1

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE FILOSOFÍA
EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

ESTUDIANTE: *KENNETH MORENO MAY*

TÍTULO: *"LÓGICA FORMALISMO LÓGICO Y RACIONALIDAD"*

CALIFICACIÓN

APROBADO

Hernán Martínez F.
Asesor

Diego Soto

Diego Soto Isaza
Jurado

Federico Gallego V.

Federico Gallego V.
Jurado

Cartagena, diciembre de 2003.

LÓGICA, FORMALISMO LÓGICO Y RACIONALIDAD

KENNETH MORENO MAY

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
CARTAGENA D.T. Y C.
2002

LÓGICA, FORMALISMO LÓGICO Y RACIONALIDAD

KENNETH MORENO MAY

TESIS DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE PROFESIONAL EN FILOSOFÍA

ASESOR
HERNAN MARTINEZ F.

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
CARTAGENA D.T. Y C.
2002

NOTA DE ACEPTACIÓN

PRESIDENTE DEL JURADO

JURADO

JURADO

Lógica, formalismo lógico y racionalidad

Una presentación dirigida del teorema de Gödel y sus consecuencias en el ámbito de la lógica y las ciencias.

Kenneth Moreno May

ÍNDICE GENERAL

Lógica, formalismo lógico y racionalidad

Una presentación dirigida del Teorema de Gödel y sus consecuencias en el ámbito de la lógica y las ciencias.

7

IV CAPITULO:

V CAPITULO:

INTRODUCCION

LAS TRES HERIDAS EPISTEMOLÓGICAS DE LA RACIONALIDAD CONTEMPORÁNEA

Las tres heridas narcisistas de la modernidad según Freud, son aquellas que, de una u otra forma, desmontan al hombre del lugar predilecto en el que él mismo en el universo se había instaurado. Cronológicamente, ellas son: la teoría heliocéntrica de Copernico, la teoría de la evolución Darwiniana, y la exposición del inconsciente por el propio Freud. Pero, ellas a su vez, fueron el avance, el despertar y en algunos casos el resultado mismo de una racionalidad más sólida asentada sobre principios que se autocomprenderán también como inconmovibles.

Si *Copernico* expulsa a hombre de su lugar privilegiado en el mundo, si diluye la finitud cerrada del universo aristotélico para instaurara un espacio frío y silencioso lleno de interrogantes más que de respuestas para el alma, tenemos que la ciencia moderna instaura un mundo de objetividades traducibles a idealidades matemáticas de carácter apodíctico, sobre las que la racionalidad humana tiene acceso privilegiado. Con la matemática el hombre ahora puede concebir el nuevo orden del mundo y su poder para controlar y descubrir parece no tener fin.

Si *Darwin* nos expulsa de aquel pedestal privilegiado donde Dios (o nosotros mismos) nos mantenía en un lugar distanciado del resto de las criaturas vivas e inertes, del resto de la naturaleza en general; como entes semidivinos creados a su (nuestra) imagen y semejanza, con el poder para someter y esclavizar, si Darwin, como decía, niega todo lo anterior para rebajarnos a meros animales frutos del azar y los cambios climáticos, nos queda entonces la técnica y la manipulación de nuestro entorno para seguir evolucionando por una vía aislada, y en cierto modo inversa, al resto de la naturaleza. La idea entonces no es adaptarse sino adaptar, crear no sólo el mundo sino la sociedad con la certeza que lo único posible es el progreso hacia estados de mayor complejidad y orden social.

Si *Freud* destroza las cañerías de la razón humana y nos enseña a observarnos como seres manipulados por nuestras propias pulsiones ignoradas, si nos enseña a dudar de todas nuestras supuestas evidencias racionales por estar fundamentadas en pasiones sin control[1], lo que nos queda supone un nuevo reino de seguridad en ese terreno arenoso de racionalizaciones y pseudocertezas: el deductivismo, la racionalidad lógico formal alejada de todo contaminante psicológico y de toda consideración vaga sobre nuestra interpretación de las cosas nos garantiza objetividad y racionalidad indudable al no aceptar en ella misma nada que esté fuera de sus cálculos. Con ella estamos protegidos de nosotros mismos.

Pero sólo algunas décadas atrás se gestaron tres nuevas heridas narcisistas que parecen amenazar de manera definitiva la forma como concebimos nuestra razón y nuestro conocimiento del mundo junto con la manera de pensarlo.

Si parecíamos tener el conocimiento absoluto, objetivo y apodíctico de la ciencia físico matemática, ahora nos amenaza el *Principio de Incertidumbre* revelado por Heisenberg pocos años después de la triunfal teoría de la relatividad. Este principio, que nace bajo el seno de la nueva física cuántica, postula que nuestro conocimiento del mundo tiene límites infranqueables. No es posible el determinar de manera efectiva y simultánea el estado de una partícula junto con su desplazamiento, cualquiera de las dos medidas modifica el estado físico (función de onda) de la partícula por lo que la objetividad de la medida restante se pierde indefectiblemente.
No estamos, por tanto separados del mundo como observadores imparciales, sino que nuestras mediciones modifican el ser de las cosas. Ahora el

[1] Este reino de seguridades es también derrotado a nivel epistemológico por la *fractura geométrica* provocada por la caída del 5to postulado de Euclides, que supuso, en analogía con la revolución de Freud, el derrumbamiento de la región esencial de la evidencia intuitiva a nivel de las ciencias exactas.

conocimiento total y objetivo parece ser inalcanzable, inabarcable, una quimera más de nuestros deseos.

Si era evidente que el progreso y la técnica interconectados en un complejo físico social nos llevaría, como por un plano inclinado, hacia grados más elevados de orden social y físico, ahora se nos presenta ante nosotros el *Segundo Principio de la Termodinámica* formulado por Clausius ya en 1865, el cual postula en su formulación clásica que, aunque la energía del universo permanezca constante, ésta siempre se dirige hacia grados más elevados de desorden.

El mundo social, biológico y físico no se determina ya por una constante y sólida elevación hacia el progreso sino que en su interior se encuentra una raíz de desorden; es más, cualquier grado de orden y complejidad presente en el mundo social se cimenta a su vez en procesos activos de desorden patológico. Ya no esta como algo dado en la naturaleza de las cosas el progreso sino, al contrario, la vida se transforma en una continua lucha por no disgregarnos en átomos, y siempre tendremos la certeza de la muerte que tarde o temprano caeremos al abismo.

Si el deductivismo lógico moderno parecía ser el camino seguro de una razón debilitada por los psicologismos, ahora resulta que el núcleo medular que lo alimentaba sufrió su más duro golpe. Su ilusión de abarcar la racionalidad por medio de la formalización, evitando toda intuición, en la ciencia racional por excelencia, la ciencia que había parecido hasta ese momento hermanada con él: la matemática, ella había sido su estandarte para una colonización progresiva de todo lo considerable racional. Pero, resultó que el formalismo no podía ni siquiera definir qué debía entenderse por verdad en matemáticas; y mucho peor, que no podía dar cuenta de todas las verdades que podían predicarse en su interior. Todo esto fue consecuencia de un trabajo intelectual admirable: se habla aquí de los resultados del *Teorema de Gödel*, expuesto por el lógico austriaco Kurt Gödel en 1931: el teorema de incompletud del cálculo formal construido para el análisis de la matemática que supuso el fracaso del proyecto que pretendía reducir la matemática, una ciencia racional, pero no enteramente formal, a un formalismo lógico sin contenido.

Pero el teorema no sólo afecta al proyecto de formalización de las matemáticas sino que limita toda pretensión del deductivismo formal de abarcar una totalidad de objetos posibles de la razón, identificando de esa manera razón con cálculo.

Estas tres "nuevas heridas" se interconectan entre ellas, y modifican cada una a su manera el programa epistemológico contemporáneo de la ciencia y del saber humanos en general.
Para nosotros no son principios de desesperanza sino puertas que posibilitan el desarrollo de una nueva racionalidad, ahora asentada sobre las calderas encendidas del indeterminismo, la incertidumbre, la contingencia y la incompletud.

