13. $2\log x - \log(x+6) = 0$
14. $\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$
15. $\log(2x^2+3) = \log(x^2+5x-3)$
16. $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

Determina el valor de las variables en las siguientes expresiones:

10. $\log x = \log 5 - \log 2$
11. $1 + 2\log x = 3$
12. $\ln(x) = 2\ln(3)$
13. $3\log_3 x = -9$
14. $\log_3(3^2\sqrt{3}) = x$
15. $\log x + \log 30 = 1$
16. $\log(2x) = \log 32 - \log x$
17. $4\log_3(2x-5) = \log_3 81$
18. $\log_2(x^2+x+2) = 2$
19. $\log_2 \dfrac{3x^2+5}{2x+1} = 3$
20. $\log x + \log y = 3$
    $x - 3y = 70$

Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique:

21. $a^{2x+1} = a^{3x+2}$
22. $3^{3x} = 2187$
23. $2^{5x-7} = 512$
24. $-81 = (-3)^{3x-5}$
25. $3^x = 27$
26. $7^{x+1} = 1$
27. $5^{x-1} = 25$
28. $2^x = \frac{1}{8}$
29. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 14$
30. $6^{2x} = 1296$
31. $2x^{x^2-1} = 8$
32. $3^x 9^x = 9^3$
33. $2^{5-x^2} = \frac{1}{16}$
34. $5^{x+3} = \sqrt{125}$
35. $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39$
36. $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$
37. $2^x + 4^x = 80$
38. $2^x + \dfrac{1}{2^{x-2}} = 5$
39. $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$

Use WxMaxima para la solución de los ejercicios anteriores y compárela con sus resultados. Dar click aquí o consulte el código QR al final del libro.

2.21. Interpretación de textos matemáticos

- En nuestra interacción con el mundo se usan descripciones verbales y escritas de las cosas.
- Las escritas pueden estar descritas en el lenguaje cotidiano, de manera simbólica o gráfica o una combinación de ellas.
- Parte del éxito en las ciencias radica en la capacidad de poder moverse fluidamente entre estas maneras de expresar nuestros pensamientos.
- Adquirir la competencia lectora en Ciencias Exactas y Naturales implica haber adquirido la capacidad de expresar el mismo pensamiento de las diversas maneras señaladas anteriormente.

En este curso se abusará un poco del lenguaje. Se dirá, por ejemplo, que un enunciado está en forma verbal si está escrito en su mayoría en lenguaje usual.

Para tener en cuenta

Para tener éxito en la solución de problemas es " necesario" tener la capacidad de expresar enunciados descritos en forma verbal a la forma simbólica y viceversa. ¡Hay que dedicarle tiempo al desarrollo de esta habilidad!.

Expresar en forma simbólica:

- El producto de tres números naturales consecutivos.
- El cubo de un número natural menos su cuadrado.
- La diferencia de dos números naturales multiplicada por su suma.
- El precio de una mezcla de $200Kg$ donde m kilogramos son de un producto A a 55000 pesos por kilogramo y el resto son de un producto B a 40000 pesos por kilogramo.

El uso que se hace de las funciones en las ciencias tiene, por lo general, como finalidad establecer relaciones cuantitativas de los diversos componentes que intervienen en un fenómeno o proceso. Por ejemplo

- El número de individuos de una población puede crecer o decrecer en el tiempo. ¿De qué factores depende? ¿Puede estimarse en número de individuos en el tiempo dado?

- Dos sustancias químicas se combinan para generar un producto. ¿Cómo es la dependencia de la cantidad de producto generado de las sustancias que reaccionan?¿Puede determinarse la cantidad de producto conociendo la cantidad de las sustancias que reaccionan?
- Se tienen dos estructuras matemáticas. ¿Existe alguna relación entre ellas?¿Puede determinarse su similitud?

Sean a, b, x números. Escribir en forma algebraica las siguientes expresiones.

Expresión	Forma algebraica
El número siguiente de a	$a+1$
El número anterior a a	$a-1$
Seis veces el número b	$6b$
El cuadrado del número x	x^2
El cubo de x mas el doble de b	x^3+2b
Cinco veces a más tres veces b menos ocho	$5a+3b-8$
La mitad de a más tres veces el cuadrado de b menos x	$\frac{a}{2}+3b^2-x$
Doce veces x disminuido en cinco	$12x-5$
El producto de a y siete veces x	$a(7x)$
x dividido entre el doble de a más un tercio de b	$\frac{x}{2a}+\frac{1}{3}b$

Cuadro 2.1: Expresión vs álgebra

Ejercicios 24.
La edad actual de Humberto es x y la edad de Juan es a, expresar en forma algebraica:

1. Las suma de las edades de Humberto y Juan.
2. La diferencia de las edades de Humberto y Juan.
3. Tres veces la edad que tendrá Humbero durante cinco años.
4. Tres veces la edad de Humberto hace 10 años.
5. Cinco veces la edad de Humberto y Juan.

Exprese en forma algebraica los siguientes enunciados:

6. El área a de un cuadrado de lado l.
7. El área de un rectángulo, de base b y altura h.

8. El área de un triángulo, de base b y altura h.
9. Los días que hay en k semanas.
10. Los huevos que hay en m docenas.
11. Los días que hay en m años.
12. Los kilómetros recorridos en t horas a una velocidad de 10 kilómetros por hora.
13. Las horas que hay en p minutos.
14. El precio de un artículo si a artículos cuestan b pesos.
15. La suma de las cinco primeras potencias de x.
16. El producto de las cinco primeras potencias de a.
17. Los metros que hay en k kilómetros.
18. La diferencia del producto de a y b, y x.
19. El cociente entre a y la diferencia entre b y x.
20. El duplo del cuadrado de la suma de a y b.
21. El cociente del cuadrado de la suma de a y b, y x.
22. El doble de a más b.
23. El doble de a, más b.
24. La suma de los cuadrados de a, b y x.
25. El cuadrado de x menos el cuadrado de la suma de b y x.

Capítulo 3

Relaciones y funciones

3.1. Relaciones definidas en los reales

En matemáticas las funciones tienen importancia por el mero hecho de ser funciones, mientras que en las aplicaciones su importancia se clasifica de acuerdo a la utilidad que prestan como herramienta de modelación. Una misma función puede utilizarse para describir diversos fenómenos.

El cálculo es uno de los logros supremos del intelecto humano. Esta disciplina matemática deriva principalmente de las investigaciones hechas por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) alrededor del siglo XVII. Sin embargo, algunas de sus ideas datan de la fecha de la época de Arquímedes (287-212 a.c.) y se originó en culturas tan diversas como las de Grecia, Egipto, Babilonia, India, China y Japón. Muchos de los descubrimientos científicos que han dado forma a nuestra civilización durante los últimos tres siglos habría sido imposible sin el uso del cálculo.

El principal objetivo del cálculo es el análisis de los problemas de cambio (de movimiento por ejemplo) y de contenido (el cálculo del área y el volumen, por ejemplo). Estos problemas son fundamentales, ya que vivimos en un mundo de cambio incesante, lleno de cuerpos en movimiento y fenómenos de flujo y reflujo. En consecuencia, el cálculo sigue siendo un tema vibrante, y hoy este cuerpo de técnica computacional continúa sirviendo como el principal lenguaje cuantitativo de la ciencia y la tecnología.

La palabra “función” fue introducida en Matemáticas por Leibniz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenia un alcance muy reducido, y posteriormente el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas.

La mayoría de las aplicaciones del cálculo implican el uso de los números reales o variables para describir el cambio de cantidades. La clave para el análisis matemático de una situación geométrica o científica es típicamente el reconocimiento de las relaciones entre las variables que describen la situación. Tal relación puede ser una fórmula que expresa una variable como una función de otra. Por ejemplo:

- ☞ El área A de un círculo de radio r está dada por $A = \pi r^2$. El volumen V y el área superficial S de una esfera de radio r están dadas por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $S = 4\pi r^2$, respectivamente.
- ☞ Después de t segundos (s) un cuerpo que ha sufrido una caída desde el reposo ha caído a una distancia $s = \frac{1}{2}gt^2$ en pies (ft) y tiene una velocidad $v = gt$ pies por segundo (ft / s), donde $g = 32ft/s$ es la aceleración gravitacional.
- ☞ El volumen V (en litros, L) de 3 gramos (g) de dióxido de carbono a $27°C$ se da en términos de su presión p en atmósferas (atm) por $V = 1,68/p$.
- ☞ Las equivalencias entre las dos escalas de medir temperaturas viene dadas por

  Fahrenheit a Celsius : $°C = (°F - 32) \div 1.8$
  Celsius a Fahrenheit : $°F = (°C \times 1.8) + 32.$

Definición 3.1.1: Relación

Una relación real R definida en un subconjunto D de números reales es una regla que asigna a un número x en D un número real en un conjunto D' de números reales, que se denota por $R(x) = \{(x, y) : x$ se relaciona con $y\}$.

Ejemplo 3.1.1. Relación

Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y el conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, establezca cuatro relaciones del conjunto A al conjunto B.

Solución

$R(x) = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
$R(x) = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)(d, 1)\}$
$R(x) = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$R(x) = \{(c, 1), (c, 2), (b, 2)\}.$
También podemos definir relaciones como: un número real con su cuadrado, es decir

$$R(x) = \{(x, y) : y = x^2\}.$$

Algunos elementos de este conjunto son $(2, 4), (\sqrt{2}, 2), (4, 16), ...$
El papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento es fundamental, por lo que una relación puede tener distintas representaciones; esta puede ser verbal, algebraica, tablas y gráficos.

a) **Forma verbal:** Se describe la relación en el lenguaje común lo más preciso posible, como por ejemplo "un número real es igual al cuadrado de otro más cinco".

b) **Forma algebraica:** Tomando la expresión anterior, le corresponde la ecuación algebraica siguiente:

$$y = x^2 + 5.$$

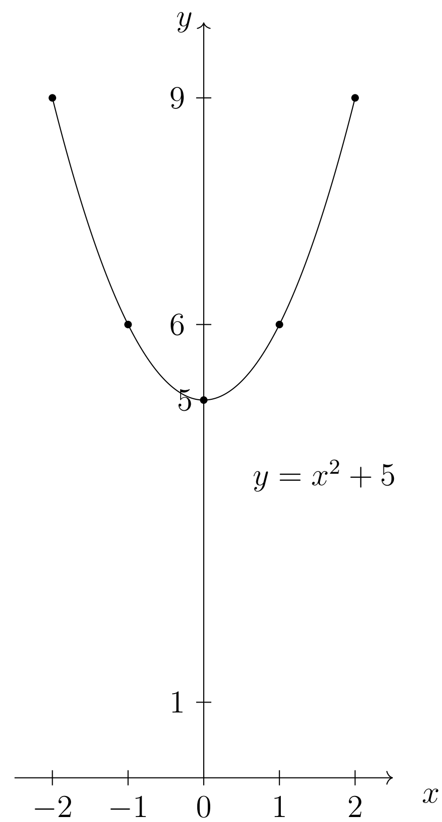
c) **Forma en tabla:** Se organiza un arreglo rectangular ya sea vertical u horizontal, en donde en el primer arreglo se ubican algunos valores para x y en el segundo arreglo se ubican los valores de y. Téngase presente que una tabla solo nos proporciona algunos valores de la relación y tomando la relación inicial se tiene:

x	$y = x^2 + 5$
-2	9
-1	6
0	5
1	6
2	9

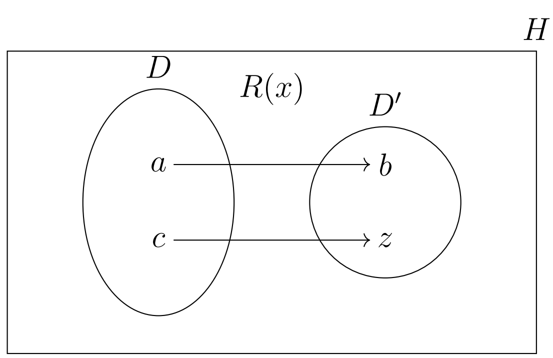
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 5$	9	6	5	6	9

d) **Forma gráfica:** Aprovechando las dos formas anteriores y localizando en el plano cartesiano los puntos de la tabla y uniendo con lineas continuas cada punto en el orden secuencial de las x, se bosqueja la relación.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 5$	9	6	5	6	9



Nota 1. Entre mayor sea el número de puntos calculados en la tabla el gráfico sera mejor, algunas veces esta forma puede conducir a errores si no son elegidos adecuadamente los puntos.



3.2. Funciones y sus gráficas

Una función es una regla que describe un tipo de relación que existe entre dos cantidades en la cual una depende del comportamiento de la otra, como por ejemplo, el espacio que recorre una piedra cuando se deja caer de cierta altura, vemos que

esta guarda una relación con el tiempo, que a mayor tiempo que demore en el aire, mayor será la distancia que recorre en el descenso.
Cuando se plantean problemas que involucran cantidades que guardan alguna relación y se requiere construir una representación simbólica matemática, con el fin de representar las relaciones pertinentes, estas pueden ser gráficos, curvas, tablas, fórmulas, entre otras. El realizar estas interpretaciones es de vital importancia para tomar decisiones ante la predicción de resultados. El concepto de función es muy importante en las matemáticas por ser una forma muy natural de describir los fenómenos de la realidad, por tal motivo podemos decir que las funciones nos rodean en nuestro vivir diario, desde la relación que existe en el consumo del agua con respecto al valor a cancelar, la edad de cada persona, su estatura o su número de identificación, los códigos de barra de los diferentes productos en un centro comercial, la velocidad promedio con que se transporta en un servicio de bus urbano, el crecimiento de una planta con respecto a los nutrientes, la tasa de interés anual con respecto a los años transcurridos, y asi se pueden citar múltiples ejemplos de nuestro vivir.

Definición 3.2.1: Función

Dados dos conjunto A y B cualesquiera, una función es una regla que asigna a cada elemento x del conjunto A un único elemento y del conjunto B. Al elemento y se le llama imagen de x y al elemento x se le llama preimagen de y.
Al conjunto A se le llama conjunto de partida o dominio de la función y al conjunto B se le llama conjunto de llegada o codominio. Al conjunto de las imágenes de elementos de A se le llama rango.

Si f es una función definida de un conjunto A a un conjunto B, entonces a la imagen de x también se le llama $f(x)$ y se usan las siguientes notaciones para la función f de A en B, $x \mapsto f(x)$, $A \xrightarrow{f} B$ o $y = f(x)$.

Ejercicios 25. Funciones
Gráficar las siguientes funciones:

1. $x = 0$
2. $x = -5$
3. $y = x$
4. $y = -2x - 1$
5. $y = \frac{1}{2} - 1$
6. $y = 2x$

Representa las siguientes funciones lineales sabiendo que:

7. Tiene pendiente -3 y ordenada en el origen -1.
8. Tiene pendiente 4 y pasa por el punto $(-3, 2)$.
9. Pasa por los puntos A$(-1, 5)$ y B$(3, 7)$.

10. Pasa por el punto P$(2, -3)$ y es paralela la recta de ecuación $y = -x + 7$.

Ver guía de Gráfica de funciones, con click aquí o consulte el código QR al final del libro.

3.3. Dominio y rango de funciones reales

El conjunto D de todos los números para los que $f(x)$ se define recibe el nombre de dominio (o dominio de definición) de la función f. El número $f(x)$, lee "f de x", se denomina valor de f en el número (o punto) x. El conjunto de todos los valores de $y = f(x)$ se llama el rango de f. Es decir, el rango de f es el conjunto

$$\{y : y = f(x)\} \text{ para algún } x \text{ en } D.$$

En esta sección nos ocuparemos más del dominio de una función que de su rango. Cuando se describe la función f escribiendo una fórmula $y = f(x)$, a x se le llama **variable independiente** y a y **variable dependiente** porque el valor de y depende, a través de f, de la elección de x. A medida que la variable independiente x, cambia o varía, lo mismo podría ocurrir con la variable dependiente y. La forma en que se y varía depende de la regla de asignación de la función f.

La idea de función se puede ilustrar esquemáticamente de muchas maneras. Por ejemplo, en la figura 3.1a los conjuntos D e Y son sendos conjuntos de puntos, y una flecha indica cómo se asocia un punto arbitrario x de D con su punto imagen $f(x)$ de Y. Otro esquema es el de la figura 3.1b donde la función f se imagina como una máquina en la cual los objetos del conjunto X se transforman para producir objetos del conjunto Y. Cuando un objeto x es transformado por la máquina. El resultado final es el objeto $f(x)$.

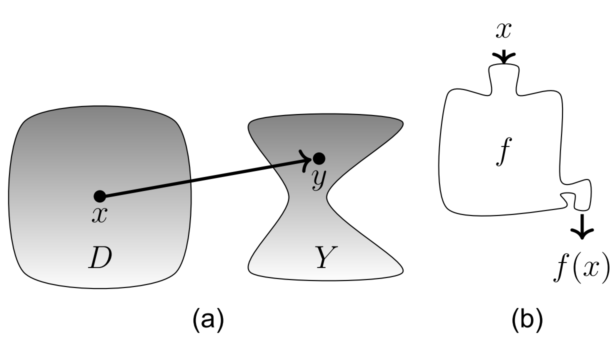


Figura 3.1: Esquema de representación de una función

Dominios e intervalos

La función f y el valor o la expresión $f(x)$ son diferentes en el mismo sentido que una máquina y su salida no son lo mismo. Es decir, la maquina tiene incorporada el conjunto de instrucciones necesarias para hacer la transformación pero necesita que se le incorporen los insumos necesarios para que haga su trabajo y produzca la salida. Sin embargo, es común el uso de una expresión como "la función $f(x) = x^2$" para definir una función meramente escribiendo una expresión que la define. En esta situación no se especifica el dominio de la función. Entonces, por convención, el dominio de la función f es el conjunto de todos los números reales para los que la expresión $f(x)$ tiene sentido y produce un número real y, por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = 1/x$ es el conjunto de todos los números reales no nulos (porque $1/x$ se define precisamente cuando $x \neq 0$).

Ejemplo 3.3.1. Dominio de una función

Determine el dominio de la siguiente función: $f(x) = 3x(2 - \sqrt{2}x)$.

Solución
El dominio son todos los números reales, cualquier número puede ser evaluado en la función generando un y.

Ejemplo 3.3.2. Dominio de una función

Determine el dominio de la siguiente función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9x}$.

Solución
En este caso vemos que el denominador contiene a x, por lo que debemos buscar que valores generan cero en el denominador, esto es $x^2 - 9x = 0$, factorizando se tiene

$$x(x - 9) = 0.$$

Así, se genera cero si $x = 0$ o $x = 9$, de donde se concluye que estos valores no los puede tomar x, por tanto el dominio de f son todos los números reales a excepción de $x = 0$ y $x = 9$.

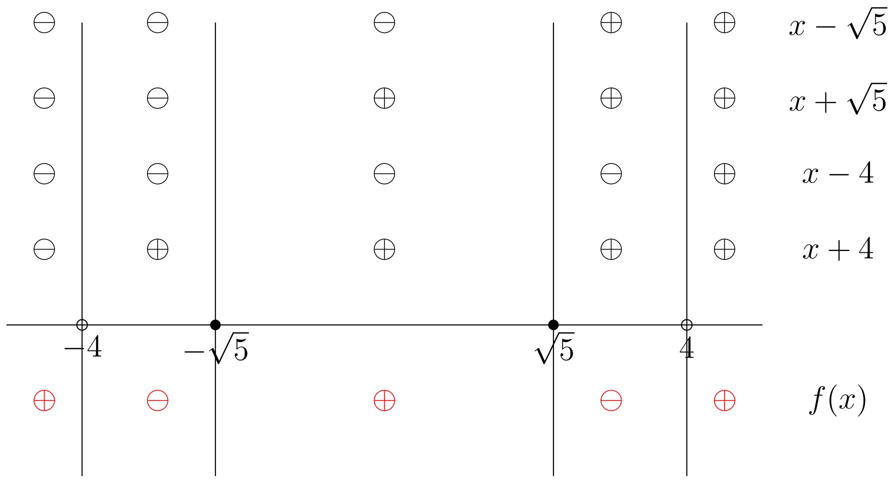
Ejemplo 3.3.3. Dominio de una función

Determine el dominio de la siguiente función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 16}}$.

Solución
En primera instancia se contempla que el denominador $x^2 - 16$ no puede ser cero y como toda la fracción esta dentro de una raíz, esta debe ser mayor que cero:

$$\frac{x^2 - 5}{x^2 - 16} \geq 0.$$

Resolviendo esta desigualdad se obtiene:



De tal manera que el dominio de $f(x)$ es

$$(-\infty,-4)\cup\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]\cup(4,\infty).$$

Una función puede estar definida a trozos. Es decir dependiendo del valor de x en un intervalo la función puede estar definida de diferente manera.
Ver vídeo con click aquí o consulte el código QR al final del libro. ⊙

Ejemplo 3.3.4. Función por parte

$$f(x)=\begin{cases}-3-2x, & \text{si } -4\leq x<0.\\ 1, & \text{si } x=0\\ 3, & \text{si } 0<x<2\\ \sqrt{x-2}, & \text{si } x\geq 2.\end{cases}$$

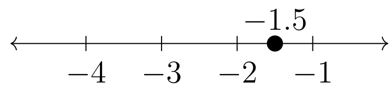
Aquí el dominio se encuentra especificado a la derecha de cada parte definida de la función $f(x)$.

Algunas reglas de la función están dadas por una descripción verbal, antes que una fórmula.

Función parte entera

Se define la parte entera de x, notada $\lfloor x\rfloor$, como el mayor entero que es menor o igual que el número x. Otra notación alternativa para la función parte entera es $[\![x]\!]$. Halle $\lfloor -1.5\rfloor$, $\lfloor -2\rfloor$, $\lfloor 2\rfloor$, $\lfloor 1.2\rfloor$.

- La gráfica ilustra los enteros que son menores o iguales a -1.5

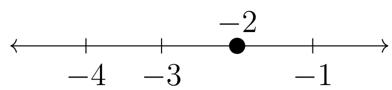


Se puede observar que del conjunto de todos los enteros que son menores o iguales a $-1.5,$ es decir,

$$\{\cdots, -4, -3, -2\}$$

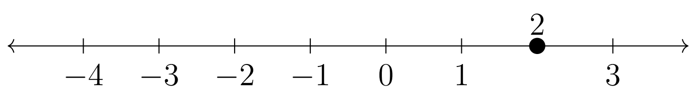
el mayor es -2. Así, $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

- La gráfica ilustra los enteros que son menores o iguales a -2



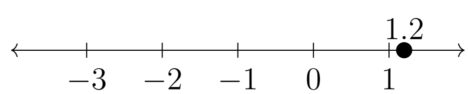
Se puede observar que del conjunto de todos los enteros que son menores o iguales a -2, $\{\cdots, -4, -3, -2\}$, el mayor de estos números es -2. Así, $\lfloor -2 \rfloor = -2$.

- La gráfica ilustra los enteros que son menores o iguales a 2



Se puede observar que del conjunto de todos los enteros que son menores o iguales a 2, $\{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, el mayor de estos números es 2. Así, $\lfloor 2 \rfloor = 2$.

- La gráfica ilustra los enteros que son menores o iguales a 1.2



Se puede observar que de todos los enteros que son menores o iguales,

$$\{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1\},$$

el mayor es 1. Así, $\lfloor 1.2 \rfloor = 1$.

En general si x es un número entero, la parte entera de x es el mismo número. Si el número es positivo y tiene parte decimal, simplemente réstele la parte decimal y el resultado es la parte entera. Si el número es negativo, la parte entera es el entero negativo que está antes del número dado. La función parte entera también se conoce como la **función piso**.

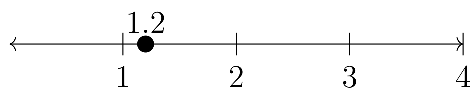
Función cielo

Análoga a la función piso se define la función cielo, notada $\lceil x \rceil$, y es el menor entero "que no es menor que" el número x.

Ejemplo 3.3.5. Función cielo

Determine el cielo de $\lceil 1.2 \rceil$.

Solución
La representación gráfica de 1.2 en la recta real es la siguiente:



Se puede observar que de todos los enteros que no son menores a 1.2, los cuales son, $\{2, 3, 4, 5, \cdots\}$, el menor es 2. Así, $\lceil 1.2 \rceil = 2$.

Función de franqueo postal

En 1997 el costo de una carta en correo de primera clase en Estados Unidos era de 32 centavos para la primera onza y 23 centavos por cada onza adicional o fracción. Para una carta que pese $w > 0$ onzas el número de onzas adicionales (incluyendo fracciones de onzas como una) es $\lceil w \rceil - 1$. Por lo tanto el precio de envió de la carta es

$$s(w) = 32 + 23(\lceil w \rceil - 1) = 9 + 23\lceil w \rceil.$$

En el cálculo elemental se estudian funciones cuyos dominios son subconjuntos de números reales y sus valores son números reales.

Ejercicios 26.
Determinar dominio y rango de las siguientes funciones :

1. $f(x) = x + 3$
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
3. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-3}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$
8. $f(x) = \dfrac{4x^2+4}{2x^2-8}$
9. $f(x) = \dfrac{4x^2+4}{2x^2+8}$
10. $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+3x+2}$
11. $f(x) = \log(x+2)$
12. $f(x) = \log(x^2-4)$
13. $f(x) = [\![2x-5]\!]$.
14. $f(x) = [\![x^2]\!]x$.

Desarrolle las gráficas de los casos anteriores y compare en la guía de gráficas de funciones. Click aquí

3.4. Gráfica de funciones

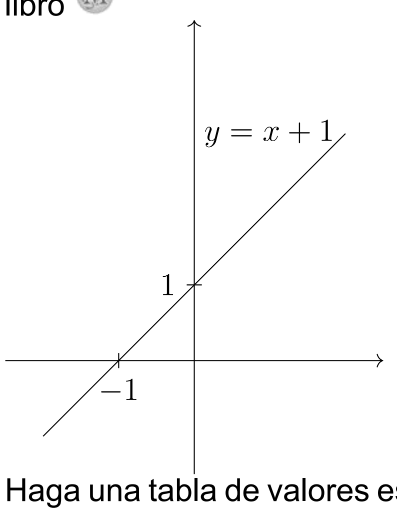
Una manera de visualizar funciones es mediante su gráfica.

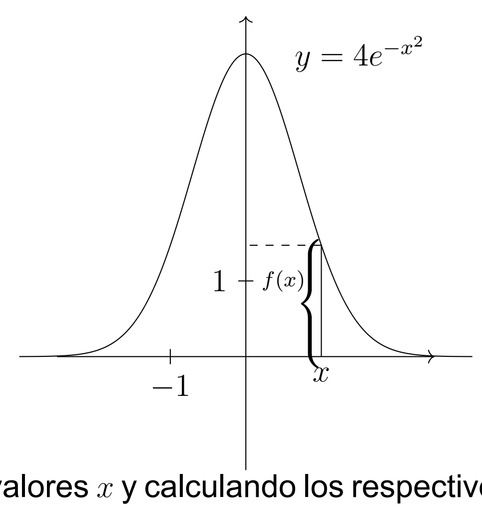
Gráfica de una función

Si f es una función con dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, su gráfica consiste en los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son los pares de entrada-salida de f, es decir, es el conjunto de puntos $(x, f(x))$ para x en el dominio de f, graficados en el plano.

- La gráfica de una función es un dibujo muy útil que describe su comportamiento.
- Si (x, y) es un punto de la gráfica, entonces $y = f(x)$ es la altura de la gráfica por encima del punto $(x, 0)$ si $f(x)$ es positivo o por debajo de $(x, 0)$ si $f(x)$ es negativo..

Usando la guía15 de WxMaxima podemos avanzar de forma fácil en los trazos de algunas funciones, dejando como ejercicio al estudiante de indagar mas sobre el tema. Guía de Gráficas de funciones. click aquí o consulte el código QR al final del libro





Haga una tabla de valores escogiendo valores x y calculando los respectivos valores de y. Los valores de x deben tomarse en el dominio de la función. ¿Cuántos puntos se eligen? Los suficientes para tener una idea de la forma de la gráfica. Entre más puntos mejor. Luego trace una curva suave a través de los puntos gráficados. Identifique la curva con su ecuación.

Ejemplo 3.4.1. Gráfica de funciones

Grafique $f(x) = 3x(2 - \sqrt{2}x)$.

Solución

x	0	0.5	1	1.5	2
y					

$$f\left(\boxed{0}\right) = 3\left(\boxed{0}\right)\left(2 - \sqrt{2}\left(\boxed{0}\right)\right) \qquad f(0) = 0$$

$$f\left(\boxed{0.5}\right) = 3\left(\boxed{0.5}\right)\left(2 - \sqrt{2}\left(\boxed{0.5}\right)\right) \qquad f(0.5) = 1.9394$$

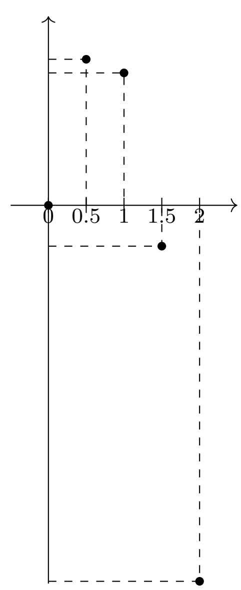
$$f\left(\boxed{1}\right) = 3\left(\boxed{1}\right)\left(2 - \sqrt{2}\left(\boxed{1}\right)\right) \qquad f(1) = 1.75736$$

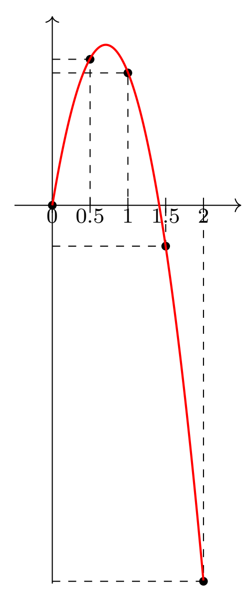
$$f\left(\boxed{1.5}\right) = 3\left(\boxed{1.5}\right)\left(2 - \sqrt{2}\left(\boxed{1.5}\right)\right) \qquad f(1.5) = -0.54594$$

$$f\left(\boxed{2}\right) = 3\left(\boxed{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\left(\boxed{2}\right)\right) \qquad f(2) = -4.97056$$

Grafique los puntos (x, y)

x	$f(x) = y$
0	0
0.5	1.93934
1	1.75736
1.5	-0.54594
2	-4.97056

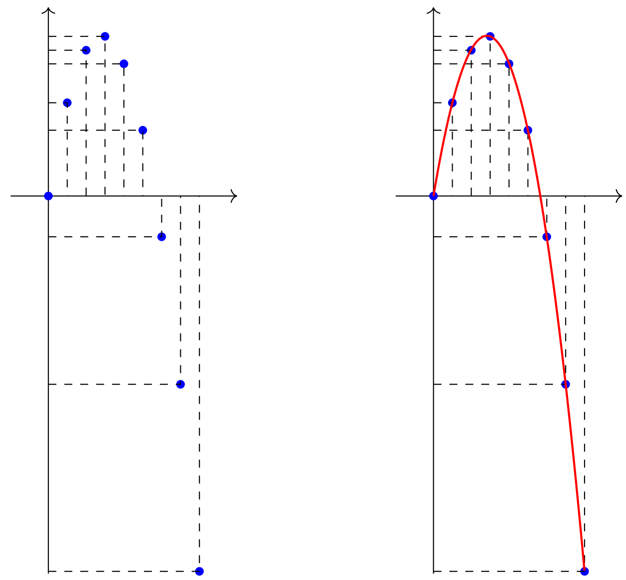




A manera de ilustración se hará la tabla de valores con más puntos.

x	y
0	0
0.25	1.2348
0.5	1.93934
0.75	2.1135
1	1.75736
1.25	0.87087
1.5	-0.54594
1.75	-2.4931
2	-4.97056

(a) Tabla



(b) Puntos (c) Unión de puntos

Figura 3.2: Gráfica de la función $f(x) = 3x(2 - \sqrt{2}x)$.

Cuando una función está definida a trozos, la gráfica se intenta hacer por partes tomando valores representativos en cada subintervalo en que se divide la función teniendo en cuenta los puntos de división de los subintervalos. Para asegurarnos del comportamiento cerca de los puntos de división se aconseja tomar valores cercanos a dichos puntos.
Ver vídeo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro $\odot$

Ejemplo 3.4.2. Gráfica de funciones

Haga la gráfica de la función siguiente:

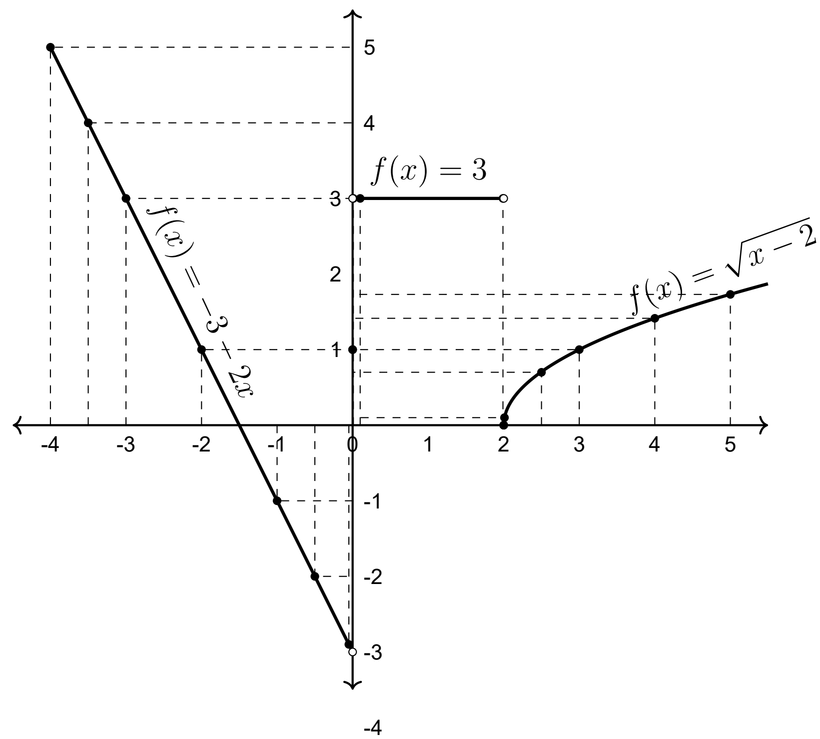
$$f(x) = \begin{cases} -3 - 2x, & \text{si } -4 \leq x < 0. \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ 3, & \text{si } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Solución

Observe que para los x que son mayores o iguales a -4 pero menores que cero ($-4 \leq x < 0$) la función se define como $f(x) = -3 - 2x$. Para $x = 0$ la función está definida como $f(x) = 1$. Para todos los x mayores que cero pero menores que 2 ($0 < x < 2$) la función se define como $f(x) = 3$ y para los x mayores o iguales a 2

($x \geq 2$) la función se define como $f(x) = \sqrt{x-2}$. Lo puntos de división son entonces -4, 0 y 2 que deben incluirse entre los valores para hacer la tabla.

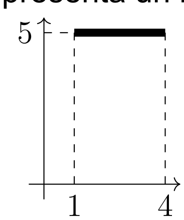
x	$f(x)$
-4	5
-3.5	4
-3	3
-2	1
-1	-1
-0.5	-2
-0.05	-2.9
0	1
0.01	3
0.1	3
1.99	3
2	0
2.01	0.1
2.5	0.7
3	1
4	1.14
5	1.73



Ejemplo 3.4.3. Gráfica de funciones

Gráfique la función $f(x) = 5$, en el dominio $1 \leq x \leq 4$.

Solución
A continuación se presenta un bosquejo de la gráfica.



Como la función es constante, basta tomar los puntos en los extremos, es decir en 1 y 4, manteniendo un segmento horizontal de longitud de 3 y con altura de 5.

Ejemplo 3.4.4. Gráfica de funciones

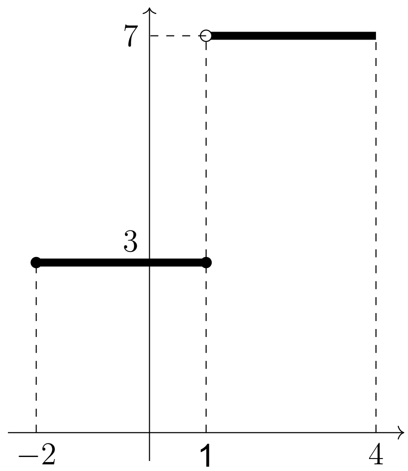
Hallar la gráfica de $f(x)$, definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ 7, & \text{si } x \in (1, 4] \end{cases}$$

limitada por las rectas $x = -2$, $x = 4$ y el eje x.

Solución

El bosquejo de la gráfica es como sigue:

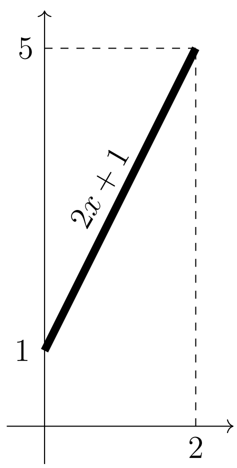


La gráfica en cuestión se muestra en la figura. Se ha dividido en dos subregiones por la línea $x = 1$. Queda dividida en dos rectángulos.

Ejemplo 3.4.5. Gráfica de funciones

Dibuje la gráfica $f(x) = 2x + 1$ en $[0, 2]$.

Solución



La función es lineal. Basta ubicar dos puntos para trazar su gráfica. Para $x = 0$, $f(0) = 2(0) + 1 = 1$, así un punto es $(0, 1)$. Para $x = 2$, $f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$. Otro punto es $(2, 5)$.
Un bosquejo de la región se muestra en la figura de la izquierda.

Ejemplo 3.4.6. Gráfica de funciones

Grafique la curva $f(x) = -|x - 2| + 5$, $-1 \leq x \leq 6$.