En este trabajo pretendo exponer la última de las tres heridas epistemológicas que he reseñado aquí: el teorema de limitación o incompletud de Gödel a la luz de una tesis que pretendo extraer del seno de la Teoría de la Argumentación de Chaïm Perelman.
Perelman sugiere en algunos de sus textos la necesidad de ampliar el concepto de lógica (y la razón a su paso) para que dé cuenta de procesos de razonamiento de carácter no formal presentes en el derecho, la ética y la filosofía.
Para poder cumplir ese cometido consideramos que es necesario desligar definitivamente la idea (la ciencia) de la *lógica*, del *formalismo* o deductivismo formal, a través de una distinción de objetos, por un lado el objeto de la lógica: las inferencias racionales en el lenguaje ordinario; por otro lado, el objeto que la nueva ciencia lógico matemática moderna intentó superponer al anterior para explicarlo y, en cierta medida, tratar de suprimirlo: la idea de sistema formal o cálculo.
Veremos que es posible dar pruebas de que ese formalismo es algo separado de nuestra comprensión de la lógica ampliada, y precisamente el "lugar" de escisión entre los términos es el teorema de Gödel. Nosotros observamos el teorema como una *prueba formal*[2] de que formalismo y lógica deben

[2] Porque, claramente, existen otro tipo de pruebas desplazadas más hacia caracterizar de qué manera el formalismo es inadecuado para la instrumentalización de ciertos "objetos", como los juicios de valor, por ejemplo.

permanecer separados a nivel teórico, y al nivel de la propia autocomprensión de la ciencia de la lógica.

Nuestro segundo objetivo principal es explicar el Teorema mismo, hacerlo comprensible tanto a nivel lógico, matemático y filosófico, exponiendo las consecuencias más importantes que pueden extraerse de él. En el contexto universitario en el que nos encontramos, donde este tipo de trabajos (pese a su riqueza y belleza) generalmente es pasado por alto, esperamos traer un poco de luz sobre un tema tan complejo.

Al final de nuestro recorrido esbozaremos dos tesis de carácter programático que esperamos poder ampliar en trabajos posteriores, como forma de alimentar, si se puede, los estudios autorizados y posibles sobre las relaciones entre *lógica, formalismo lógico y racionalidad.*

La primera de éstas tesis es el programa de esquematización lógica de los argumentos que se ha pensado como forma de establecer diálogos entre las dos nociones que serán disociadas: lógica / formalismo. La segunda, la idea de una nueva situación de la racionalidad en lo que concierne con los objetivos, papeles, y nuevas pretensiones de nuestra visión de la lógica.

Sin embargo, aunque nuestro camino sea formal, este trabajo nace con la idea rectora de ver la lógica y los formalismos como creaciones históricas unidas a todo un complejo social de intereses e ideales humanos, inmersos en su contexto antropológico de creación y surgimiento. Renunciamos a verlos como saberes autónomos, como ideas alejadas de cualquier aplicación. Vemos en ellos el producto de una acción, y como acciones entre otras las cuales le sirven de fundamento, y a las cuales ellos también sirven, de una u otra forma. Es necesario por tanto, no sólo explicar a la lógica y a los formalismos,

---

Sobre esto, una última puntualización: Perelman pide ampiar el concepto de razón que ha sido atrapado por lo logico formal y explica este recorrido a partir de la historia de la racionalidad moderna desde Descartes hasta el positivismo lógico, y de la relación entre lógica, retórica y filosofía. Nosotros hemos querido hacer ese mismo recorrido no sobre el suelo inestable y rico de lo retórico, sino desde la árida dureza de lo formal, es decir: mostrar los hechos que prueban *desde lo formal* y a partir del teorema de Gödel como prueba principal, que los sistemas formales (la lógica formal) no pueden totalizar a la razón, ni siquiera la racionalidad matemática (modelo de razón de los más puros racionalistas), ni siquiera a la lógica misma.

sino intentar situarlos en un contexto social: verlos como instrumentos más del hacer humano.

En el *primer* capitulo pretendo hacer una presentación de la lógica formal, tal y como se le entiende en autores que ya se han hecho clásicos en nuestro medio, y que pensamos recogen el espíritu general de una comprensión contemporánea de esa ciencia, presento igualmente la teoría de la argumentación de Perelman y establezco contrastes que creo oportunos.

En el *segundo* capítulo, hago una breve exposición de la historia de la lógica formal y el surgimiento de los sistemas formales concentrándome en aquellos detalles que me parecen importantes para el trabajo, y que quedarán claros a su momento.

En el *tercero*, hago una exposición detallada de la idea de sistema formal puro, de su metateoría y de algunos elementos que consideré importantes para la exposición y buena comprensión de teorema de incompletud de Gödel.

En el *cuarto*, expongo el teorema y sus consecuencias, y al final me extiendo en una explicación de la naturaleza formal de las limitaciones de los sistemas formales y del contraste entre éste y los lenguajes naturales.

En el *quinto*, expongo la distinción entre las ciencias lógica y logística, que permite dar cuenta y es, a la vez, consecuencia de la disociación entre lógica y formalismo. Esbozo al mismo tiempo las dos tesis a las que ya me he referido.

Concluyo con un *Apéndice*: contiene los detalles de los cálculos lógicos proposicional y de predicados de segundo orden. Doy la versión de éste último que sirve de marco para la presentación del teorema de Gödel. Sobra decir que para aquel que conozca tales sistemas resulta innecesario el consultarlos.

He pensado resolver el problema de la rigurosidad formal (sobre todo en o que respecta a la presentación del Teorema) con un mínimo de simbolismo, con el fin de ser accesible a un público lo más amplio posible, tal vez no versado en detalles técnicos de lógica y matemática (al principio de la realización de este proyecto no lo era yo tampoco, por lo que su realización fue en lo personal toda una aventura gratifcante). Aunque, razonablemente, hemos de exigir a los lectores el conocimiento de los elementos principales sobre la ciencia y la notación lógica, detalles que son accesibles en cursos básicos sobre el tema.

7

A propósito de Kurt Gödel y su obra:

Kurt Gödel (1906-1978), nace e 28 de abril en Brünn, Moravia. A los 14 años comienza su interés por las ciencias exactas, sus intereses siempre estuvieron inclinados más hacia las ciencias teóricas como la física donde obtuvo su primer título académico. Sin embargo se ve llevado de la física a la matemática y de a matemática a la lógica por un afán de buscar los fundamentos últimos de conocimiento y por una deseo de precisión cada vez más elevado. Entre 1926 y 1928 asiste a las reuniones de lo que será el *Círculo de Viena* donde se le despierta el interés por los fundamentos de la matemática y en especial cobra conciencia de la importancia de la lógica para la filosofía.

Su inclinación filosófica queda a la luz con sendos estudios sobre la filosofía Kantiana, su admiración por Edmund Husserl y sus estudios sobre Leibniz que siempre consideró su influencia intelectual más activa. Siempre tuvo un despierto interés por las ideas filosóficas, pero muchas de sus ideas a este respecto son ingenuas y de carácter mas bien especulativo[3].

Afectado siempre por su salud mental y física sufrió desde temprana edad de neurosis de ansiedad y varias veces fue internado por ataques depresivos y paranoicos.

Desde 1933 inició una amistad con Einstein que se vió enriquecida por los estudios de Gödel sobre la teoría de la relatividad.

Entre sus principales títulos se encuentran 1952: doctor honorario en ciencias por Universidad de Harvard; 1955: miembro de la academia nacional de ciencias(USA); 1961: miembro de la sociedad filosófica americana.

La importancia de su obra para las ciencias exactas han llevado a que se le compare con Arquímedes, Frege, Descartes o el mismo Leibniz.

Gödel consideraba al positivismo como representante del "espíritu de la época" en el que se encontraba, y pese a que participó por un tiempo de las reuniones del *Círculo de Viena* sostuvo que: "las consecuencias filosóficas de mis

[3] Creyó, por ejemplo, influenciado por Husserl, en la posibilidad de que la filosofía se transformara en una ciencia exacta, en un ideal de religión racional, en la necesidad de un órgano físico(¿) para la manipulación de entes o impresiones abstractos, en la existencia del alma y en pruebas matemáticas de la existencia de Dios.

resultados, lo mismo que los principios heurísticos que llevan a ellos son cualquier cosa menos positivistas o empiristas"[4].

El mismo Gódel resume los más importantes de sus trabajos:

> *"he logrado una prueba de completud de la lógica de predicados,* ***un modo de hallar, para un sistema matemático formalizado de axiomas, una cuestión de análisis Diofántico indecidibe en dicho sistema; una demostración de que la consistencia de sistema no puede probarse en el mismo sistema****; una prueba de la consistencia de axioma de elección y de la hipótesis del continuo de Cantor con los axiomas de la teoría de conjuntos aceptados normalmente; la construcción de universos rotatorios sobre la base einsteniana de la gravitación"*[5].

Nosotros a lo largo de nuestro trabajo nos referiremos precísamente al segundo y tercero de los mencionados, aquellos resaltados en negrilla.

En resumen, lo que prueba Gödel en su artículo[6] es que, dado un sistema formal lo suficientemente potente para permitir la formalización de las matemáticas (cálculo lógico de predicados de segundo orden), este sistema es incompleto en el sentido en que *es posible **construir** una proposición del sistema que, pese a representar una fórmula **verdadera** de la matemática, no puede ser **deducida** en su interior.* De esta forma el sistema es incapaz de captar todas las verdades de la teoría de números, con la consecuencia que la supuesta formalización que permitía no es tal en el sentido de hacer innecesaria cualquier apelación a una verdad no formal (intuitiva). Gödel también demostró que el construir una prueba de la coherencia de sistema (una prueba de que no se da el demostrar al mismo tiempo y en el mismo sentido tanto A como No-A) es *imposible al interior del mismo sistema,* necesitamos siempre un sistema más vasto para la prueba. De esta manera queda probado al paso que los sistemas no pueden cerrarse sobre sí mismo

[4] Wang Hao, *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Madrid, Alianza, 1991. Pág 57

[5] Ibid, 43.

[6] Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwanter Systeme (Sobre sentencias formamente indecidibes de principia mathemática y sistemas afines). En Gödel Kurt, *Obras completas,* Madrid, Alianza, 1981.

resolviendo todas sus instancias internas y clarificando para siempre todas sus propiedades.

Este resultado daba al traste con dos corrientes de la filosofía matemática: el formalismo de Hilbert y el logicismos de Russell que intentaba, cada una a su manera reducir la matemática en sus fundamentos a un formalismo lógico.

Nuestro interés aquí fue sólo el de adelantar cierta aprehensión intuitiva del significado y la importancia del teorema, esperamos que al final del trabajo se pueda comprender todo lo anterior en sus detalles.

...

Texto tomado de Vega Luis, El velo y la trenza, *Buenos aires, E.U.N., 1997.* Matemáticas y demostración, *págs 77-78. El texto original ha sido modificado y acortado para permitirnos incluirlo aquí en extenso:*

"Érase una vez en Atenas, durante la primera mitad de sigo IV a.c. por entonces algunos atenienses eran geómetras o sofistas. Según las crónicas, unos se distinguían de los otros tan meridianamente como lo verdadero de lo falso. A saber: los geómetras aman la verdad demostrada, los teoremas. Un ateniense es geómetra si y sólo si es absolutamente veraz: sólo dice o que sabe que es cierto. Los sofistas son virtuosos de engaño. Un ateniense es sofista si y solo si es absolutamente mendaz: solo dice lo que sabe que no es cierto. Como ningún ateniense quiere anular su personalidad cayendo en la flagrante inconsistencia o pasar ante sus conciudadanos por una especie de monstruo extranjero, ningún ateniense se declara geómetra y sofista a la vez (**descripción de la teoría de los números matemática**).

Hacia el 385 Patón funda la Academia (**el sistema formal dispuesto para la formalización de la teoría de números**). *La funda – según se dice- bajo el lema <no entre aquí quien no sea geómetra>. Se supone, además, que la academia quiere cumplir su lema fundacional de modo consistente: no puede entrar cualquiera ni, desde luego, alguien tan monstruoso como un geómetra sofista. La academia también pretende llegar a estar completa. i.e.: incluir a todos los atenienses geómetras- y excluir a todos los sofistas-. Pretensión que le impone ser totalmente discriminativa, esto es: identificar a cualquier posible candidato, a cualquier ateniense, como geómetra* (**verdad derivable**) *o como sofista* (**falsedad refutable**).

Un buen día se presenta un ateniense **G**, *que asegura: "yo no soy un geómetra"* **(teorema indecidible de Gödel)**. *La academia se reúne a deliberar. Si* **G** *fuera un geómetra estaría diciendo que no es geómetra (pues los geómetras siempre hablan con la verdad); lo cual es imposible, esta descartado. Se tratará, entonces de un sofista. Pero si* **G** *es un sofista, estaría diciendo lo que sabe que no es cierto (ya que los sofistas siempre mienten); de modo que en realidad sería lo que dice no ser: sería un geómetra y habría de ser incluido. <En suma – sentencia Platón- o lo que dice* **G** *es verdad y entonces* **G** *no es un geómetra; o lo que dice* **G** *no es verdad y entonces nos hallamos ante un monstruo, i. e., un geómetra sofista>. <Luego, -concluye Aristóteles- si la Academia quiere ser consistente, no puede ser efectivamente discriminativa. Más aún, en el caso de* **G,** *sea un ateniense que dice la verdad acerca de sí mismo, la Academia, si quiere mantenerse consistente, nunca llegará a estar completa: siempre habrá agún ateniense como* **G** *que diga lo que sabe que es cierto y no pueda ser reconocido* (**derivado**) *como geómetra, ni pueda ser, por consiguiente, incluido en la Academia>".*

...

CAPÍTULO I:

LA LÓGICA FORMAL Y LA NUEVA RETÓRICA

> No hay nada noble en lo que no se esconda algo perverso.
> Anónimo

> Llamamos límites de nuetra ciencia a sus origenes.
> Nicolás Gomez dávila

La lógica formal tiene sus argumentos. Son sólidos, sistemáticos, tan evidentes que es imposible colocarse un paso sobre ellos sin que alguna respuesta sea posible. La ciencia lógica los presupone tanto que su edificio no consta sino de esos cimientos. Nada hay aparte de ellos en esa construcción.

En la primera parte de este capítulo expondremos los principales argumentos de la lógica formal. Nuestra reconstrucción estará fundamentada en los libros de texto principales especializados en el tema que son de uso común en los estudios universitarios. Pensamos de ahí, recoger una visión de la lógica adecuada a las creencias actuales sobre ella. La mayoría de los elementos que encontraremos aquí han sido explicados con mayor amplitud en los libros a los que nos referimos, por lo que nos permitiremos ser sintéticos en algunos asuntos y extensivos en otros que merecerán después nuestra atención. Para esta reconstrucción de la lógica formal fue de vital importancia, sobre todo, el libro de Alfredo Deaño, *introducción a la lógica formal,* para nosotros el mejor, y más completo texto sobre el tema hallado en nuestro contexto universitario. Su elección también obedece a que ofrece una versión contemporánea de estos argumentos y a su particular tendencia a argumentar sobre tópicos que algunos autores dan por supuesto, lo que quedará claro mientras vayamos avanzando.

En la segunda parte realizaremos la exposición de la nueva retórica de Chaïm Perelman y su contraposición entre demostración y argumentación, mostraremos los principales puntos de divergencia y las consecuencias de éstas.

Por último, en la tercera parte, expondremos la tesis de Perelman que observa a la demostración como "caso límite" de la argumentación y el proyecto de una ampliación del concepto de lógica. Igualmente desplegamos nuestro plan de trabajo para los capítulos siguientes

1. la lógica formal y sus argumentos

En la vida diaria usualmente tenemos la pretensión de usar nuestro lenguaje para razonar, es decir: dirigimos los esfuerzos de nuestra comunicación a través del lenguaje para probar una afirmación que creemos cierta. Eso es lo que entendemos por razonamiento[7], *inferencia*..

Por medio de una inferencia pasamos por una o más afirmaciones que tomamos por ciertas a otra que se supone está implicada por las anteriores. Las primeras, así, sirven de *razones* que apoyan a la última. Y el hecho mismo de que la última se siga de las primeras es el núcleo esencial de la inferencia. La inferencia *es* este paso que se ha dado de unas a otra.

Desde su nacimiento en regla con Aristóteles la lógica es la ciencia que se ocupa de la inferencia racional en e sentido de rectificar, de una u otra manera, qué tipo de inferencias, qué tipo de pasos entre las afirmaciones, pueden ser consideradas correctas o no, válidas o no.

La lógica hoy es, entre tanto, "la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia"[8]. En esta formulación se nos hace caro aclarar la idea de validez *formal.*

¿Qué es una forma y qué es la forma de una inferencia?