Solución

Primero observe que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{si } x-2 < 0, \end{cases}$$

es decir,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2. \end{cases}.$$

Al reemplazar los valores de $|x-2|$ de acuerdo a los valores de x queda que

$$f(x) = -|x-2| + 5 = \begin{cases} -(x-2)+5, & \text{si } x \geq 2 \\ -(-(x-2))+5, & \text{si } x < 2, \end{cases}$$

o

$$f(x) = -|x-2| + 5 = \begin{cases} -x+7, & \text{si } x \geq 2 \\ x+3, & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Como se debe graficar $f(x)$ en $[-1, 6]$ entonces se grafican los trozos $x+3$ en el subintervalo $[-1, 2)$ y $-x+7$ en $[2, 6]$. La Figura 3.3 muestra la gráfica la cual se ha divido en dos partes por la linea $x = 2$.

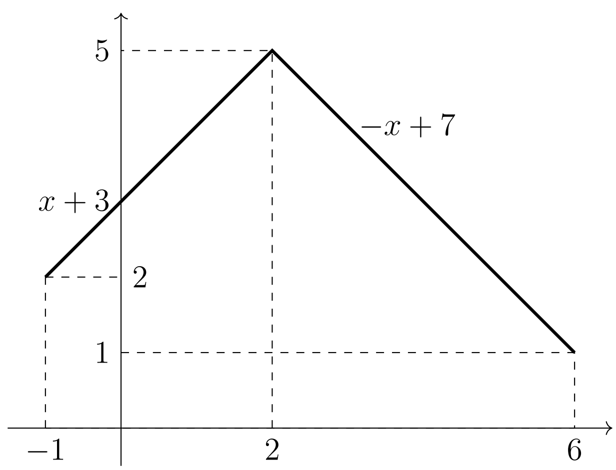


Figura 3.3: Gráfica de $f(x) = -|x-2| + 5$ del ejemplo 3.4.6

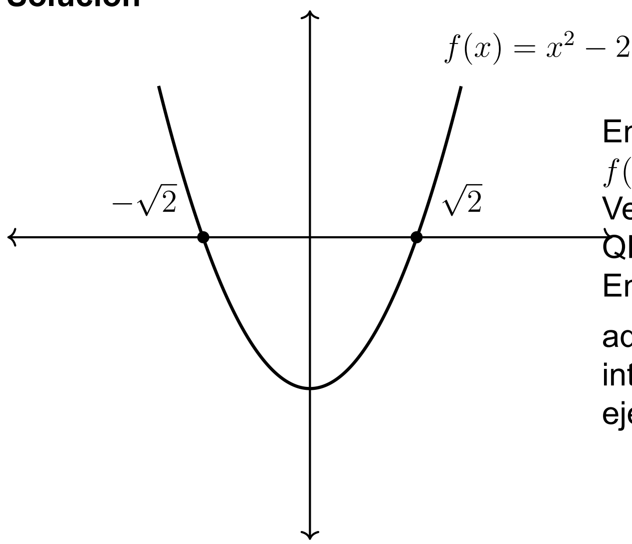
Interceptos

El intercepto con el eje y (si lo hay) viene dado por el punto $(0, f(0))$ y los interceptos con el eje x (si existen) están ubicados donde $f(x) = 0$. Los interceptos con el eje x también se llaman ceros de la función.

Ejemplo 3.4.7. Gráfica de funciones

Grafique los inteceptos de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Solución



En estos puntos podemos observar que $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$.
Ver vídeo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro ⊙
En la guía de gráficas de funciones. Click aquí podrá practicar el cálculo de las interceptaciones de las funciones con el eje x, si estas existen.

Ejercicios 27.
Grafique las siguientes funciones especificando su dominio:

1. $f(x) = 2x^2$
2. $f(x) = 3x^2$
3. $f(x) = 5x^2$
4. $f(x) = x^2 + 1$
5. $f(x) = x^2 + 3$
6. $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$
7. $f(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
8. $f(x) = \text{sen}(x)$
9. $f(x) = \text{sen}(x) + x$
10. $f(x) = 2^x$
11. $f(x) = \text{sen}(x) + 3^x$
12. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2x^2, \\ 3, \\ \sqrt{x+2}, \end{cases}$

Grafique las siguientes funciones

11. $y = (x-1)^2 + 1$
12. $y = 3(x-1)^2 + 1$
13. $y = 2(x+1)^2 - 3$
14. $y = -3(x-2)^2 - 5$
15. $y = x^2 - 7x - 18$
16. $y = 5(x+2)^2 - 3$

3.5. Tipos de funciones

Existen muchos criterios para clasificar funciones. Aquí se usarán los siguientes

- Tipo de expresión que la define.

- Constantes
- Lineal
- Polinómica
- Racional
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Trigonométricas
- Hiperbólicas

- Naturaleza del dominio, rango y unicidad de las imágenes
  - Inyectivas
  - Sobreyectivas
  - Biyectivas
- Comportamiento de los valores de la función
  - Crecientes
  - Decrecientes

Una misma función puede pertenecer a varias categorías. Por ejemplo, una función puede ser lineal, inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente. Cada categoría será descrita posteriormente con sus respectivas características.

3.6. Funciones sobreyectivas

Definición 3.6.1: Función sobreyectiva

Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva si para todo elemento y en el codominio (conjunto de llegada o alcance) existe algún elemento x en el dominio tal que la imagen de ese elemento x es y, es decir, $f(x) = y$.

- Si llegara a existir un elemento en el codominio que no es la imagen de un elemento del dominio, la función no es sobreyectiva.
- Es de mucha ayuda tener claras las propiedades de los números reales para determinar si una función es sobreyectiva.
- Para determinar si una función es sobreyectiva se parte de un elemento del conjunto de llegada y se intenta construir un elemento del dominio, que queda generalmente en función del elemento escogido inicialmente, y cuya imagen es precisamente el elemento inicial elegido.

Ejemplo 3.6.1. Función sobreyectiva

Determine si la función $f(x) = 3x + 1$ es sobreyectiva.

Solución

Se toma un elemento arbitrario del conjunto de llegada que en este caso es $\mathbb{R}$ y se trata de hallar un elemento x del dominio tal que $f(x) = y$. Suponemos entonces que $f(x) = y$ e intente ver que sería el valor x.

Como $f(x) = 3x + 1$, entonces se debe tener que $3x + 1 = f(x) = y$. De aquí se despeja x,

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}. \end{aligned}$$

Luego se verifica que efectivamente para este valor de $x = \frac{y-1}{3}$ se tiene $f(x) = y$. Recordar que $f(x) = 3x + 1$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y-1}{3}\right) &= 3\left(\frac{y-1}{3}\right) + 1 \\ &= 3\left(\frac{y-1}{3}\right) = y - 1 + 1 = y. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.2. Función sobreyectiva

Determine si la función $f(x) = x^2$ es sobreyectiva.

Solución

Sea y en el codominio y suponga $f(x) = y$. Se explorará la posibilidad de construir este x, a partir de $x^2 = f(x) = y$.

$$x^2 = y, \qquad x = \pm y.$$

Si $y > 0$, $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. Sin embargo se observa que la expresión $\sqrt{y}$ no da valores reales para $y < 0$ de modo que para los valores $y < 0$ no existe un número real x tal que $f(x) = y$. Por tanto la función no es sobreyectiva

Ejercicios 28.

Determinar si las siguientes funciones son sobreyectivas:

1. $f(x) = 2(x + 1)$
2. $f(x) = \sqrt{3x}$
3. $f(x) = \tan(x)$
4. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
5. $f(x) = \ln(x + 2)$
6. $f(x) = \cos(x)$
7. $f(x) = \cos(x)$
8. $f(x) = x^3$
9. $f(x) = |x + 1|$

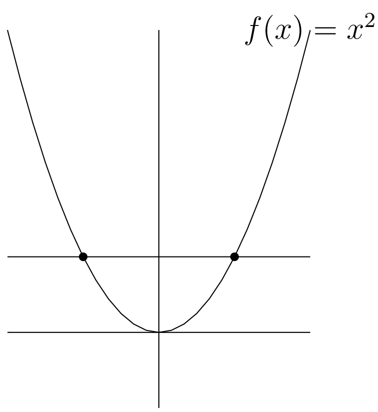
3.7. Funciones inyectivas

Una función siempre asigna a cada elemento del dominio una única imagen. No obstante es posible que varios elementos del dominio tengan la misma imagen. Por ejemplo para $f(x) = x^2$ se tiene que -2 y 2 son puntos distintos del dominio que tienen la misma imagen, $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$. Las funciones donde no ocurre lo anterior, es decir, las que asignan imágenes distintas a elementos distintos de su dominio reciben un tratamiento especial y se estudian a continuación.

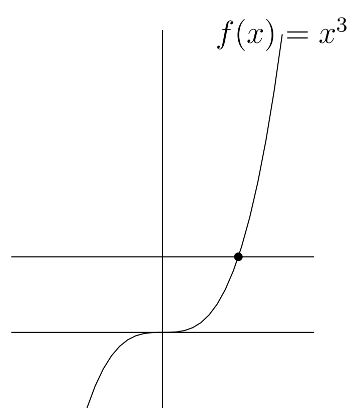
Definición 3.7.1: Función inyectiva

Sea f una función. La función f es inyectiva si para todo x_1, x_2 de su dominio $x_1 \neq x_2$ se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Una formulación equivalente a la definición 3.7.1 a la anterior es que f es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Si se encuentra un par de elementos distintos del dominio cuya imagen sea igual, la función no es inyectiva. La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Observe que si a es positivo se tiene que $-a$ es negativo y a es distinto de $-a$. Las imágenes de estos puntos son $f(a) = a^2 = (-a)^2 = f(-a)$.
Gráficamente se puede ver que una función es inyectiva si toda la linea horizontal no corta a la gráfica en más de un punto. Si se encuentra una recta horizontal que corte a la gráfica en al menos dos puntos, la función no es inyectiva. La figura 3.4a ilustra una función no inyectiva y la figura 3.4b muestra una función inyectiva.



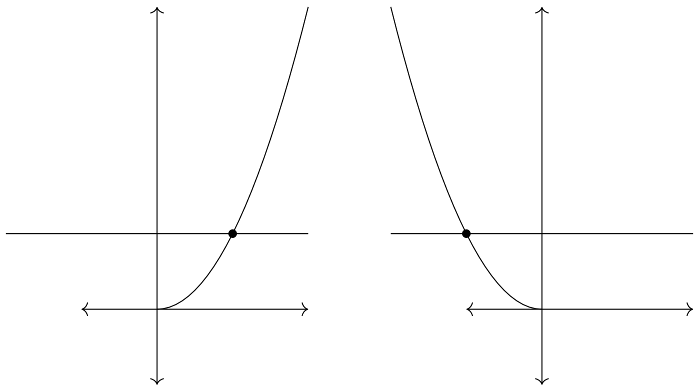
(a) Función no inyectiva



(b) Función inyectiva

Figura 3.4: Criterio de la recta horizontal.

Existen funciones que no son inyectivas en su máximo dominio de definición pero si lo son en un subconjunto adecuado. El máximo dominio de definición de $f(x) = x^2$ son todos los reales. Si solo se toman los reales no negativos, es decir, $[0, \infty)$ como su dominio, la función es inyectiva. Igual sería inyectiva si se escogiera como dominio al intervalo $(-\infty, 0]$.



(a) Gráfica de $f(x) = x^2$ con dominio $[0, \infty)$

(b) Gráfica de $f(x) = x^2$ con dominio $(-\infty, 0]$

Figura 3.5: Inyectividad de $f(x) = x^2$ en un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.7.1. Función inyectiva

Verifique que $f(x) = 3x + 1$ es una función inyectiva.

Solución

Suponemos que existen dos puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$ y verificaremos que $x_1 = x_2$. Primero observe que $f(x_1) = 3x_1+1$ y $f(x_2) = 3x_2+1$. Como supusimos $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1 &= 3x_2 + 1 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Ver vídeo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro $\odot$. Usando WxMaxima, se grafica click aquí para analizar el corte horizontal y su inyectividad.

Ejercicios 29.

Determinar si las siguientes funciones son inyectivas:

1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = x - 1$
5. $f(x) = x^2 - x + 2$
6. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
7. $f(x) = x^4 + x$
8. $f(x) = e^x$
9. $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$
   $x \to y = f(x) = x^2 - x + 2$

3.8. Funciones biyectivas

Definición 3.8.1: Función biyectiva

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo en el dominio especificado.

- Vimos anteriormente que la función $f(x) = 3x + 1$ es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva.
- La función $f(x) = x^2$ no es inyectiva cuando se define en todos los reales, tampoco es sobreyectiva por lo tanto no es biyectiva.
- La función $f(x) = x^2$ es inyectiva cuando está definida en $[0, \infty)$ y es sobreyectiva, por lo tanto es biyectiva en $[0, \infty)$.

Ejercicios 30.
Determinar si las siguientes funciones son biyectivas en su máximo dominio de definición.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
2. $f(x) = \sqrt{x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
5. $f(x) = \ln(x)$
6. $f(x) = e^x$

3.9. Funciones crecientes y decrecientes

Definición 3.9.1: Funciones crecientes

1. Una función $f(x)$ es creciente si y solo si para todo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. Una función $f(x)$ es estrictamente creciente si y solo si para todo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

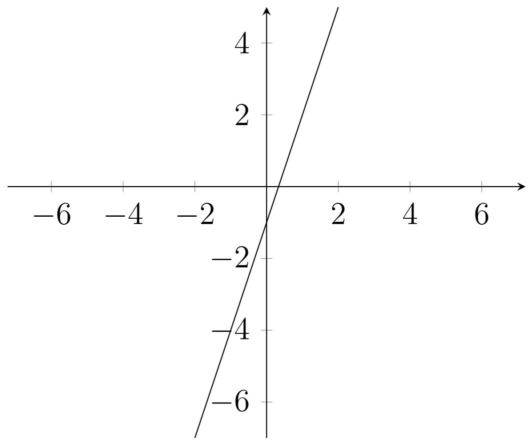
Gráficamente puede verse que una función es creciente si mirada de izquierda a derecha la gráfica sube o permanece constante cuando x aumenta.
Gráficamente puede verse que una función es estrictamente creciente si mirada de izquierda a derecha la gráfica siempre sube cuando x aumenta.

Ejemplo 3.9.1.

Verificar analíticamente y gráficamente que $f(x) = 3x - 1$ es estrictamente creciente.

Partimos de la suposición que $x_1 < x_2$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &< x_2 \\
3x_1 - 1 &< 3x_2 - 1 \\
f(x_1) = 3x_1 - 1 &< 3x_2 - 1 = f(x_2)
\end{aligned}
$$



Otra manera de hacerlo es usando el hecho que $f(x_2) < f(x_2)$ si $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= 3x_2 - 1 - (3x_1 - 1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 \\
&= 3x_2 - 3x_1 = 3(x_2 - x_1)
\end{aligned}
$$

Como $x_1 < x_2$, se tiene que $x_2 - x_1 > 0$. Entonces $3(x_2 - x_1) > 0$ y por tanto $f(x_2) - f(x_1) = 3(x_2 - x_1) > 0$. En conclusión $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición 3.9.2: Función decreciente

1. Una función $f(x)$ es decreciente si y solo si para todo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.
2. Una función $f(x)$ es estrictamente decreciente si y solo si para todo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficamente puede verse que una función es decreciente si mirada de izquierda a derecha la gráfica baja o permanece constante cuando x aumenta.

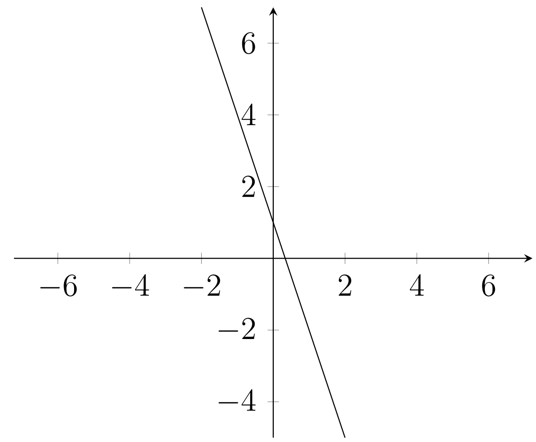
Gráficamente puede verse que una función es estrictamente decreciente si mirada de izquierda a derecha la gráfica siempre baja cuando x aumenta.

Ejemplo 3.9.2.

Verificar analíticamente y gráficamente que $f(x) = -3x + 1$ es estrictamente decreciente.

Partimos de una suposición de que $x_1 < x_2$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &< x_2 \\
-3x_1 &> -3x_2 \\
-3x_1 + 1 &> -3x_2 + 1 \\
f(x_1) &> f(x_2)
\end{aligned}
$$



También aquí pudo verificarse que $f(x_2) < f(x_1)$ haciendo $f(x_1) - f(x_2)$ y luego ver que el resultado es mayor que cero.

Ejercicios 31.

Determine los intervalos en los que las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, trace su gráfica correspondiente usando software.

1. $y = 2x - x^2$
2. $y = x^2 - 3x^2$
3. $y = x^4 - 4^3 + 15$
4. $y = x^3 - 3x$
5. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
6. $y = 3x^4 - 8x^3$
7. $5 - 2x - x^2$
8. $y = x^2 + 7x - 1$
9. $y = 4x - 4x^2 + 2$

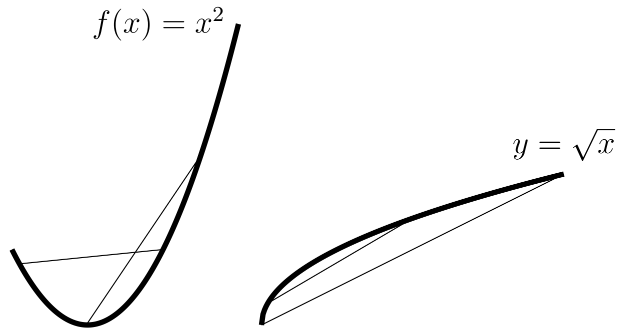
Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

3.10. Funciones convexas y cóncavas

De una manera general una función es convexa si todo segmento que une dos puntos de la gráfica está por encima de la gráfica. Una función convexa se llama también *cóncava hacia arriba*.

Una función es cóncava (cóncava hacia abajo) si todo segmento que une dos puntos de la gráfica esta estrictamente por debajo de la gráfica.

Una función puede ser convexa o cóncava en todo su dominio o en partes de él.



(a) Función convexa (b) Función cóncava

Figura 3.6: Funciones convexas y cóncavas.

Ejercicios 32.
Utilice software para graficar las siguientes funciones y especificar donde es cóncava y donde es convexa.

1. $f(x) = 2x^2$
2. $f(x) = -2x^4$
3. $f(x) = \sin(x)$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

Determine el comportamiento de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = 3x - x^3$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
6. $f(x) = (x-1)^2 - 3x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
8. $f(x) = e^{x^2-1}$
9. $f(x) = -\dfrac{3}{2x^2-2}$
10. $f(x) = \ln(x^4 - 1)$
11. $f(x) = |x-1| + x^2$

Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

3.11. Lineales

Tiene la forma $f(x) = ax+b$ o $y = ax+b$. Su máximo dominio es todo $\mathbb{R}$ y el rango para este dominio es todo $\mathbb{R}$. La intersección con el eje y viene dada por $(0, f(0)) = (0, b)$. Tiene intersecciones con el eje x si $a \neq 0$ o si $a = 0$ y $b = 0$. El punto de intersección viene dado por $0 = f(0) = ax + b$. Resolviendo para x se obtiene $ax = -b$ de donde $x = -\frac{b}{a}$. De modo que el punto de intersección con el eje x es $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

(1) Una recta horizontal tiene pendiente cero, y si pasa por el punto (x, c), c constante, tiene ecuación $y = c$.

(2) Una recta vertical no tiene pendiente , y si pasa por el punto (c, y), c constante, tiene ecuación $x = c$.

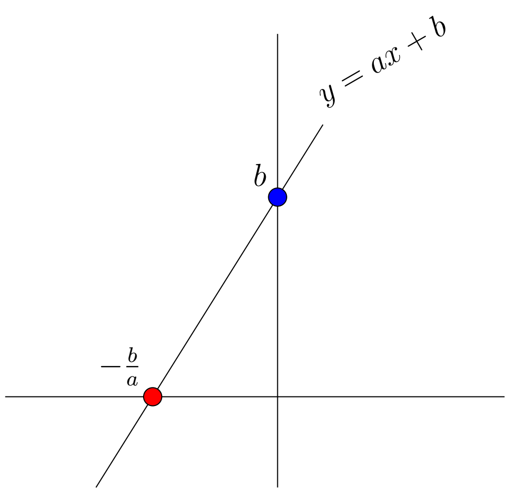
La función lineal también se acostumbra a escribir haciendo $y = f(x)$ y escribiendo

$$Ax + By + C = 0, \quad B \neq 0.$$

Para identificar los elementos principales se despeja y y se escribe en la forma $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ By &= -Ax - C \\ y &= \frac{-Ax - C}{B} \\ y &= \boxed{-\tfrac{A}{B}}\, x + \boxed{\tfrac{-C}{B}}. \end{aligned}$$

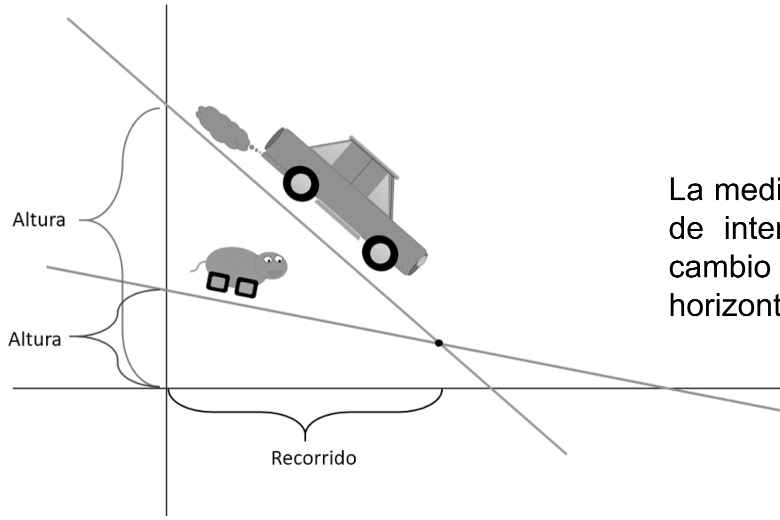
La gráfica de una función lineal es una linea recta o una porción de ella dependiendo del dominio y ***el término que acompaña a la variable se llama pendiente***, en el ejemplo anterior a es la pendiente, esta indica el grado de inclinación de la recta respecto al eje x.



Si una función lineal pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) entonces la pendiente a viene dada por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

La pendiente de la recta es la misma para cualquier par de puntos sobre la recta que se elijan para hacer el cómputo. Es decir, si (x_3, y_3) y (x_5, y_5) es cualquier otro par de puntos sobre la recta también se tiene $a = \dfrac{y_5 - y_3}{x_5 - x_3}$.



La medida de la pendiente se puede interpretar como la razón de cambio entre la altura y el recorrido horizontal.

Formas de la recta

(a) Forma estándar $y = ax + b$

(b) Punto pendiente.

Dada la pendiente a y un punto (x_0, y_0) por donde pasa la recta la ecuación de la recta viene dada por $y - y_0 = a(x - x_0)$ o equivalentemente $y = a(x - x_0) + y_0$.

Ejemplo 3.11.1. Ecuación de la recta

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -2)$ y $(2, 1)$. Señale los interceptos con los ejes.

Solución
Como se conocen dos puntos por donde pasa, puede calcularse la pendiente, y usar la forma punto pendiente la recta $y = a(x-x_0)+y_0$, tomando como (x_0, y_0) cualquiera de los dos puntos conocidos.

$$a = \frac{1-(-2)}{2-(-2)} = \frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4}.$$

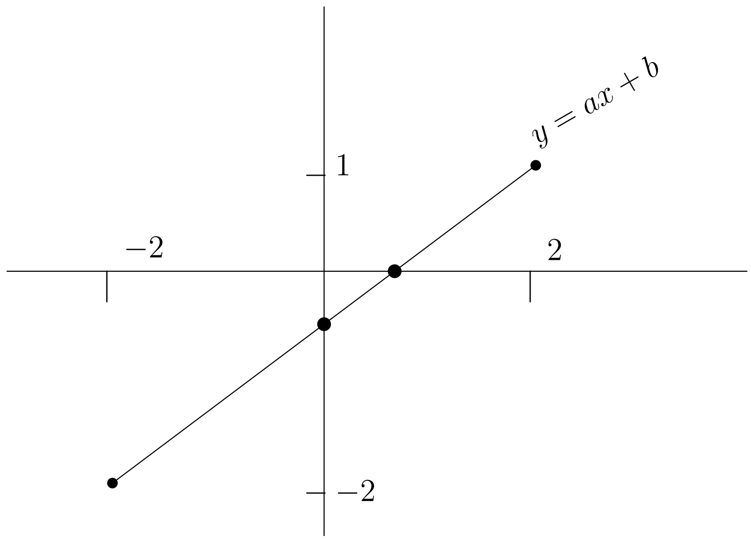
Tomando $x_0 = 2$ y $y_0 = 1$ del punto $(2, 1)$

$$y = \frac{3}{4}(x-2) + 1 = \frac{3}{4}x - 2\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
El intercepto en el eje x está en $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ donde

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

El intercepto con el eje y está en $(0, b)$ donde $b = -\frac{1}{2}$.



Ver vídeo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro $\odot$.

3.11.1. Rectas paralelas y perpendiculares

La medida de la pendiente en una recta que determina el grado de inclinación que esta tiene, por lo que podemos razonar que dos rectas son paralelas si tienen el mismo grado de inclinación o pendiente.

Definición 3.11.1: Rectas paralelas

Dos rectas que no sean verticales, son paralelas sí estas tienen la misma pendiente.

Ejemplo 3.11.2. Rectas paralelas

Determine si el siguiente par de rectas son paralelas:

$$3y + 2x + 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad y = (1/2)x - 6$$

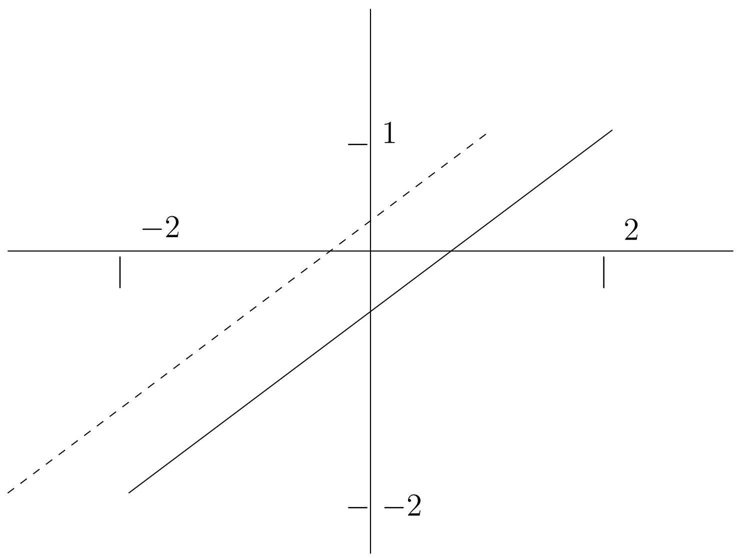
Solución

Con respecto a la primera ecuación $3y + 2x + 5 = 0$, se tiene $y = \frac{-2}{3}x - \frac{-5}{3}$ que le corresponde como pendiente $m_1 = \frac{-2}{3}$ y a la segunda ecuación le corresponde como pendiente $m_2 = 1/2$.

Se observa que estas pendientes son distintas $m_1 \neq m_2$, así, las rectas no son paralelas.

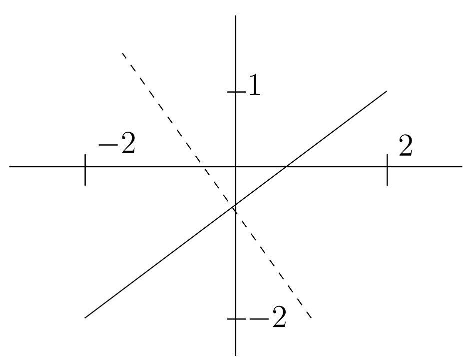
Gráfico de dos rectas paralelas

En el siguiente gráfico podemos observar el comportamiento de dos rectas paralelas, que corresponden a la misma pendiente. Además podemos relacionar estos tipos de comportamiento con las lineas eléctricas ubicadas en los postes, los bordes de algunos edificios, los bordes de la pantalla de un televisor, entre muchos ejemplos más.

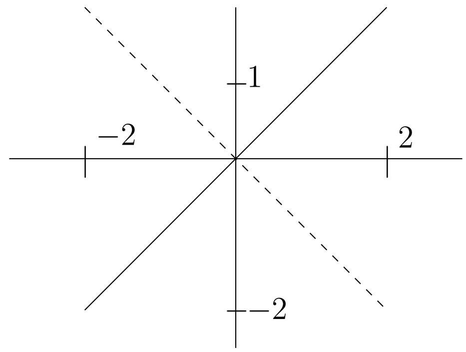


Rectas perpendiculares

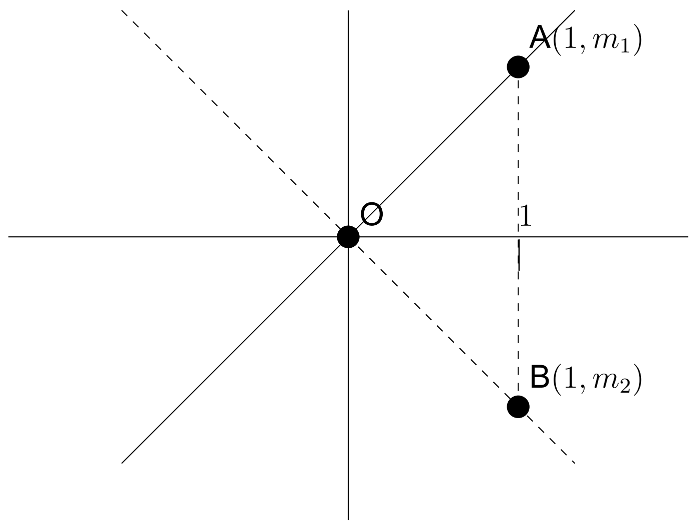
Entiéndase por perpendiculares aquellas rectas que se cortan formando un ángulo recto (de 90^o).



Con el objetivo de facilitar la relación que guardan sus pendientes, haga coincidir el punto de corte en el origen del plano cartesiano, como se muestra en el gráfico siguiente:



Escoja dos puntos cualesquiera en las rectas, uno en la recta roja punteada y otro en la recta azul que compartan la coordenada x, para este caso $x = 1$, con el objetivo de formar un triángulo con los puntos identificados y como el ángulo es recto, se puede usar el teorema de Pitágoras y así tener una relación.



El triangulo AOB es recto en O, entonces las medidas de cada uno de sus lados guardan la relación pitagórica, esto es :

$$(d(O, A))^2 + (d(O, B))^2 = (d(A, B))^2$$

Remplazando en esta expresión los valores correspondiente del gráfico y usando nuevamente el teorema de Pitágoras para calcular las medidas de estos lados, se obtiene:

$$(d(O, A))^2 = 1^2 + m_1^2$$

y

$$(d(O, B))^2 = 1^2 + m_2^2$$

Sustituimos en la ecuación inicial,

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1$$

Con relación a este resultado se obtiene la siguiente definición:

Definición 3.11.2: Rectas perpendiculares

Dadas las dos rectas que tienen como pendiente m_1 y m_2 distintas de cero, estas son perpendiculares sí, y solo sí, el producto de sus pendientes es -1.

$$m_1m_2 = -1$$

Adicionalmente téngase en cuenta que una recta horizontal es perpendicular a la recta vertical.

Ejemplo 3.11.3. Rectas perpendiculares

Determine si las rectas $2x + 3y = 0$ y $6x - 9y + 10 = 0$ son perpendiculares.

Solución
Para la recta $2x + 3y = 0$ presenta pendiente $m_1 = \frac{-3}{2}$.
Para la recta $6x - 9y + 10 = 0$ presenta pendiente $m_2 = \frac{6}{9}$. Ahora realicemos el producto de las pendientes esto es:

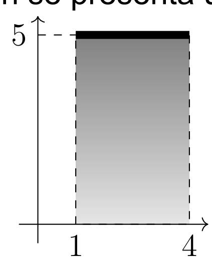
$$m_1m_2 = \frac{-3}{2}\frac{6}{9} = \frac{-18}{18} = -1$$

Por tanto las rectas son perpendiculares.
Las funciones cuyas gráficas están formadas por trozos o pedazos de rectas se llaman *funciones lineales a trozos*.

Ejemplo 3.11.4. Rectas

Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 5$, las rectas $x = 1$, $x = 4$ y el eje x.

Solución
A continuación se presenta un bosquejo de la región.



La región bajo la curva corresponde a un rectángulo de altura 5 y base 3. Por tanto el área de la región bajo la curva es 15 unidades cuadradas.

Ejemplo 3.11.5. Rectas

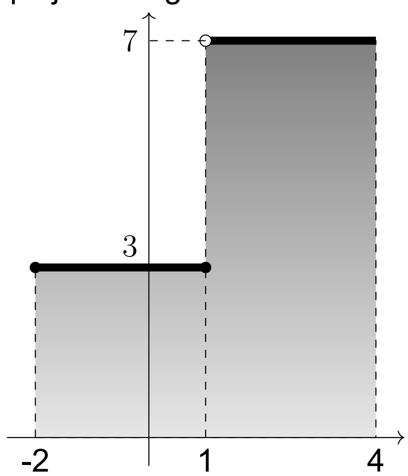
Hallar el área de la región bajo la curva

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \in [-2,1] \\ 7, & \text{si } x \in (1,4] \end{cases}$$

limitada por las rectas $x = -2$, $x = 4$ y el eje x.

Solución

El bosquejo de la gráfica es como sigue

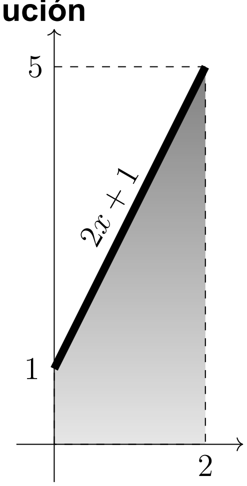


La región en cuestión se muestra en la figura. Se ha dividido en dos subregiones por la línea $x = 1$. Queda dividida en dos rectángulos. El rectángulo de la izquierda tiene altura 3 y base $1-(-2) = 3$, por tanto su área es 9. El rectángulo de la derecha tiene altura 7 y base $4 - 1 = 3$, y su área es 21. Sumando el área de cada uno de los rectángulos se llega a que el área total es 30 unidades cuadradas.

Ejemplo 3.11.6. Rectas

Hallar el área de la región bajo la curva $f(x) = 2x+1$ en $[0,2]$ y por encima del eje x.

Solución



La función es lineal. Basta ubicar dos puntos para trazar su gráfica. Para $x = 0$, $f(0) = 2(0)+1 = 1$, así un punto es $(0,1)$. Para $x = 2$, $f(2) = 2(2)+1 = 4+1 = 5$. Otro punto es $(2,5)$.

Un bosquejo de la región se muestra en la figura de la izquierda. Observe que la región bajo la curva es una región trapezoidal. Con base mayor 5, base menor 1, y altura 2. Por tanto el área es $\left(\frac{5+1}{2}\right)(2) = 6$.

Ver vídeo. $\odot$

Ejemplo 3.11.7. Rectas

Halle el área de la región limitada por la curva $f(x) = -|x-2| + 5$, $x = -1$, $x = 6$ y el eje x.

Solución
Primero observe que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{si } x-2 < 0, \end{cases}$$

es decir,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{si } x < 2. \end{cases}.$$

Al reemplazar los valores de $|x-2|$ de acuerdo a los valores de x queda que

$$f(x) = -|x-2| + 5 = \begin{cases} -(x-2)+5, & \text{si } x \geq 2 \\ -(-(x-2))+5, & \text{si } x < 2, \end{cases}$$

o

$$f(x) = -|x-2| + 5 = \begin{cases} -x+7, & \text{si } x \geq 2 \\ x+3, & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Como se debe graficar $f(x)$ en $[-1, 6]$ entonces se grafican los trozos $x+3$ en el subintervalo $[-1, 2)$ y $-x+7$ en $[2, 6]$. La Figura 3.7 muestra la región la cual se ha divido en dos trapecios por la linea $x = 2$. El trapecio de la derecha tiene área $\frac{5+1}{2}(6-2) = 12$ y el trapecio de la izquierda tiene área $\frac{5+2}{2}(2-(-1)) = \frac{21}{2}$. La suma de estas dos áreas da el área total que es $\frac{45}{2}$ unidades cuadradas.

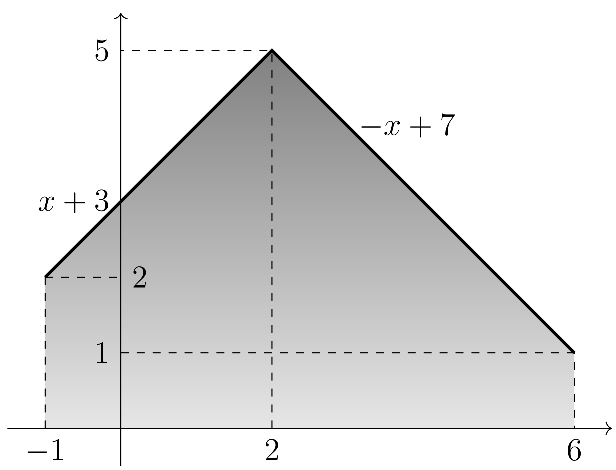


Figura 3.7: Región ejemplo 3.4.6

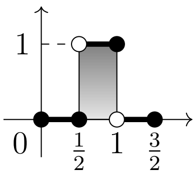
Ejemplo 3.11.8. Rectas

Hallar el área de la región limitada por la curva

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1/2] \cup (1, 3/2] \\ 1, & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases},$$

el eje y, el eje $x = 3/2$ y el eje x.