De manera amplia, una forma es "algo en lo que concuerdan una serie de objetos u operaciones (que pueden diferir en otros aspectos), de tal modo que aunque los objetos varíen, la forma sigue siendo la misma"[9]

La forma es una estructura, una serie de casilleros vacíos que permiten colocar varios conjuntos de objetos que difieren entre sí de muchas maneras[10],

---

[7] Se puede entender el razonamiento no como una pretensión lingüística sino como un pensamiento, teniendo en cuenta que todo razonamiento es pensamiento, pero podemos pensar sin razonar (de hecho, para muchos de nosotros es posible pensar que razonamos sin, en realidad, hacerlo). Pero, como veremos, lo mínimo que le interesa a la lógica es el razonamiento como pensamiento; como proceso mental.

[8] Deaño Alfredo, *Introducción a la lógica formal*, Madrid, Alianza, 1986. Pág 36

[9] Cohen, Nagel, *Introducción a la lógica y al método científico*, Buenos Aires, Amorrortu, 1979. Pág, 22.

[10] La definición misma de forma nos permite sostener que ésta sólo se adquiere a través de la comparación entre diferentes objetos, los cuales se equiparan entre sí,

pero que comparten de manera esencial la propiedad de "acomodarse" en los casilleros.

Oraciones simples bien formadas del castellano son:

- El balón cayó del techo
- El hombre llegó del extranjero
- La felicidad es esquiva

Independientemente de lo que traten: de ideas abstractas antropomorfizadas, de animales que colocan límites a su territorio para despúes pasarlos orgullosamente, o de inanimados puestos en movimiento por la más enigmática de las leyes físicas, cada una de las oraciones se adecúa a una misma "forma" gramatical: *--sujeto—cópula(verbo)--predicado--*

Todo lo que tiene o se acomoda a una forma tiene también un contenido, que es simplemente aquello que varía en diferentes objetos cuando una misma forma permanece. También las inferencias tienen forma y contenido. Primero que todo tenemos que todo razonamiento está conformado por una o varias *premisas*: las afirmaciones que sirven de razones; y una *conclusión*:: aquella afirmación sostenida por las premisas. Tomada aisladamente ninguna afirmación es, en sí misma una premisa o una conclusión. Sólo cuando se la inserta en un determinado esquema una afirmación se le puede entender como premisa o como conclusión según el caso. El contenido del razonamiento en cada caso es variable y está determinado por aquello que se quiere inferir. Tomemos ejemplos de razonamiento y extraigamos su forma:

Puesto que todo hombre es, de algún modo, racional; y, como es de suyo evidente que los atenienses son hombres. Podemos concluir que son racionales, por lo menos en alguno de los tantos imprecisos sentidos de "lo racional".	Todo artrópodo feliz fluye por los océanos, las langostas son, en el transcurso de su vida, artrópodos (felices). Lo que nos lleva a concluir, sin temor a equivocarnos, que las langostas fluyen alegres por los océanos.
Todo hombre es racional Todo ateniense es hombre /Todo ateniense es racional	Todo artrópodo feliz fluye por el océano Toda langosta es un artrópodo feliz Toda langosta fluye por el océano

como por medio de una *analogía*. La manera de percibir esto es a través de la *representación* de determinados aspectos de un conjunto de objetos en otro. Asi podemos sostener que el objeto x del sistema de cosas A, está representado (cumple igual papel) en el sistema de cosas R, por el objeto a.

P Todo a es b
P Todo b es c

C/ Todo a es c

Los razonamientos anteriores se adecuan a la forma silogística *Barbara*. Corresponde a un silogismo válido, por lo que los razonamientos que se adecuan a él son razonamientos correctos. Notemos, sin embargo, que para llegar a la forma hemos tenido que "depurar" la formulación del razonamiento. La forma entonces sale a la luz despúes, cuando pasamos a substituir los contenidos de los razonamientos por variables simbólicas (a, b, c) que pasan a denotar cualesquiera contenidos, con tal que, a cada contenido corresponda una sola variable y viceversa, de esa manera la forma nos habla de una universalidad, de todo aquel razonamiento cuyos contenidos se adecuen a los casilleros formales.
Los *procedimientos* de la lógica formal moderna, en contraste con la silogística medieval, son los mismos. Sólo que la primera pretende llevar el uso de simbolismos al máximo, eliminando aquello que todavía queda de lenguaje natural en la formulación de la forma anterior (*"todo"*, por cuantificadores; *"es"* por una relación de función entre símbolos), y desplazando el valor de validez de la forma, no a su formulación misma, sino a las diversas transformaciones permitidas a través de unas "formas primeras" o axiomas. Más adelante nos extenderemos sobre este punto: la presentación axiomática de la lógica formal, y veremos que sí existe un cambio esencial, por lo menos en la manera de comprensión de lo que es una derivación formal.

Todo razonamiento, ya lo dijimos, tiene forma: la estructura que le subyace, y contenido: aquello de lo que trata y que se adecua a la forma. La división o escisión entre forma y contenido es la escisión capital, última y primera de la lógica formal. Es un dogma de la lógica, sin ella no hay lógica formal posible. La lógica pretende hacer un estudio de la forma de los razonamientos para aclarar qué hay en su forma que los haga válidos o no, con independencia de qué contenidos les subyacen.
Ahora, a la lógica no le interesa todo tipo de razonamientos sino, al contrario, sólo aquellos razonamientos cuya validez descansa en la pura forma de

éstos[11]. una forma válida es un "esquema de inferencia tal que, cualquier razonamiento que podamos hacer interpretando las variables de ese esquema, si las premisas de razonamiento son verdaderas, la conclusión será verdadera también *necesariamente*"[12]

En los razonamientos formalmente válidos la relación inferencial que hay entre las premisas y su conclusión es *constrictiva* en el sentido que si las premisas son verdaderas la conclusión se seguirá verdadera *en virtud de la sola forma o esquema de razonamiento.*

Es posible realizar razonamientos formalmente válidos y correctos utilizando premisas y conclusiones falsas, también utilizar premisas falsas y llegar a conclusiones que se adecuen a la verdad (como en nuestro segundo razonamiento, donde utilizamos como premisa la afirmación "todo artrópodo "fluye" por el océano", pero no todos los artrópodos son acuáticos), pero esto no es de importancia. A la lógica formal no le interesa la verdad ni de las premisas ni de la concusión. Lo único en lo que está interesada es que, *si* las premisas son verdaderas, *entonces* la forma lógica que sea utilizada debe garantizar que la conclusión lo será también.

No estamos interesados en la verdad de las afirmaciones (*verdad* material) sino en la coherencia formal de la estructura que los une (*validez* formal).

La lógica formal intenta entonces reducir esas formas válidas del razonamiento a reglas o leyes de carácter *universal*, aplicables toda vez que se desee realizar un razonamiento, ya sea para su corrección o justificación.

¿Cómo confirmamos que una forma lógica es válida o no, que todos los razonamientos acordes con ella? Esto no es de suyo evidente, puede que sea necesario construir una *prueba metaformal* (cuyo sentido exploraremos más tarde) o que simplemente construyamos un *contraejemplo*: un razonamiento con la misma forma pero cuyo contenido refute la afirmación que si sus premisas son verdaderas el enunciado será sin duda verdadero. En un caso

[11] Quedan por fuera de la lógica formal los razonamientos inductivos, aquellos que son más o menos probables. Entre otras cosas, la lógica formal sólo los juzga mediante la probabilidad cuantitativa, y normalmente se los tiene, no como medio de prueba, sino como método de verificación, o simplemente como herramienta de descubrimiento o creación de leyes científicas.

[6] Deaño, Pág 40.

tomamos como objeto de análisis *la forma*, y en otro nuestro objeto es *el objeto* contenido en la forma.

Para hacer un estudio de este tipo, un estudio sistemático de la forma de las diferentes inferencias en el lenguaje ordinario, la lógica debe ver los razonamientos de tal manera que pueda abstraer de ellos la forma.

La lógica formal distingue entonces entre razonamiento como actividad o proceso psicológico de un sujeto y el razonamiento como producto o resultado de tal actividad "al representar la estructura del razonamiento mediante una ley lógica nos estamos limitando a hacer un croquis de su inferencia, a presentar esquemáticamente el recorrido argumental del sujeto, pero no estamos repitiendo el curso de su razonamiento; estamos perdiéndonos el *proceso* de inferencia"[13]

Esto parte de la premisa que el proceso psicológico inferencial del sujeto se encuentra plasmado en un lenguaje que lo traslada a otro ámbito de existencia diferente del meramente mental y representativo, se encuentra *objetivizado* por el lenguaje. Pero, la lógica formal para justificar esta visión debe establecer distinciones que se encarguen de objetivizar el lenguaje mismo.

La lógica formal distingue entonces entre oraciones, proposiciones y enunciados: una *proposición* no es una entidad lingüística sino más bien un *significado* de ésta, se refiere simplemente a una pretensión de verdad y, por tanto, puede ser manifestada con diferentes *oraciones* asertóricas[14]. Al *acto* lingüístico particular de carácter más bien psicológico, compuesto del conjunto de una oración y la proposición que transmite se le llama *enunciado*. Los enunciados tienen existencia física y social, se rigen por normas de uso o ?

[13] Ibid, págs 131, 132.

[14] La lógica formal usualmente trata de enunciados apofánticos o asertóricos, que son aquellos que sostienen pretensiones de verdad discursivas. Son los que usamos generalmente cuando utilizamos el lenguaje para transmitir información o descripciones sobre estados de cosas, descripciones que puede decirse son verdaderas o falsas. El lenguaje también lo utilizamos con otras pretensiones que no son asertóricas, como cuando preguntamos, ordenamos, expresamos emociones, etc. Veremos más adelante que la lógica formal, aunque se ocupa primeramente del discurso apofántico, ha tenido la voluntad de tratar formalmente estos otros tipos de discursos: los que utilizamos para formular normas, ordenes, deseos. Lo importante aquí es que la lógica sigue ocupándose de la *inferencia*, ya sea entre afirmaciones, entre normas o valores, y pretende tratar sistemáticamente las condiciones *formales* de éstas.

gusto intersubjetivo, pero no son verdaderos o falsos. Solo puede predicarse aquello de las proposiciones[15].

La lógica formal trata las afirmaciones como pretensiones de verdad, como proposiciones, y prescinde tanto de las oraciones como de los enunciados.

La lógica formal es, entonces, la ciencia de la inferencia formalmente válida, ella "pretende codificar los principios de la validez formal de los razonamientos, *sistematizar* un conjunto de leyes o reglas para el estudio de las condiciones formales en las que el enunciado se puede inferir válidamente a partir de otro"[16]. Es una ciencia que pretende ser un sistema único donde todos sus principios deductivos sean coherentes entre sí y estén organizados de la misma manera deductiva como su propia naturaleza. La lógica se autoincluye en sí misma como ciencia deductiva de la inferencia deductiva, es sistema de sí misma y única apelación para dirimir sus propios juicios. Ya que su principal labor es servir de marco para las condiciones formales de toda verdad posible en todo otro sistema de saber.

Lenguajes ordinarios y lenguaje formal de la lógica

La lógica está interesada entonces en la forma de los razonamientos, pero hemos visto que la forma esta oculta, se esconde tras aquello que hay de material en la inferencia. Con el fin de realizar su labor la lógica debe hacerse a un lenguaje que abstraiga la forma oculta, la aísle y libere, que la haga resplandecer sola. Es por esto que la lógica formal se hace a un lenguaje artificial-formal.

Las particularidades de este lenguaje desde el punto de vista de la lógica, y su conexión con el lenguaje ordinario será nuestro último punto, y el más importante a tratar en esta reconstrucción de los argumentos de la lógica formal.

---

[15] Hay que aclarar que muchas veces se utiliza el término "enunciado" para referirse a lo que nosotros entendemos por juicio. Se trata de una cuestión de convenciónes y tradiciones entre diferentes escuelas. Sin embargo, a distinción conceptual entre lo que nosotros entendemos por enunciado, y lo que entendemos por proposición, sigue en pie.

[16] Ibid, 42.

A partir de aquí exponemos y analizamos la relación que existe entre lenguaje ordinario y lenguaje formal de la lógica en la teoría lógica de Alfredo Deaño, mi interés está en mostrar la manera como en la lógica formal se observa el surgimiento de la *forma* lógica a través de lenguaje ordinario.

Los lenguajes ordinarios son aquellos que heredamos de nuestros padres y que utilizamos en nuestra vida cotidiana. Han sido construidos pero muy lentamente y sin un propósito definido explícitamente por los hombres, es fruto de las interelaciones entre ellos, y entre ellos y su medio. Su génesis está unida al discurrir histórico de una civilización o cultura por lo cual están plagados de supervivientes arcaicos de usos, valores, normas, etc. Siempre aparecen insertos en un contexto que los ubica a nivel pragmático y cultural.

Existen otro tipo de lenguajes que, contrario a los ordinarios son elaborados para servir a un propósito específico son los lenguajes artificiales construidos la mayoría a partir de simbolismos para denotar ciertos elementos que se vuelven específicos para un fin determinado.

El paradigma de lenguaje artificial es el que utilizamos para las matemáticas, donde los símbolos quieren significar elementos abstractos que son los únicos importantes para el acto de contar. Las habilidades matemáticas de los hombres se amplían así a un máximo ya que seríamos incapaces (aunque es posible) de realizar los tremendos cálculos que llevamos a cabo con ese lenguaje artificial en términos de un lenguaje como el ordinario.

En el caso de la lógica, el objetivo del lenguaje artificial que utiliza es servir de vehículo para el análisis de la forma de los razonamientos. Fundamenta su análisis en la interpretación de un cálculo formal en términos que denotan los diferentes elementos necesarios para la lógica, tales como variables, términos relacionales, etc.

Pero, todo razonamiento es expresado en un lenguaje ordinario y sólo a través de él cobra sentido su análisis lógico. ¿Cuál es la relación entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje artificial de la lógica?

Deaño parte de la idea de Wittgenstein del lenguaje como un conjunto de juegos para explicar esta relación: El lenguaje es un repertorio ampliable de juegos, sistemas de comunicación distintos entre si que se conectan con el mundo de diversos modos, sirven para diferentes usos y se gobiernan por distintas reglas. Dar órdenes, rezar, insultar, preguntar, son cada uno juegos del lenguaje diferentes entre sí. El lenguaje ordinario les da cabida a todos, por lo que su radio de acción es inmensamente amplio, pero precísamente por eso el lenguaje ordinario es vago e impreciso.

Entre todos los juegos de lenguaje posibles se encuentra uno que consiste en realizar inferencias. "El lenguaje de la lógica, construido sobre la base de este juego ordinario del lenguaje, es un juego *formalizado* que consiste, pura y simplemente, en razonar"[17]. Las ventajas de los lenguajes artificiales-formales con respecto al ordinario reside en que los primeros son lenguajes con una precisión muy alta que están construidos para acoger sólo aquello que es necesario para el análisis lógico: la forma lógica.

Para construir estos lenguajes es necesario el análisis lógico del razonamiento en el lenguaje ordinario, lo cual acarrea el análisis lógico del lenguaje ya que, como hemos dicho los razonamientos se dan en el lenguaje, ambos análisis se confunden.

El análisis lógico está interesado en señalar, para corregir, las deficiencias expresivas del lenguaje natural respecto al juego de lenguaje que consiste en razonar. Es un análisis reductivo en el sentido en que reduce la diversidad de las expresiones en un simbolismo homogéneo. Otras veces ocurre a la inversa, a un solo signo del lenguaje corresponde más de una constante lógica.

En ambos casos se reduce la diversidad lingüística a unidad lógica a través de la univocidad de símbolo artificial, más adelante volveremos sobre este punto, por ahora retengamos lo esencial: en un caso lo que se propone es que el mismo símbolo denote muchas expresiones lingüísticas por medio de una generalización uniforme; en otro, se pretende que un mismo símbolo se restringe a un dominio de expresiones más limitado en un proceso de particularización[18].

De esta forma la formalización simbólica, distingue y separa, con la intención de que ningún símbolo represente más que una noción lógica, la utilización de variables permite suprimir los contenidos al representarlos con símbolos que no son más que las casillas vacías de las expresiones lógicas. Permite de esta manera que el lógico se concentre en lo esencial, pues pone de manifiesto la

---

[18] En todo caso la traducción posible del lenguaje ordinario al lenguaje formal de la lógica no es algo que pueda reducirse a un proceso mecánico, se necesita inventiva y análisis, y en muchos casos es necesario inclusive la argumentación no formal.

forma y subsana todo tipo de deformaciones producidas por la diversidad emotiva de los lenguajes ordinarios.

Ahora bien, es nuestro interés explicar la naturaleza de este formalismo artificial con respecto a la corriente lingüística de que se le ha desgajado. ¿Será que se pierde algo importante a nivel lógico con esta traducción?. ¿Es la característica esencial del razonar algo que se reduce a lo formal?