Solución



El área es $1/2$.

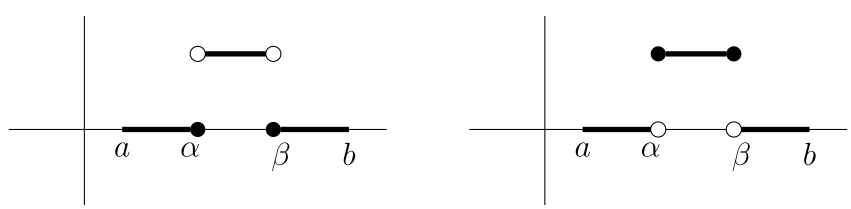
Función característica

Sea X un conjunto y $A \subseteq X$. Se define la función característica de A en X, notada χ, como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in X \text{ pero } x \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo 3.11.9. Segmentos de recta

Por ejemplo si $X = [a, b]$ y $\alpha, \beta \in (a, b)$ y $\alpha < \beta$, entonces la gráfica de $\chi_{(\alpha,\beta)}$ se muestra en la Figura 3.8a y la de $\chi_{[\alpha,\beta]}$ en la Figura 3.8b.



(a) Función característica en (α, β)

(b) Función característica en $[\alpha, \beta]$

Figura 3.8: Gráficas de funciones características de intervalos.

Guía de Gráficas de funciones. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejercicios 33. Determine los puntos de cortes con los ejes y la pendiente de las siguientes rectas:

1. $y = 6x - 3$
2. $5y + 2x - 5 = 0$
3. La recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-4, -3)$.
4. La recta $3y + 5x + 6 = 0$

Grafica las siguientes funciones:

5. $f(x) = x + 7$
6. $f(x) = 7x - 2$
7. $f(x) = 13x + 2x - 6$
8. $f(x) = x + 3 - 5$
9. $f(x) = x + 3 - 5$
10. $f(x) = 4x - 12$
11. La recta tiene pendiente 3 y corta al eje y en 2.
12. La recta tiene pendiente -3 y corta al eje de las y en 2.
13. La recta tiene pendiente -2 y corta al eje de las y en -2.
14. Determine la ecuación de la recta l que es paralela a la recta $y = 5x+2$ y pasa por el punto $(1, 3)$.
15. Determine la ecuación de la recta p, que es paralela a $2x+8y+4 = 0$ y pasa por el origen.
16. Determine la ecuación de la recta l, que es perpendicular a la recta $y = 7x-2$ y pasa por el punto $(2, 5)$.
17. Determine si los puntos A(6,2), B(1,7) y C(5,11) que forman un triangulo rectángulo.
18. Trace el gráfico de un círculo de radio 1 y por el punto A$(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$ trace la tangente al círculo. Identifique en que otra parte del círculo se puede trazar una recta que sea paralela a esta y tangente al círculo.

Resuelva los siguientes problemas de aplicación.Use WxMaxima como apoyo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro

19. En las 12 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2.5 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 3 cm. Establecer una función afín que de la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.
20. En un examen de selección múltiple, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas).

    La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.

21. En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan \$230.000. Los precios de las entradas son \$500 las normales y \$3.000 las VIP.

    Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si la asistencia al establecimiento es de 160 personas.

22. Sea $X = [a, b]$ y $\alpha, \beta \in (a, b)$ y $\alpha < \beta$, realice la gráfica $\chi_{(\alpha,\beta)}$, si $\alpha = 0$ $\beta = 2.5$ y $(a, b) = (-3, 6)$.

3.12. Regresión lineal

Dado un conjunto de puntos del plano (datos de un experimento, por ejemplo) $\{(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$ se intenta buscar **la ecuación de una linea recta** que se ajuste lo más posible al conjunto de puntos. Esta recta se usa para predecir valores que por alguna razón no pudieron ser medidos pero que es esencial tener una estimación de ellos, aunque sea con un margen de error. La idea es que se cometa el menor error posible.
A continuación se mostrará una técnica que se llama ***recta de ajuste por mínimos cuadrados*** o simplemente ***regresión lineal:***

1. Se calcula el promedio de los x_i que llamaremos $\bar{x}$, es decir,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Se calcula el promedio de los y_i que llamaremos $\bar{y}$, es decir,

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i.$$

3. Se hacen las diferencias de cada dato x_i con su promedio, es decir, se hace $(x_i - \bar{x})$.

4. Se hacen las diferencias de cada dato y_i con su promedio, es decir, $(y_i - \bar{y})$.

5. Se forman los productos $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

6. Se suman todos los productos en el ítem anterior, esto corresponde a

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

7. Se toman las diferencias en el paso 3, se elevan al cuadrado y se suman, esto corresponde a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

8. La pendiente de la recta, que llamaremos $\hat{\beta}$ surge de la división del resultado del paso 6 entre el resultado del paso 7, es decir,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Una formula alternativa para $\hat{\beta}$ es:

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

9. El término constante, que llamaremos $\hat{\alpha}$, surge de hacer la resta del promedio de las y con el producto de la pendiente con el promedio de las x, es decir,

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}.$$

Definición 3.12.1: Recta de ajuste para un conjunto de datos

Dados el conjunto de datos $\{(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$, su recta de ajuste viene dada por

$$y = \hat{\beta}x + \hat{\alpha}, \tag{3.1}$$

donde

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{y} \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}.$$

Ejemplo 3.12.1. Ajuste de datos

Se midieron los siguientes datos en un experimento

x_i	y_i
-2.00000	-3.88271
-1.50000	-2.27386
-1.00000	-0.47524
-0.50000	-0.01457
0.00000	1.19511
1.00000	5.03893
1.50000	5.75937
2.00000	7.86641

Halle la recta de ajuste por mínimos cuadrados y estime el valor para y cuando $x = 1.8$ Dibuje los puntos de datos y la recta hallada en el mismo sistema de coordenadas.

Solución

Se busca una recta de la forma especificada en 3.1. Para hallar $\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ se procede a organizar los datos y los cálculos.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$.
-2.00	-3.88271	-2.00	-5.84102	11.68204	4.00
-1.50	-2.27386	-1.50	-4.23217	6.34826	2.25
-1.00	-0.47524	-1.00	-2.43355	2.43355	1.00
-0.50	-0.01457	-0.50	-1.97288	0.98644	0.25
0.00	1.19511	0.00	-0.76320	-0.00	0.00
0.50	4.41134	0.50	2.45303	1.22651	0.25
1.00	5.03893	1.00	3.08062	3.08062	1.00
1.50	5.75937	1.50	3.80107	5.70160	2.25
2.00	7.86641	2.00	5.90810	11.81620	4.00
$\bar{x} = 0$	$\bar{y} = 1.9583$			43.27522	15.00

Se tiene entonces que

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{43.27}{15} = 2.8667$$

y

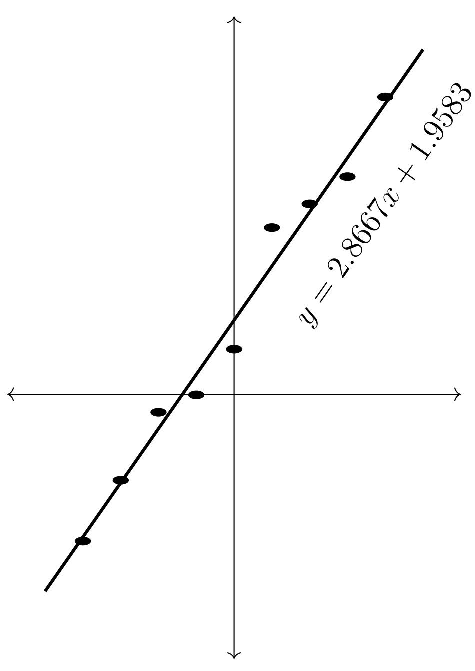
$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 1.9583 - 2.8667(0) = 1.9583.$$

La recta de ajuste es $y = 2.8667x + 1.9583$.

Para estimar el valor de y cuando $x = 1.8$ se usa la recta de ajuste, evaluando en x,

$$y = 2.8667(1.8) + 1.9583 = 7.1184$$

x_i	y_i
-2.00000	-3.88271
-1.50000	-2.27386
-1.00000	-0.47524
-0.50000	-0.01457
0.00000	1.19511
1.00000	5.03893
1.50000	5.75937
2.00000	7.86641



Esta no es la única manera de calcularla, propiedades de la suma permiten llegar a ecuaciones diferentes que llegan a los mismos resultados. Algunas se resumen a continuación

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i) - \bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i + n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\bar{x}^2} \\
&= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2} \\
&= \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}
\end{aligned}$$

Esta es la forma alternativa que se mencionó para $\hat{\beta}$.

Muy pocas veces se hace este procedimiento manualmente. Existen programas que traen rutinas para hacer estos cálculos automáticamente. Por ejemplo Excel, LibreOfficeCalc, OCTAVE, MATLAB, WxMaxima y software dedicado a estadística como R, minitab, etc...

Ver guía de Regresiones lineales. Click aquí o consulte el código QR al final del libro .

Ejercicios 34.

Desarrolle la regresión lineal de cada problema planteado:

1. Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años de edad pesan, respectivamente, 14, 20, 32, 42 y 44 kilos.

   Hallar la ecuación de la recta de regresión de la edad sobre el peso.

   ¿Cuál sería el peso aproximado de un niño de seis años?

2. Un centro comercial sabe que su número de clientes acuden en función de su distancia en kilómetros, se registran los siguientes datos en la tabla, de acuerdo al número de clientes que asisten con respecto a su distancia al centro comercial.

Num. de clientes (x)	Distancia(y)
8	15
7	19
6	25
4	23
2	34
1	40

   Calcular el coeficiente de correlación lineal.

   Si el centro comercial se sitúa a 2 km, ¿cuántos clientes puede esperar?

   Si desea recibir a 5 clientes, ¿a

qué distancia del núcleo de población deben situarse?

3. Las notas obtenidas por cinco alumnos en Matemáticas y Química son:

Matemática	Química
6	6.5
4	4.5
8	7
5	5
3.5	4

Determinar las rectas de regresión y calcular la nota esperada en Química para un alumno que tiene 7.5 en Matemáticas.

4. Un conjunto de datos bidimensionales (x, y) tiene coeficiente de correlación $r = -0.9$, siendo las medias de las distribuciones marginales media de $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 2$. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes corresponde a la recta de regresión de y sobre x:

$y = -x + 2$, $3x - y = 1$, $2x + y = 4$, $y = x + 1$

Seleccionar razonadamente esta recta.

5. Las estaturas y pesos de diez jugadores de baloncesto de un equipo son:

Estatura(x)	Pesos(y)
186	85
189	8.5
190	86
192	90
193	87
193	91
198	93
201	103
203	100
205	101

La recta de regresión de Y sobre X.

El coeficiente de correlación.

El peso estimado de un jugador que mide 208 cm.

Desarrolle la regresión lineal de cada problema planteado:

6. La tabla siguiente nos da las notas del test de aptitud (X) aplicado a seis trabajadores en periodo de prueba, con respecto a sus ventas del primer mes (Y) en miles de pesos.

X	25	42	33	54	29	36
Y	42	72	50	90	45	48

Hallar el coeficiente de correlación e interpretar el resultado obtenido.

Calcular la recta de regresión de Y sobre X. Predecir las ventas de un vendedor que obtenga 47 en el test.

3.13. Función cuadrática

Una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

se llama función cuadrática. El rango de una función cuadrática viene dado por la posición de un punto específico llamado vértice.
Dependiendo del signo de la expresión $b^2 - 4ac$ (llamada discriminante) la gráfica tendrá un único, ninguno o varios interceptos con el eje x.

(a) Si $b^2 - 4ac = 0$ la gráfica tendrá un solo intercepto con el eje x.

(b) Si $b^2 - 4ac > 0$ la gráfica tendrá dos interceptos con el eje x.

(c) Si $b^2 - 4ac < 0$ la gráfica no tendrá interceptos en el eje x.

Cuando el discriminante es no negativo los interceptos con el eje x vienen dados por

$$0 = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

la cual es una ecuación cuadrática con soluciones $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. El vértice de la parábola está en $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
La gráfica de una función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. Si la parábola abre hacia arriba el rango son todos los valores mayores o iguales que la coordenada y del vértice. Si la parábola abre hacia abajo, el rango es el conjunto de todos los valores reales menores o igual que la coordenada y del vértice.

Definición 3.13.1: Forma canónica de la ecuación cuadrática

Toda función cuadrática puede ponerse en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, (llamada forma estándar o canónica) La gráfica es una parábola de vertice (h, k) y los interceptos en el eje x en

$$x = -\frac{\sqrt{-a\,k} - a\,h}{a}, x = \frac{\sqrt{-a\,k} + a\,h}{a},$$

cuando $ak \leq 0$. El intercepto con el eje y es $(0, f(0)) = (0, ah^2 + k)$.

De la forma estándar a la forma canónica de la función cuadrática.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

donde $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

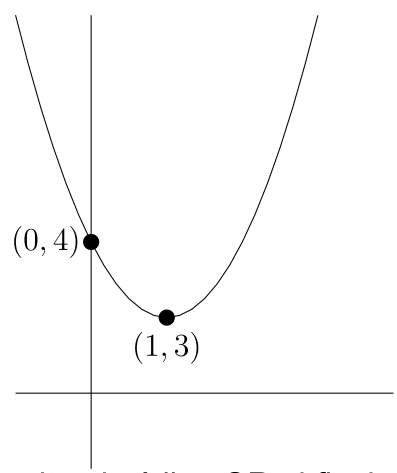
Trace gráficas que correspondan a esta forma y determine usando software, los interceptos en el eje x y observe la abertura de la curva. Ver guía de Gráfica de funciones click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejemplo 3.13.1. Gráfica de la parábola

Graficar $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ e identifique su vértice.

Solución

Aquí se tiene $a = 1$, $h = 1$ y $k = 3$. el vértice es $(h, k) = (1, 3)$. Como $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y como $ak = (1)(3) > 0$ la parábola no tiene interceptos con el eje x. El intercepto con el eje y es $(0, f(0)) = (0, (-1)^2 + 3) = (0, 1 + 3) = (0, 4)$.



Ver guía sobre Ecuaciones cuadráticas. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.
Ver vídeo. Click aquí ⊙

Ejemplo 3.13.2. Función cuadrática

Escriba la función cuadrática en forma canónica y haga un bosquejo de su gráfica identificando los vértices e interceptos.
(a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ (b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \pi$

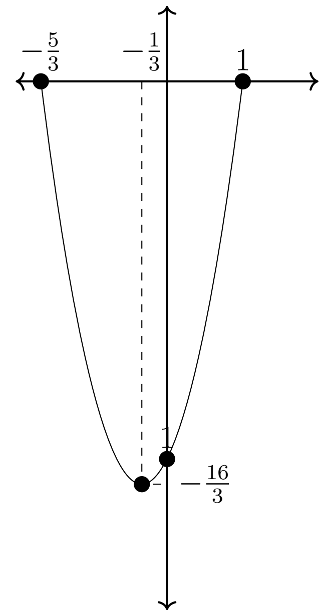
Solución

No existe un solo enfoque para resolver estos problemas. Se puede comenzar completando los cuadrados y deduciendo la forma canónica o se pueden usar las expresiones deducidas anteriormente para h y k. Para ilustrar ambos procedimientos se desarrollará la parte (a) completando el cuadrado y la parte b usando las fórmulas previamente deducidas.

(a)

$$\begin{aligned}
3x^2 + 2x - 5 &= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 5 \\
&= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right) - 5 \\
&= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 5 \\
&= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 5 \\
&= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{9}\right) - 5 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) - 5 \\
&= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Aquí $a = 3$, $h = -\left(\frac{1}{3}\right)$, y $k = \frac{-16}{3}$. El vértice es $(h, k) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{-16}{3}\right)$, el intercepto con el eje y es $(0, f(0)) = (0, -5)$. Como $ak = 3\left(\frac{-16}{3}\right) = -16 < 0$ hay interceptos con el eje x.



$$\begin{aligned}
x &= -\frac{\sqrt{-a\,k} - a\,h}{a} \\
&= -\frac{\sqrt{-3\,(-16/3)} - 3\,\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} \\
&= -\frac{\sqrt{16}+1}{3} = -\frac{5}{3} \\
x &= \frac{\sqrt{-a\,k} + a\,h}{a} \\
&= \frac{\sqrt{-3\,(-16/3)} + 3\,\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} \\
&= \frac{\sqrt{16}-1}{3} = 1.
\end{aligned}$$

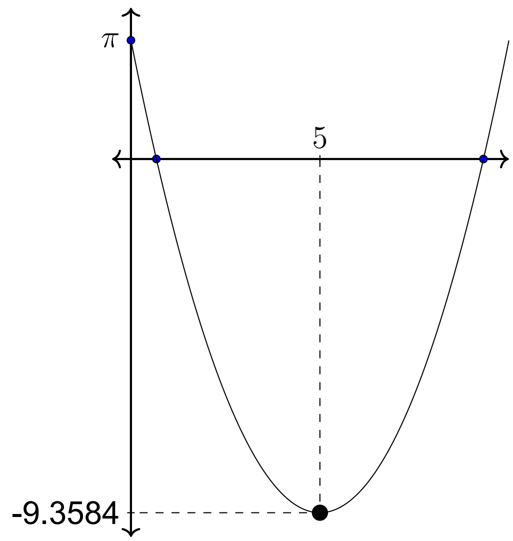
(b) Para $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \pi$ $a = \frac{1}{2}$, $b = -5$ y $c = \pi$. El vértice está en

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) &= \left(-\frac{-5}{2\left(\frac{1}{2}\right)}, \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)(\pi) - (-5)^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&= \left(5, \frac{2\,\pi - 25}{2}\right) = (5, -9.3584).
\end{aligned}$$

Como el discriminante es mayor que cero, $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1/2)\pi > 0$, tiene interceptos con el eje x y vienen dados por la solución de $f(x) = 0$, es decir, $\frac{1}{2}x^2 - 5x + \pi = 0$. Aplicando la fórmula cuadrática se obtienen las soluciones,

$$x_1 = 5 - \sqrt{25 - 2\,\pi} = 0.6737, \quad x_2 = \sqrt{25 - 2\,\pi} + 5 = 9.3262$$

El intercepto con el eje y viene dado por $(0, f(0)) = (0, \pi)$.



Ver vídeo. Click aquí o consulte el código QR al final del libro. ⊙

Ejercicios 35.
Represente gráficamente la siguientes funciones:

1. $y = -x^2 + 4x - 3$
2. $y = x^2 + 2x + 1$
3. $y = x^2 + x + 1$
4. $y = 2x^2 - 2$

Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:

5. $y = (x - 1)^2 + 1$
6. $y = 3(x - 1)^2 + 1$
7. $y = 2(x + 1)^2 - 3$
8. $y = -3(x - 2)^2 - 5$
9. $y = x^2 - 7x - 18$
10. $y = 3x^2 + 12x - 5$

Resuelva cada ecuación:

11. $x^2 + 2x + 1 = 0$
12. $x^2 = 2 + x$
13. $2x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{4}{3} = 0$
14. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$
15. $x^2 + x + 1 = 0$
16. $6x - x(x - 13) = 18$
17. $x^2 - 2x - 1 = 0$
18. $x^2 - (x+1)^2 = 2 - x^2$
19. $-x^2 + 7x - 5 = 0$

Establezca la ecuación y resuelva el problema.

20. El doble del cuadrado de un número es igual al cuadrado del sucesor del número más 14. ¿Cuál es el número?

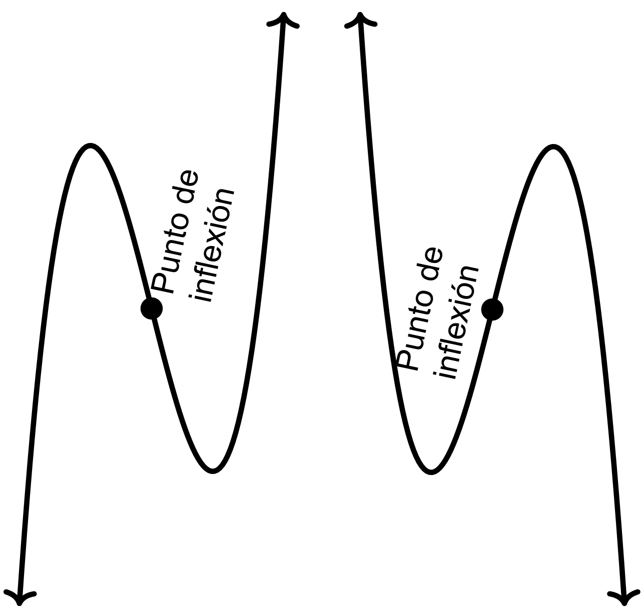
21. La suma de dos números es 40 y su producto 221. ¿Cuáles son los números?

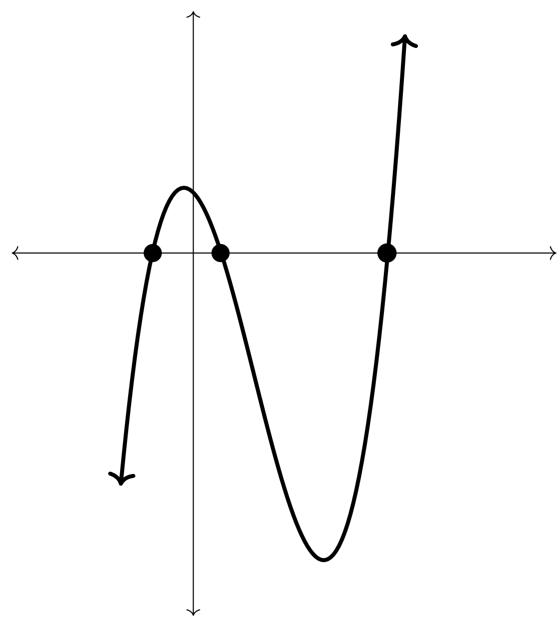
3.14. Función cúbica

Tienen una expresión de la forma

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$$

El bosquejo de la gráfica de una función cúbica tiene dos formas básicas que se muestran a continuación. Tiene un punto en donde la gráfica cambia su curvatura, el cual se llama punto de inflexión y se encuentra en la coordenada $x = -\dfrac{b}{3a}$.



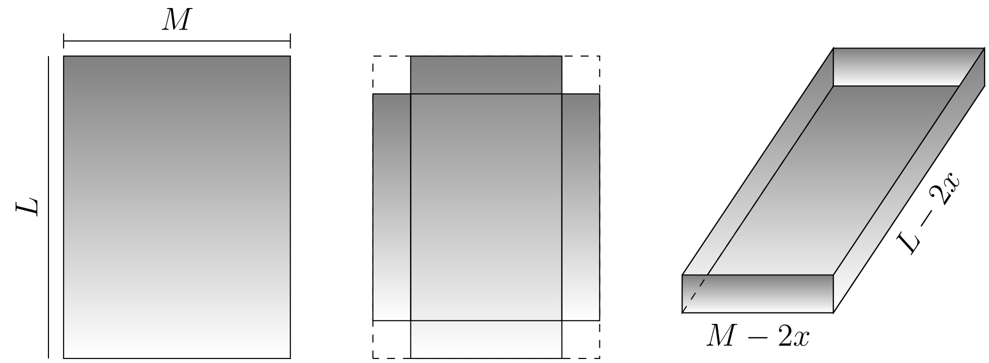


El dominio y rango de la función cúbica son todos los reales, la gráfica de la función corta al eje x al menos en un punto. Ver guía. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejemplo 3.14.1. Construcción de una caja

Se quiere construir una caja a partir de una lámina de tamaño $M \times L$, ver figura 3.9a, a la cual se le cortarán unos cuadrados en las esquinas (figura 3.9b) y luego se doblará, figura 3.9c. Escriba el volumen de la caja en función de x si se corta un cuadrado de lado x de cada esquina.

Solución



(a) Lámina (b) Lámina y esquinas (c) Caja formada

Figura 3.9: Formación de una caja a partir de una lámina

Primero observe que en el lado de longitud M el valor de x no puede ser mayor que la mitad de M y no puede ser mayor que la mitad de L. Si $L > M$, x no puede ser mayor que la mitad de M, Si $x = 0$, simplemente no se puede hacer la caja y el volumen es cero y si $x = \dfrac{M}{2}$ tampoco se puede hacer la caja y el volumen es cero. En conclusión los valores posibles de x son $0 \leq x \leq \frac{M}{2}$. Al cortar cuadrados de longitud x el largo de la caja es $L-2x$, el ancho sería $M-2x$ y el alto sería x por lo tanto el volumen es $x(L-2x)(M-2x)$.
Así la función es:

$$f(x) = x(L-2x)(M-2x)$$

Ejercicios 36.

1. Si la función que modela el volumen de la caja en la figura 3.9, es cada una de las siguientes. Use WxMaxima (Click aquí o consulte el código QR al final del libro.) para graficar y estimar su máximo volumen.

    a) $f(x) = x^3 + 12x + 2$
    b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$
    c) $f(x) = 3x^2 + x^3 - 1$

2. Encontrar los ceros de las siguientes funciones.

    a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
    b) $f(x) = x^3 - 1$
    c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
    d) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

3. Graficar las siguientes funciones:

    a) $f(x) = x^3 - 1$
    b) $f(x) = x^3 + 2$
    c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
    d) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

4. Una caja de madera tiene una base cuadrada, siendo x la longitud

de cada lado del cuadrado que forma la base. En total, las 12 aristas de la caja suman $120cm$. Determinar:

a) El volumen V en función de x.

b) El dominio de V.

Ver guía aquí. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

3.15. Funciones polinómicas

Un polinomio es una expresión que presenta la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0. \tag{3.2}$$

(a) $P(x) = 3$

(b) $P(x) = \frac{3}{2}x + \pi$

(c) $P(x) = 3 + 2 + 1 - 5$

(d) $P(x) = 100x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 1$

Observe que :

1. Aparece solo una variable o ninguna.
2. Todos los exponentes en la variable son cero o números enteros positivos.

Si alguna de estas condiciones falla, la expresión no es un polinomio.

Definición 3.15.1: Función polinómica

En general un polinomio es una expresión de la forma,

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{3.3}$$

con n un entero no negativo y los a_i números reales.

Formas algebraicas equivalentes.

(1) Los números $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ son llamados coeficientes.

(2) El término a_nx^n que tiene la mayor potencia de la variable es llamado término principal y a_n solo (el cual no es cero) es llamado coeficiente principal y a_0 es llamado término constante o independiente. (No aparece la variable o aparece con exponente cero).

(3) Al mayor exponente de la variable se le llama grado del polinomio.

(4) Un polinomio de la forma $p(x) = k$, donde k es constante, se llama polinomio constante.

(5) El polinomio $P(x) = 0$ no tiene grado.

(6) El polinomio $P(x) = c$ donde c es un número distinto de cero tiene grado cero. Cuando en un polinomio no aparece una potencia se asume que su coeficiente correspondiente es cero.

Aunque los polinomios se acostumbran a escribir en orden descendente o ascendente de las potencias, no siempre se escriben de la misma manera.
Las siguientes expresiones corresponden al mismo polinomio $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \pi x^2 + x - 7$:

$$P(x) = -7 + \pi x^2 + x + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4, \qquad P(x) = \pi x^2 - 7 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + x,$$
$$P(x) = x + \frac{1}{2}x^4 - 7 + \pi x^2 + 3x^3, \qquad P(x) = \pi x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 7 + 3x^3 + x.$$

El término principal $\frac{1}{2}x^4$, el coeficiente principal $\frac{1}{2}$ y el término constante -7 siguen siendo los mismos independientemente de la forma como se escriba el polinomio.
Usando WxMaxima gráfica de funciones (Click aquí o consulte el código QR al final del libro.) podemos desarrollar los trazos de los polinomios para visualizar su comportamiento.

Ver guía. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Identificando partes del polinomio

Especifique grado, término principal, coeficiente principal y término constante de los siguientes polinomios:

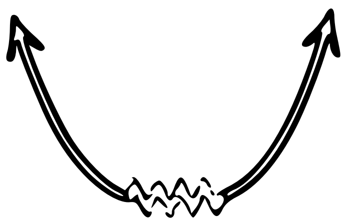
1. $P(x) = 3 + \pi^5$. el grado es 0; coeficiente principal es $3 + \pi^2$; término constante es $3 + \pi^2$.

2. $P(x) = \frac{3}{2}x + \pi$. El grado es 1, el coeficiente principal es $\frac{3}{2}$, término constante es π.

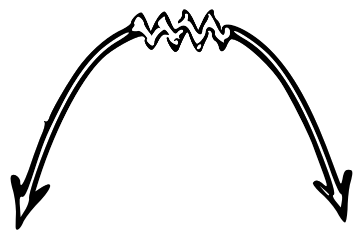
3. $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 5$.

4. $P(x) = 100x^4$.

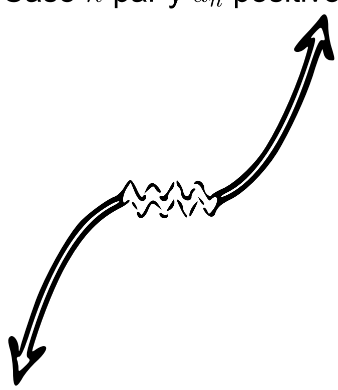
Básicamente la gráfica de un polinomio cuando la variable es lo suficientemente grande o suficientemente pequeña es como la de un polinomio cuadrático o un polinomio cúbico. Más precisamente, si $a_n x^n$ es el término principal de un polinomio entonces el comportamiento final puede ser descrito en una de las siguientes formas:



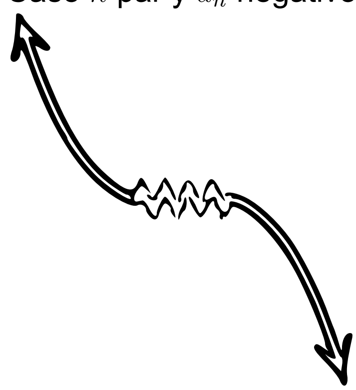
Caso n par y a_n positivo



Caso n par y a_n negativo



Caso n impar y a_n positivo



Caso n impar y a_n negativo

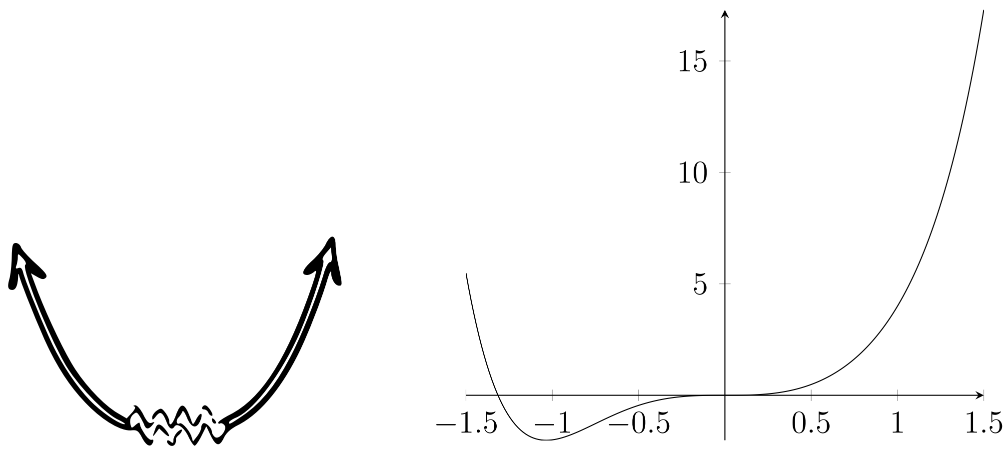
Ejemplo 3.15.1. Comportamiento final de un polinomio

Haga un bosquejo del comportamiento final del polinomio $f(x) = x^6 - x^5 + 4x^3$.

Solución

$$f(x) = x^6 - x^5 + 4x^3$$

El grado es 6 (par), así que el comportamiento final es como el de un polinomio cuadrático. El coeficiente principal es 1 (positivo), es como una parábola que abre hacia arriba.



(a) Comportamiento general (b) Gráfica de la función

Figura 3.10: Comportamiento final de polinomios

Con la entrada siguiente en WxMaxima, se obtienen los valores de las raíces al ser ejecutado.

```
realroots(x^6-x^5+4*x^3);
```

$$[x = -1.314596205949783, x = 0]$$

Usar guía. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

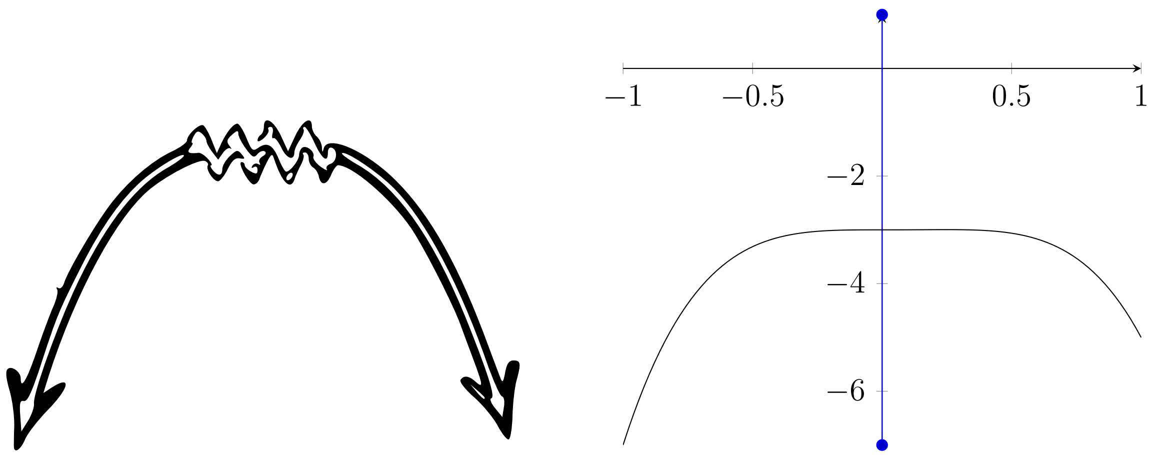
Ejemplo 3.15.2. Comportamiento final de un polinomio

Haga un bosquejo del comportamiento final del polinomio $f(x) = -3x^4+2x^3-3$.

Solución

$$f(x) = -3x^4 + x^3 - 3$$

El grado es 4 (*par*), así que el comportamiento final es como el de un polinomio cuadrático El coeficiente principal es -3 (*negativo*), así que el comportamiento final es como el de una parábola que abre hacia abajo.



(a) Comportamiento final (b) Gráfica

Figura 3.11: Comportamiento final del polinomio del ejemplo

Con WxMaxima (Usar guía. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.) se determinan las raíces, resulta:

```
realroots(-3*x^4+x^3-3);
```

$$[] \qquad (\%\ o4)$$

El símbolo [] contempla que no presenta cortes con el eje x.

Definición 3.15.2: Ceros de un polinomio

Básicamente un "cero " de un polinomio es *cualquier número* (real o imaginario) tal que al sustituirlo por la variable, el valor del polinomio es 0. Es decir c es un cero del polinomio $P(x)$, si $P(c) = 0$.
Para hallar los ceros de un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

se iguala $P(x) = 0$ y resolvemos

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Esta es una tarea sencilla cuando el polinomio está factorizado.

Ejemplo 3.15.3. Cero de un polinomio

-5 es un cero de $P(x) = x^2 - 25$ porque $P(5) = (-5)^2 - 25 = 25 - 25 = 0$.
i es un cero de $P(x) = x^2 + 1$ porque $P(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Cuando los ceros son números reales estos corresponden a la intersección de la gráfica con el eje x.

Ejemplo 3.15.4. Ceros de polinomios

Halle los ceros del polinomio $P(x) = 5(x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x^2+9)$.

Solución
Se resuelve

$$5(x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x^2+9) = 0,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5(x-2)=0 & \text{o} & x-2=0 & \text{o} & x-2=0 & \text{o} & x+1=0 & \text{o} & x^2+9=0 \\ x-2=0/5 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=-1 & \text{o} & x^2=-9 \\ x=2 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=-1 & \text{o} & \sqrt{x^2}=\sqrt{-9} \\ x=2 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=2 & \text{o} & x=-1 & \text{o} & x=\pm 3i, \end{array}$$

los ceros del polinomio son 2 (tres veces), -1, $3i$ y $-3i$.

En vez de decir 2 (tres veces) se dirá *2 es un cero de multiplicidad 3*.
Observe que el polinomio

$$P(x) = 5(x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x^2+9),$$

puede escribirse como

$$P(x) = 5(x-2)^3(x+1)(x^2+1),$$

la multiplicidad del cero $x = 2$ corresponde al exponente en $(x-2)$.

Teorema. 3.15.1: Ceros y factores

Considere el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

r es una raíz de P si y solo si $x - r$ es un factor del polinomio P, es decir, $P(r) = 0$ si y solo si $P(x) = Q(x)(x-r)$ donde $Q(x)$ es un polinomio que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x - r$ con residuo cero.

El residuo de dividir el polinomio $P(x)$ entre $x - r$ es, $P(r)$.

Ejemplo 3.15.5. Raíz de un polinomio

Verifique si $r = 1$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 1$.

Solución
Se hará de tres formas para mostrar las diferentes técnicas.

1. Evaluando directamente 1 en P, es decir, calculando $P(1)$,

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 1 = 1,$$

se puede observar que $P(1)$ no es cero y por tanto $r = 1$ no es raíz.

2. Probando si $x - r = x - 1$ es factor de $P(x)$, es decir haciendo la división entre $x - 1$ y viendo si es exacta.

$$\begin{array}{rrrr}
\big(\ x^3 & +x^2 & & -1\big) : \big(x-1\big) = x^2+2x+2+\dfrac{1}{x-1} \\
-x^3 & +x^2 & & \\ \hline
 & 2x^2 & & \\
 & -2x^2 & +2x & \\ \hline
 & & 2x & -1 \\
 & & -2x & +2 \\ \hline
 & & & 1
\end{array}$$

Se puede observar que la división tiene residuo 1 y por lo tanto no es exacta.

3. Probando si $x - r = x - 1$ es factor de $P(x)$, es decir haciendo la división entre $x - 1$ y viendo si es exacta pero usando división sintética (método de **Horner**)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline
 & 1 & 2 & 2 & 1
\end{array}$$

Click aquí o consulte el código QR al final del libro. $\odot$

Ejemplo 3.15.6. División de polinomios

Dividir el polinomio $2x^3 + x^2 - 8$ entre $x - 2$.

Solución

$$\begin{array}{rrrr}
\big(\ 2x^3 & +x^2 & & -8\big) : \big(x-2\big) = 2x^2+5x+10+\dfrac{12}{x-2} \\
-2x^3 & +4x^2 & & \\ \hline
 & 5x^2 & & \\
 & -5x^2 & +10x & \\ \hline
 & & 10x & -8 \\
 & & -10x & +20 \\ \hline
 & & & 12
\end{array}$$

Teorema. 3.15.2: Raíces de un polinomio con coeficientes enteros

Considere el siguiente polinomio donde todos los coeficientes son enteros

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Si el polinomio tiene raices racionales entonces, estas son de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es un factor de a_0 (término constante) y q es un factor de a_n (coeficiente principal).

La manera de usar el teorema anterior es en combinación con la división sintética para probar las raíces. La razón es que todos los cocientes de la forma $\frac{p}{q}$ que menciona el teorema no son necesariamente raíces. Una vez que se ha encontrado una raíz, y continuar buscando las demás raíces se utiliza el cociente obtenido para repetir el proceso.

Ejemplo 3.15.7. Raíz de un polinomio

Halle las raíces racionales del polinomio

$$P(x) = 8x^4 - 20x^3 + 16x^2 - 10x + 6.$$

Solución

Primero se hallan los posibles factores del término constante y del coeficiente principal. Luego se hacen todas las posibles divisiones de factores del término constante entre factores del coeficiente principal

1. Factores del término constante, es decir, números que multiplicados, den 6.

$$6 = 3 \times 2 = -3 \times -2 = 1 \times 6 = -1 \times -6$$

Asi que los factores de 6 son $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ lo cual se abrevia $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

2. Factores del término constante, es decir, números que multiplicados, den 8.

$$8 = 1 \times 8 = -1 \times -8 = 2 \times 4 = -2 \times -4$$

Asi que los factores de 6 son $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ lo cual se abrevia $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

3. Todas las posibles divisiones de los factores de 6 entre los factores de 8. Probaremos solo con algunas de ellas $\frac{-6}{-1} = 6$, $\frac{-1}{-1} = 1$, $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

   Se probará con $x = 6$,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -10 & 8 & -5 & 3 \\ 6 & & 24 & 84 & 552 & 3282 \\ \hline & 4 & 14 & 92 & 547 & 3285 \end{array}.$$

Vemos que el residuo no es 0, por tanto $x = 6$ no es raíz.

Ahora se probará con $x = 1$,

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -10 & 8 & -5 & 3 \\ 1 & & 4 & -6 & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo es cero por tanto $x = 1$ es raíz, $p(x) = (x-1)(4x^3 - 6x^2 + 2x - 3)$.

Para probar la siguiente raíz $= \dfrac{3}{2}$, se usa el polinomio $4x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -6 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & & 6 & 0 & 3 \\ \hline & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Como el residuo es 0, $x = \frac{3}{2}$ es raíz y $4x^3 - 6x^2 + 2x - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^2 + 2)$

El lector puede seguir probando y se dará cuenta que no hay más raíces racionales. El polinomio puede escribirse como

$$P(x) = (x-1)(4x^3 - 6x^2 + 2x - 3) = (x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^2 + 2)$$

Como puede notarse, esta técnica de hallar raíces puede utilizarse para hacer factorizaciones de polinomios.

En WxMaxima podemos hallar la factorización del polinomio. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Teorema. 3.15.3: Las raíces de un polinomio y su forma expandida

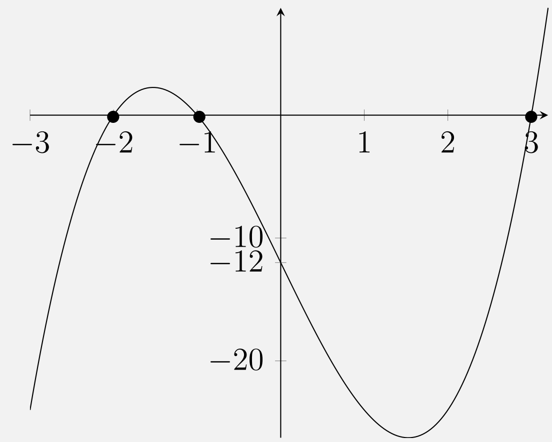
Si $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son números que un polinomio tiene por raíces entonces el polinomio viene dado por

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_{n-1})(x - r_n).$$

El número a queda determinado por el intercepto en y del polinomio.

Ejemplo 3.15.8. Gráfica de polinomios

Halle la ecuación del polinomio de la figura en la cual se muestran sus únicos ceros



Solución

Observe que $x = -2, x = -1$ y $x = 3$ son ceros del polinomio. La forma del polinomio es

$$P(x) = a(x+2)(x+1)(x-3)$$

donde el intercepto en y es -12. El es decir $-12 = P(0) = a(0+2)(0+1)(0-3) = a(2)(1)(-3) = -6a$, es decir, $-12 = -6a$ despejando a se obtiene $a = 2$. El polinomio es entonces

$$P(x) = 2(x+2)(x+1)(x-3) = 2x^3 - 14x - 12.$$

Teorema. 3.15.4: Multiplicidad par e impar de ceros

Si $(x-c)^k$, $k \geq 1$, es un factor de un polinomio $P(x)$ y $(x-c)^{k+1}$ no es un factor entonces k es la multiplicidad del cero. Además si c es un número real, y

1. k es impar, entonces la gráfica cruza al eje x en el punto $(c, 0)$.
2. k es par, entonces la gráfica es tangente (toca pero no cruza) al eje x en $(c, 0)$.

Ejemplo 3.15.9. Los ceros de un polinomio

Halle los ceros del polinomio y diga la multiplicidad de cada cero.

$$P(x) = x^2(x+3)^2(x-2)(x+1)^4.$$

Solución
Las raíces del polinomio corresponden a $P(x) = 0$, así, se tiene:
$x^2(x+3)^2(x-2)(x+1)^4 = 0$.

- $x^2 = 0$ da un cero de multiplicidad, es cero.

$$\cancel{\sqrt{x^{\cancel{2}}}} = \sqrt{0}, \quad x = 0.$$

- $(x+3)^2 = 0$ da un cero de multiplicidad 2, es -3.

$$\cancel{\sqrt{(x+3)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{0}, \quad x+3 = 0, \quad x = -3.$$

- $x - 2 = 0$ da un cero de multiplicidad 1, es 2.
- $(x+1)^4 = 0$ da un cero de multiplicidad 4, es -1,

$$\cancel{\sqrt[4]{(x+1)^{\cancel{4}}}} = \sqrt{0}, \quad x+1 = 0, \quad x = -1.$$

Ejemplo 3.15.10. Ceros de un polinomio

Halle los ceros del polinomio y diga la multiplicidad de cada cero.

$$P(x) = x^2(x+3)^2(x-2)(x+1)^4.$$

Solución
Los ceros son 0 , -3, 2 y -1

- En 0 la gráfica es tangente (toca pero no cruza) al eje x. Multiplicidad par.
- En -3 la gráfica es tangente (toca pero no cruza) al eje x. Multiplicidad par.
- En 2 la gráfica cruza al eje x. Multiplicidad impar.
- En -1 la gráfica es tangente (toca pero no cruza) al eje x. Multiplicidad par.

Ejercicios 37. Determinar si las siguientes funciones son polinomiales o no:

1. $y = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = 2 + \pi$
3. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$
4. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
5. $y = \pi x^5 + x^2 + 5$
6. $Y = 2x^\pi + x^2 + 1$

Encontrar los ceros de los siguientes polinomios:

1. $y = x^2 - 2x - 3$
2. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
3. $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$
4. $P(x) = 6x^2 - 6x - 4$

Graficar los siguientes polinomios:

1. $y = x^3 - 2x^2 - 3x$
2. $y = x^4 - x$
3. $y = x - x^3$
4. $f(x) = x^2 + 1$
5. $P(x) = \pi x^3 + x^2 + 6$
6. $P(x) = 6 + 3^2 - 5x^3$

Ver guía. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

3.16. Modelos de regresión polinomial $y = kx^m$

Ciertos datos empíricos pueden explicarse asumiendo que la variable dependiente observada es una función potencia de la variable independiente x. Es decir, el fenómeno está descrito por un modelo matemático de la forma $y = kx^m$, donde k y m son constantes. Si se aplica ln a ambos lados se obtiene $\ln y = m \ln x + \ln k$. Un experimentador puede graficar valores de $\ln y$ contra valores de $\ln x$. Si la función del modelo es válida, los puntos deberán estar en una linea recta de pendiente m y con el intercepto en y dado por $\ln k$.

Ejemplo 3.16.1.

El ritmo cardiaco R (en pulsaciones por minuto) y el peso W (en libras) de varios mamíferos fueron medidos, con los resultados siguientes

W	25	67	127	175	240	975
R	131	103	88	81	75	53

Halle una relación para las dos magnitudes de la forma $R = kW^m$. Estime el número de pulsaciones por minuto para un mamífero de 400 libras.

Solución

Puesto que ya se tiene idea del modelo buscado se hace una regresion lineal con base en los logaritmos de la tabla dada. La recta de regresión tendra la forma $y = \hat{\beta}x + \hat{\alpha}$ donde $\ln k = \hat{\alpha}$ y $k = e^{\hat{\alpha}}$, con $m = \hat{\beta}$.

$\ln W$	3.2189	4.20	4.8442	5.1647	5.4806	6.8824
$\ln R$	4.8751	4.6347	4.47737	4.3944	4.3174	3.9702

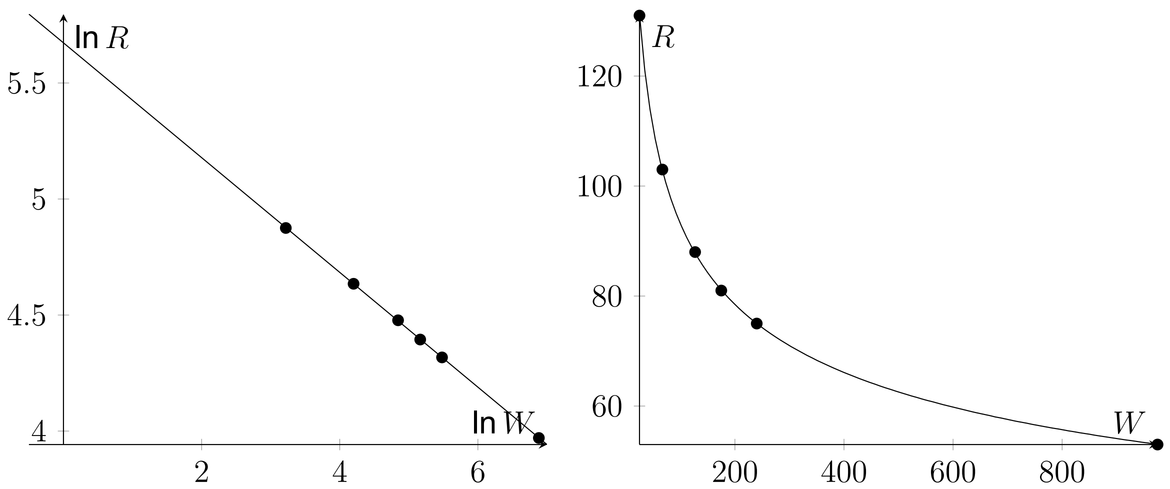
Vemos que los datos experimentales no están exactamente en una línea recta pero si se aproximan bastante (ver Figura 3.12a).

W	R	ln W	ln R	$W_i - \overline{W}$	$R_i - \overline{R}$	$(W_i - \overline{W})(R_i - \overline{R})$	$(W_i - \overline{W})^2$
25.000	131.000	3.219	4.875	-1.747	0.430	-0.752	3.052
67.000	103.000	4.205	4.635	-0.761	0.190	-0.144	0.579
127.000	88.000	4.844	4.477	-0.122	0.032	-0.004	0.015
175.000	81.000	5.165	4.394	0.199	-0.050	-0.010	0.040
240.000	75.000	5.481	4.317	0.515	-0.127	-0.066	0.265
975.000	53.000	6.882	3.970	1.917	-0.475	-0.910	3.673
Promedio	Promedio					Suma	Suma
268.167	88.500	4.966	4.445			-1.885	7.624

Entonces $m = -0,247300105532108$ y ln $k = 5.67299195974704$ de donde

$$k = e^{5.67299195974704} = 290,903605508473.$$

De modo que la relación buscada es $R = 290.9036W^{-0.24730}$. La gráfica de los puntos originales y la curva estimada puede verse en la Figura 3.12b.



(a) Recta de ajuste de datos ln $R = m$ ln $W +$ ln k (b) Datos y curva $R = kW^m$

Figura 3.12: Curva de ajuste

Aunque no se midió el número de pulsaciones para un peso de 400 libras ($W = 400$) es posible deducir cual será el número de pulsaciones, usando el modelo $R = 292.22W^{-0.24799}$.
El número estimado de pulsaciones por minuto es $R(400) = 292.22(400)^{-0.24799} = 66.134$.
En Excel, LibreOffice u otros programas estadísticos pueden hacerse este tipo de regresiones. El ejemplo anterior es un caso particular de una regresión polinomial.

Ejercicios 38.

1. Encuentre el polinomio que tenga las siguientes características:

a)

x_i	0	2	3	5	7
y_i	-1	0	2	1	-17

b)

x_i	1	2	0	3
y_i	3	2	-4	5

c)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	1	1	1	7	25

2. Un deportista cronometra los siguientes datos de su recorrido:

Tiempo (seg)	0	3	5	8
Distancia (m)	0	225	383	623

Determine el polinomio que mejor simula su movimiento.

3.17. Operaciones entre funciones

Una forma de obtener nuevas funciones es combinando unas con otras, debido a que las funciones tienen las propiedades algebraicas de los números reales, podemos desarrollar suma, resta, multiplicación y división de funciones, solo basta definir cada una de estas operaciones.
Sean f y g dos funciones con dominio que se intersecan; entonces para todos los valores de x que se encuentran en la intersección, las combinaciones algebraicas de f y g están definidas mediante las siguientes condiciones:

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Siempre que el dominio de f interseque el rango de g.

3.17.1. Suma

Si f y g son funciones definidas en los dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente se define la suma de f y g, notada $f+g$, en el dominio $D(f) \cap D(g)$ como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

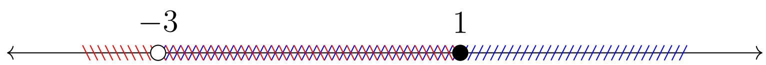
Ejemplo 3.17.1. Suma y dominio de una función

Halle la función suma y su dominio si $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \log(x+3)$.

Solución

Vemos que el máximo dominio de f es $D(f) = (-\infty, 1]$ correspondiente a $1 - x \geq 0$. El máximo dominio d g es $D(g) = (-3, \infty)$ correspondiente a $x + 3 > 0$. El dominio de la suma es entonces

$$D(f) \cap D(g) = (-\infty, 1] \cap (-3, \infty) = (-3, 1].$$



La consideración del dominio es muy importante. El ejemplo siguiente lo ilustra. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x}$ se tiene que el máximo dominio es $[0, \infty)$. La suma es

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0.$$

Observe que a primera vista parece que la suma es la función constante 0 y que estaría definida para todo x en los reales y que podría hacerse $(f + g)(-5) = 0$. No obstante, el 0 anterior no puede obtenerse de las funciones que se suman ya que para $x = -5$, $f(-5)$ y $g(-5)$ existen como números reales, Es claro que -5 no está en el dominio de la suma que es $[0, \infty)$.

Ejercicios 39.

1. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = 3x + 1$

   $g(x) = -x + 5$

2. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = 1/(x - 1)$

   $g(x) = \sqrt{x}$

3. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = x + 3$

   $g(x) = x^2 + 2x - 3$

4. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

   $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

5. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

   $g(x) = \dfrac{x - 1}{2x - 3}$

6. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

   $g(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$

7. Calcular la suma de las siguientes funciones:

   $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 + 8}$

   $g(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$

3.17.2. Resta

Si f y g son funciones definidas en los dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente se define la resta de f y g, notada $f-g$, en el dominio $D(f)\cap D(g)$ como

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x).$$

Las condiciones de la suma aplican también para la resta de funciones.

Ejemplo 3.17.2. Resta y dominio de una función

Sea $h(x)=x^2$ y $p(x)=\sqrt{x-1}$, determine $h-p$ y proporcione su dominio.

Solución
Dado que h presenta dominio en todos los reales y p dominio en $[1,\infty)$, así, se tiene que:

$$(h-p)(x)=h(x)-p(x)=x^2-\sqrt{x-1}$$

Con dominio en $[1,\infty)$, que es la intersección de los dos dominios de las funciones.

Ejercicios 40.

1. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=x+7$

   $g(x)=7x-2$

2. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=13x+2x-6$

   $g(x)=x+3-5$

3. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=x+3-5$

   $g(x)=4x-12$

4. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=2(3x-1)+7$

   $g(x)=8x-(3-2x)$

5. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=-(4x-6)+9$

   $g(x)=7x-(1-6x)$

6. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=3x-1$

   $g(x)=2(x-1)$

7. Calcular la resta de las siguientes funciones:

   $f(x)=7-6(x-1)$

   $g(x)=7+2(7x-4)$

3.17.3. Multiplicación

Si f y g son funciones definidas en los dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente se define el producto de f y g, notada fg, en el dominio $D(f) \cap D(g)$ como

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Ejemplo 3.17.3. Multiplicación de funciones

Sea $m(x) = \sqrt{x}$ y $j(x) = 2x + 1$ dos funciones, determine mj.

Solución
Dado que el dominio de m es $[0, \infty)$ y el dominio de j son todos los números reales, así la intersección es $[0, \infty)$, por lo que el producto se definirá en este dominio:

$$(mj)(x) = m(x) \cdot j(x) = \sqrt{x}(2x + 1) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

Con dominio en $[0, \infty)$.

Ejercicios 41.
Multiplicación de funciones.

1. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = 3[2 - (3x - 6)] - 4(1 - 2x)$

   $g(x) = 4 - 5x$

2. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = 2(x + 2) - 5(2x - 3)$

   $g(x) = 3x$

3. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = 21 - [5x - (3x - 1)]$

   $g(x) = 5x - 12$

4. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = 2 - 2m + [2m - (2 - m)]$

   $g(x) = 2m$

5. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = 1/(x - 1)$

   $g(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$

6. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

   $g(x) = 4x - 12$

7. Calcular la multiplicación de las siguientes funciones:

   $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

   $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

3.17.4. División

Si f y g son funciones definidas en los dominios $D(f)$ y $D(g)$ respectivamente se define la suma de f y g, notada f/g, en el dominio $D(f) \cap D(g) - \{x : g(x) \neq 0\}$ como

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad g(x) \neq 0.$$

Ejemplo 3.17.4. División de funciones

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x + x$ y $g(x) = (\operatorname{sen} x + x)/(x + 5)$ determine f/g.

Solución

Dado que el dominio de f son todos los números reales y el dominio de g son todos los números reales a excepción de $x = -5$, así que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\operatorname{sen} x + x}{\dfrac{\operatorname{sen} x + x}{x + 5}} = x + 5$$

Con dominio de todos los reales a excepción de $x = -5$.

En la siguiente guía encontrará las condiciones para realizar el proceso algebraico entre funciones. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejercicios 42.

División de funciones.

1. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = 1/(x - 1)$

   $g(x) = \sqrt{x}$

2. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = 3x - 1$

   $g(x) = 2(x - 1)$

3. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = -(4x - 6) + 9$

   $g(x) = 7x - (1 - 6x)$

4. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = 2(x + 2) - 5(2x - 3)$

   $g(x) = 3x$

5. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = 1/(x - 1)$

   $g(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$

6. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

   $g(x) = \dfrac{x - 1}{2x - 3}$

7. Calcular la división de las siguientes funciones:

   $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 + 8}$

   $g(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8}$

3.17.5. Traslaciones

Definición 3.17.1: Traslaciones verticales

Dada la función $f(x)$, la gráfica de la función $y = f(x)+k$ consiste de la gráfica de $f(x)$ trasladada k unidades hacia arriba si $k > 0$ y $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$.

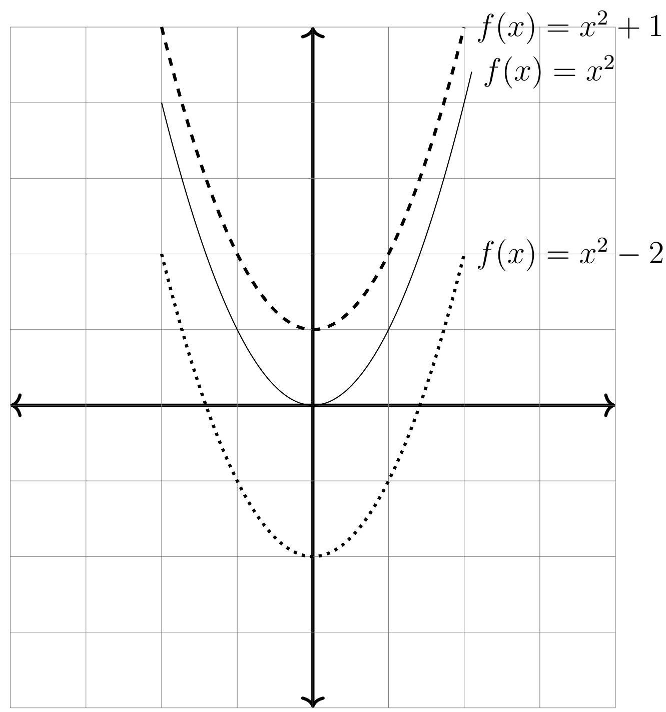
Ejemplo 3.17.5. Traslación vertical

Basado en la gráfica de $f(x) = x^2$, realice los siguientes traslados:

(a) Un traslado de dos unidades hacia arriba y escriba la fórmula de la nueva función.

(b) Un traslado de dos unidades hacia abajo y escriba la fórmula de la nueva función.

Solución



Definición 3.17.2: Translación horizontal

Dada la función $f(x)$ la gráfica de la función $y = f(x-h)$ consiste de la gráfica de $f(x)$ trasladada h unidades a la derecha si $h > 0$ y h unidades a la izquierda si $h < 0$.

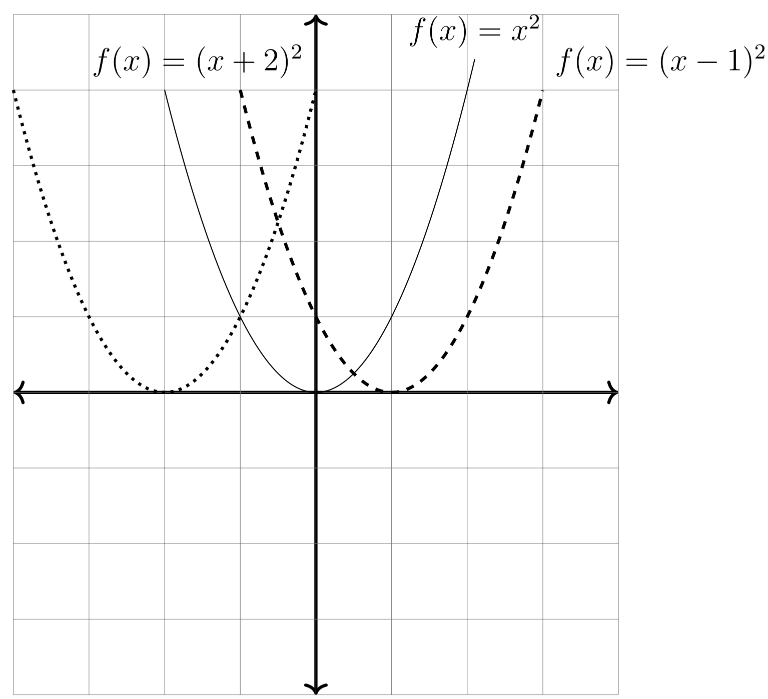
Ejemplo 3.17.6. Traslación horizontal

Basado en la gráfica de $f(x) = x^2$, realice los siguientes traslados:

(a) Un traslado de dos unidades hacia la derecha y escriba la fórmula de la nueva función.

(b) Un traslado de dos unidades hacia la izquierda y escriba la fórmula de la nueva función.

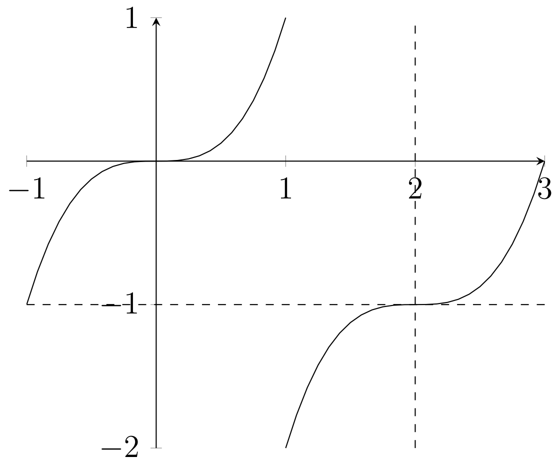
Solución



Las dos operaciones pueden combinarse en una sola, dada $f(x)$ la expresión $f(x-h)+k$, representa y traslación horizontal de $|h|$ unidades horizontales y $|k|$ unidades verticales.

Ejemplo 3.17.7. Traslación

A continuación se da la gráfica de $f(x) = x^3$ y la gráfica de una traslación. Halle la expresión para ella.



Solución

Para hacer este tipo de ejercicios se busca verificar que la gráfica dada se pueda obtener por traslaciones y luego se toma un punto de referencia. Se determina cuánto ha sido el movimiento horizontal y el vertical de este punto. Si el punto de referencia es (x_0, y_0) y se movió al punto (x_1, y_1) entonces $|x_0 - x_1|$ es el traslado horizontal y $|y_0 - y_1|$ es el traslado vertical. El signo se coloca de acuerdo a si el movimiento ha sido hacia arriba o hacia abajo. Si en este ejemplo se toma como punto de referencia al punto $(0, 0)$ notamos que se han movido dos unidades a la derecha y una unidad hacia abajo. Por tanto la función trasladada tiene la forma $f(x) = (x - 2)^3 - 1.$

Ejercicios 43.

Translación de funciones

1. Traslade las siguientes funciones de acuerdo al k indicado (verticalmente):

   $f(x) = 2x^3$, $k = 1$

   $f(x) = \operatorname{sen} x + \pi$, $k = 1/2$

   $f(x) = e^{x+2}$, $k = -2$

2. Traslade horizontalmente las siguientes funciones de acuerdo al h indicado:

   $f(x) = 2x^4 + x^2 - 5x$, $h = 2$

   $f(x) = e^{x+1} + 5$, $h = -3$

   $f(x) = \ln(x^2 - x)$, $h = -1/2$

   $f(x) = \dfrac{= \operatorname{sen} x^3}{x^2 - 4}$, $h = \dfrac{\pi}{4}$

3. Combine la traslación vertical y horizontal para las siguientes funciones, recuerde que puede usar software para hacer las gráficas:

   $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, con $h = 2$ y $k = 3$

   $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 1}$, con $h = 1/2$ y $k = 4/3$

3.17.6. Reescalamientos y reflexiones

Re-escalamiento

Sea $c > 0$ y considere la gráfica de $y = f(x)$.

(a) Podemos trasladar a la derecha a $f(x)$, de la forma $f(x - c)$.

(b) Podemos trasladar arriba la función $f(x)$ de la forma $f(x) + c$.

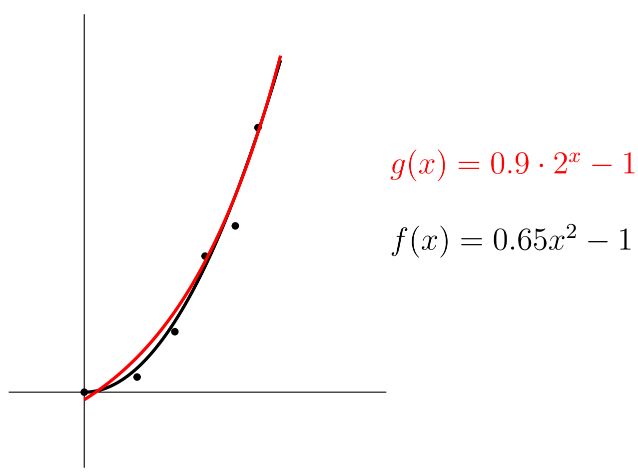
(c) Podemos expandir la función $f(x)$, de la siguiente forma $f(cx)$.

Nota

El estudio que se hizo para la función cuadrática completando cuadrados, dice básicamente que una función cuadrática que tiene la forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se puede obtener por traslación vertical, horizontal o reescalamiento de la función $f(x) = x^2$.

En conveniencia con las diferentes modificaciones que se le aplique a la función base, podemos lograr una correspondencia entre funciones, o bien sea una aproximación adecuada de cierta curva.

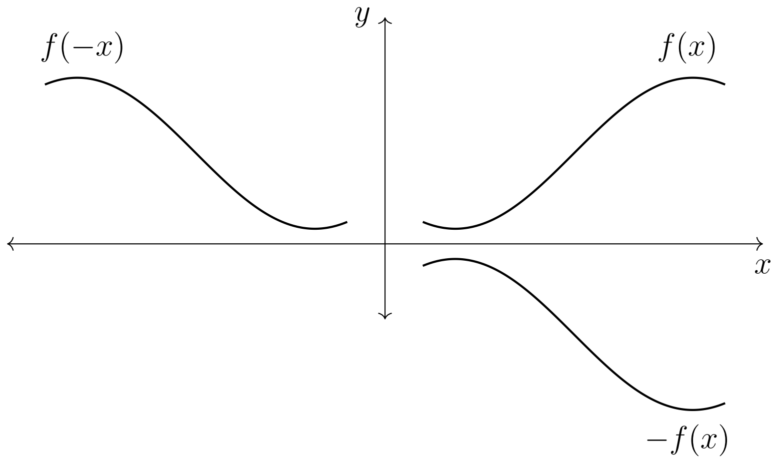
x	y
0	0
0.7	0.2
1.2	0.8
1.6	1.8
2	2.2
2.3	3.5



Con respecto a la representación que pueden tener los puntos con respecto a una función adecuada, se puede apreciar que tiene la forma parabólica o bien para este caso se puede apreciar una exponencial.

Definición 3.17.3: Reflexión

Suponga que se tiene la gráfica de la función $f(x)$, entonces las gráficas de $-f(x)$ y $f(-x)$, representan las gráficas de $f(x)$ reflejada con respecto al eje x y la reflexión con respecto al eje y respectivamente.



Ejercicios 44.
Gráficar las reflexiones en el eje x y en el eje y de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 + 1$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$
3. $f(x) = 2^x$
4. $\ln x$
5. $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$
6. $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$

3.17.7. Composición de funciones

Existen maneras diferentes a las algebraicas de combinar funciones.
Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : C \to \mathbb{R}$ de tal manera que el conjunto de valores de la función g está contenido en el dominio de f se define la composición de f y g como la función $f \circ g$ que va desde A hasta $\mathbb{R}$, $f \circ g : C \to \mathbb{R}$, como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{3.4}$$

El símbolo $f \circ g$ se lee f compuesto g.
La expresión $f(g(x))$ significa que la variable en la función f debe ser reemplazada por la expresión $g(x)$. Recordemos de clases anteriores que las variables pueden verse como contenedores, desde este punto de vista el contenedor de la variable de f debe ser llenado con la expresión de g. La función g actúa primero y le envía su resultado como variable a la función f.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \text{ran}\, g \subset A \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

El máximo dominio de la composición está determinado por los valores del dominio de la función g que tienen sus imágenes en el dominio de la función f.

Ejemplo 3.17.8. Composición de funciones

Considere las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + h$.
Determine: (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$.

Solución
Primero observe que el máximo dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y el máximo dominio de g es todo $\mathbb{R}$.

$$f(\square) = \square^2 + 1, \quad g(\square) = \square + h$$

(a) Los valores que toma g son todos números reales los cuales están todos incluidos en el dominio de f , que son todos los reales, así que el máximo dominio de la composición es todo $\mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f\left(\boxed{g(x)}\right) = \left(\boxed{g(x)}\right)^2 + 1 = (x + h)^2 + 1$$

(b) Los valores que toma f son todos números reales los cuales están todos incluidos en el dominio de g , que son todos los reales, así que el máximo dominio de la composición es todo $\mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g\left(\boxed{f(x)}\right) = \left(\boxed{f(x)}\right) + h = x^2 + 1 + h.$$

Se pueden componer más de dos funciones usando el mismo principio, por ejemplo,

$$(f \circ g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

Ejemplo 3.17.9. Composición de funciones

Determine las composiciones indicadas dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad s(x) = \frac{1}{x}$$

(a) $f \circ g$ y $g \circ f$ (c) $g \circ h$ y $h \circ g$ (e) $f \circ h \circ s$

(b) $f \circ h$ y $h \circ f$ (d) $h \circ s$ y $s \circ h$

Solución

(a)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(g(x)) = \ln(e^x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\ln x} = x.$$

(b)

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \text{ln}(h(x)) = \text{ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\text{ln}\, x+1}{\text{ln}\, x-1}$$

(c)

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = e^{h(x)} = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

(d)

$$(h \circ s)(x) = h(s(x)) = \frac{s(x)+1}{s(x)-1} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1+x}{1-x}$$
$$(s \circ h)(x) = s(h(x)) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

(e) Observe que $(f \circ h \circ s)(x) = f\big((h \circ s)(x)\big)$. Se calcula primero $h \circ s$. Esto se hizo anteriormente, $(h \circ s)(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Ahora,

$$(f \circ h \circ s)(x) = f\big((h \circ s)(x)\big) = \text{ln}\,\big((h \circ s)(x)\big) = \text{ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

También es importante saber qué funciones se compusieron para obtener una función dada. Es decir, revertir el proceso de la composición.

Ejemplo 3.17.10. Composición de funciones

En cada caso se compusieron las funciones f y g para obtener la función $h(x)$, es decir, $f \circ g = h$. Determine f y g

(a) $h(x) = \sqrt{x+1}$

(b) $h(x) = e^{x^2+1}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Solución

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, porque $(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$.

(b) Existen varias opciones en este caso

(1) $f(x) = e^{x+1}$ y $g(x) = x^2$ porque $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)+1} = e^{x^2+1}$.

(2) $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$ porque $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2+1}$.

(c) Existen varias opciones en este caso

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = x^2$ porque $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$ porque $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Ejemplo 3.17.11. Composición de funciones

Considere las siguientes tablas de valores de las funciones de f y g.

x	-1	0	7
f	10	7	4

x	-1	10	1
g	-1	7	3

Indique cual de los siguientes enunciados son falsos o verdaderos.

a) $(f \circ g)(10) = 4$

b) $(f \circ g)(-1) = 10$

c) $(g \circ f)(-1) = 7$

d) $(f \circ g)(0) = 3$

Solución

a) $(f \circ g)(10) = f(g(10)) = f(7) = 4$ verdadero.

b) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = 10$ Verdadero.

c) $g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(10) = 7$ verdadero.

d) $(f \circ g)(0) = f(g(0))$; como $g(0)$ no está definida, por lo que es falso.

Ejercicios 45.
Composición de funciones.

1. Dadas las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 3x + 2$
   b) $g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

   Calcular:
   a) $g \circ f$
   b) $f \circ g$
2. Dadas las funciones:
   a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$
   b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$
   c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

   Calcular:
   a) $g \circ f$
   b) $f \circ g$
   c) $g \circ g \circ f$
   d) $h \circ f \circ g$
3. Dadas las funciones:
   a) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$
   b) $g(x) = \sqrt{x}$

   Calcular:
   a) $g \circ f$
   b) $f \circ g$
4. Dadas las funciones:
   a) $f(x) = \text{sen}^2 x$
   b) $g(x) = \cot^2 5x$

   Calcular:
   a) $g \circ f$
   b) $f \circ g$

Ejemplo 3.17.12. Operación con funciones

Dadas las funciones $f(x) = \text{sen}(x) + 3x^2$ y $g(x) = x^3 - \sqrt{x-1}$, determine el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(f+g)(x)$
b) $(f \cdot g)(x)$
c) $(g-f)(x)$
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
e) $(f \circ g)(x)$

Solución

a) Para los $x \geq 1$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \text{sen}(x) + 3x^2 + x^3 - \sqrt{x-1}\\ &= x^3 + 3x^2 + \text{sen}(x) - \sqrt{x-1}\end{aligned}$$

b) Para los $x \geq 1$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (\text{sen}(x) + 3x^2)(x^3 - \sqrt{x-1}) \\ &= x^3\,\text{sen}(x) - \text{sen}(x)\sqrt{x-1} + 3x^5 - 3x^2\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

c) Para los $x \geq 1$

$$\begin{aligned}(g - f)(x) &= g(x) + f(x) = x^3 - \sqrt{x-1} - (\text{sen}(x) + 3x^2) \\ &= x^3 - 3x^2 - \text{sen}(x) - \sqrt{x-1}\end{aligned}$$

d) Para los $x \geq 1$ y $x \neq 2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{sen}(x) + 3x^2}{x^3 - \sqrt{x-1}}$$

e) Para los $x \geq 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - \sqrt{x-1}) = \text{sen}(x^3 - \sqrt{x-1}) + 3(x^3 - \sqrt{x-1})^2$$

Ejercicios 46.
Sean las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x + 2$
Determina las funciones:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. $\frac{f}{g}$
5. $g \circ f$
6. $(f + g) \cdot f$

Sean las funciones $h(x) = \sqrt{x} - 4$ y $t(x) = \sqrt{2x+3} + 4$
Determina las funciones:

a. $h + t$
b. $h - t$
c. $h \cdot t$
d. $\frac{h}{t}$
e. $h \circ t$
f. $h \cdot t \cdot h$

3.17.8. Inversa de una función

La función inversa tiene muchas aplicaciones, por ejemplo:

- Se conoce una relación para transformar grados Celsius a grados Farenheit. Cuando se usa la formula de transformar los grados Farenheit a grados Celsius se está usando la función inversa.
- Se sabe que para un tiempo dado t el número de individuos es $P(t)$. En algunos casos es más útil poder predecir en que tiempo t la población alcanzará cierto número, es decir, se debe calcular el tiempo en función de P, algo como $t(P)$.