Paro, según nuestro autor, el análisis lógico sólo busca aquellos elementos relevantes para la validez formal de las inferencias[19]. El proceso de formalización no parece afectar estos elementos "en el curso de la traducción se han perdido matices, matices importantes (si es que se puede decir que el contenido entero de un texto es un "matiz" de éste); pero no se trata de matices importantes a nivel lógico"[20]

Esta capacidad de la forma por abarcar aquello importante lógicamente se explica, al parecer, por el estatus mismo del análisis realizado: el lenguaje lógico es "un lenguaje *abstracto*: un lenguaje construido abstrayendo del lenguaje ordinario determinados aspectos, determinados usos, determinados tipos de expresiones que son relevantes desde el punto de vista lógico-formal"[21] Vemos pues que el lenguaje de la lógica retiene lo relevante, es abstracto, pero pese a surgir de un lenguaje ordinario, lleno de ambigüedades y configuraciones mediadas por relaciones entre sujetos, logra llegar a un formalismo puro.

¿Deaño simplemente sostiene que la lógica sólo se interesa por la validez formal de los razonamientos *formales* o lo que quiere decir es que el razonamiento es *formal* de por sí, y lo que hacemos es simplemente abstraer esa formalidad *del interior de los lenguajes naturales*?.

Veamos esta nueva cita: "en el lenguaje ordinario encontramos argumentaciones, razonamientos, inferencias. Es decir, en el lenguaje ordinario hallamos expresiones de carácter lógico-formal. Lo que el lógico hace es *extraer del lenguaje natural esas expresiones, aislarlas e integrarlas en una estructura de cálculo*"[22].

---

[19] Cfr, Ibid, 80.
[20] Ibid, 81.
[21] Ibid, 80
[22] Ibid, 81, subrayado nuestro.

Por lo que el lenguaje lógico parece ser, simplemente, la "puesta en limpio" de toda una zona oculta en la ambigüedad de nuestro lenguaje ordinario, "las reglas de razonamiento que en aquel eran vagas e implícitas, se vuelven en este explícitas y precisas; la estructura de los razonamientos, que en aquel estaba oculta o incluso desfigurada, se hace en éste patente a solas"[23].

En estos términos se puede configurar una dicotomía interpretativa: la forma lógica *antes* que el cálculo lógico (el cálculo lógico elaborado para contener la forma del razonamiento en el lenguaje ordinario); o la forma *después* del cálculo (a través del cálculo queremos encarnar, llevar a la realidad, una forma ideal que vemos, o queremos ver, sobre el razonamiento en el lenguaje ordinario). Deaño, por su parte presenta el asunto como lo primero pese, o precisamente porque, ve el análisis lógico-formal como una abstracción de procesos o expresiones presentes ya en el lenguaje ordinario.

Se postula, entonces, que la forma lógica esta allí en el lenguaje, el lógico lo único que hace es traerla a la luz y sistematizarla deductivamente.

¿Pero esto no es lo mismo que decir que para Deaño, inferencia y forma lógica despliegan su imperio bajo el mismo territorio, de manera que sería imposible la aparición de una inferencia de carácter no formal que precise un análisis no formal del lenguaje?

Deaño mismo sostiene "La aplicación del análisis formal a una determinada materia puede revelar -y de hecho ha revelado en multitud de ocasiones, y sigue revelando- insuficiencias de la lógica en su actual estado, y ha constituido, por tanto, un estimulo para su despliegue- para su ampliación, para su afinamiento- en una u otra direccion"[24]

En este contexto las lógicas no clásicas pretenden ampliar el rango de acción de la forma lógica de manera tal que pueda dar cuenta de tales inferencias que parecen escapar análisis clásico[25].

---

[23] Ibid, 85

[24] Ibid, 321

[25] cfr, Deaño, págs 299- 325. Entre otras, las lógicas no clásicas son aquellas que difieren de la lógica formal tradicional en alguno, o varios, de sus presupuestos *no formales.* Frente a la lógica de dos valores de verdad, se esgrime la lógica bivalente o multivalente que pretenden esquematizar enunciados contingentes o de valor de verdad indeterminado. las lógicas modales intentan corregir la rigidez asertórica de la lógica formal a postular la existencia de modalidades en los valores de verdad, entre elas se encuentra la lógica deóntica que intenta ampliar el estudio de la inferencia formal del discurso apofántico a discurso normativo, que haba sobre deberes y reglas

Deaño sostiene que las lógicas no clásicas permiten enriquecer la lógica formal hasta el punto que puedan formalizarse "aspectos o usos del lenguaje que antes parecían escapar a la lógica"[26] De esta forma "lejos de pensar que el lenguaje ordinario, por su complejidad, exige estudios "informales", asistemáticos, en los que la lógica formal desempeñe a lo sumo un papel ideal de precisión inalcanzable, los lingüistas actuales creen que, precisamente por su complejidad, el lenguaje ordinario demanda una *lógica formal*, una reconstrucción *formal* cada vez mas refinada"[27]

Puede que la postura de Deaño quede mejor perfilada si vemos lo que piensa éste de la supuesta existencia de *dos lógicas*: una lógica formal con sus propias convenciones formales autónomas sobre las del lenguaje ordinario; y una "presunta" "lógica informal" del lenguaje ordinario cuyos principios están alejados en principio de aquellos rígidos de la lógica formal. Sostiene sobre esto nuestro autor: "aunque a menudo han solido presentarse ambas posturas(...) como posturas contrapuestas, bien se ve que, a la postre, ambas se complementan y vienen a dar lo mismo: en la disociación entre lógica formal y lenguaje ordinario. Aquella, reducida a una teoría angélica del raciocinio, campando por sus respectos en un cielo sin nubes; y el lenguaje ordinario, abandonado por imposible"[28]

En otro contexto se pregunta "¿Qué es la lógica? ¿Un puro instrumento de análisis, que podemos perfeccionar o incluso reemplazar enteramente en virtud de simple razones de eficacia, en función de criterios puramente pragmáticos, o bien, más allá de eso, *la expresión de las condiciones formales del ejercicio posible de todo discurso, la mostración de la estructura y los cauces, de las posibilidades y de los límites de nuestro conocimiento de las cosas*"[29].

Es cierto que al final de su texto el autor sostiene que la lógica es ciencia autocrítica, que como la razón misma encierra la posibilidad de la ironía pues

---

que no puede ser descritos como verdaderos o falsos, se incluyen también las lógicas cronológicas que desean dar cuenta de factor temporal en el discurrir inferencial.

[26] Ibid, 334.

[27] Ibid, 334.

[28] Ibid, 196

[29] Ibid, 325. Subrayado nuestro

"ella misma escenifica en su propio seno la tensión entre lo que su análisis captura y aquello que por principio se le escapa"[30].

Pero la lógica no debe dejar el postulado según el cual se rige por lo formal, ella es *nuestro destino en lo formal*. La lógica es una ciencia en expansión, por lo que, aquello que antes no cabía en su seno, mañana lo estará. Parece imposible que algo pueda escaparse de su seno expansionista, ya que ella es la ciencia "que tiene por objeto el estudio de las exigencias formales de inteligibilidad de todo discurso, los esquemas de ilación que se dan por supuestos en todo ejercicio de la conciencia"[31].

Recordemos que la forma lógica esta inserta de manera profunda en el uso mismo de lenguaje cuando éste se propone realizar inferencias, la forma está allí, y parece ser algo tan objetivo como la conciencia misma, de modo que la lógica parece tener una raiz *trascendental*, en el más puro sentido kantiano del término. Por lo que no dejamos de pensar que, pese a que Deaño se pregunta por una racionalidad no formal, si la racionalidad formal no es la única, por lo menos es la fundamental; previa a todo uso posterior del término racional.

Pensamos haber hecho una reconstrucción de pensamiento de Afredo Deaño sobre el tema de las relaciones entre forma lógica racionalidad y lenguaje ordinario. Obviamente el material utilizado no es suficiente para llegar a una formulación concluyente ya que e texto de Deaño no esta realizado para dar respuestas a estas preguntas, pero si no es cierto lo anterior, también lo es que la manera como Deaño se expresa de estos asuntos permite realizar nuestra interpretación.

La historia de la filosofía y de la política, ha mostrado que no siempre lo importante es qué pensó el autor, sino cómo se le interpretó, quién y cuántos lo leyeron. Pueden darse en la historia miles de ejemplos de ideas o errores, no cometidos o pensados por los grandes hombres, sino permitidos por ellos a través de sus palabras.