Algunas veces para denotar la inversa se usan notaciones alternativas. Por ejemplo si $y = f(x)$ entonces se escribe $x = f^{-1}(y)$, o si se tiene $P(t)$ la inversa, en caso que exista, se escribe $t(P)$. La función identidad, notada $I(x)$, es la que asigna a cada x el mismo valor de x. Es decir, $I(x) = x$.

Definición 3.17.4: Función inversa

Una función f biyectiva de dominio A es inversa de la función g de dominio B si cumple las siguientes condiciones:

(a) $f \circ g$ da la función identidad en B, es decir, si $f \circ g = I_B$, o más precisamente, $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in B$ y

(b) $(g \circ f)(x) = x$ da la identidad en A, es decir, $g \circ f = I_A$ o más precisamente $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$.

La inversa de f se denota f^{-1}.

Se deduce inmediatamente de la definición que el dominio de la función inversa es el rango de la función inicial. Se tiene además que la gráfica de la función inversa puede obtenerse de la gráfica de la función original mediante una reflexión sobre la recta $y = x$. El recíproco también es cierto. Cuando la función es inyectiva, siempre puede definirse la inversa en el rango de la función. Como las funciones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes son inyectivas, este tipo de funciones tienen inversas.

Ejemplo 3.17.13. Función inversa

Verifique que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x}{2} - \frac{1}{2}$ son funciones inversas una de la otra.

Solución

Se debe comprobar que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f) = x$.

(a)

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = 2g(x) + 1$$
$$2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

(b)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2x+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2x+1-1}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x\end{aligned}$$

Para denotar la inversa de una función f se usa el símbolo f^{-1}. Cuando esto ocurre la expresión en la parte superior NO significa que es un exponente. Más claramente, si f^{-1} significa la inversa de f entonces $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.
En el ejemplo precedente se pudo haber escrito $f(x) = 2x + 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.
Existe un procedimiento que permite hallar la inversa de una función si la regla no es muy compleja. Se asume que la función está dada por la expresión $f(x)$ o $y = f(x)$.

(1) Sustituya $f(x)$ por y si es necesario.

(2) Intercambie las posiciones de x y y en la expresión resultante en el paso anterior.

(3) Despeje y.

(4) Reemplace y por $f^{-1}(x)$ si es requerido.

Ejemplo 3.17.14. Función inversa

Existe una relación muy estrecha entre la gráfica de una función f y su inversa. La gráfica de una función es simétrica a la gráfica de su inversa con respecto a la recta $y = x$.
Halle la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución
Hacemos $y = \frac{1}{x}$, se intercambian x y y, $x = \dfrac{1}{y}$ para obtener $yx = 1$ o $y = \dfrac{1}{x}$.. Es decir $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Se tiene entonces que la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es la misma función.

Ejemplo 3.17.15. Inversa de una función

Halle la inversa de $f(x) = x^2$.

Observe que el rango de x^2 que es $[0, \infty)$ se convierte en el dominio de la inversa así que $x \geq 0$ en el dominio de la inversa. Se intercambian x y y, $x = y^2$ y se despeja y, para obtener $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

¿Por qué no escoger $-\sqrt{x}$ como inversa?

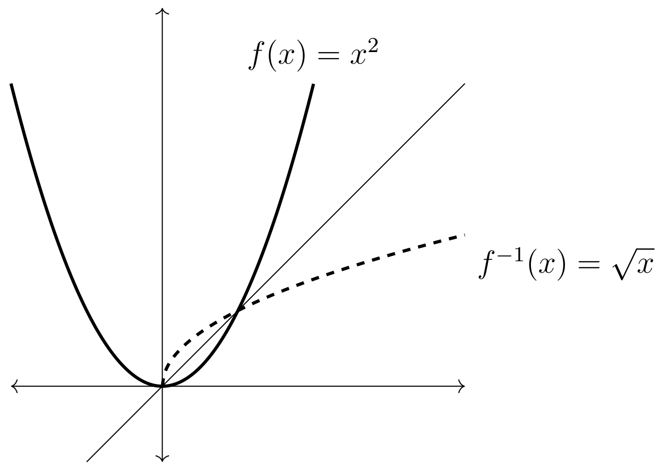


Figura 3.13: Gráfica $f(x) = x^2$ y su inversa

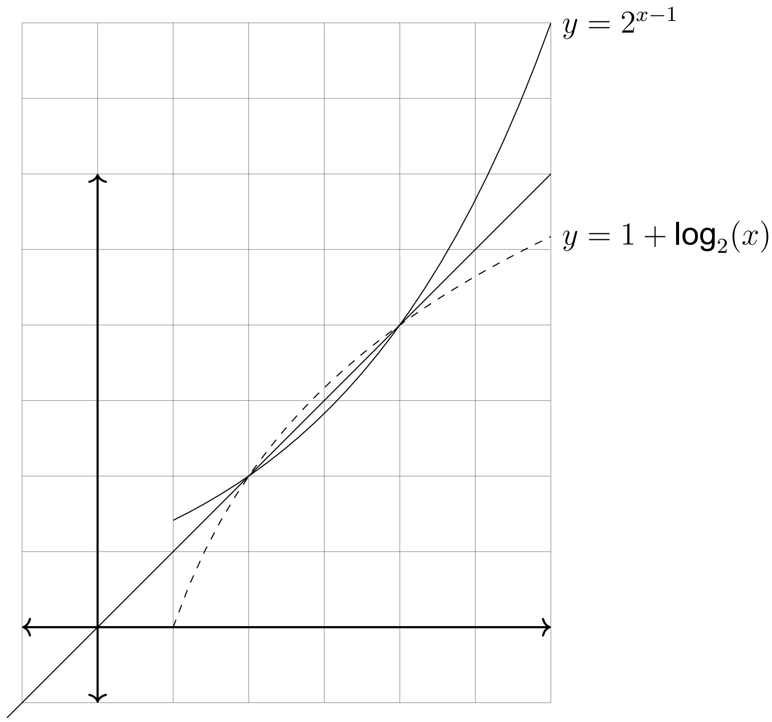
Ejemplo 3.17.16. Función inversa

Halle la inversa de $y = 2^{x-1}$. Grafique y y su inversa en el mismo sistema de coordenadas.

Solución

Considere $y = 2^{x-1}$. Al intercambiar y y x se obtiene $x = 2^{y-1}$, y con la definición de logaritmo se obtiene:

$\log_2 x = y - 1$. De aquí se obtiene $y = 1 + \log_2 x$.



Algunas veces la función está definida de una manera que no permite hallar la inversa en todo su dominio. En estos casos aún pueden encontrase inversas si se restringen los dominios.

Ejemplo 3.17.17. Funcion inversa

Halle la función inversa de

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{-7x+1}{x-6}$.

Solución

Siguiendo el procedimiento sugerido para hallar la inversa

a)

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+1}{x+1} \\ x &= \frac{3y+1}{y+1} \\ x(y+1) &= 3y+1 \\ xy+x &= 3y+1 \\ xy-3y &= 1-x \\ y(x-3) &= 1-x \\ y &= \frac{1-x}{x-3} \\ f^{-1}(x) &= \frac{1-x}{x-3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y &= \frac{-7x+1}{x-6} \\ x &= \frac{-7y+1}{y-6} \\ x(y-6) &= -7y+1 \\ xy-6x &= -7y+1 \\ xy+7y &= 1+6x \\ y(x+7) &= 1+6x \\ y &= \frac{6x+1}{x+7} \\ f^{-1}(x) &= \frac{6x+1}{x+7} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.17.18. Función inversa

Halle la función inversa de $y = x^2 - 1$.

Solución

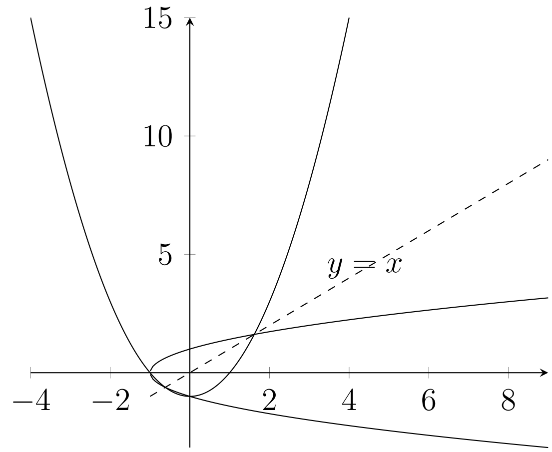
Observe que el dominio de x es el conjunto de todos los números reales y su rango es $[1, \infty)$. Además la función inicial tiene valores negativos o cero, es decir, $y = x^2 - 1 \leq 0$ en $[-1, 1]$ y positivos o cero en $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$. La gráfica puede verse en la figura 3.14a.

Como $y = x^2 - 1$ se intercambian x y y, obteniéndose, $x = y^2 - 1$. Despejando y se obtiene, $x + 1 = y^2$. Existen dos expresiones para y que dan $x + 1$.

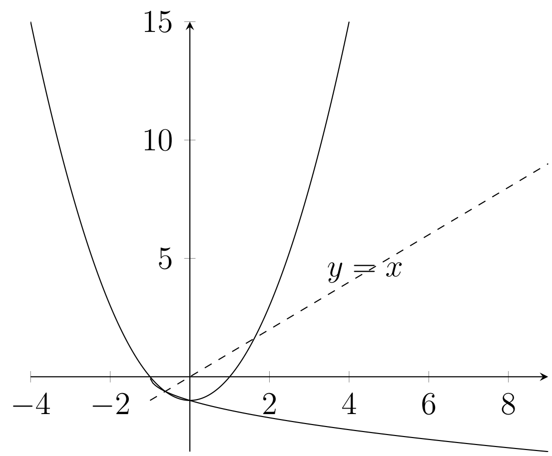
Una es $y = \pm\sqrt{x+1}$. En ambos casos se requiere $x \geq -1$. Entonces la inversa existe si $x \geq -1$. Como la inversa es una función, esta no puede tener dos valores diferentes para un mismo x.

De estas dos partes, la que produce valores negativos o cero es $y = -\sqrt{x+1}$, ver figura 3.14b La que produce valores positivos o cero es $y = \sqrt{x+1}$, ver figura 3.14b. Entonces esta es la inversa si se considera la parte de la gráfica inicial en $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

En general se considera la parte de dominio más grande para la inversa, y por esta razón, se considera que en $[1, \infty)$ la inversa de $y = x^2 - 1$ es $y = \sqrt{x+1}$.



(a)



(b)

Figura 3.14: Gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ y su inversa

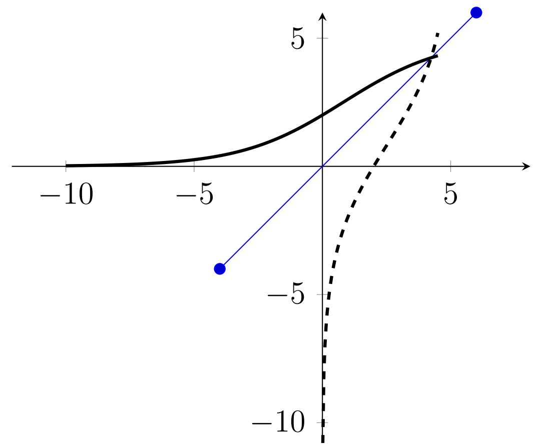
Ejemplo 3.17.19. Función inversa

Halle la función inversa de $f(t) = \dfrac{Ke^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$ donde K, P_0 y r son constantes distintas de cero.

Solución

$y = \dfrac{Ke^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$ intercambiando y y t, $t = \dfrac{Ke^{ry}}{K + P_0(e^{ry} - 1)}$ Se despeja y

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{Ke^{ry}}{K + P_0(e^{ry} - 1)} \\
t(K + P_0(e^{ry} - 1)) &= Ke^{ry} \\
t(K + P_0e^{rt} - P_0) &= Ke^{ry} \\
tK + tP_0e^{rt} - tP_0 &= Ke^{ry} \\
tP_0e^{ry} - Ke^{ry} &= tP_0 - tK \\
e^{ry}(tP_0 - K) &= t(P_0 - K) \\
e^{ry}(tP_0 - K) &= t(P_0 - K) \\
e^{ry} &= \frac{t(P_0 - K)}{tP_0 - K} \\
ry &= \ln\left(\frac{t(P_0 - K)}{tP_0 - K}\right) \\
y &= \frac{1}{r}\ln\left(\frac{t(P_0 - K)}{tP_0 - K}\right) \\
y &= \ln\left(\frac{t(P_0 - K)}{tP_0 - K}\right)^{1/r}
\end{aligned}
$$



Gráfica de la función y su inversa para $K = 5$, $r = 1/2$, $P_0 = 2$

Ejercicios 47. Composición de funciones
Verifique que se cumplen las siguientes composiciones.
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\quad$ $(f \circ f^{-1})(x) = x$
Para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4}$
3. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$

Dadas las funciones f y g, determine las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$:

11. $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$
12. $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
13. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 + 5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

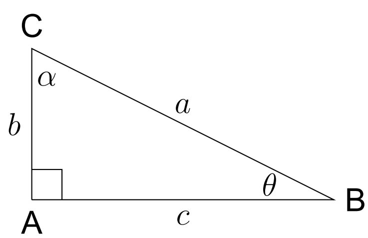
Capítulo 4

Trigonometría

4.1. Relaciones trigonométricas de ángulos

Considere un triángulo de vértices A B C que es rectángulo en A. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se llaman catetos respecto al ángulo recto BAC. El segmento $\overline{BC}$ se llama hipotenusa. En este triángulo se cumple el teorema de Pitágoras que establece que el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. De acuerdo a la figura 4.1, $a^2 = b^2 + c^2$.

En un triángulo rectángulo los ángulos que no son rectos son agudos. Un cateto es adyacente a un ángulo determinado si hace parte de los lados que determinan el ángulo. El cateto que no es adyacente al ángulo se llama cateto opuesto respecto del mismo ángulo.
Considere el triángulo rectángulo de la figura



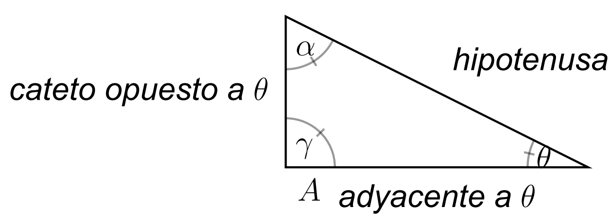


Figura 4.1: Elementos de un triángulo rectángulo

El ángulo $\widehat{ABC} = \theta$ tiene por cateto adyacente al segmento $\overline{AB}$ y como cateto opuesto al segmento $\overline{AC}$.
El ángulo $\widehat{BCA} = \alpha$ tiene como cateto adyacente al segmento $\overline{AC}$ y como cateto opuesto el segmento $\overline{AB}$.

Definición 4.1.1:

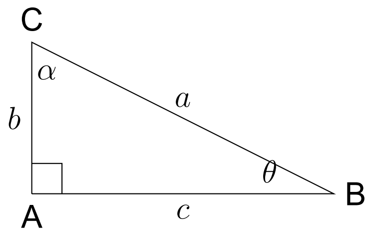
Para un ángulo agudo β de un triángulo rectangulo se definen las relaciones trigonométricas como

$$\begin{aligned}
\text{Seno de } \beta = \operatorname{sen}\beta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \beta}{\text{hipotenusa}}\\
\text{Coseno de } \beta = \cos\beta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \beta}{\text{hipotenusa}}\\
\text{Tangente de } \beta = \tan\beta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \beta}{\text{cateto adyacente de } \beta}\\
\text{Cotangente de } \beta = \cot\beta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \beta}{\text{cateto opuesto de } \beta}\\
\text{Secante de } \beta = \sec\beta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \beta}\\
\text{Cosecante de } \beta = \csc\beta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \beta}
\end{aligned}$$

En la figura 4.1 se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} & \operatorname{sen}\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}\\
\cos\theta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} & \cos\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}\\
\tan\theta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \theta}{\text{cateto adyacente de } \theta} = \frac{b}{c} & \tan\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto adyacente de } \alpha} = \frac{c}{b}\\
\cot\theta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \theta}{\text{cateto opuesto de } \theta} = \frac{c}{b} & \cot\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{b}{c}\\
\sec\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \theta} = \frac{a}{c} & \sec\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \alpha} = \frac{a}{b}\\
\csc\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \theta} = \frac{a}{b} & \csc\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{a}{c}
\end{aligned}$$

Para indicar las potencias se usa una notación especial. Para indicar $(\operatorname{sen}\theta)^n$ se usa $\operatorname{sen}^n\theta$ y lo mismo se usa con el resto de las relaciones.



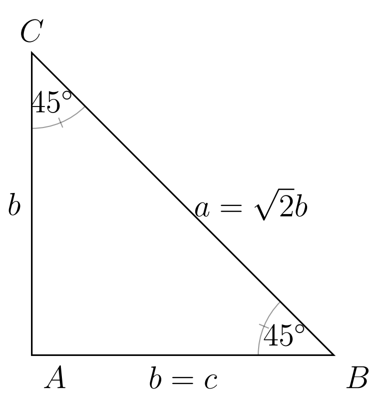
Estas relaciones no son todas independientes. Se tienen

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan\theta \\
\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \cot\theta \\
\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = \csc\theta \\
\frac{1}{\cos\theta} &= \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c} = \sec\theta \\
\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\
&= \frac{\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.1.1. Relaciones trigonométricas de 45^0

Determine las relaciones trigonométricas para un ángulo de $45°$.

Solución



Este es un triangulo isósceles por tener dos ángulos congruentes. En este triangulo $b = c$ y

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + b^2 = 2b^2.$$

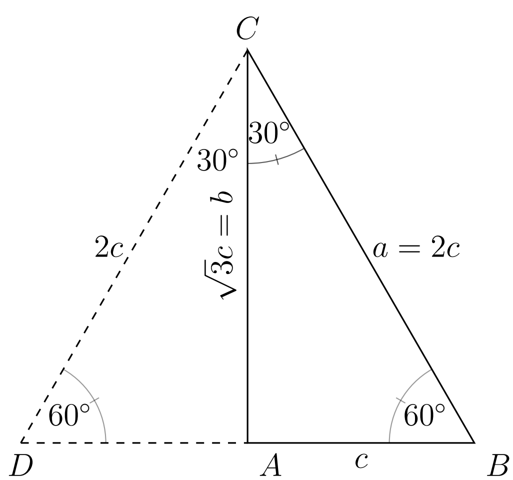
Por tanto $a = \sqrt{2}\sqrt{b^2} = \sqrt{2}b$.

Con base en estos valores se calculan las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,45^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 45^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1(\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos 45^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 45^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1(\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\tan 45^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 45^\circ}{\text{cateto adyacente de } 45^\circ} = \frac{b}{b} = 1\\
\cot 45^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 45^\circ}{\text{cateto opuesto de } 45^\circ} = \frac{b}{b} = 1\\
\sec 45^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2}\\
\csc 45^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2. Relaciones trigonométricas para los ángulos de 30^o y 60^o

Calcule las relaciones trigonométricas para 30 y 60 grados.



Considere el triángulo rectángulo ABC rectángulo en A. Se construye el triángulo auxiliar DAC rectángulo en A congruente con ABC con $AD = AB = c$. Entonces el triangulo DBC es equilátero y todos sus lados tiene la misma medida. Es decir

$$2c = DB = DC = CB = a$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$.

$$b^2 = (2c)^2 - c^2 = 4c^2 - c^2 = 3c^2.$$

Por tanto $b = \sqrt{3}\sqrt{c^2} = \sqrt{3}c$. Se calculan entonces las relaciones trigonométricas en el triángulo ABC original usando las medidas $b = \sqrt[3]{c}$ y c para los catetos y $a = 2c$ para la hipotenusa.

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,60^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 60^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}c}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos 60^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 60^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}\\
\tan 60^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 60^\circ}{\text{cateto adyacente de } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}c}{c} = \sqrt{3}\\
\cot 60^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 60^\circ}{\text{cateto opuesto de } 60^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}c} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\\
\sec 60^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } 60^\circ} = \frac{2c}{c} = 2\\
\csc 60^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } 60^\circ} = \frac{2c}{\sqrt{3}c} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,30^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}\\
\cos 30^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 30^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{c\sqrt{3}}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan 30^\circ &= \frac{\text{cateto opuesto de } 30^\circ}{\text{cateto adyacente de } 30^\circ} = \frac{c}{\sqrt{3}c} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\\
\cot 30^\circ &= \frac{\text{cateto adyacente de } 30^\circ}{\text{cateto opuesto de } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}c}{c} = \sqrt{3}\\
\sec 30^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } 30^\circ} = \frac{2c}{c\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
\csc 30^\circ &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } 30^\circ} = \frac{2c}{c} = 2
\end{aligned}$$

Fijados los ángulos, se observa que los valores de las relaciones trigonométricas son independientes de las longitudes de los lados de los triángulos.

Ejercicios 48. Resuelva los siguientes problemas:

1. Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme un ángulo de 30º.

   Calcular el precio del cable si cada metro cuesta 12 mil pesos.

2. Calcular cuánto mide la mediana de un triángulo equilátero (los tres ángulos son de 60 grados) cuyos lados miden 12cm.

   Ayuda: la mediana es la distancia del segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a este.

3. Escribir una fórmula para calcular la longitud de la mediana de un triángulo equilátero de lado d.

   Ayuda: la fórmula se puede obtener rápidamente a partir del problema anterior.

4. De un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide $4m$ y el otro mide $3m$.

   Calcular la hipotenusa y los ángulos adyacentes a los catetos.

5. Juan está volando su cometa y le gustaría saber qué altura alcanza. La sombra de la sombra de la cometa comienza a sus pies y termina a 6.7 metros y el ángulo que forma el cable con el suelo es de $39°$. ¿A qué altura se encuentra la cometa?

6. Desde un supermercado se observa la parte alta de un rascacielos de 400 metros de altura bajo un ángulo de 40^o. Calcular la distancia que hay desde el supermercado hasta la punta del rascacielos.

7. Calcular los ángulos α sabiendo cuánto valen su seno o su coseno:

   a) sen $\alpha = 0.999390827$
   b) sen $\alpha = 0.6691306064$
   c) sen $\alpha = 0.7660444431$
   d) sen $\alpha = 0.9743700648$
   e) cos $\alpha = 0.8090169944$
   f) cos $\alpha = 0.2588190451$
   g) cos $\alpha = 0.9271838546$
   h) cos $\alpha = 0.4067366431$

4.2. Funciones trigonométricas de números reales

4.2.1. Medición de ángulos en radianes

Hasta ahora solo se han calculado las funciones trigonométricas para ángulos en grados. Desafortunadamente no se puede considerar una función como sen $x + x$ o $\frac{\cos x}{x}$ si solo se usan grados.

Para que las relaciones anteriores tengan sentido, se debe hallar una equivalencia entre los números reales y los ángulos. Para hacer esto se usa una unidad de medida llamada radián. Está basada en el siguiente principio: En cualquier circunferencia, su longitud dividida por el diámetro da un número constante. Este número siempre es el mismo sin importar la circunceferencia donde haga la medición. Este número

se llama π. Si C es la longitud de la circunferencia, d su diámetro y $r = d/2$ su radio, entonces $d = 2r$ y $\dfrac{C}{d} = \dfrac{C}{2r} = \pi$. Despejando la longitud C, se tiene que $C = 2\pi r$.
¿Cuántas veces cabe el radio de una circunferencia en su perímetro (circunferencia)?
Para determinar este dato se procede, así: $\dfrac{\text{Longitud de la cercunferencia}}{\text{Longitud del radio}}$, esto es:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Así, el radio cabe 2π veces en la circunferencia del circulo de radio r.

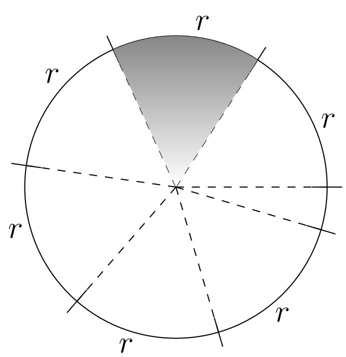
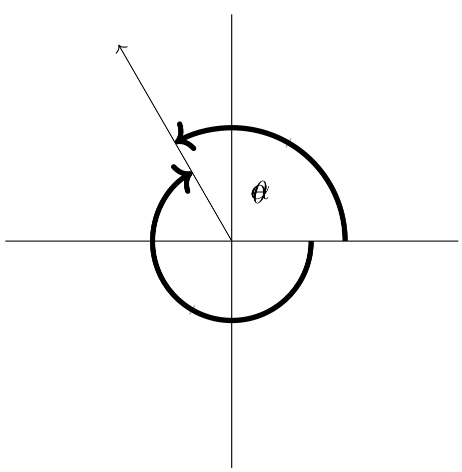


Figura 4.2: Radios y ángulos subtendidos por radios

Un ángulo en el plano xy está en la posición estándar si el vértice está en el origen y su rayo inicial está a lo largo de la parte positiva del eje x. Ángulos medidos en el sentido contrario de las manecillas del reloj se les asigna una medida positiva y los medidos en el sentido de las manecillas se les asigna una medida negativa.



En la figura se tiene un ángulo medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj (θ) y uno con medida en el sentido de las manecillas (α). Ambos comparten el mismo rayo inicial y el mismo rayo final.

Si se mide un arco sobre la circunferencia de radio r y se traza un ángulo desde los extremos del arco hasta el centro de la circunferencia, ¿Cuál es la medida en grados de este ángulo? Uno de estos ángulos se encuentra sombreado en la figura 4.2.

Como el ángulo completo de la circunferencia mide $360°$, se debe dividir esta cantidad entre el número de radios en la circunferencia $\dfrac{360°}{2\pi} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57.269°$. El ángulo central determinado por el radio es $57.269°$.

Se define entonces una unidad alternativa para medir ángulos.

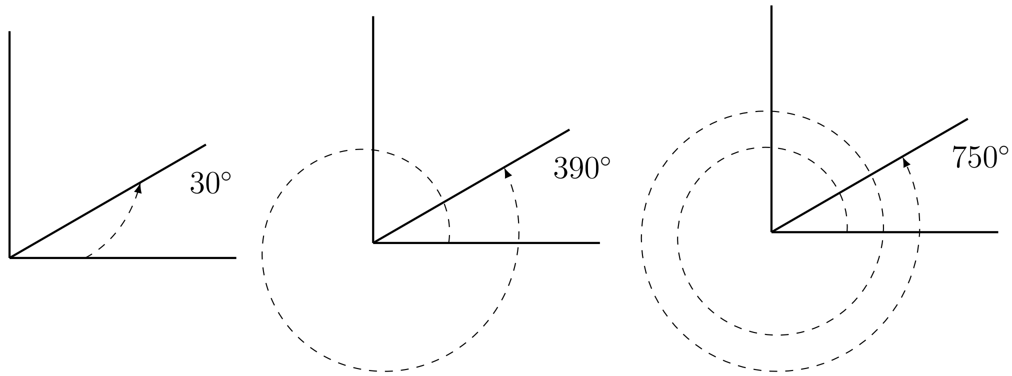
Definición 4.2.1: Radián

Un radián se define como la medida de un ángulo central cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio en la circunferencia del círculo.

De la discusión precedente se tiene entonces que un radián (1 rad) corresponde a $57.269°$ aproximadamente y que un ángulo de $360°$ corresponde a 2π rad. De esta relación básica pueden obtenerse otras,

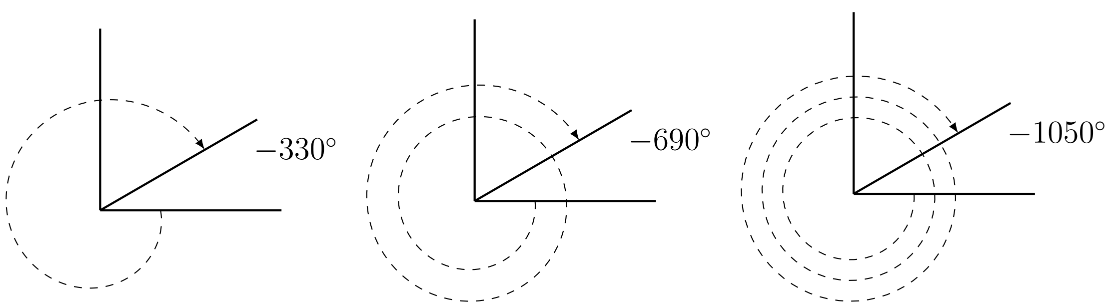
$$
\begin{aligned}
15° &= \frac{360}{24} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}\\
30° &= 2(15°) = 2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6}\\
45° &= 3(15°) = 3\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}\\
60° &= 4(15°) = 4\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3}\\
180° &= \frac{360}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}
$$

Si a un ángulo θ, se le suma una vuelta (2π) completa, queda un ángulo $\theta + 2\pi$ con el mismo lado terminal. La vuelta puede agregársele en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario. Si se repite el procedimiento con $\theta + 2\pi$ se obtiene otro ángulo con el mismo lado terminal. En general si a θ se le suman n vueltas ($2\pi n$), el nuevo ángulo $\theta + 2\pi n$, tiene el mismo lado terminal de θ y por tanto las relaciones trigonométricas de θ y $\theta + 2\pi n$ son iguales.



(a) Ángulo $\frac{\pi}{6} = 30°$ (b) Ángulo $\frac{\pi}{6} + 2\pi = 30° + 360°$ (c) Ángulo $\frac{\pi}{6} + 2(2\pi) = 750°$

Figura 4.3: Ángulos con el mismo lado terminal, positivos



(a) Ángulo $\frac{\pi}{6} - 2\pi = 330°$ (b) Ángulo $\frac{\pi}{6} - 2(2\pi) = -690°$ (c) Ángulo $\frac{\pi}{6} - 3(2\pi) = -1050°$

Figura 4.4: Ángulos con el mismo lado terminal, negativos

Ejemplo 4.2.1. Ángulos determinados

Halle todos los ángulos determinados por (x, y) donde $x = 0$.

Solución

Cuando $x = 0$ es porque el punto (x, y) está sobre el eje y, en ese caso el ángulo puede ser $\frac{\pi}{2} = 90°$ o $\frac{3\pi}{2} = 3 * 90° = 270°$. Considerando la discusión anterior $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, es decir, $\frac{\pi}{2}$ más n vueltas en el sentido contrario de las manecillas tiene el mismo lado terminal y $\frac{\pi}{2} - 2\pi n$, es decir, $\frac{\pi}{2}$ más n vueltas en en el sentido de las manecillas tiene el mismo lado terminal. Lo anterior puede resumirse diciendo que para n entero los ángulos determinados por $\frac{\pi}{2}$ con lado terminal $(0, y)$ vienen dados por

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right) = \pi\left(\frac{4n+1}{2}\right) = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

EL mismo análisis con $3\frac{\pi}{2}$ lleva a

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi n = \pi\left(\frac{3}{2} + 2n\right) = \pi\left(\frac{4n+3}{2}\right) = (4n+3)\frac{\pi}{2}$$

De hecho todos esos ángulos pueden obtenerse de $\frac{\pi}{2}$ sumando π un número adecuado de veces. Observe los siguientes cálculos

$$\frac{\pi}{2} + \pi = \pi\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \pi\left(\frac{1+2}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} + n\pi = \pi\left(\frac{1}{2} + n\right) = \pi\left(\frac{1+2n}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

En resumen, los ángulos con lado terminal determinado por $(0, y)$ vienen dados por $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ con n entero.

Ejemplo 4.2.2. Ángulos determinados

Determine los ángulos que tienen lado terminal $(x, 0)$.

Solución
Ángulos que tienen $(x, 0)$ en el lado terminal son 0 y $\pi = 180°$. En general todos los ángulos pueden obtenerse sumándole o restándole n veces π.

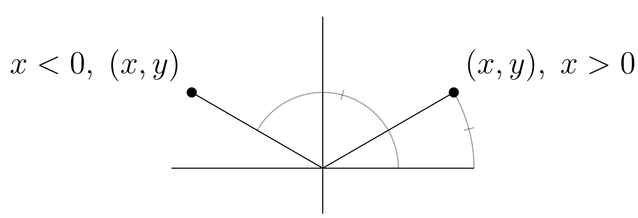
$$0 + 2\pi n = 2\pi n, \quad \text{y} \quad \pi + 2\pi n = \pi(1+2n).$$

En general todos los ángulos con lado terminal determinado por $(x, 0)$ tienen la forma $n\pi$ donde n es un entero.

Ejemplo 4.2.3. Ángulos determinados

¿Qué ángulos puede determinar un punto $(x, y), \quad y > 0, x \neq 0$.

Solución
Como $y > 0$, el punto está en el primer o en el segundo cuadrante. Si $x > 0$ el ángulo está en el primer cuadrante y si $x < 0$ el ángulo está en el segundo cuadrante.



Si θ es uno de estos ángulos $\theta + 2\pi n$ para n entero, define un conjunto de ángulos que tiene el mismo lado terminal determinado por (x, y).

4.2.2. Ángulo de referencia

Definición 4.2.2: Ángulo de referencia

Es el ángulo más pequeño que se forma con el lado terminal de un ángulo dado con respecto al lado positivo del eje x.

El ángulo de referencia siempre es positivo con medida menor o igual a $90°$. Para encontrar el ángulo de referencia, podemos seguir los siguientes pasos:

- Si es necesario, primero "desenrollar" el ángulo: Si el ángulo es positivo mayor a $360°$ réstele 360^0 hasta que esté entre 0 y $360°$. (Para ángulos negativos, sume $360°$ en vez de restar).
- Dibuje el ángulo para ver en qué cuadrante se encuentra.
- Según el cuadrante, busque el ángulo de referencia así:
    - Si el ángulo está en el primer cuadrante el ángulo de referencia es el mismo ángulo.
    - Si el ángulo está en el segundo cuadrante el ángulo de referencia es $180°$ menos el ángulo.
    - Si el ángulo está en el tercer cuadrante el ángulo de referencia es el ángulo menos $180°$.
    - Si el ángulo está en el cuarto cuadrante el ángulo de referencia es $360°$ menos el ángulo.

  Si el ángulo es α

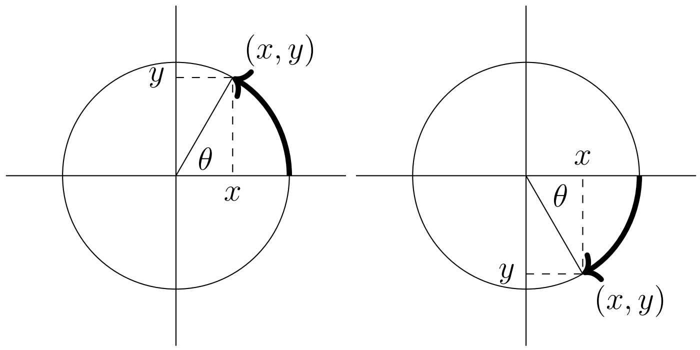
Cuadrante	Ángulo referencia
I	α
II	$180° - \alpha$
III	$\alpha - 180°$
IV	$360° - \alpha$

Cuadro 4.1: Criterios para ángulos de referencia

4.2.3. Relaciones trigonométricas de números reales

Como las relaciones trigonométricas son independientes de los lados de los triángulos se definen las relaciones trigonométricas para números reales de la siguiente manera.

Considere la circunferencia de radio r sobre el plano cartesiano y sea (x, y) el punto final de un arco de circunferencia de radio r que empieza en $(r, 0)$ y define un ángulo θ medido en radianes.



Se define

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \\
\cos\theta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \\
\tan\theta &= \frac{\text{cateto opuesto de } \theta}{\text{cateto adyacente de } \theta} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\
\cot\theta &= \frac{\text{cateto adyacente de } \theta}{\text{cateto opuesto de } \theta} = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \\
\sec\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \theta} = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0 \\
\csc\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \theta} = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0.
\end{aligned}
$$

La definición anterior se simplifica si se toma la circunferencia de radio $r = 1$. En este caso el coseno es la coordenada x y el seno es la coordenada y del punto (x, y) que está sobre la circunferencia unidad y que determina el ángulo. Los signos de las funciones trigonométricas para un ángulo con lado terminal en un cuadrante determinado quedan determinados por los signos de x y y.
Para ángulos que determinan el mismo punto (x, y) sus relaciones trigonométricas son iguales independientemente del valor del ángulo.

Ejemplo 4.2.4. Razones trigonométricas

Halle todos los ángulos para los cuales (a) $\operatorname{sen}\theta = 0$, (b) $\cos\theta = 0$.

Solución
Sea (x, y) el punto que determina el ángulo θ en la circunferencia unitaria.

(a) Como $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $\operatorname{sen}\theta = x$ se deduce que $x = 0$. Como se discutió anteriormente los ángulos con lado terminal en puntos de la forma $(0, y)$ vienen dados por $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, donde n es un entero.

(b) Como $\cos\theta = 0$ y $\cos\theta = y$ se deduce que $y = 0$. Como se discutió anteriormente los ángulos con lado terminal en puntos de la forma $(x, 0)$ vienen dados por $n\pi$, donde n es un entero.

4.2.4. Identidades trigonométricas

Como se mostró anteriormente, las relaciones trigonométricas no son independientes. A continuación se da una lista de identidades, es decir, se cumplen para todos los valores de θ para las cuales las relaciones básicas que intervienen están definidas.

Identidades básicas

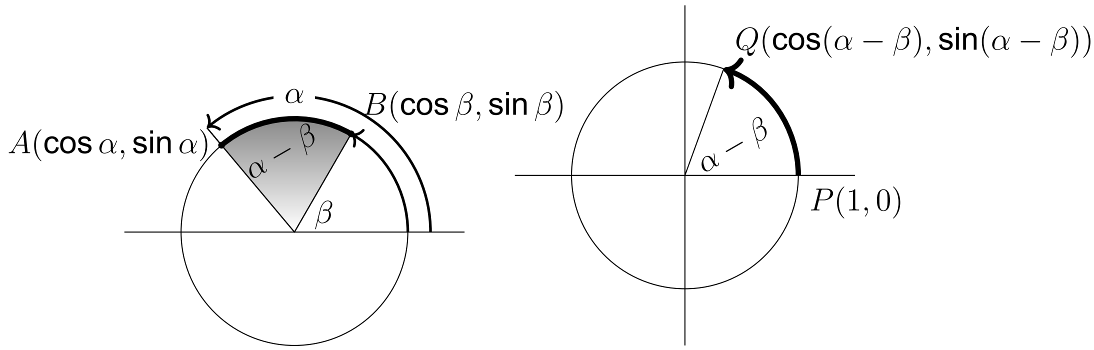
$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$	$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\cos\theta = \pm\sqrt{1 = \operatorname{sen}^2\theta}$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	$\sec^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = +\cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$
$$\sec(-\theta) = +\sec\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

Identidades de adición

En esta sección se deducirán expresiones que dan expansiones para $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ en términos de los senos y cosenos de los ángulos α y β. Ponga a α y a β en una circunferencia unitaria en su posición central.

Sea A el punto terminal de α y B el punto terminal de β. Suponga que $\alpha > \beta$. Esta disposición puede verse en la figura 4.5a. Ubique el arco correspondiente a $\alpha - \beta$ y ubique el ángulo subtendido por este arco en forma central y ubique su punto inicial (P) y su punto terminal (Q). Esta ubicación puede verse en la figura 4.5b.



a) Posición relativa de α, β y $\alpha-\beta$

b) El ángulo $\alpha-\beta$ en posición central.

Figura 4.5: Coseno de sustracción de ángulos

Por las propiedades de los ángulos se deduce entonces que las distancias de los puntos A y B en la figura 4.5a) y los puntos P y Q de la figura 4.5b) deben ser iguales. Se debe tener entonces que $(AB)^2 = (PQ)^2$.

El punto A tiene coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y el punto B tiene coordenadas $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. El punto P tiene coordenadas $(1,0)$ y el punto Q tiene coordenadas $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$.

$$\begin{aligned}
(AB)^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta\\
&= \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha-\beta) - 0)^2\\
&= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\\
&= \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos(\alpha-\beta)\\
&= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Como $(AB)^2 = (PQ)^2$, entonces

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

de donde se concluye que

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (4.1)$$

Para obtener una identidad para $\cos(\alpha+\beta)$ se usa

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta).$$

Como $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen}\beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(\beta) + \operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}(\beta)).$$

Por tanto

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{4.2}$$

Usando las identidades (4.1) y (4.2) también puede deducirse lo siguiente

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\pi/2)\\ &= \cos\alpha(0) + \operatorname{sen}\alpha(1) = \operatorname{sen}\alpha\\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\cos(\pi/2) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\pi/2)\\ &= \cos\alpha(0) - \operatorname{sen}\alpha(1) = -\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\\ \cos\alpha &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \cos\alpha\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Como $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\beta$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos(-\operatorname{sen}\beta) + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \tag{4.3}$$

De la expresión anterior puede deducirse para el seno de la suma

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha - (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha$$

Como $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}(\beta)$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \tag{4.4}$$

Usando el hecho que $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}
\end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador en el lado derecho por $\cos\alpha\cos\beta$ se tiene

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Se tiene entonces

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}. \tag{4.5}$$

De manera análoga se obtiene

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}. \tag{4.6}$$

4.2.5. Resumen de identidades

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\cos\theta & \operatorname{sen}(\pi-\theta) = +\operatorname{sen}\theta\\
\cos(-\theta) = +\cos\theta & \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\operatorname{sen}\theta & \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\\
\tan(-\theta) = -\tan\theta & \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\cot\theta & \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta\\
\csc(-\theta) = -\csc\theta & \csc(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\sec\theta & \csc(\pi-\theta) = +\csc\theta\\
\sec(-\theta) = +\sec\theta & \sec(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\csc\theta & \sec(\pi-\theta) = -\sec\theta\\
\cot(-\theta) = -\cot\theta & \cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = +\tan\theta & \cot(\pi-\theta) = -\cot\theta
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2}) = +\cos\theta & \operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\theta+2\pi) = +\operatorname{sen}\theta\\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\theta & \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta & \cos(\theta+2\pi) = +\cos\theta\\
\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\cot\theta & \tan(\theta+\pi) = +\tan\theta & \tan(\theta+2\pi) = +\tan\theta\\
\csc(\theta+\frac{\pi}{2}) = +\sec\theta & \csc(\theta+\pi) = -\csc\theta & \csc(\theta+2\pi) = +\csc\theta\\
\sec(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\csc\theta & \sec(\theta+\pi) = -\sec\theta & \sec(\theta+2\pi) = +\sec\theta\\
\cot(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\tan\theta & \cot(\theta+\pi) = +\cot\theta & \cot(\theta+2\pi) = +\cot\theta
\end{array}$$

Seno	$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
Coseno	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
Tangente	$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
arcoseno	$\arcsin\alpha \pm \arcsin\beta = \arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} \pm \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$
arcocoseno	$\arccos\alpha \pm \arccos\beta = \arccos\left(\alpha\beta \mp \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\right)$
arcotangente	$\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\left(\dfrac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\cot 3\theta = \frac{3\cot\theta - \cot^3\theta}{1-3\cot^2\theta}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1-\cos\theta}{2}\\ \cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1+\cos\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\\ &= 2\cos^2\theta - 1\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \csc\theta - \cot\theta\\ &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\\ &= \frac{1-\cos\theta}{=\operatorname{sen}\theta}\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}3\theta &= 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\\ &= 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta\end{aligned}$$

$$\tan\frac{\eta+\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\eta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\eta + \cos\theta}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sec\theta + \tan\theta$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3 = \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}} = \frac{1-\tan(\theta/2)}{1+\tan(\theta/2)}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}} \quad \text{para} \quad \theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\begin{aligned}\cot\frac{\theta}{2} &= \csc\theta + \cot\theta \\ &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} \\ &= \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \operatorname{sen} A \cos B &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)] \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]\end{aligned}$$

El estudiante con las guías utilizadas en el transcurso del libro esta en capacidad de usar WxMaxima para trabajar con funciones trigonométricas, usar la guía inicial aquí o Click aquí.

Ejercicios 49.

1. Hallar el dominio de la función:

   $f(x) = \tan(4x)$; x es un entero.

2. Hallar el dominio y rango de la función:

   $y = f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3$

3. Hallar el dominio de la función:

   $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$

4. Hallar el dominio de la función:

   $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

5. Hallar el periodo de la función:

   $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

6. Hallar el dominio, rango, periodicidad, indicar si es par o impar, creciente o decreciente en cada cuadrante en la función:

   $y = f(x) = 2\cos x + 1$

7. Calcular el rango de la función:

   $y = 1 + \cos^2 x$

8. Simplificar las siguientes expresiones:

   a) $\operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}(2x))$

   b) $2(\cos x - \cos(2x)) - (2\cos x - \cos(2x))$

   c) $2\operatorname{sen} x - \dfrac{4\operatorname{sen} x - \cos x}{2}$

9. Escriba en términos de la función coseno:

   $$\frac{\tan(x) + \cot(x)}{\sec(x)\csc(x)}$$

   Muestre que es cierta las siguientes identidades:

10. $\dfrac{\operatorname{sen}(x) - 1}{(\cos(x)+1)^2} = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1} - \dfrac{1}{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1}$.

11. $\dfrac{\cos(x)\sec(x)}{\tan(x)} = \cot(x)$.

12. $\dfrac{\tan(x)}{\sec(x)} = \operatorname{sen}(x)$.

13. $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

14. $\operatorname{sen}(x)(1+\tan(x)) = \tan(x)(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))$

15. Escriba la expresión trigonométrica en términos de la función seno. $\sec^2(x)+\tan^2(x)$, $\cos^2(x)(1+\tan^2(x))$, $\csc(x)\sin(x)\cos(x)$.

16. $\operatorname{sen}(x)\cot(x) = \cos(x)$

17. $\dfrac{\tan(x)}{\sec(x)} = \operatorname{sen}(x)$

18. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$

19. $\dfrac{\cos(x)\sec(x)}{\tan(x)} = \cot(x)$

20. $\csc(x)(\csc(x) + \operatorname{sen}(-x)) = \cot^2(x)$

21. $(1-\cos(x))(1+\cos(x)) = \dfrac{1}{\csc^2(x)}$

22. $\dfrac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^2}{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{(\operatorname{sen}(x)-\cos(x))^2}$

23. $(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^4 = (1 + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x))^2$

24. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}^2(x)} = 1+\tan^2(x)$

25. $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} = \dfrac{\tan(x)}{1+\tan(x)}$

26. $\dfrac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}$

27. $\sec^4(x) - \tan^4(x) = \sec^2(x) + \tan^2(x)$

28. $\dfrac{1}{1\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} = 2\sec(x)\tan(x)$

29. $\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$

30. $\cos(x+\frac{\pi}{6}) + \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3} = 0$

31. $\tan(x-\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan(x)-1}{\tan(x)+1}$

32. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)-\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \tan(y)$

33. $\tan(3x) = \dfrac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}$

34. $\dfrac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(5x)}{\cos(x)+\cos(5x)} = \tan(3x)$

4.2.6. Funciones trigonométricas y sus gráficas

Para definir las funciones trigonométricas se usan los dominios en radianes. El seno y el coseno tienen como dominio todos los números reales. El resto tiene como dominio el conjunto de los números reales exceptuando aquellos puntos donde se anulan los denominadores. Para la tangente y la secante se excluyen los puntos donde se anula el coseno y para la cotangente y la cosecante se excluyen los puntos donde se anula el seno.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cot x$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sec x$	$\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$f(x) = \csc x$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

x	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen(x)	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos(x)	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

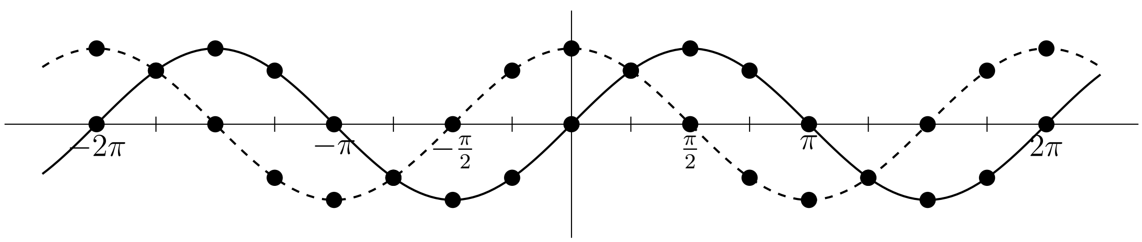


Figura 4.6: Gráficas de seno (linea continua) y coseno (linea punteada)

Ejercicios 50.

1. Gráfica cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = 1 - \sin x$, tal que $x \in [0; 2\pi]$

   b) $y = 2\sin x$

   c) $y = \sin x$

   d) $f(x) = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$

   e) $f(x) = |\cos x| + \cos x$

   f) $f(x) = \sin x - \dfrac{\pi}{3} + \sin x + \dfrac{\pi}{3}$

2. ¿En que cuadrante la función tangente es decreciente?

3. Gráficar en WxMaxima las funciones trigonométricas Guía 15.

4.3. Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación que contiene el valor de una relación trigonométrica evaluada en una expresión que involucra la variable.
La ecuación sen$(\pi)x + 5 = 0$ en la variable x no es ecuación trigonométrica porque la función seno no está evaluada en una expresión que contiene a la variable $x.$
El proceso de resolver ecuaciones trigonométrica requiere tanto los ángulos de referencia como las identidades trigonométricas que se han estudiado, además de gran parte del álgebra que se ha visto hasta ahora. Para desarrollar satisfactoriamente esta parte deberá tener una buena comprensión de los valores de las funciones trigonométricas en el primer cuadrante, cómo funciona el círculo unitario, la relación entre radianes y grados, y cómo se ven las diversas curvas de las funciones trigonométricas, al menos en el primer período.
Para resolver una ecuación trigonométrica siga los siguientes pasos:

1. Ponga la ecuación en términos de una función de un solo ángulo.
2. Escriba la ecuación como una función trigonométrica de un ángulo igual a una constante.
3. Anote los posibles valores del ángulo y su ángulo de referencia.
4. Recuerde que si una expresión satisface la igualdad también lo hará la misma expresión más un múltiplo entero del periodo de la función. Por ejemplo, si x satisface la igualdad, también lo hará $x + np$ donde p es el periodo y n es un número entero.
5. Si es necesario, resolver para la variable.
6. Aplique las restricciones pedidas sobre la solución general obtenida.

Ejemplo 4.3.1. Ecuación

Resolver $2\,\text{sen}(x)\cos(x) - 1 = 0$ para x en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

Solución
Observe que $2\,\text{sen}(x)\cos(x) = \text{sen}(2x)$ así que la ecuación original queda $\text{sen}(2x) - 1 = 0$ de modo que $\text{sen}(2x) = 1.$ Los posibles valores del ángulo $2x$ son $90° = \dfrac{\pi}{2}.$ Como el periodo del seno es $2\pi = 360°$, entonces $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ son soluciones. Despejando a x se tiene

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n = 45° + 180° n$$

son soluciones. De todas ellas se deben escoger solo las que están en $[-2\pi, 2\pi] = [-360°, 360°]$ Se le deben dar valores enteros a $n.$

- Para $n = 0$, $x = 45° + 180°(0) = 45° = \dfrac{\pi}{4}$
- Para $n = -1$, $x = 45° + 180°(-1) = -135° = -\dfrac{3\pi}{4}$
- Para $n = 1$, $x = 45° + 180°(1) = 225° = \dfrac{5\pi}{4}$
- Para $n = 2$, $x = 45° + 180°(2) = 405° = \dfrac{9\pi}{4}$
- Para $n = -2$, $x = 45° + 180°(-2) = -315° = -\dfrac{7\pi}{4}$
- Para $n = -3$, $x = 45° + 180°(-3) = -495° = -\dfrac{11\pi}{4}$

Como pueden verse las soluciones que están en $[-2\pi, 2\pi]$ son

$$\left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Ejercicios 51.
Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $\dfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$.
2. $\dfrac{\tan(x)}{\csc(x)} = \sec(x) - \cos(x)$.
3. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$.
4. $(1-\cos^2(x))(1+\cot^2(x)) = 1$
5. $\dfrac{\cos(x)}{\sec(x)} + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\csc(x)} = 1$.
6. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}(x)} - \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} = 2\sec(x)\tan(x)$.
7. $\tan(x) - \tan(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$.
8. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$.
9. $\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(x)} = 4\cos(x)\cos(2x)$.
10. $\cos^4(x) - \operatorname{sen}^4(x) = \cos(2x)$.

Ver Guía de Ecuaciones

4.4. Ley del seno

La ley de los senos establece una proporción entre los senos de los angulos interiores y los correspondientes a los lados opuestos. Esto permite conocer los valores de las longitudes de los lados y los ángulos para triángulos que no son rectángulos. Hallar todos los valores de los lados y los ángulos que no se dan en un problema se le conoce como ***resolver el triángulo.***
Considere el triángulo

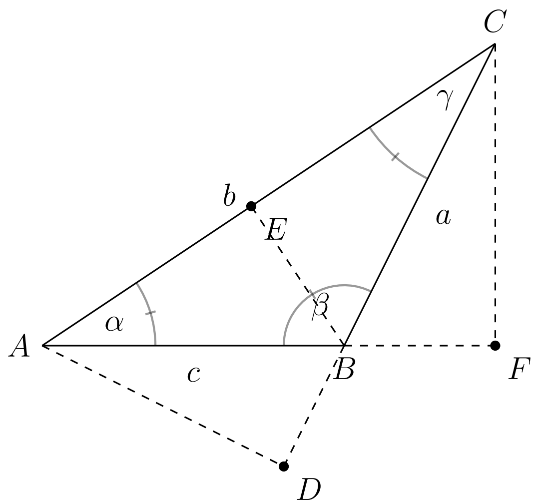


Figura 4.7: Elementos de un triángulo rectángulo

Llame α al ángulo de vértice A y γ al ángulo de vértice C y suponga que el ángulo α es agudo. Sea h la longitud de la altura desde el vértice B hasta el segmento $\overline{AC}$, es decir, h es la longitud del segmento $\overline{BE}$ Entonces se tienen las siguientes razones trigonométricas

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{BE}{BC} = \frac{h}{a} \qquad \text{Así se tiene} \quad h = a\,\text{sin}(\gamma)$$
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{c} \qquad \text{Así se tiene} \quad h = c\,\text{sen}(\alpha)$$

De donde se concluye que $c\,\text{sen}\,\alpha = h = a\,\text{sen}\,\alpha$ o

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \tag{4.7}$$

Ahora repita el argumento con el ángulo B por ejemplo. En este caso el ángulo B es obtuso. Trace la altura que pasa por C y el perpendicular a la recta que pasa por A y B y sea h_2 la longitud de esta altura.

Considere los triángulos rectángulos AFC y BFC ambos rectángulos en F. Observe que la suma de los ángulos ABC y CBF suman $180°$ y por tanto la medida del ángulo CBF es $180 - \beta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{CF}{AC} = \frac{h_2}{b}, \quad \text{triángulo } AFC \\ \operatorname{sen}(180° - \beta) &= \frac{CF}{CB} = \frac{h_2}{a}, \quad \text{triángulo } BFC \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(180° - \beta) = \operatorname{sen}\beta$ se tiene $b \operatorname{sen}\alpha = h_2 = a \operatorname{sen}\beta$ y

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \tag{4.8}$$

De las igualdades (4.7) y (4.8) se tiene la ley del seno.

Teorema. 4.4.1: Ley del seno

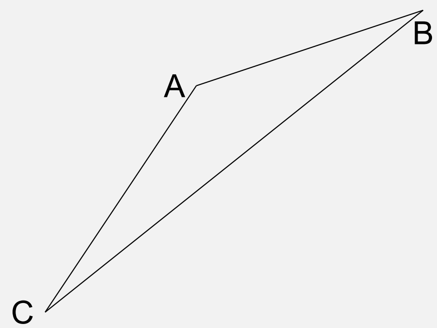
Considere el triángulo de vértices ABC y denote por A, B y C sus ángulos interiores respectivos siendo a la longitud del lado opuesto al ángulo A, b la longitud del lado opuesto al ángulo B y c la longitud del lado opuesto a C entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}.$$

Cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos se conoce como el caso ambiguo.
Si se dan, por ejemplo, el ángulo α, la longitud de AC y la longitud de BC entonces $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b \operatorname{sen}\alpha}{a}$. Pueden darse los siguientes casos:

- Si $\operatorname{sen}\beta > 1,$ entonces el caso es imposible y no hay solución.
- Si $\operatorname{sen}\beta = 1$ entonces el triángulo es rectángulo y hay una única solución.
- Si $\operatorname{sen}\beta < 1$ entonces hay dos ángulos uno en el primer cuadrante, sea este β_1 y otro en el segundo cuadrante, sea este β_2. El ángulo β_1 siempre es solución.
    - Si $\beta_2 + \alpha \geq 180°$ entonces β_2 no es un ángulo posible para el triángulo y existe una sola solución.
    - Si $\beta_2 + \alpha < 180°$ entonces β_2 n es un ángulo posible para el triángulo y existes dos triángulos distintos que satisfacen las condiciones dadas.

Ejemplo 4.4.1. Determine todos los valores del triangulo



Dados los valores correspondientes del triángulo $\triangle ABC$ inicialmente: $\measuredangle C = 20^0$, $\measuredangle B = 50^0$ y $c = 6$

Solución

Con respecto a los valores dados, podemos observar que se hace necesario usar la siguiente forma de la ley del seno:

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

con el objetivo de hallar el valor del ángulo b. Remplazando se obtiene la siguiente expresión:

$$b = \frac{6\sin(50^o)}{\sin(20^o)} = 13.43858468$$

Como la suma interna de los ángulos interiores a un triángulo en grados suman en total 180^o, podemos determinar el valor de A de la siguiente forma:

$$\measuredangle A = 180^o - \measuredangle C - \measuredangle B = 180^o - 20^o - 50^o = 110^o$$

Por último se determina el valor de a, en efecto aplicando la ley del seno correspondiente, se obtiene:

$$a = \frac{6\sin(110^o)}{\sin(20^o)} = 16.48486451$$

Ejercicios 52.

Usar la ley del seno para determinar todas las variables de los siguientes triángulos que tienen medidas, así:

1. $a = 3$, $b = 4$ y $\measuredangle C = 50^0$.
2. $b = 60$, $c = 35$ y $\measuredangle A = 80^o$.
3. $c = 23$, $\measuredangle B = 70^o$ y $\measuredangle A = 52^o$.
4. $\measuredangle A = 37.4^o$, $\measuredangle B = 29.5^o$ y $a = 90cm$.
5. $a = 90cm$, $b = 75cm$ y $\measuredangle A = 130.2^o$.

6. $a = 110cm$, $b = 70cm$ y $\measuredangle A = 120^o$.

7. Un árbol proyecta una sombra de 200 metros sobre una montaña hacia abajo, la montaña presenta un 20^o de inclinación con la horizontal y el ángulo de elevación del sol es de 60^o ¿Cuál es la altura del árbol?

8. Para encontrar la distancia aproximada del ancho de un río, un matemático selecciona dos puntos en la misma orilla del río A y B que están separados 300 metros. El matemático encoge un punto de referencia C, del otro lado del río y determina que $\measuredangle BAC = 85^o$ y $\measuredangle ABC = 55^o$. Calcule la distancia aproximada $\overline{AC}$.

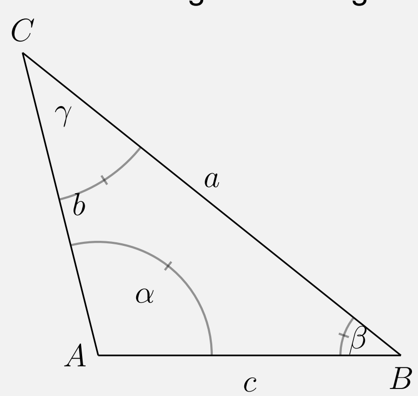
9. Para medir la altura de una montaña se toman dos puntos de referencia en la base de la montaña separados entre si 200 metros, que a cierta hora del día proyectaron una sombra de 32^o y 73^o.

4.5. Ley del coseno

La ley del coseno no es directamente aplicable en caso que se conozcan los tres lados de un triángulo.

Teorema. 4.5.1: Ley del coseno

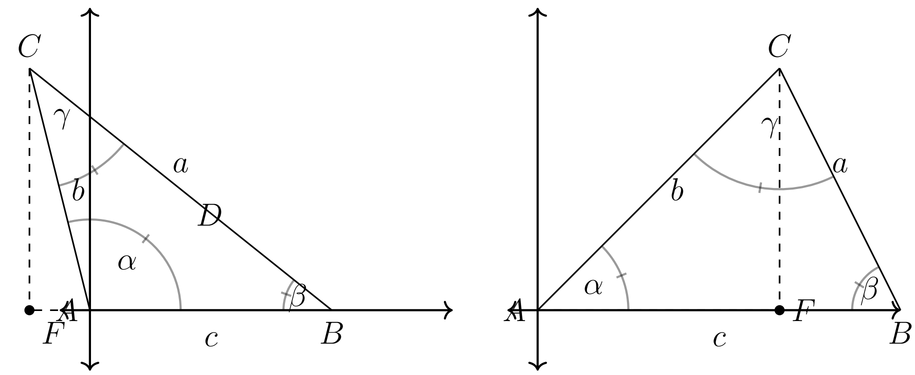
Considere el triángulo de la figura



Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dados dos lados y un ángulo comprendido entre ellos se cumple que el cuadrado del lado opuesto al ángulo dado es la suma de los cuadrados de las medidas de los lados que comprenden el ángulo menos el doble producto de dichos lados y el coseno del ángulo entre ellos.
Considere el triángulo ABC, ubique el vértice A en el origen del sistema de coordenadas de tal manera que el lado $\overline{AB}$ quede sobre la parte positiva del eje x. Ver Figura 4.9.



a) Angulo α obtuso b) Angulo α agudo

Figura 4.8: Posición de ángulos en la ley del coseno

Las coordenadas del punto A son $(0,0)$, las coordenadas del punto B son $(C,0)$ y las coordenadas del punto C son $(b\cos\alpha, b\,\text{sen}\,\alpha)$. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$[d(A,B)]^2 = (c\cos\alpha - c)^2 + (b\,\text{sen}\,\alpha - 0)^2$$

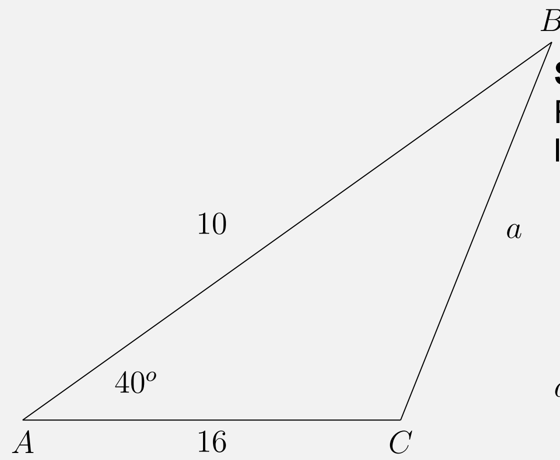
Como $d(A,B) = a$ se tiene

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\,\text{sen}^2\,\alpha \\
a^2 &= b^2(\text{sen}^2\,\alpha + b^2\cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}$$

El mismo análisis puede hacerse para el resto de los ángulos, colocando el vértice correspondiente en el origen y uno de los lados sobre la parte no negativa del eje x.

Ejemplo 4.5.1. Ley del coseno

Determine el lado a del siguiente triángulo con las medidas mostradas.



Solución
Remplazando en la formula de la ley de los cosenos se obtiene:

$$a^2 = 10^2 + 16^2 - 2(10)(16)\cos(40^o)$$

$$a^2 = 110.8658$$

$$a = \sqrt{110.8658} = 10.53$$

Ejercicios 53.

Determine el lados solicitado del triángulo, usando la ley del coseno, con respecto a las siguientes medidas $(\triangle ABC)$:

1. $b = 10cm$, $c = 20cm$ y $\measuredangle A = 35^o$. Hallar a.

2. $b = 10cm$, $c = 18cm$ y $\measuredangle A = 120^o$. Hallar a.

3. $b = 3cm$, $c = 4cm$ y $\measuredangle A = 53^o$. Hallar a.

4. $b = 80cm$, $c = 100cm$ y $\measuredangle A = 45^o$. Hallar a.

5. Juan sale de paseo y tiene curiosidad de medir el lago de su finca que se encuentra en las Llanadas, el observa dos cercas que se encuentran en línea recta hasta los extremos del lago, Juan determina las siguientes medidas: una de las cercas mide $356m$, la otra $480m$ y el ángulo entre ellas es de 38^o ¿Cuál es la medida aproximada del lago entre sus extremos?

6. Si un avión vuela a velocidad constante a $300\frac{Km}{h}$ durante $1h$ y $30min$ en línea recta. Posteriormente hace una corrección de su viaje desviándose 15^o a la derecha de su trayectoria inicial y vuela $2h$ en esta nueva trayectoria. ¿Qué tan alejado esta de su posición inicial?

7. Cristian y Samuel vuelan cada uno una cometa, Cristian suelta todo el hilo que tiene $(100m)$ y Samuel también suelta todo su hilo de $(45m)$. Al unir los puntos de tensión de las cometas se determina un ángulo de 25^o. ¿Qué distancia separa a las cometas?

8. Un avión que se encuentra entre dos islas determina los ángulos de depresión en un determinado punto de su vuelo el cual lleva una altura de $3.500m$, el primer ángulo es de 33^o y el segundo de por detrás del avión es de 52^o ¿Qué distancia separa a las dos islas?

Capítulo 5

Funciones logarítmicas y exponenciales

5.1. Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios. Tienen la forma

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

donde p y q son polinomios. El máximo dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales menos todos aquellos números reales que hacen cero al denominador. El rango correspondiente son todos los números reales.
Existen rectas a las cuales las gráficas de las funciones racionales se acercan cuando x se hace grande en valor absoluto o cuando x se aproxima a ciertos valores. Se llaman **asíntotas** y se clasifican de la siguiente manera.

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = a$, donde a es un número que hace cero al denominador, es decir, $Q(a) = 0.$ La gráfica de una función racional nunca cruza una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Si P y Q tienen el mismo grado y a_n es el coeficiente principal de P y b_n es el coeficiente principal de Q entonces la asíntota horizontal es $y = \frac{a_n}{b_n}$. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la asíntota horizontal es $y = 0$, es decir, el eje $x.$

Asíntotas oblicuas: Si el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador, entonces se hace la división $P(x) \div Q(x)$ obteniéndose un cociente y un residuo. La expresión en el cociente es la asíntota oblicua, es decir, Si $P(x) = Q(x)A(x) + R(x),$ donde $A(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el residuo entonces la asíntota es $y = A(x)$ y

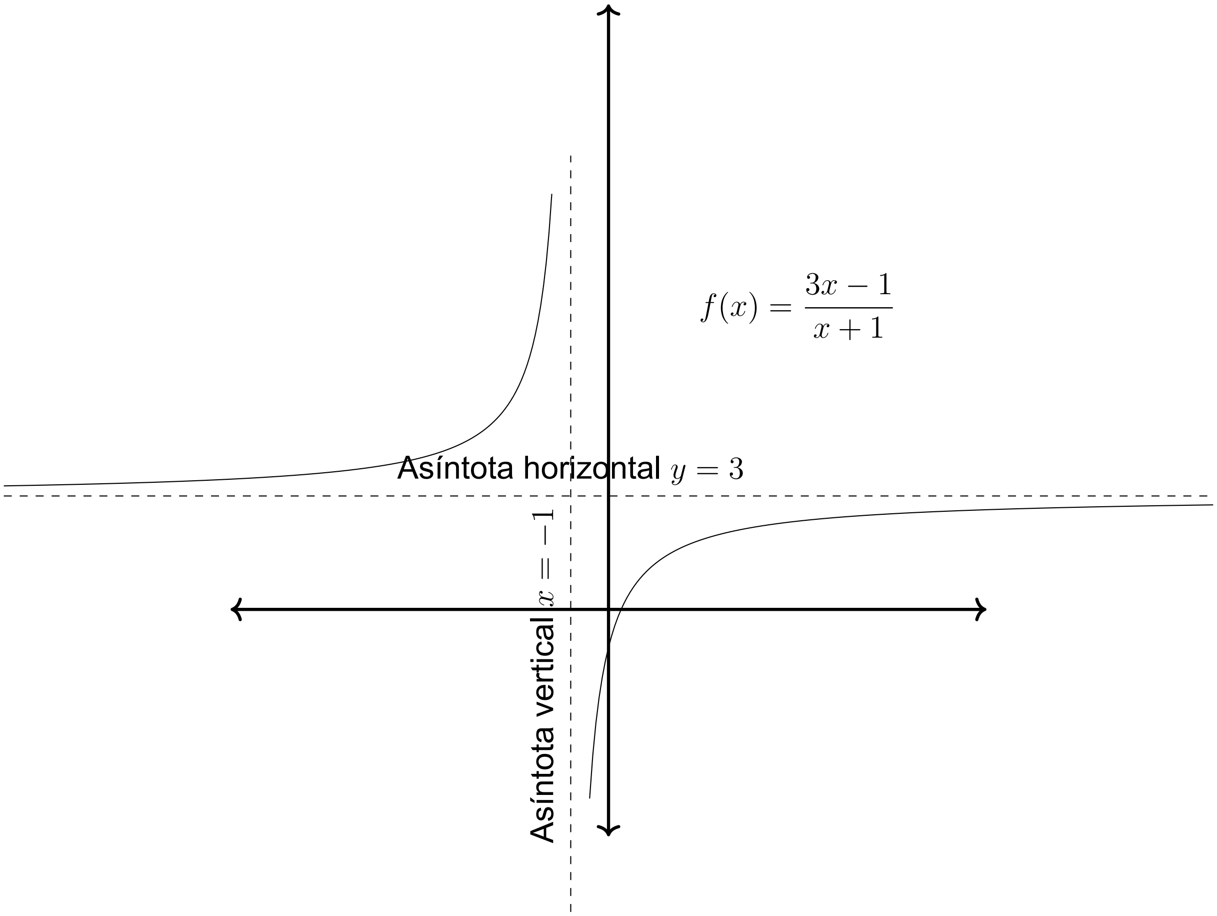
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{Q(x)A(x) + R(x)}{Q(x)} \\ &= \frac{Q(x)A(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} \\ &= A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.1. Asíntotas

Halle el máximo dominio de la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$. Trace su gráfica y dibuje sus asíntotas.

Solución

Para hallar el máximo dominio primero se hallan los puntos donde el denominador es cero. En este caso resolvemos la ecuación $x+1 = 0$. Esta ecuación tiene por solución $x = -1$. Por tanto el dominio son todos los números reales menos el número -1. Esto puede expresarse como $\mathbb{R} - \{-1\}$ o como $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Tiene una asíntota vertical en $x = -1$. Como el grado del numerador es igual al del denominador (ambos polinomios tienen grado 1) el cociente $y = \frac{3}{1} = 3$ da una asíntota horizontal.

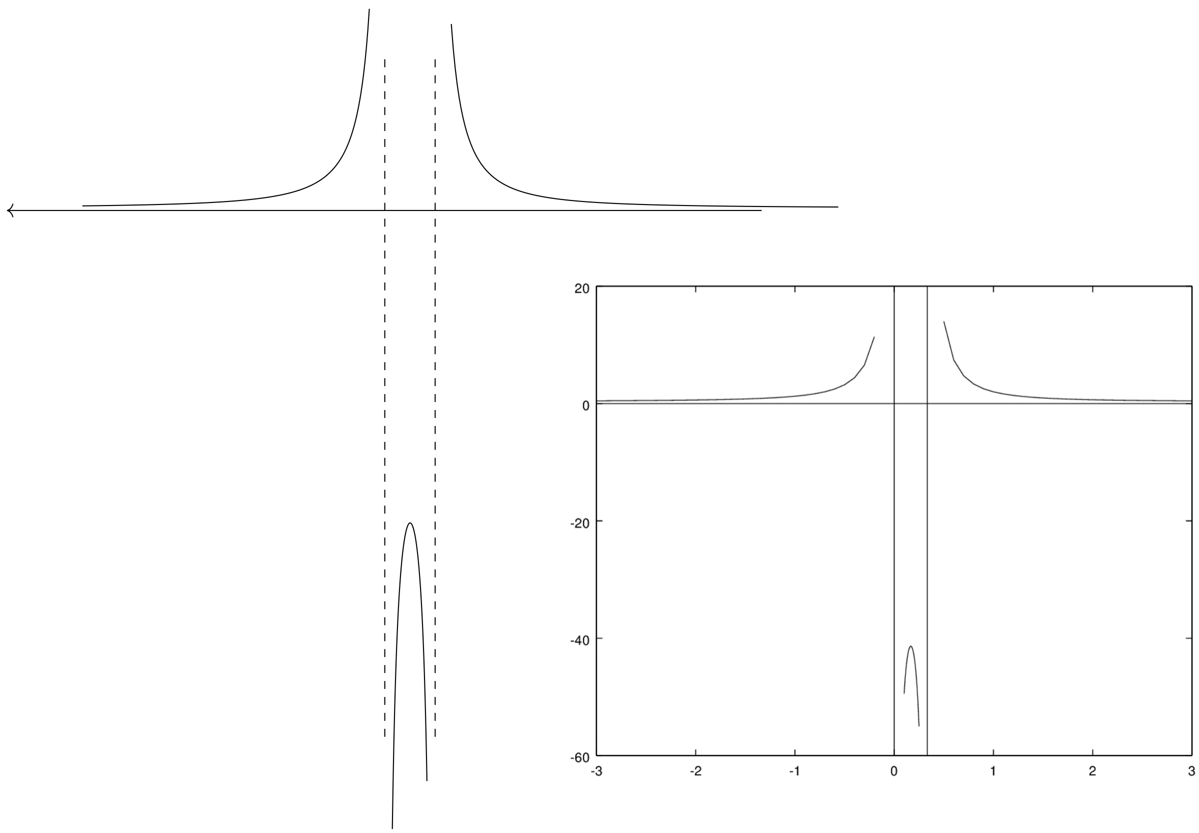


Ejemplo 5.1.2. Asíntotas

Halle el máximo dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 7}{6x^2 - 2x}$. Trace su gráfica y dibuje sus asíntotas.