---

[30] Ibid, 339.
[30] Ibid, 348, 349

Hemos querido aquí dar una idea de autocomprensión moderna de la labor y "arte" de la lógica formal, tal y como la comprenden los lógicos contemporáneos, tal y como es heredada por nosotros.

2. el proyecto de la nueva retórica

Pero aún así hay los que rechazan la lógica formal por considerarla insuficiente, la lógica prescinde de cualquier rasgo no formal bajo el simple argumento de no ser relevante para las inferencias racionales. No sólo eso, los elementos extraídos del lenguaje ordinario son reducidos a una estructra tipográfica y calculística completamente artificial y de expresividad restringida. Todo contendido se relega a un segundo plano de nulo interés para la lógica,y los elementos valorativos y jerarquizables del lenguaje son vistos como obstáculos para la estructura formal y para su pretensión, creado por un concepto de racionalidad lógico demostrativa, de servir de instrumento para alcanzar verdades objetivas y universales. De esta manera la lógica formal termina identificando razón con cálculo, desconociendo las innumerables veces en las que razonamos sin calcular. Las cuales serían abandonadas como pura transmisión de emotivismos irracionales[32] abandonados a la arbitrariedad o a la violencia.

Chaïm Pereman fue un positivista lógico, y como todo positivista lógico creía ciegamente en los poderes analíticos de la lógica y en su capacidad para describir objetivamente tanto al mundo como nuestra capacidad para razonar sobre él. Sin embargo, no era, como la mayoría de los positivistas, ajeno al problema de qué es lo lógico (lo racional) en un terreno tan pedregoso como el de los valores y las acciones humanas. Aparte de lógico y filósofo fue jurista por lo que el problema de la justicia estuvo siempre presente. Alguna vez pudo preguntarse por a posibilidad de crear una lógica de los juicios de valor de la misma manera que desde Aristóteles, se había realizado una lógica del discurso apofántico.

[32] Perelman Chaïm, *Tratado de la argumentación*, Madrid, Gredos, 1994. Págs 32, 33.

En *De la justicia* (1945) Perelman se propuso despejar de sus contenidos, tal y como hicimos nosotros con los razonamientos de la lógica, todas las formulaciones concretas conocidas de la justicia con el fín de encontrar una *regla de justicia formal*[33] que pudiera servir al vago concepto de Justicia de la misma manera que sirven los principios de la lógica formal a la Verdad. Sin embargo Perelman se dio cuenta que, aunque era posible despejar tal regla formal era precisamente en los contenidos concretos, en los juicios de valor subyacentes a la forma, y que habían sido despejados con anterioridad, donde se encontraba, en cada caso, la determinación de lo que debía ser considerado justo[34]. Como estos juicios de valor se mostraban para él en ese momento indeterminados, evanescentes, y escapaban a toda formulación en términos de forma, el joven Perelman decidió que no podía existir una lógica de los juicios de valor.

Pero la conclusión positivista[35] (los juicios de valor son irracionales) no parecía la adecuada en manos de un filósofo abogado. Por lo que se propuso buscar aquella lógica de juicios de valor que había escapado al análisis en su primer intento. Sin embargo tal lógica parecía no existir sino que, al contrario, una manera de tratar los juicios de valor y los enunciados prácticos había sido ignorada por toda una tradición filosófica, y en esa parecía estar la respuesta al problema: esta ciencia era la antigua retórica.

---

[33] La justicias formal se define como "un principio de acción de acuerdo con el cual los seres de una misma categoría esencial deben ser tratados de la misma manera"(Perelman, *De la justicia*, México, U.N.A.M., 1964. Pág 28)

[34] La regla de justicia formal deja indeterminado qué se debe entender por esencial en una categoria de seres y qué nó; además, de qué manera han de ser tratados los seres esencialmente iguales. De esta manera, la justicia formal se refiere simplemente a la *exigencia* de seguirse en cada caso de una totalidad por una regla, pero deja indeterminado la esencia de esta regla, y, en pocas palabras, si esta regla es, en sí misma, justa o injusta (Cfr, Ibid, págs 51-60).

[35] Los positivistas lógicos sostenían que la filosofía y las ciencias deben tratar únicamente con enunciados lógicos (analíticos) o enunciados refereentes a hechos (empíricos). Esta tesis certificaba al lenguaje como una imagen reflejada del mundo cuya única relación con él es la de copiarlo por medio de enunciados descriptivos. La cuestión sobre la verdad o la falsedad de los enunciados se debe resolver, entonces, por simple inspección lógica y empírica, el significado lo daría a simple verificación de los enunciados en la realidad. De esta suerte, reduciendo el mundo a datos de los sentidos e identificando significado con referencia, las expresiones que no describen algo sobre e mundo con información directa sobre hechos e imposibles de verificación (como las metafísicas, y todos los juicios de valor) serían pseudoenunciados sin referente quer no podrían catalogarse como verdaderos o falsos, y por lo tanto, no serían más que sinsentidos. La tarea final de la filosofía sería desenmascarar estos enunciados y eliminarlos autosupriméndose ella misma en el camino.

En la modernidad la retórica era vista como una mera ciencia de ornato más cercana a la poética y al arte en general que a la lógica o la filosofía. Toda su capacidad gnoseológica le fue castrada por un paradigma de razón moderno que consideraba la verdad como asunto de la lógica formal y de la evidencia racional a la que ésta llevaba de forma constrictiva.

Pero, en la antigüedad la lógica no era simplemente un arte sino una técnica utilizada para actuar sobre los hombres a través del lenguaje y llevarlos al convencimiento práctico sobre ciertas verdades de interés general: la retórica era un instrumento de la política, al servicio del bienestar de la *polis.* Sin embargo, desde Platón la retórica fue relegada a una ciencia de la apariencia, del engaño sofístico que no tenía ningún papel en el descubrimiento de la verdad. La tradición moderna, pese ha haber heredado el ideal democrático griego, siguió a Platón en esto último, y por medio de una serie de restricciones hizo de la retórica clásica una "ciencia" de la clasificación de figuras ornamentales, donde éstas aparecián aisladas (disecadas como hierbas muertas) de todo contexto normativo que les hubiera dado vida filosófica.

El intento de Perelman reside en restituir la conexión de la retórica con el corpus filosófico y como teoría argumentativa, a través de la habilitación de su funcionalidad dialéctica[36] y a través de la inclusión de los auditorios como referencia de toda argumentación[37].

De este proyecto de rehabilitación de la retórica y la dialéctica nace la Teoría de la Argumentación que tiene por objeto "el estudio de las técnicas discursivas que permiten provocar o aumentar la adhesión de las personas a las tesis presentadas para su asentimiento"[38]

Las argumentaciones no tiene por objeto llevar a una Verdad sino persuadir o convencer a los hombres para que consideren algo por verdadero o

[36] Aristóteles, padre de la lógica, habia distinguido entre razonamientos analíticos (cuyas conclusiones son necesarias, y se fundamentan en premisas verdaderas, independientemente de a opinión humana) y razonamientos dialécticos (de conclusiones probables y premisas probables). Éstos últimos válidos en las discusiones sobre los primeros principios intuitivos de la ciencias, como crítica de los razonamientos de un adversario en ampias cuestiones y sobre problemas prácticos, ya que sus premisas eran probables en el sentido de ser aceptables o defendidas por la mayoría, o por los sabios más entendidos. Pero, la lógica moderna guiada por el paradigma de razón *more geométrico* olvidó los razonamiento dialécticos e identificó lógica formal con lógica analítica.

[31] Cfr, Ibid, 36.

[32] Cfr, Ibid, 34.

conveniente. Este estudio se justifica inclusive en el plano de la verdad cuando se tiene en cuenta que ella necesita también ser aceptada. Una verdad no aceptada es una verdad muerta, ineficiente en la realidad práctica.

La diferencia esencial entre la lógica dialéctica aristotélica y el proyecto de la nueva retórica de Perelman es la inclusión del *auditorio* como referencia obligada de toda argumentación. El acto de argumentar es una relación triádica intersubjetiva, donde interviene un orador, un argumento y un auditorio. El auditorio es una construcción del orador en la medida en que es su *intención* es influir en él.

La construcción se realiza, pues para el orador es necesaria una adaptación a su auditorio, llegar a un acuerdo con él sobre las premisas utilizadas al inicio de la argumentación.