Solución

Como $f(x)$ es una función racional su máximo dominio está constituido por todos los números reales excepto los números que hacen que el denominador sea cero. Para hallar estos números resolvemos la ecuación $6x^2 - 2x = 0$. Factorizando se obtiene $6x^2 - 2x = 2x(3x - 1) = 0$. De donde $2x = 0$ o $3x - 1 = 0$. Esto produce dos soluciones $x = 0/2 = 0$ y $x = 1/3$. Por tanto el dominio son todos los números reales excepto los números 0 y $\frac{1}{3}$ lo cual se escribe como $\mathbb{R} - \{0, \frac{1}{3}\}$. También puede escribirse como $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. Las asíntotas verticales son las rectas $x = 0$ y $x = 1/3$. Como el grado del numerador es igual al del denominador, tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

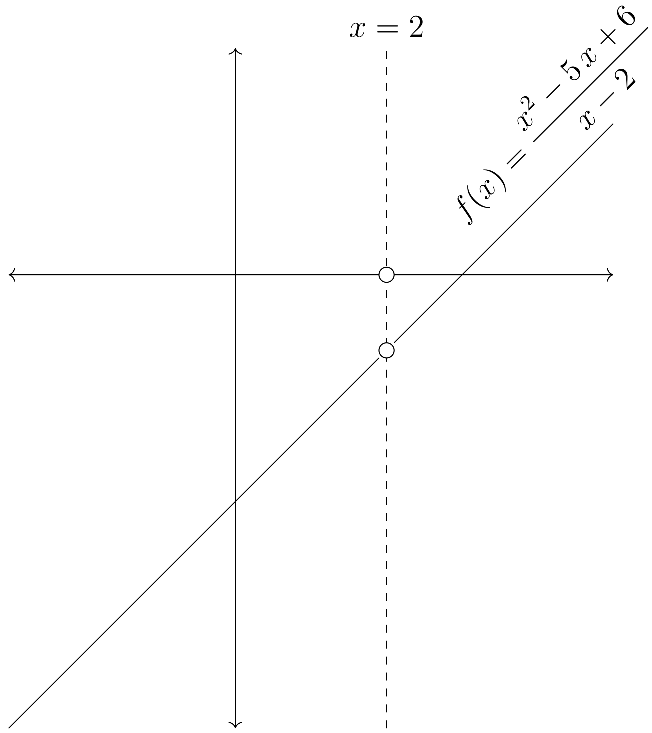


Ejemplo 5.1.3. Asíntotas

Halle el máximo dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 2}$. Trace su gráfica y dibuje sus asíntotas verticales. Grafique la función $g(x) = x - 3$ en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué diferencia hay con la función f?

Solución

El denominador se hace cero en $x = 2$ y su dominio son los números reales menos el 2, es decir, $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. La asíntota vertical está en $x = 2$.



La gráfica de $g(x) = x - 3$ es prácticamente la misma que la de f, la diferencia está en que la imagen de f en 2 ($f(2)$) no existe y la imagen de g en 2 ($g(2)$) si existe. Además

$$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 2} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-2}$$

lo cual siempre puede simplificarse a $f(x) = x - 3$ siempre que $x \neq 2$. Por tanto $f(x) = g(x)$ siempre que $x \neq 2$.

Ejemplo 5.1.4. Asíntotas

Halle el máximo dominio de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^3 - x^2 - 6x}$ y sus asíntotas.

Solución

El máximo dominio son todos los números reales menos aquellos donde el denominador es cero. Para hallar estos números resolvemos la ecuación $x^3 - x^2 - 6x = 0$. Se observa que x es un factor común, por tanto se factoriza este primero,
$x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6)$. Luego se examina para ver si se puede factorizar $x^2 - x - 6$. Se buscan dos números que multiplicados den -6 pero sumados den -1. Estos son -3 y 2. Así $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. La factorización completa del denominador original es

$$x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2).$$

Por tanto las soluciones de $x^3 - x^2 - 6x = 0$ vienen dadas por

$$x(x-3)(x+2) = 0$$

o equivalentemente

$$x = 0, \quad \text{o } x - 3 = 0 \text{ o } x + 2 = 0.$$

De donde se concluye que el máximo dominio es $\mathbb{R} - \{0, 3, -2\}$. Las asíntotas verticales están en $x = 0, x = 3, x = -2$. Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

Ejemplo 5.1.5. Asíntotas

Halle el máximo dominio de $f(x) = \dfrac{4x^3 - 25x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$. Halle sus asíntotas.

Solución

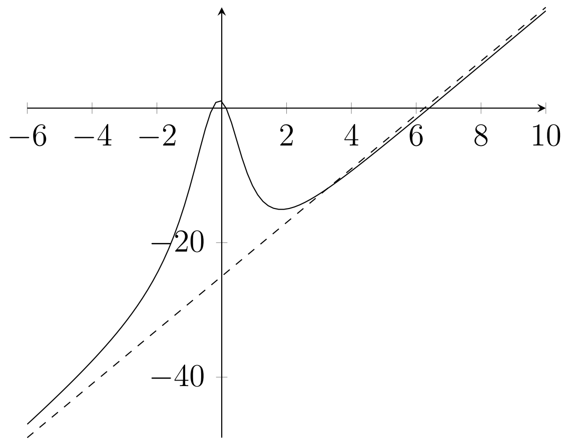
Observe que el denominador nunca se hace cero, ya que $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. Por tanto el máximo dominio son todos los números reales. Como el grado del numerador es mayor en uno al grado del denominador se tiene una asíntota oblicua que se obtiene dividiendo los polinomios

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; 4x^3 - 25x^2 - 4x \;\; + 1\big) : \big(x^2 + 1\big) = 4x - 25 + \dfrac{-8x + 26}{x^2 + 1} \\
\underline{-\,4x^3 \qquad\qquad - 4x} \\
\qquad\quad -\,25x^2 - 8x \;\; + 1 \\
\qquad\quad \underline{\;\;25x^2 \qquad\quad + 25} \\
\qquad\qquad\qquad -\,8x + 26
\end{array}$$

$$\underbrace{4x^3 - 25x^2 - 4x + 1}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 + 1)}_{Q(x)}\underbrace{(4x - 25)}_{A(x)} + \underbrace{(-8x + 26)}_{R(x)}.$$

$$\frac{4x^3 - 25x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(4x - 25)}{x^2 + 1} + \frac{-8x + 26}{x^2 + 1}$$

$$\frac{4x^3 - 25x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} = 4x - 25 + \frac{-8x + 26}{x^2 + 1}$$



En esta guía graficar las funciones respectivas para comparar. Click aquí o consulte el código QR al final del libro.

Ejemplo 5.1.6. Asíntotas

Halle el máximo dominio de $\dfrac{x^4-2x^2-4x+1}{x^3-2x^2-x+2}$. Halle sus asíntotas.

Solución

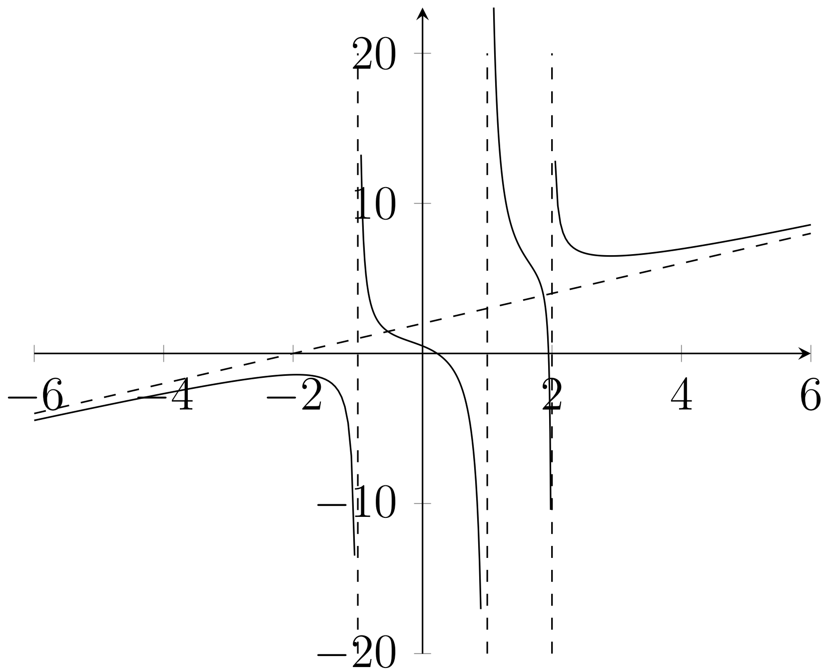
Usando factorización por agrupación:

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-x+2 &= (x^3-2x^2)+(-x+2) = x^2(x-2)-1(x-2) \\ &= (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Así que el denominador es cero si $(x-2)(x^2-1)=(x-2)(x-1)(x+1)=0$ El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$. Las asíntotas verticales son $x=-1, x=1$ y $x=2$. Como el grado del numerador es mayor en uno al del denominador posee una asíntota oblicua. La división

$$\begin{array}{l} \big(\;x^4 \qquad\quad -2x^2-4x+1\big) : \big(x^3-2x^2-x+2\big) = x+2+\dfrac{3x^2-4x-3}{x^3-2x^2-x+2} \\ \underline{-x^4+2x^3\quad +x^2-2x} \\ \qquad\quad 2x^3\quad -x^2-6x+1 \\ \qquad\;\; \underline{-2x^3+4x^2+2x-4} \\ \qquad\qquad\qquad 3x^2-4x-3 \end{array}$$

Genera la asíntota oblicua $y=x+2$. Las asíntotas se muestran como lineas punteadas en la siguiente figura.



Ejercicios 54.

1. Hallar intersecciones con los ejes, dominio y rango de función:

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

   Determinar el comportamiento de la función cuando se aproxima a dos.

2. Hallar intersecciones con los ejes dominio y rango de la función:

$$y = \frac{x}{1-x}$$

3. Determinar el comportamiento de la función del ejercicio anterior cuando x se aproxima a 1.

Graficar las siguientes funciones:

4. $y = \dfrac{1}{x+1}$

5. $y = \dfrac{2}{1-x}$

6. $y = \dfrac{3x-3}{x+2}$

7. $y = \dfrac{x}{1-x}$

8. $y = \dfrac{x^2-x-4}{x-1}$

9. $y = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}$

10. Se administra un medicamento a un paciente, y se vigila la concentración de dicho medicamento en la sangre. En el tiempo $t \geq 0$ (En horas desde que se aplico el medicamento), la concentración (en mg/L), está dada por: $c(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$ Indicar:

(a) ¿Qué ocurre con la concentración después de muchas horas?

(b) ¿Cuánto tarda al concentración en llegar a 2 mg/L?

5.2. Descomposición en fracciones parciales

Se comienza recordando que una función racional es una expresión que se compone por un cociente de dos polinomios. Si el polinomio en el numerador tiene grado mayor o igual que el grado del polinomio en el denominador decimos que la función racional es impropia. Cuando el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio en el numerador decimos que la función racional es propia.

Ejemplo 5.2.1. Funciones racionales

Las siguientes son funciones racionales

1. $R(x) = a$, a constante
2. $R(x) = \dfrac{1}{x}$, propia
3. $R(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+\pi}$, propia
4. $R(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+x+1}$, impropia.

Usando el algoritmo de la división puede probarse que toda función racional impropia puede expresarse como la suma de un polinomio más una función racional propia. Es decir, si $S(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios con grado de P mayor o igual que el grado de Q entonces existe un polinomio C y un polinomio R tal que $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$ donde el grado de R es menor que el grado de Q. Dividiendo por $Q(x)$ se obtiene

$$S(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Todo polinomio en $\mathbb{R}$ puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos, irreducibles en $\mathbb{R}$, es decir, si ax^2+bx+c es un factor cuadrático que ocurre en el polinomio siempre podemos escogerlo de tal manera que $b^2-4ac<0$. Algunos de estos factores lineales o cuadráticos pueden repetirse o no.

Ejemplo 5.2.2. Factorización de polinomios

Se presentan algunos polinomios con factorizaciones en $\mathbb{R}$ y algunos irreducibles en $\mathbb{R}$ (sin factorizaciones en $\mathbb{R}$.)

1. $P(x) = x^2 - 4 = (x-1)(x+1)$
2. $P(x) = x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
3. $P(x) = x^3 - \dfrac{23\,x^2}{4} + \dfrac{31\,x}{4} - 3 = (x-4)\,(x-1)\,\left(x-\frac{3}{4}\right)$
4. $P(x) = x^2 + x + 1$, irreducible en $\mathbb{R}$.

Una descomposición en fracciones parciales de una función racional propia es la descomposición en una suma de funciones racionales propias donde el denominador de cada sumando es una potencia de un factor lineal o un factor cuadrático irreducible que ocurre en la factorización del denominador de la función racional original.

Ejemplo 5.2.3. Fracciones parciales

Algunas descomposiciones en fracciones parciales

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Podemos asumir entonces que el denominador de una función racional está factorizado en factores lineales de la forma $(ax+b)^n$ y cuadráticos de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, donde $b^2 - 4ac < 0$.
La forma de la descomposición en fracciones parciales es como sigue, por cada factor de la forma $(ax+b)^n$ en el denominador se agrega a la suma

$$\frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$

Note que si $n = 1$ solo se agrega el término $\frac{a_1}{ax+b}$. Por cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$ se agrega a la suma

$$\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bc+c} + \frac{a_2x+b_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{a_mx+b_m}{(ax+bx+c)^m}.$$

Los coeficientes que aparecen en las expresiones deben determinarse, lo cual haremos más adelante.

Ejemplo 5.2.4. Fracciones parciales

Hallar la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función racional

$$f(x) = \frac{x}{x(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)}.$$

Solución

La descomposición tiene la forma

$$f(x) = \frac{x}{x(x-1)(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{b_1}{x-2} + \frac{b_2}{(x-2)^2} + \frac{c_1x+c_2}{x^2+x+1}.$$

Ejemplo 5.2.5. Fracciones parciales

Hallar la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-4)\ (x-2)^2\, x^3\, (x^2+x+1)^3}.$$

Solución

$$f(x) = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{f}{x-4}+\frac{g}{x-2}+\frac{h}{(x-2)^2}+\frac{ix+k}{x^2+x+1}+\frac{lx+n}{(x^2+x+1)^2}+\frac{ox+p}{(x^2+x+1)^3}.$$

Ahora explicaremos el proceso para calcular los coeficientes.

- Escriba la forma general de la descomposición en fracciones parciales.
- Multiplique ambos lados por el denominador de la función racional original.
- Simplifique, agrupe términos semejantes y factorice la potencia común en cada grupo de términos semejantes.
- Se igualan los coeficientes de los polinomios que quedan a la derecha y a la izquierda basados en la igualdad de polinomios. Dos polinomios son iguales si potencias iguales de la variable tienen los mismos coeficientes. Cuando una potencia no aparece, su coeficiente es cero.
- Resuelva el sistema de ecuaciones resultante para calcular los coeficientes.

Ejemplo 5.2.6. Fracciones parciales

Halle la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Solución
La descomposición tiene la forma

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}(x-1)(x-2) = \frac{a}{x-1}(x-1)(x-2) + \frac{b}{x-2}(x-1)(x-2)$$

$$1 = a(x-2) + b(x-1)$$

$$1 = ax - 2a + bx - b = (a+b)x - (2a+b)$$

La igualdad de polinomios da

$$a + b = 0 \tag{5.1}$$

$$-(2a+b) = 1 \tag{5.2}$$

El cual tiene por solución $a = -1$ y $b = 1$. La descomposición en fracciones parciales es entonces

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Ejemplo 5.2.7. Fracciones parciales

Halle la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$.

Solución
La estructura de la descomposición es

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)}x^2(x^2+1) = \frac{a}{x}x^2(x^2+1) + \frac{b}{x^2}x^2(x^2+1) + \frac{cx+d}{x^2+1}x^2(x^2+1).$$

$$1 = ax(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)x^2$$

$$1 = c\,x^3 + a\,x^3 + d\,x^2 + b\,x^2 + a\,x + b$$

$$1 = (c+a)\;x^3 + (d+b)\;x^2 + a\,x + b$$

La igualdad de polinomios da las ecuaciones

$$c + a = 0$$

$$d + b = 0$$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

Se tienen las soluciones $a = 0, b = 1$, $c = 0$ y $d = -1$. Por tanto la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0x + (-1)}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

El propósito del siguiente ejemplo es ilustrar cuan dispendioso puede ser hallar las fracciones parciales. En estos caso el software de cálculo simbólico puede ser de gran ayuda. Primero se ilustrará que implicaría resolverlo manualmente y luego se muestra como usar WxMaxima para resolver el problema.

Ejemplo 5.2.8. Fracciones parciales

Hallar la descomposición en fracciones parciales de

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-4)\,(x-2)^2\,x^3\,(x^2+x+1)^3}.$$

Solución

La forma de la descomposición es

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{f}{x-4} + \frac{g}{x-2} + \frac{h}{(x-2)^2} + \frac{ix+k}{x^2+x+1} + \frac{lx+n}{(x^2+x+1)^2} + \frac{ox+p}{(x^2+x+1)^3}.$$

Al multiplicar por el denominador de $f(x)$ a ambos lados y simplificar se obtiene

$$\begin{aligned}3x+1 = {} & (g+e+d+a)\,x^{11} + (h-6\,g+f-3\,e-d+b-5\,a)\,x^{10} \\ & + (i-6\,h+7\,g-f-4\,e-2\,d+c-5\,b+2\,a)\,x^9 + \\ & (j-7\,i+7\,h+2\,g-6\,f-5\,e-5\,d-5\,c+2\,b+3\,a)\,x^8 + \\ & (k-7\,j+13\,i+2\,h+13\,g-17\,f+12\,e+2\,d+2\,c+3\,b+22\,a)\,x^7 \\ & + (l-8\,k+13\,j-4\,i+13\,h-16\,g-22\,f+23\,e+7\,d+3\,c+22\,b-a)\,x^6 + \\ & (-8\,l+20\,k-4\,j+4\,i-16\,h-12\,g-21\,f+31\,e+13\,d+22\,c-b-15\,a)\,x^5 + \\ & (20\,l-16\,k+4\,j-16\,i-12\,h-16\,g-11\,f+18\,e+8\,d-c-15\,b-44\,a)\,x^4 + \\ & (-16\,l-16\,j-16\,h-4\,f+8\,e+4\,d-15\,c-44\,b-28\,a)\,x^3 + \\ & (-44\,c-28\,b-16\,a)\,x^2 + (-28\,c-16\,b)\,x-16\,c\end{aligned}$$

La igualdad de polinomios nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
g+e+d+a &= 0\\
h-6\,g+f-3\,e-d+b-5\,a &= 0\\
i-6\,h+7\,g--4\,e-2\,d+c-5\,b+2\,a &= 0\\
j-7\,i+7\,h+2\,g-6\,f-5\,e-5\,d-5\,c+2\,b+3\,a &= 0\\
k-7\,j+13\,i+2\,h+13\,g-17\,f+12\,e+2\,d+2\,c+3\,b+22\,a &= 0\\
l-8\,k+13\,j-4\,i+13\,h-16\,g-22\,f+23\,e+7\,d+3\,c+22\,b-a &= 0\\
-8\,l+20\,k-4\,j+4\,i-16\,h-12\,g-21\,f+31\,e+13\,d+22\,c-b-15\,a &= 0\\
20\,l-16\,k+4\,j-16\,i-12\,h-16\,g-11\,f+18\,e+8\,d-c-15\,b-44\,a &= 0\\
-16\,l-16\,j-16\,h-4\,f+8\,e+4\,d-15\,c-44\,b-28\,a &= 0\\
-44\,c-28\,b-16\,a &= 0,\\
-28\,c-16\,b &= 3\\
-16\,c &= 1
\end{aligned}$$

cuyas soluciones

$$a=\frac{79}{256},b=-\frac{5}{64},c=-\frac{1}{16},d=\frac{13}{2370816},e=\frac{19}{5488},f=-\frac{1}{784},g=-\frac{2890}{9261},$$
$$h=-\frac{317}{1323},i=-\frac{82}{441},j=-\frac{32}{441},k=-\frac{1}{21},l=\frac{1}{21}$$

producen la descomposición.

$$\frac{-\frac{2890\,x}{9261}-\frac{317}{1323}}{x^2+x+1}+\frac{-\frac{82\,x}{441}-\frac{32}{441}}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{\frac{1}{21}-\frac{x}{21}}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{79}{256\,x}-$$
$$\frac{5}{64\,x^2}-\frac{1}{16\,x^3}+\frac{19}{5488\,(x-2)}-\frac{1}{784\,(x-2)^2}+\frac{13}{2370816\,(x-4)}$$

Podemos hallar las fracciones parciales en WxMaxima directamente, la instrucción a utilizar es

```
partfrac(expresión,variable)
```

en donde `expresión` representa la expresión a descomponer en fracciones parciales y `variable`, la variable con respecto a la que se hará descomposición en fracciones parciales.

- La descomposición del Ejemplo 5.2 puede obtenerse con

```
partfrac( 1/((x-1)*(x-2)), x);
```

- La descomposición del Ejemplo 5.2 puede obtenerse con

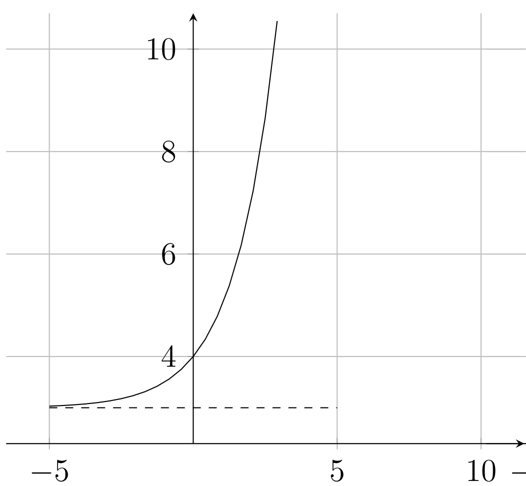
```
partfrac(1/(x^2*(x^2+1,x);
```

- La descomposición del Ejemplo 5.2 puede obtenerse con

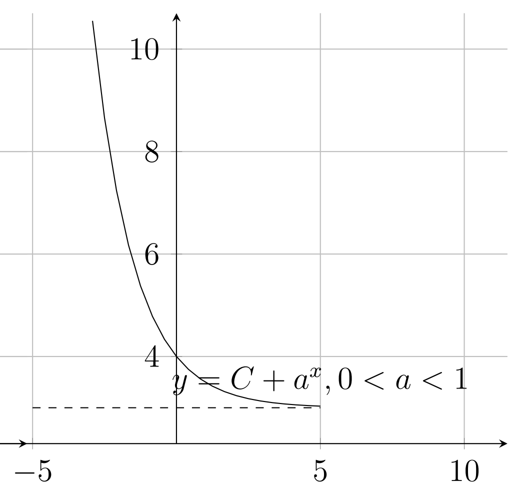
```
partfrac((3*x+1)/((x-4)*(x-2)^2*x^3*(x^2+x+1)^3),x);
```

5.3. Funciones exponenciales

La función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$ donde a es positivo y distinto de 1. Su dominio es el conjunto de todos los números reales y su rango es el conjunto de los números positivos. Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Para C constante la función $f(x) = C + a^x$ tiene una asíntota horizontal en $y = C$.



(a) Gráfica de la función exponencial para $a > 1$



(b) Asíntota horizontal para $y = C + a^x$ si $0 < a < 1$

A menudo en otras ciencias como la física, biología, economía entre otras aparecen expresiones como la siguiente $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, la cual requiere un análisis pertinente para su interpretación.
Con respecto al álgebra de las funciones exponenciales, se siguen comportando con las mismas propiedades de la potenciación.

Ejercicios 55.
Determinar si las siguientes expresiones son funciones exponenciales o no (Justifique su respuesta):

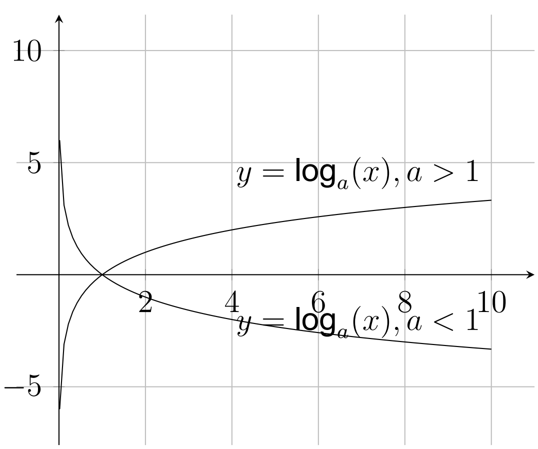
1. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$
2. $y = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$
3. $y = 9^{2x}$
4. $f(x) = 1^x$
5. $y = e^x$
6. $f(x) = 10^x$

Hallar el dominio, rango y gráfica de las siguientes funciones:

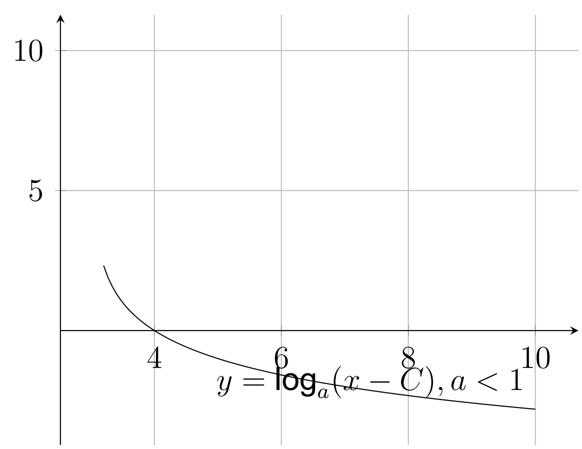
7. $y = 2^x$
8. $y = 2^{-x}$
9. $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
10. $y = 1 + 3^x$
11. $y = 3^{1-x} - 1$

5.4. Funciones logarítmicas

La función logarítmica tiene la forma $f(x) = \log_a x$ donde a es positivo y distinto de 1. Su dominio es el conjunto de todos los números reales positivos y su rango es el conjunto de todos los reales. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Para C constante la función $f(x) = \log_a(x - C)$ tiene una asíntota vertical en $X = C$.



(c) Gráficas de la función logarítmica para $a > 1$ y $a < 1$



(d) Asíntota horizontal para $y = \log_a(x - C)$

Ejercicios 56.
Expresar las siguientes ecuaciones en forma exponencial:

1. $\log_5 25 = 2$
2. $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$
3. $\ln 3 = x$
4. $\ln(x + 1) = 3$
5. $\ln(1 - y^2) = 2$
6. $\ln(x - 32) = 4$

Hallar el dominio, rango y gráfica de las siguientes funciones:

7. $f(x) = \log_2 x$
8. $f(x) = -\log_3 x$
9. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$
10. $f(x) = \log_3 x^2$
11. $y = \ln(1 - x^2)$
12. $y = 2 + \log(\frac{1}{x})$

5.5. Funciones hiperbólicas

Hasta ahora se han estudiado algunos aspectos de las funciones trigonométricas. El seno y el coseno son la proyección de un punto sobre el círculo unitario en el eje y y el eje x respectivamente. Podría hacerse el mismo análisis tomando como base la hipérbola $x^2 - y^2 = 1.$ Las funciones que resultan de este análisis se llaman seno hiperbólico, notado por senh, y coseno hiperbólico notado por cosh y definidas como sigue

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La interpretación geométrica del seno y coseno hiperbólicos se ilustran en la Figura 5.1.

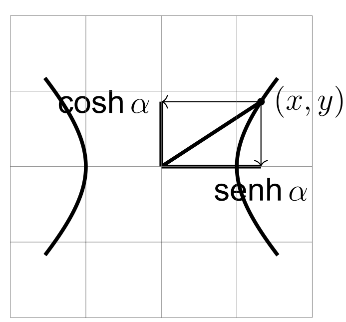


Figura 5.1: Seno y coseno hiperbólicos

De manera análoga a las funciones trigonométricas se definen

$$\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\text{senh}}{\text{cosh}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\text{senh}\, x} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0 \\
\text{sech}\, x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\
\text{csch}\, x &= \frac{1}{\text{senh}\, x} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

Se tienen también algunas identidades básicas entre las funciones hiperbólicas, estas satisfacen las siguientes propiedades:

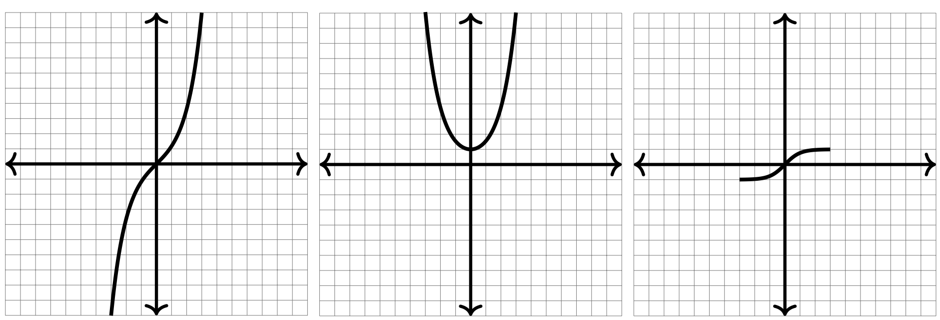
$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= 1 && (5.3) \\
1 - \tanh^2 x &= \text{sech}\,^2 x && (5.4) \\
\coth^2 x - 1 &= \text{csch}\,^2 x && (5.5) \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y && (5.6) \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y && (5.7) \\
\cosh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x && (5.8) \\
\cosh(2x) &= \cosh^x + \sinh^2 x && (5.9) \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1) && (5.10) \\
\text{senh}^2 x &= \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1) && (5.11)
\end{aligned}$$

Se mostrarán solo algunas de las identidades y las demás quedan como ejercicio.

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^x)^2 + 2e^{x-x} + (e^{-x})^2 - ((e^x)^2 - 2e^{x-x} + (e^{-x})^2)}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1-\tanh^2 x &= 1-\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)^2 = 1-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\overbrace{\cosh^2 x-\sinh^2 x}^{=1}}{\cosh^2 x}\\
&= \left(\frac{1}{\cosh x}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y =\\
&= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\\
&= \frac{e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}}{4}+\frac{e^xe^y+e^{-x}e^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^{-y}}{4}\\
&= \frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y).
\end{aligned}
$$



(a) Seno hiperbólico (b) Coseno hiperbólico (c) Tangente hiperbólica

Figura 5.2: Gráfica de las funciones hiperbólicas

Ejercicios 57.

1. Determinar:

   $E = \tanh(\ln x) - \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

2. Halle el equivalente de:

   $\cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$

3. Demostrar:

   a) $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh x \pm \sinh x$ con $n \in \mathbb{Z}$

   b) $\tanh x = \dfrac{\sinh 2x}{1+\cosh 2x}$

4. Sabiendo que: $\sinh x = 0,8$

   Determinar:

   $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$

5. Demostrar:

   $\sinh^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \cosh^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right) =$

$\tanh^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

6. Determinar:
   $\cosh(\ln 1) - \frac{4}{3}\sinh(\ln 2)$

5.5.1. Modelos de regresión exponenciales $y = ka^x$

Observe que aplicando logaritmo natural a ambos lados de $y = ka^x$ se obtiene

$$\ln y = \ln(ka^x) = \ln k + \ln(a^x) = \ln k + x(\ln a).$$

Por tanto para un conjunto de datos que sigue un modelo de la forma $y = ka^x$ la gráfica de logaritmo de x contra el logaritmo de y da una linea recta que intersecta al eje y en $\ln k$ y tiene pendiente $(\ln a)$.

Ejercicios 58.

1. Identifique que tipo de función utilizar para el problema y resuélvalo.

   Una población de aves cuenta inicialmente con 30 individuos y se triplica cada 4 años. ¿Cuál es la función que representa el crecimiento de la población de aves? ¿Cuántas aves hay después de 8 años? ¿ Después de cuánto tiempo la población de aves será de 800 individuos?

2. Se administra 50 miligramos de cierto médicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas. ¿Cuál es la formula de la función que representa la cantidad del medicamento restante en el torrente sanguíneo del paciente? ¿Cuántos miligramos del medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas? ¿Después de cuento tiempo quedará solo un miligramo de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente?

3. Un cultivo tiene 120 bacterias inicialmente, y en cada hora esta cantidad se duplica. a) Encontrar la función que modele el número de bacterias después de t horas. b) Encontrar la cantidad de bacterias después de 15 horas.

4. El azúcar se disuelve en el agua, siguiendo la formula $A(t) = ce^{-kt}$; donde c y k son constantes. $A(t)$ es el azúcar restante o no disuelta. En un recipiente en el que inicialmente se colocan 30 kilogramos de azúcar, esta cantidad se reduce a 10 kg luego de 4 horas. Trazar la gráfica de azúcar no disuelta en función del tiempo. $e =$ número de Euler.

5. Un elemento radioactivo se desintegra a gran velocidad según la función $m(t) = 10e^{0.02t}$, siendo $m(t)$ la cantidad de masa restante después de t días. Encontrar la masa en el tiempo $t = 0$. Encontrar la masa después de 15 días.

6. Una variedad de peces fue introducida en el Océano Ártico. Se estima que cada 3 meses, esta población se duplica. Un cardumen inicia con 100 peces; y el tiempo t (en meses) que se necesita para que dicho cardumen crezca a P peces se establece por la función:

$$t = 3\frac{\log\left(\frac{p}{100}\right)}{\log_2 p}$$

Calcular el tiempo necesario para que el cardumen crezca a 2 millones de peces. ¿Cuál será el tamaño del cardumen luego de 18 meses?

7. La función de demanda de un producto está dada por $p = \dfrac{50}{\ln(q+1)}$. Siendo "p" el precio en miles de pesos, y "q" la cantidad demandada de productos. ¿Cuántos artículos serán demandados a un precio de 10 mil pesos?

Capítulo 6

Expresiones como modelos matemáticos

6.1. Expresiones como modelos matemáticos

Una expresión como modelo matemático se refiere a menudo a una ecuación o a una función que describe matemáticamente un fenómeno del mundo real, por ejemplo, la demanda de un producto en el mercado, el crecimiento o decrecimiento de una población determinada, la velocidad de una partícula en una determinada dirección, el grado de concentración de un producto químico, el costo en la reducción de emisión de gas carbónico al ambiente, entre otras situaciones que se puedan presentar, esto con el propósito de predecir, estimar o justificar el comportamiento de dicha situación.

Presentada una situación del mundo real, la primera tarea es formular un modelo matemático, para esto se deben identificar las variables independientes y dependientes, además de establecer hipótesis que simplifiquen la situación de tal forma que se pueda representar la situación, haciendo uso del conocimiento científico (matemáticas, física, química, etc..) mediante ecuaciones o procedimientos que relacionen las variables. En muchos de los casos se requiere recolectar datos para tabular y buscar mediante patrones una relación entre las variables.

En segundo lugar se hace uso de las herramientas matemáticas que se tenga y se halla una solución del problema matemático del modelo. Se interpretan estas soluciones en el mundo real para dar una predicción de lo que se podría plantear como solución y como parte final se pone a prueba en lo real con el fin de hacer comparaciones para ver si el modelo es efectivo, de lo contrario se debe replantear e iniciar el ciclo nuevamente.

Los modelos más comunes son:

- ✠ Modelos lineales.
- ✠ Modelos polinómicos.
- ✠ Modelos racionales.
- ✠ Modelos algebraicos.
- ✠ Modelos trigonométricos.
- ✠ Modelos exponenciales.
- ✠ Modelos logarítmicos.

Decimos que un modelo es lineal si la relación de y con x representado en el plano cartesiano es una linea recta, y esta puede ser expresada como:

$$y = f(x) = mx + b,$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada del punto de corte del eje y. Una característica de este comportamiento lineal es que crece a una tasa constante.

Ejemplo 6.1.1. Forma lineal

En biología se ha observado que los chirridos de los grillos presentan una relación casi lineal con la temperatura ambiente. Un grillo produce 120 chirridos cada minuto si la temperatura es 70^oC y 180^oC si la temperatura es de 27^oC. Encuentre una ecuación lineal que relacione la temperatura con los chirridos emitidos por el grillo cada minuto.

Solución
Determinemos la correspondencia de los datos que nos suministra la situación presentada.

x	$T(x)$
70	120
27	180

Como se manifiesta que la relación es casi lineal, entonces nos corresponde identificar la situación con la siguiente ecuación:

$$T(x) = mx + b$$

Determinemos el valor de m y el de b, esto es:

$$m = \frac{180 - 120}{27 - 70} = \frac{60}{-43} = -1.395$$

Ahora determinemos el valor de b
$120 = -1.395(70) + b$
$b = 217.674$
Así la ecuación es

$$T(x) = -1.395x + 217.674$$

Decimos que un modelo es polinomial si la relación de y con x presenta la forma:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

donde n es un número no negativo y los $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son constantes denominadas coeficientes del polinomio. De acuerdo al grado del polinomio se podrá seleccionar los polinomios cuadráticos si es de grado dos y cúbicos si es de grado tres.
Decimos que un modelo es racional si f es una razón entre dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$.
Decimos que un modelo es algebraico si presenta cualquier forma algebraica, como por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 5}}$$

Decimos que un modelo es trigonométrico, si en la expresión de f intervienen las funciones trigonométricas; estas son usadas para modelar situaciones que son periódicas o fenómenos repetitivos como las olas, la vibración de resortes o las ondas sonoras.
Una forma seria:

$$f(x) = 20 - 3.5 = \text{sen}\left[\frac{4\pi}{360}(2x + 50)\right]$$

.
Decimos que un modelo es exponencial si este tiene la forma $f(x) = b \cdot a^x$ donde b es una constante a es la base que debe ser positiva.
Un modelo logarítmico se caracteriza por presentar la forma $f(x) = \log_a x$, donde la base es a y debe ser positiva.

6.1.1. Porcentajes

Si A representa un cantidad de referencia y una cantidad a comparar, el porcentaje que B representa de A viene dado por $\frac{B}{A} \times 100$. Se representa usando el símbolo %.

Dada una cantidad A el n % de A es $A * \frac{n}{100}$. La forma decimal del porcentaje n % es $r = \frac{n}{100}$. Cuando el porcentaje está dado en forma decimal, basta multiplicar la cantidad por el porcentaje en forma decimal, es decir, Ar.

1. Halle la forma decimal del 5 %.

   Solución: $5\,\% = \frac{5}{100} = 0.05.$

2. La forma porcentual de $r = 0.125$.

   Solución: $r = 0.125 \times 100 = 12.5\,\%$

3. ¿Qué porcentaje de 20 es 5?

   La cantidad de referencia es 20 y la cantidad a comparar es 5, el porcentaje es entonces $\frac{5}{20} \times 100 = 25$. Es decir, 5 es el 25 % de 20.

4. Halle el 40 % de 72. El 40 % de 72 es $\frac{72 \times 40}{100} = 28.8.$

Ejemplo 6.1.2. Porcentaje

Un estudiante toma un curso de cálculo diferencial. Su profesor le ha explicado que su calificación final será dividida en 3 partes y que la nota mínima aprobatoria es 3.0. La primera parte y la segunda parte valdrán el 30 % de la nota final cada una y la última valdrá el 40 % de la nota final. Si la calificación de cada parte es de cero a cinco y en la primera parte tiene 3.0, en la segunda parte 2.5, cuál será la calificación mínima que debe obtener en la tercera parte para aprobar el curso?

Solución

Sea C la calificación en la tercera parte que se necesita obtener.
La contribución de la primera calificación a la calificación final es del 30 %, así que la primera parte se tiene $(3)(30\,\%) = 0.9$
La contribución de la segunda calificación a la calificación final es del 30 %, así que la segunda parte se tiene $(2.5)(30\,\%) = 0.75$
La contribución de la tercera calificación a la calificación final es del 40 %, así que la tercera parte se tiene $(C)(40\,\%) = 0.4C$
La calificación final es la suma de estas contribuciones parciales y la suma debe ser al menos 3.0, es decir,

$$0.9 + 0.75 + 0.4C \geq 3, \text{ es decir }, 1.65 + 0.4C \geq 3$$

Despejando C, se obtiene

$$0.4C \geq 3 - 1.65, \qquad C \geq \frac{1.35}{0.4} = 3.375$$

Por tanto la nota mínima es de 3.4

Disminución y aumentos porcentuales

Si una cantidad C se aumenta en una tasa porcentual de r dada en forma decimal, la cantidad final es $C + rC = (1 + r)C$.
Si una cantidad C se disminuye en un tasa porcentual de r dada en forma decimal, la cantidad final es $C - rC = (1 - r)C$.

Ejemplo 6.1.3. Porcentaje

A una cantidad C se le aplica una disminución de una tasa r y luego a la cantidad disminuida se le aplica una tasa de aumento s. Escriba algebraicamente el valor final de la operación.

Solución

1. C- cantidad inicial
2. $(1-r)C$- cantidad disminuida en una tasa r, esta es la nueva cantidad a la que se va a aumentar la tasa s.

3. $(1+s)[(1-s)C] = (1-r)(1+s)C$. - aumento en la tasa s de la cantidad $(1-s)C$.

Ejercicios 59.
Solucione cada uno de las siguientes situaciones:

1. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
2. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de \$ 8800, nos hacen un descuento del 7.5 %. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?
3. El precio de un ordenador es de \$ 1200 sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16 %?
4. Al comprar un monitor que cuesta \$ 450 se aplica un descuento del 8 %. ¿Cuánto se debe pagar por el monitor?
5. Se vende un artículo con una ganancia del 15 % sobre el precio de costo. Si se ha comprado en \$ 8.000. Halla el precio de venta.
6. ¿Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a \$ 180.000 para ganar al venderlo el 10 %?
7. ¿Qué precio de venta hemos de poner a un artículo comparado a \$ 280.000, para perder el 12 % sobre el precio de venta?
8. Se vende un objeto perdiendo el 20 % sobre el precio de compra. Hallar el precio de venta del citado artículo cuyo valor de compra fue de \$ 1.500.000.

6.1.2. Interés simple

El interés simple se refiere al ingreso adicional que produce un capital inicial en el transcurso de un período de tiempo, este ingreso adicional no se acumula al capital inicial para producir nuevos intereses y será igual en todos los períodos de la inversión mientras la tasa de interés y el plazo no cambien.

Ejemplo 6.1.4. Interés simple

Asúmase que Juan le presta 100 mil pesos a Samuel al 5 % mensual, durante cuatro meses. ¿Cuánto dinero debe entregar Samue a Juan cuando finalicen los cuatro meses?

Solución
El dinero prestado inicialmente es de \$100.000 al señor Samuel.
Transcurrido el primer mes Samuel debe pagar en intereses el 5 % de \$100.000, a lo que corresponden \$5.000.
Transcurrido el segundo mes Samuel debe cancelar el 5 % de \$100.000, es decir los mismos \$5.000.
El interés simple aplica siempre al mismo capital la misma tasa de interés con el mismo tiempo acordado. Por lo que en cuatro meses Samuel debe cancelar a Juan \$20.000 en intereses, más el capital inicial, para un total de \$120.000.
Sea P el capital inicial de un determinado préstamo con una tasa de interés de r aplicado a m periodos de tiempo, si el capital es prestado por n periodos. ¿Que cantidad de dinero se obtiene al finalizar el préstamo?

$$P_f = P + n \cdot (rP) = P(1 + nr)$$

La anterior expresión permite hallar el valor final de la inversión.

Ejercicios 60.
Solucione cada una de las siguientes situaciones presentadas.

1. ¿Durante cuánto tiempo ha de invertir un capital de \$ 25.000 al 5 % para que se convierta en \$ 30.000 ?

2. Se prestan \$ 45.000 y al cabo de un año, 4 meses y 20 días se reciben \$52.500. Calcular el tanto por ciento de interés.

3. Hallar él tanto por ciento de interés simple al que deberá prestarse un capital para que al cabo de 20 años los intereses sean equivalentes al capital prestado. ¿En cuánto tiempo se triplica un capital colocado al 6 %?

4. Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de \$ 30.000, al 6 %. Calcular en qué se convierte, en seis meses, un capital de \$ 10.000, al 3.5 %.

5. Escribe la expresión que indique el tiempo a pagar de un préstamo de $4.000 si se pagaron $60 de interés con una tasa del 6 %.

6. Armando está solicitando un préstamo de $ 2.500 y le ofrecen dos opciones: en la primera le ofrecen una tasa de interés del 12 % a pagar en un año; la segunda cotización ofrece una tasa de interés del 8 % a pagar en un año y nueve meses. ¿cuál préstamo le conviene más?

7. Después de 3 años, un banco ha pagado en concepto de interés la cantidad de $ 84.000 a una persona por depositar un plazo fijo. La tasa de interés ha sido del 2 % anual. ¿Cuál fue el capital inicial con el que se hizo el depósito?

8. Obtén el interés a pagar de un préstamo de $ 15.500 al 6 % de interés a 180 días?

6.1.3. Interés compuesto

Suponga que se invierte P dinero a una tasa de interés r, expresada en forma decimal y calculada cada fin de año. Si A_i representa el monto final transcurridos i años, entonces el monto total comprende el patrón de crecimiento que se muestra en la tabla siguiente:

Interés compuesto cada año	
Tiempo en años	Monto en la cuenta
0	$A_0 = P =$ capital inicial
1	$A_1 = P + P \cdot r = P(1 + r)$
2	$A_2 = A_1 + rA_1 = A_1 \cdot (1 + r) = P(1 + r)^2$
3	$A_3 = A_2 \cdot (1 + r) = P(1 + r)^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$A = A_n = P(1 + r)^n$

Valor futuro (Composición anual)

Si un capital principal P se invierte a una tasa de interés de r por año, compuesta anualmente, el valor futuro S al final del n-ésimo año es

$$S = P(1 + r)^n.$$

Ejemplo 6.1.5. Interés compuesto

Suponga que el señor Juan invierte $\$500.000$ al 7 % de interés compuesto cada año. Después de 10 años, ¿Qué cantidad de dinero tiene en su cuenta?

Solución
Se observa que el interés es compuesto por cada año, así requerimos de los siguientes datos:
La inversión inicial es $P = 500.000$ pesos, $r = 7\,\% = 0.07$ y $n = 10$.
El valor futuro corresponde a

$$S = P(1 + r)^n$$

remplazando los datos se determina el monto final
$S = 500.000(1 + 0.07)^{10} = 983.575,68 \backsimeq 983.576$
vemos que el valor de la cuenta de Juan en 10 años es de $\$983.576$

Valor futuro (Composición periódica)

Si un capital principal P se invierte t años a una tasa de interés nominal anual de r por año, compuesta m veces por año, el valor futuro S es:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Ejemplo 6.1.6. Interés compuesto

Suponga que el señor Humberto invierte $\$500.000$ al $9\,\%$ de interés anual capitalizable cada mes, es decir, compuesto 12 veces al año. Determine el valor futuro después de 5 años.

Solución
Extrayendo los datos, nos queda que $P = 500.000$, $r = 0.09$, $m = 12$ y $t = 5$.
La forma de calcular el valor futuro con composición periódica es :

$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Remplazando los datos se tiene que,

$$S = 500.000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12 \cdot 5}$$

$$S = 782.840,5$$

Así el valor de la inversión de Humberto después de 5 años es de $ 782.840,5.

Ejercicios 61.
Solucione cada uno de los siguientes problemas.

1. Luis deposita $ 8.000 en un banco que reconoce una tasa de interés del 36 % anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el monto acumulado en cuatro años?

2. Calcular el valor final de un capital de $ 20.000 a interés compuesto durante 15 meses y 15 días a la tasa de interés del 24 % capitalizable mensualmente.

3. Se invierte $ 8.000 por un año a la tasa del 12 % capitalizable mensualmente. Determinar el monto al final del año, si transcurridos 3 meses la tasa se incrementó al 18 % capitalizable mensualmente.

4. Se deposita $ 10.000 en un banco que paga el 18 % de interés con capitalización mensual, transcurridos 4 meses se retira $ 4.000. Hallar el importe que tendrá en el banco dentro de un año de haber realizado el depósito.

5. En un banco para el término de 3 años han depositado $30.000 bajo el 10 % de interés anual.

   a) Calcular ¿cuánto más beneficioso sería la variante cuándo el ingreso anual se suma a la cuenta para la cual concederá el interés que la variante cuando el interés se recoge por el cliente cada año?

   b) ¿Cuál será la diferencia dentro de 10 años?

6. Sabiendo que la tasa de interés anual del depósito es el 12 %, calcular la tasa de interés mensual que le equivale. ¿En qué tiempo, en años meses y días, se duplicará un capital de $7.000.00 a una tasa de intereses efectiva del 7.25 %?

7. Calcule el valor actual de un pagaré cuyo valor al término de 9 años y 6 meses será de $8.100.00 considerando una tasa de interés del 13 % anual, capitalizable trimestralmente.

6.1.4. Proporcionalidad

1. **Cantidades directamente proporcionales:** A es directamente proporcional a B si existe una constante no nula k tal que $A = kB$. Si A es proporcional a B con constante de proporcionalidad k entonces B es directamente proporcional a A con constante de proporcionalidad $\frac{1}{k}$, es decir, $B = \frac{1}{k}A$.

2. **Cantidades inversamente proporcionales:** A es inversamente proporcional a B si existe una constante no nula k tal que $A = k\frac{1}{B} = \frac{k}{B}$. Si A es inversamente proporcional a B con constante de proporcionalidad k entonces B es inversamente proporcional a A con constante de proporcionalidad $\dfrac{1}{k}$, es decir, $B = \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{A}$.

Las relaciones de proporcionalidad pueden darse entre tres o más cantidades

- A es directamente proporcional a B y a C si existe k tal que $A = kBC$

- A es inversamente proporcional a B y a C si existe una constante k tal que $A = \dfrac{k}{BC}$.
- A es directamente proporcional a B e inversamente proporcional a C si existe una constante k tal que $A = k\dfrac{B}{C}$.

Ejemplo 6.1.7. Proporción

¿Cuál es el precio de 300 g de café a 150 pesos los 60 g?

Solución
Al aumentar la cantidad de café, también aumenta el precio en la misma proporción. Por lo tanto le corresponde la siguiente expresión.

$$P = kC.$$

Donde P es el precio del café y C la cantidad de café.
Sa sabe que 60 g de café cuestan 150 pesos, así se tiene que:

$$\begin{aligned} P &= kC \\ 150 &= K60 \\ k &= \frac{150}{60} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto la expresión que modela dicha situación es: $P = \dfrac{5}{2}C$
Para dar solución del precio a los 300 g, se reemplaza en la anterior ecuación:

$$P = \frac{5}{2}(300) = 750.$$

El precio de 300 g de café es de 750 pesos.

Ejemplo 6.1.8. Proporción

Si cuatro hombres terminan una obra en 20 días. ¿Cuánto tardaran 6 hombres en terminar la misma obra?

Solución
Se tiene que la obra a desarrollar es la misma y es de pensar que a mayor número de hombres trabajando en la obra, esta será terminada en menor tiempo, por lo que se tiene una relación inversa y así, se representa con la siguiente expresión:

$$H = k\frac{1}{T},$$

donde H es el número de hombres y T es el tiempo que se tardan en construir la obra.
Se debe determinar ahora el valor de k, esto es:
$k = HT = 4 \cdot 20 = 80$, de esta forma se tiene que $H = 80\frac{1}{T}$, remplazando los valores se obtiene.

$$6 = 80\frac{1}{T}.$$

Así $T = \frac{80}{6} = 13.\overline{3}$
La obra se finalizará con seis hombres, en 13 días con 8 horas aproximadamente.

Ejercicios 62.
Resuelve los siguientes problemas.

1. Andrea ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días $ 126.000 ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar $ 340.000?

2. En un plano de una ciudad de Cartagena, una calle de 350 metros de longitud mide 2,8 cm. ¿Cuánto medirá sobre ese plano otra calle de 200 metros?

3. En una panadería con 80 kg son capaces de hacer 120 kg de pan. ¿Cuántos kg de harina serán necesarios para hacer 99 kg de pan?

4. Un padre reparte un premio de lotería de $ 930.000 en proporción inversa a las edades de sus hijos de 6, 8, 12 y 18 años. Halla lo que le corresponde a cada hijo.

5. Entre tres pintores han pintado una casa y han cobrado $ 416.000. El primero ha trabajado 15 días, el segundo 12 días y el tercero 25 días. ¿Cuánto va a cobrar cada uno?

6. María, Rosa y Clara han cobrado por un trabajo $ 3.440.000. Rosa ha trabajado 7 horas, María 5 horas y Clara 4 horas. ¿Qué sueldo le corresponde a cada una proporcionalmente a su trabajo?

7. Un grifo abierto 9 horas durante 8 días ha arrojado 5.400 litro. ¿Cuántos litros arrojará durante 18 días a 8 horas diarias?

8. Tres amigos alquilan un coche para unas vacaciones en la playa durante 12 días. Pedro ha estado solo 2 días en la playa, Juan 3 días y Antonio 7 días. El importe del alquiler asciende a $ 264.000. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

9. Unos amigos quieren repartir $ 1.000.000 de un premio de manera inversamente proporcional a las veces que han llegado tarde a las citas. Si Juan ha llegado tarde 2 veces, Marta 3 veces y Lucas 5 veces, ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

10. Para imprimir unos folletos publicitarios, 9 impresoras han estado en funcionamiento 8 horas diarias durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán en imprimir el mismo trabajo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?

6.1.5. Modelos exponenciales y logarítmicos

Crecimiento y decaimiento exponencial.

Las funciones exponenciales $y = e^{kx}$ donde k es una constante no nula se usan para modelar crecimiento o decaimiento exponencial.

- La función $P = P_0 e^{kx}$ es modelo para crecimiento exponencial si $k > 0$.
- La función $P = P_0 e^{kx}$ es modelo para decaimiento exponencial si $k < 0$.

Algunos ejemplos de estos fenómenos son:

Interés compuesto continuamente. Se usa la función $C(t) = C_0 e^{rt}$ donde $C(t)$ es el capital total después de un tiempo t (en años), C_0 es el capital inicial invertido y r es la tasa de interés en forma decimal.

Decaimiento radiactivo. También conocido como desintegración nuclear o radioactividad, es el proceso por el cual el núcleo de un átomo inestable pierde energía por emisión de radiación, que incluye partículas alfa, partículas beta, rayos gamma y electrones de conversión. Un material que emite espontáneamente tal radiación se considera radiactivo.La desintegración radiactiva es un proceso estocástico (es decir, al azar) a nivel de átomos individuales, en el que, según la teoría cuántica, es imposible predecir cuando un átomo en particular decaerá. La probabilidad de que un átomo dado decaiga nunca cambia, es decir, no importa cuánto tiempo ha existido el átomo. La tasa de decaimiento de una gran colección de átomos, sin embargo, puede ser calculada a partir de sus constantes de desintegración medidos o vidas medias. Esta es la base de la datación radiométrica. Las vidas medias de los átomos radiactivos no tienen límite inferior o superior conocido. Se conocen vidas medias casi instantáneas y vidas medias de casi la edad del universo [11].

Cantidades constantes: La vida media, $t_{\frac{1}{2}}$, es el tiempo necesario para que la cantidad de una sustancia radiactiva se desintegre hasta llegar a la mitad de la cantidad inicial. Este tiempo es independiente de la cantidad inicial. Es decir si la cantidad inicial es P_0, entonces $P(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}P_0$. Resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}P_0 &= P\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = P_0 e^{k(t_{\frac{1}{2}})}\\ \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} &= e^{k(t_{\frac{1}{2}})}\\ \frac{1}{2} &= e^{kt_{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Ahora se necesita hallar el valor de k, se aplica la definición de logaritmo natural

$$t_{\frac{1}{2}}k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2.$$

De modo que $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{-\ln 2}{k}$.

Definición 6.1.1: Vida media

La vida media para un modelo de decaimiento radiactivo $P(t) = P_0e^{kt}$, viene dada por

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{-\ln 2}{k}. \tag{6.1}$$

La constante de decaimiento, λ, "lambda" la inversa de la vida media, a veces referido simplemente como tasa de descomposición. La vida promedio τ, "tao" la vida promedio de una partícula radiactiva antes del decaimiento.

Ejemplo 6.1.9. Sustancia radioactiva

La vida media de una sustancia radioactiva es 12 horas y hay 8 gramos presentes inicialmente.

(a) Exprese la cantidad de sustancia restante como una función del tiempo t.

(b) Cuándo habrá un gramo de sustancia restante.

Solución

(a) Como es modelo de decaimiento radiactivo la cantidad restante P viene dada por $P = P_0e^{kt}$. Como la cantidad inicial es $P(0) = P_0 = 8gr$. Entonces $P(t) = 8e^{kt}$. Faltaría determinar k. Para esto se usa la condición de la vida media, $t_{\frac{1}{2}} = 12$. Esto significa que $P(t)$ evaluado en $t_{\frac{1}{2}}$ debe dar la mitad de lo que había inicialmente es decir $\frac{1}{2}P_0$. Así:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{-\ln 2}{k} \\ 12 &= \frac{-\ln 2}{k} \\ 12k &= -\ln 2 \\ k &= \frac{-\ln 2}{12} \approx -0.0577 \end{aligned}$$

Así el modelo completo es $P(t) = 8e^{-0.0577t}$.

(b) Para la parte b se requiere hallar el tiempo t para el cual $P(t) = 1$. Se debe resolver para t, entonces

$$1 = P(t) = 8e^{-0.0577t} \qquad \text{o} \qquad e^{-0.0577t} = \frac{1}{8}$$

de donde se concluye que $-0.0577t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln 8$. Despejando t se obtiene $t = \frac{-\ln 8}{-0.0577} = 36.0388$.

Habrá un gramo de sustancia a las 36 horas aproximadamente.

Crecimiento logístico.

Es un modelo común de crecimiento de poblaciones, originalmente, debido a Pierre-François Verhulst en 1838, donde la tasa de reproducción es proporcional tanto a la población existente como a la cantidad de recursos disponibles, en igualdad de condiciones. Verhulst derivó su ecuación logística para describir el crecimiento auto-limitante de una población biológica. La ecuación fue redescubierta en 1911 por AG McKendrick para el crecimiento de bacterias en caldo [3]. Asuma que P representa

el tamaño de la población (A veces se usa N en lugar de P.) y t representa el tiempo, r define la tasa de crecimiento y K es la capacidad de carga (número máximo de individuos que soporta el ecosistema). Entonces el número de individuos en el tiempo t comenzando con una población inicial P_0, viene dado por

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)} \tag{6.2}$$

La población alcanza un número de C individuos si $P(t) = C$. Si se quiere averiguar el tiempo en donde se alcanza este C se debe resolver para t la ecuación

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)} = C$$

$$\begin{aligned}
KP_0e^{rt} &= C(K+P_0(e^{rt}-1)) = CK + CP_0(e^{rt}-1) \\
KP_0e^{rt} &= CK + CP_0e^{rt} - CP_0 \\
KP_0e^{rt} - CP_0e^{rt} &= CK - CP_0 = C(K-P_0) \\
(KP_0 - CP_0)e^{rt} &= C(K-P_0) \\
e^{rt} &= \frac{C(K-P_0)}{P_0(K-C)}
\end{aligned}$$

Usando la definición de logaritmo natural se obtiene

$$rt = \ln\left(\frac{C(K-P_0)}{P_0K - CP_0}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{C(K-P_0)}{P_0(K-C)}\right)}{r}.$$

Lo anterior muestra que analíticamente la población nunca alcanzará los K individuos porque $C = K$ no es posible para la ecuación (el denominador sería cero).

Ejemplo 6.1.10. Crecimiento poblacional

Se sabe que un ecosistema puede soportar una población de 500 individuos y se carga con una población inicial de 20, con una tasa de crecimiento del 5 %. Hallar la población para $t = 5$, y el tiempo que le toma a la población en llegar a 250 individuos y a 499 individuos.

Solución

Aquí $P_0 = 20$ que es la población inicial. Tasa de crecimiento es 5 % y en forma decimal es $r = 0.05$ y la carga máxima del sistema es $K = 500$. La población en el tiempo t viene dada por

$$P(t) = \frac{(500)(20)e^{0.05t}}{500 + (20)(e^{rt}-1)} = \frac{(500)(20)e^{0.05t}}{20(25 + (e^{0.05t}-1))} = \frac{500e^{0.05t}}{25 + (e^{0.05t}-1)}.$$

Por tanto el modelo para la población es

$$P(t) = \frac{500e^{0.05t}}{24 + e^{0.05t}}. \tag{6.3}$$

Para $t = 5$ la población viene dada por el valor de $P(t)$ en $t = 5$, es decir $P(5)$.

$$P(5) = \frac{500e^{0.05(5)}}{24 + e^{0.05(5)}} = 25.392.$$

Para la segunda parte se debe hallar t para el cual $P(t) = 250$.

Como $P(t) = \dfrac{500e^{0.05t}}{24 + e^{0.05t}}$, se debe resolver la ecuación para t,

$$\frac{500e^{0.05t}}{24 + e^{0.05t}} = 250.$$

Para ello primero se agruparán los términos que involucran la función exponencial y luego se usarán logaritmos para despejar t.

$$\begin{aligned}
500e^{0.05t} &= 250(24 + e^{0.05t}) = 250(24) + 250e^{0.05t} \\
500e^{0.05t} - 250e^{0.05t} &= 6.000 \\
250e^{0.05t} &= 6.000 \\
e^{0.05t} &= \frac{6.000}{250} = 24 \\
e^{0.05t} &= 24
\end{aligned}$$

Usando la definición de logaritmo natural se obtiene que $0.05t = \ln 25$. De donde $t = \frac{\ln 24}{0.05} = 63.561$.
Verifiquemos, que esta sea efectivamente la respuesta buscada:

$$P(63.561) = \frac{500e^{0.05(63.561)}}{25 + e^{0.05(63.561)}} = 249.999 \approx 250.$$

La población para $t = 5$ es 25.392 y el tiempo que demora la población en llegar a 250 individuos es 63.561.
Para 499 individuos podemos usar la formula deducida anteriormrnte con $C = 499$ para no repetir el proceso

$$t = \frac{\ln\left(\frac{C(K-P_0)}{P_0K-CP_0}\right)}{r}.$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{499(500-20)}{20(500-499)}\right)}{0.05} = 187.81.$$

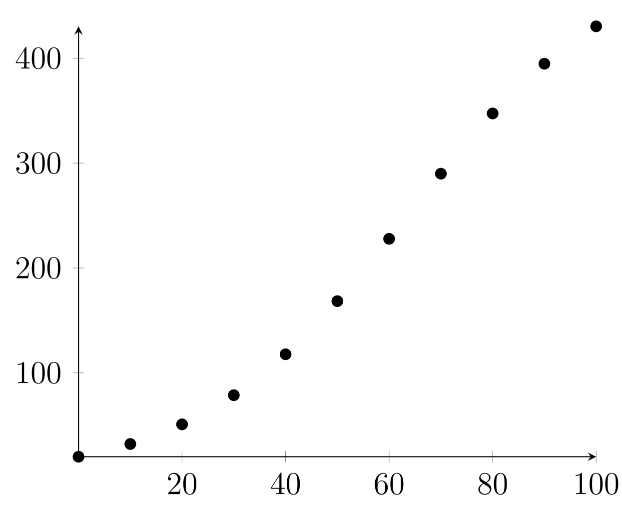
Para construir la gráfica, construimos una tabla de valores

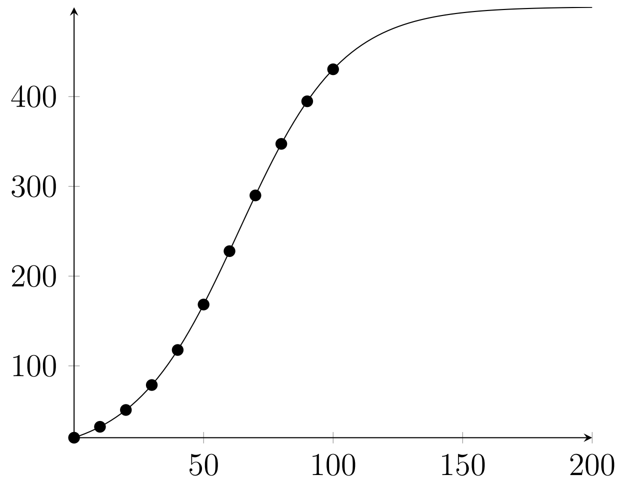
$$P(0) = \frac{500\,e^{0.05\,(0)}}{e^{0.05\,(0)} + 24} \qquad P(10) = \frac{500\,e^{0.05\,(10)}}{e^{0.05\,(10)} + 24}$$
$$P(20) = \frac{500\,e^{0.05\,(20)}}{e^{0.05\,(20)} + 24} \qquad P(30) = \frac{500\,e^{0.05\,(30)}}{e^{0.05\,(30)} + 24}$$
$$P(40) = \frac{500\,e^{0.05\,(40)}}{e^{0.05\,(40)} + 24} \qquad P(50) = \frac{500\,e^{0.05\,(50)}}{e^{0.05\,(50)} + 24}$$
$$P(60) = \frac{500\,e^{0.05\,(60)}}{e^{0.05\,(60)} + 24} \qquad P(70) = \frac{500\,e^{0.05\,(70)}}{e^{0.05\,(70)} + 24}$$
$$P(80) = \frac{500\,e^{0.05\,(80)}}{e^{0.05\,(80)} + 24} \qquad P(90) = \frac{500\,e^{0.05\,(90)}}{e^{0.05\,(90)} + 24}$$
$$P(100) = \frac{500\,e^{0.05\,(100)}}{e^{0.05\,(100)} + 24}$$

Se obtienen los valores

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$P(t)$	20	32.14	50.87	78.67	117.70	168.34	227.80	289.89	347.324	394.75	430.399

y se grafican los puntos respectivos tomando la escala adecuada. Tome el máximo valor de la función en la tabla y asígnelo a la mayor altura disponible en el papel y los demás puntos asígnelos de manera proporcional. Al final trace una curva suave que pase por ellos.





Datación por radiocarbono.

El método de datación por radiocarbono se basa en el hecho de que el isótopo de carbono radiactivo ${}^{14}C$ (carbono 14) tiene una vida media conocida de aproximadamente 5.700 años. La materia orgánica viviente mantiene un nivel constante de ${}^{14}C$ mediante "respiración de aire" (o por el consumo de materia orgánica que lo hace). Pero el aire contiene ${}^{14}C$ junto con el isótopo de carbono mucho más estable y común ${}^{14}C$, sobre todo en el gas CO_2. Así todos los organismos vivos mantienen el mismo porcentaje de ${}^{14}C$ como en el aire, ya que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción entre los dos isótopos. Pero cuando un organismo muere, deja de metabolizar el carbono, y el proceso de la desintegración radiactiva comienza a agotar su contenido de ${}^{14}C$. La fracción de ${}^{14}C$ en el aire permanece más o menos constante, porque el ${}^{14}C$ se genera de forma continua por el bombardeo de átomos de nitrógeno en la atmósfera superior por los rayos cósmicos, y esta generación ha sido durante mucho tiempo en el equilibrio de estado estacionario con la pérdida de ${}^{14}C$ a través de la desintegración radiactiva [8].

Ejemplo 6.1.11. Muestra de carbono

Una muestra de carbón vegetal encontrado en Stonehenge (sitio arqueológico) contiene 58 % de ${}^{14}C$ cantidad igual a la que contiene una muestra de carbón vegetal actual. ¿Cuál es la edad de la muestra?

Solución

El modelo para este problema es $N(t) = N_0e^{kt}$ donde N_0 es la cantidad que había inicialmente. Se necesita estimar k.

Tómese como $t = 0$, t en años, como el tiempo de muerte del árbol del cual se formó el carbón. Se sabe que la vida media del carbono es 5.700 años, es decir, $t_{\frac{1}{2}} = 5.700$

y que $t_{\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{k}$ de donde se despeja k, es decir,

$$k = -\frac{\ln 2}{5.700} = -0.0001216.$$

Puesto que la cantidad presente es $58\,\%$ de lo que había inicialmente, la cantidad presente es $0.58N_0$. Se debe buscar t para el cual $N(t) = 0.58N_0$. Se resuelve entonces la ecuación

$$(0.58)N_0 = N(t) = N_0 e^{-0.0001216t}$$

$$0.58 = e^{-0.0001216t} \text{ usando logaritmo natural, } \ln(0.58) = -0.0001216t$$

$$t = \frac{\ln(0.58)}{-0.0001216} = 4.479.66.$$

Es decir la muestra tiene aproximadamente 4.480 años.

Eliminación de drogas. La cantidad $A(t)$ de cierta droga en el torrente sanguíneo, medida como el exceso sobre el nivel normal, típicamente decrece a una tasa proporcional a la cantidad en exceso. Es decir, si DA representa la variación de A entonces $DA = kA$ para cierta constante k negativa (puede suponerse λ positiva y tomarse $-\lambda$ como constante de proporcionalidad). Esto significa que

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t},$$

donde A_0 es la cantidad inicial. Aquí λ se llama ***constante de eliminación*** y $T = \dfrac{1}{\lambda}$ se llama ***tiempo de eliminación*** [8].

Disminución de ventas. De acuerdo con estudios de mercadeo, si la publicidad de un producto determinado se detiene y otras condiciones de mercado -tales como el número y promoción de productos de la competencia, sus precios, y así sucesivamente se mantienen sin cambios, entonces las ventas de los productos que no se anuncian se reducirán a una velocidad que es proporcional en cualquier momento t a las ventas actuales S. Es decir, si DS representa la variación de las ventas, $DS = -\lambda S$ lo que lleva a $S(t) = S_0 e^{-\lambda t}$ [8].
Aquí S_0 denota el valor inicial de las ventas, que se toman como las ventas en el último mes de la publicidad. Si se toman meses como las unidades para el tiempo t, entonces $S(t)$ da el número de ventas de t meses después que la publicidad se detuvo, y podría ser llamada la ***constante de decaimiento de ventas***.

Lingüística. Considere la posibilidad de una lista básica de palabras N_0 en uso en un idioma determinado en el tiempo $t = 0$. Sea $N(t)$ el número de estas palabras que todavía están en uso en el momento t-aquellas que no han desaparecido de la lengua ni han sido reemplazadas-. Según una teoría en lingüística, la tasa de disminución de

N es proporcional a N. Esto es, si DN representa la tasa de disminución, $DN = -\lambda N$ de donde

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Si t se mide en miles de años (como es habitual en lingüística), entonces $k = e^{-\lambda}$ es la fracción de las palabras de la lista original que sobrevive durante 1000 años [8].

Crecimiento de poblaciones con inmigración. Considere una población $P(t)$ con tasas de nacimientos constantes β y tasa de muertes constante δ, pero con una tasa de inmigración I personas por año entrando al país. Entonces la población en el año t viene dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt} + \frac{I}{k}(e^{kt} - 1), \quad k = \beta - \delta$$

$$P(t) = \frac{(P_0 k + I)\ e^{kt} - I}{k}.$$

Enfriamiento y calentamiento. De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura A de su medio. Si T_0 representa la temperatura en el tiempo $t = 0$ entonces para A constante la temperatura T en el tiempo t viene dada por

$$T(t) = A + (T_n - A)e^{-kt}.$$

Difusión de información y esparcimiento de enfermedades.

Ejemplo 6.1.12. Crecimiento de bacterias

Suponga que un cultivo de 200 bacterias se coloca en una caja de Petri y el cultivo se duplica cada hora. Estime cual es el número de bacterias que se desarrollan en 6 horas.

Solución

Detallemos los primeros cálculos en las horas iniciales, con el fin de observar el patrón que le corresponde.

$400 = 200 \cdot 2$	Bacterias en una hora
$800 = 200 \cdot 2^2$	Bacterias en dos horas
$1600 = 200 \cdot 2^3$	Bacterias en tres horas
$\vdots$	$\vdots$
$P(t) = 200 \cdot 2^t$	Total de bacterias transcurridas t horas

Así que la función $P(t) = 200 \cdot 2^t$ representa el total de bacterias transcurridas t horas en la caja de Petri.
Por tanto $P(6) = 200 \cdot 2^6 = 12.800$, la población de bacterias en la caja de Petri es de 12.800 transcurridas 6 horas.

Ejemplo 6.1.13. Propagación de un rumor

En el Programa de Matemáticas hay 140 estudiantes y Fabiana inicia un rumor que se propaga de la siguiente forma $S(t) = \dfrac{140}{(1 + 39 \cdot e^{-0.9t})}$. Esta expresión modela el número de estudiantes que han escuchado el rumor a lo largo de t horas
¿Cuántos estudiantes han escuchado el rumor al final del día cero?
¿Cuánto tiempo tarda en que 50 estudiantes escuchen el rumor?

Ejercicios 63.
Solucione cada uno de los siguientes enunciados.

1. Una población de aves, cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada 2 años.

   a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de aves?

   b) ¿Cuántas aves hay después de 4 años?

   c) ¿Después de cuanto tiempo la población de aves será de 1.000 individuos?

2. Se administra 50 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas.

   a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa la cantidad del medicamento restante en el torrente sanguíneo del paciente ?

   b) ¿Cuántos miligramos del medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

   c) ¿Después de cuanto tiempo quedará solo un miligramo del medicamento del torrente sanguíneo del paciente?

3. Encontrar la función a partir de valores dados. En una investigación científica, una población de moscas crece exponencialmente. Si después de 2 días hay 100 moscas y después de 4 días hay 300 moscas.

   a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de moscas?

   b) ¿Después de cuánto tiempo la población de moscas será de 1.000 individuos?

4. Se tiene un cultivo de bacterias en un laboratorio y se sabe que su crecimiento es exponencial. El conteo del cultivo de bacterias fue de 800 después de un minutos y 1.280 después de dos minutos.

   a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento del cultivo de bacterias?

   b) ¿Cuántas bacterias hay después de 5 minutos?

   c) ¿Después de cuanto tiempo el número de bacterias será de 10.000?

Bibliografía

[1] Carl B Allendoerfer and Cletus Oakley. *Fundamentals of Freshman Mathemathics*. McGraw-Hill, second edition, 1965.

[2] Tom M Apostol. *Calculus*. Reverte, 1999.

[3] N. Bacaër. *Verhulst and the logistic equation (1838)*. Springer, London, 2011.

[4] Carl B Boyer and Uta C Merzbach. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 1986.

[5] Carl B Boyer and Uta C Merzbach. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 2011.

[6] David C Lay. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson, 2007.

[7] Charles Lehmann. *Geometría analítica*. Limusa, 1995.

[8] David E. Penney and Charles Henry Edwards. *Calculus with Analytic Geometry*. Prentice-Hall, 1998.

[9] James Stewart. *Introducción al cálculo*. Thomson, 2007.

[10] James Stewart, Lothar Redlin, and Saleem Watson. *Precálculo*. Cengage, 2017.

[11] Wikipedia contributors. Radioactive decay — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online; accessed 9-March-2020].

[12] Dennis G Zill. *Matemáticas 1*. McGrawHill, 2011.

La impresión de este libro se realizó en papel bond blanco 90grs. para páginas interiores y propalcote de 280 grs. Para la portada con plastificado mate. con un tiraje de 200 ejemplares.

El libro MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO, de los autores Juan Cárdenas Guerra y Germán Buelvas Medina, se diseñó y diagramó en la Editorial Universitaria – Sección de Publicaciones de la Universidad de Cartagena y se terminó de imprimir en el año 2022 en la empresa Alpha Group, en la ciudad de Cartagena de Indias, Colombia.

La intención de este libro es darle al estudiante en el inicio de su carrera universitaria más opciones y oportunidades para un mejor desempeño en los cursos de cálculo, para esto se tuvo en cuenta teorías que permiten integrar toda la temática básica que cimienta los conocimientos necesarios para cursos en matemáticas posteriores, apoyados en el uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas.

Con una propuesta pedagógica enfocado en teoría APOS, en un curso de precálculo basado en conceptos básicos con ayudas audiovisuales y uso de software como lo es, WxMaxima creado con el ánimo de incentivar el uso de las tecnologías en el área de las matemáticas.

Universidad de Cartagena
Fundada en 1827

Editorial Universitaria Universidad de Cartagena

ISBN: 978-958-5439-46-7

9 789585 439467

Portada 3D - blender : Jorge Barrios Alcalá