La argumentación es una relación entre personas. La conclusión no se da como una aceptación pasiva de una verdad objetiva sino que se supone que ella es guiada por una decisión libre. Hemos dicho que la argumentación se dirige no a la verdad sino a la justificación pragmática de fines y valores. Esto es importante; una deducción rompe con toda apelación a la idea de responsabilidad de las decisiones tomadas, ya que en ella nos debemos rendir ante la evidencia de la forma, no hay manera de oponérsele si se aceptan los términos.

En cambio, el que se adhiere a una tesis debe, por principio, responsabilizarse de su decisión ya que la adhesión no fue absoluta, y siempre hubo un argumento en contrario. La idea misma de la argumentación nos lleva a reconocer que la escogencia entre dos tesis implica que hemos comprometido nuestro ser, ya que juzgamos a partir de nuestra concepción de mundo, tanto teórica como práctica[39].

[39] La inclusión del principio de responsabilidad en la Teoría de la Argumentación (principio que parece extraer Perelman de la nueva dialectica de F. Gonseth) le permite postular a Perelman que el dogmatismo y el escepticismo tienen nacimientos simétricos en la no percepción de la fuerza racional de los argumentos no constrictivos: El *dogmatico* no acepta que toda argumentación es falible, y desea ver en sus adhesiones concusions necesarias, objetivizándo su punto de vista y escogiendo e camino del totalitarismo y la violencia. El *escéptico* descubre que toda argumentación es falible y, por tanto, renuncia a cualquier toma de posición racional, tomando la vía paralela del inmovilismo y la ironía ciega.

El estudio de Perelman pretende ser meramente descriptivo. Pero, esto no quiere decir que sus ideas y metodología no partan de principios que surgen de valoraciones de carácter filosófico, que pueden someterse a consideración o evaluación, lo mismo que a la extracción de sus consecuencias normativas.

Baste aquí una presentación que no tiene otro objetivo que servir de introducción a lo que sigue. De la Teoría de la Argumentación percibiremos más claramente la diferencia entre demostración y argumentación y, por último, la exposición de la tesis según la cual la demostración es un caso límite de la argumentación, importante para nuestra posterior apropiación de la Teoría de la Argumentación.

Demostración y argumentación

Hemos descrito a la Teoría de la Argumentación, pero estamos muy lejos de comprender el significado preciso de la noción de argumentación. El primer acercamiento a esta idea se da a partir una definición negativa: una argumentación es todo aquel razonamiento diferente a una deducción formal.

Mientras una demostración que se presenta en un lenguaje artificial pretende ser objetiva, unívoca y cerrada en sus propios términos, impersonal desde todo punto de vista, para así garantizar la validez formal de sus conclusiones, la propiedad esencia de la argumentación, cuando se la contrapone a la demostración, es que su conclusión no es ni pretende ser necesaria, sino probable, más o menos fuerte.

Trataremos de clarificar esta diferencia esencial analizando las características básicas de la idea de argumentación:

Según Perelman ambos cometen el error de no reconocer la naturaleza básica de las pruebas argumentativas, rehuyendo para sí el principio de responsabilidad (desconociendo la unión entre lo racional y lo emotivo, entre pensamiento y acción).

[33] Como la, al parecer, categórica exclusión violencia / argumentación,

Una argumentación no busca demostrar una verdad objetiva de manera necesaria sino generar una adhesión de carácter más bien psicológico y variable El objetivo de los argumentos es justificar esta adhesión de un individuo o colectivo a una tesis que se le presenta para su asentimiento. Ninguna argumentación puede ser por tanto impersonal, sino *ad hominem*, pues se juzga por su acción (efecto) sobre un espíritu. Se dirige no sólo al componente puramente racional sino a todo el aparato psicológico de un individuo, incluyendo sus emociones.

Mientras la demostración es una proceso de carácter más bien monológico, que prescinde de toda referencia a un receptor. La argumentación se refiere a lo que cada uno esta dispuesto a conceder en un momento determinado. Es una relación dialógica e intersubjetiva que se establece entre la persona que enuncia y defiende una tesis (orador), y aquellos a los que éste se dirige (auditorio). Este es una de las características que impide que la transmisión de adhesión sea necesaria, pues la utilización de una técnica discursiva cualquiera no garantiza nada, la adhesión depende también de la interacción social entre orador y auditorio y de la manera como éste recibe el discurso de aquél. En una demostración no tiene importancia quién la presente, se supone que se haba de ó objetivamente válido y todos los interesados en a verdad escucharan de igual manera. En una argumentación siempre hay una constante interacción entre el orador (su prestigio, su imagen, su función social) y aquello que sostiene para el asentimiento de su auditorio.

Otra característica de la argumentación es que a diferencia de una demostración, no se lleva acabo en un lenguaje artificial sino dentro de un lenguaje ordinario. De este principio básico se desprenden varias consecuencias: las expresiones en un lenguaje ordinario no pretenden ser unívocas, muy al contrario, la ambigüedad de las nociones en el lenguaje ordinario es una característica esencial de éste, necesaria para a comunicación entre sujetos en contextos comunes de vida. Los lenguajes ordinarios siempre están abiertos a un contexto y sus nociones a una interpretación variada.

Perelman incluso expone toda una teoría de las nociones confusas que se hace necesario reseñar pues nos encontraremos con ella más adelante. La ambigüedad de las nociones en los lenguajes ordinarios posibilita que as argumentaciones que las utilizan estén abiertas a la experiencia. Como a experiencia futura no es previsible, la ambigüedad permite que las nociones se amolden a lo futuro al permitir, sobre una nueva interpretación, una modificación de su sentido de esta forma puede reinsertarse a nuevos hechos y a nuevos contenidos.

Para Perelman el lenguaje ordinario no es sólo un instrumento de persuasión sino un elemento creador de sentidos y de experiencias. Los conceptos fluyen, y a través de analogías y nuevas interpretaciones, son capaces de amoldarse a nuevos contextos o aplicaciones. Argumentar supone adherirse a una forma de ver la realidad propia de un lenguaje ordinario, el cual arrastra tras de sí los valores e historia de toda una comunidad humana concreta

En cambio, la univocidad a la que son sometidos los términos de una demostración a través de un lenguaje artificial los vuelve rígidos y autoritarios frente a una nueva experiencia. la sola existencia de una ambigüedad invalida una argumentación (falacia del equívoco). Los sistemas lógicos, al delimitar el campo de aplicación de sus nociones hasta el punto de concederles un mero contenido vacío no tienen más destino cuando se enfrentan a una experiencia adversa que suprimirla, reducirla a sus rígidos términos, o exponerse a que revienten sus propios esquemas preestabecidos al contacto con esa realidad. Lo formal no tiene más opción en lo que a nuevas experiencias adversas se trata: anulación o arbitrariedad.

Las nociones confusas, al contrario, al no estar sus sentidos establecidos a priori y estar abiertas a la nuevas interpretaciones, impiden que las concusiones de una argumentación sean concluyentes. Las nuevas interpretaciones y sentidos pueden cambiar totalmente la configuración y comprensión de una argumentación en su totalidad modificando de esta manera su valor de adhesión.

En lo que sigue expondremos algunas diferencias de importancia que pueden extraerse de la distinción trazada:

- Las demostraciones son absolutamente intemporales en la medida en que están referidas a un formalismo simbólico que no lleva referencia a modificaciones en el tiempo, el simbolismo es estático y las leyes lógicas no son modificadas por el paso de tiempo. En cambio, la argumentación que tiene por objeto la adhesión psicológica debe adaptarse a las modificaciones de ésta y a las nuevas interpretaciones de las nociones. El orden y la extensión temporal en el que se presentan los argumentos también influye en su valoración, mientras que en una demostración las premisas están en un mismo nivel de estatismo formal.

- Las premisas de una demostración tienen el mismo estatus, los axiomas de un sistema formal y las premisas de una deducción se encuentran bajo un mismo rango de validez, son unidimensionales y no admiten jerarquías entre ellos, los sistemas lógicos formales se encuentran represados bajo una democratización estricta. Las premisas de una argumentación, en cambio, parten de un acuerdo, y del estatus de este acuerdo obtienen su valor. Este valor va desde ser *verdades* que se dan como totalmente admitidas y que es innecesario justificar, hasta *valores* cuyo valor de adhesión es variable y necesitan una justificación previa. Por último, tenemos que en el ámbito de los valores cabe también subordinarlos o privilegiarlos por lo que, en una argumentación, no todas las premisas utilizadas tienen el mismo rango de aceptancia, y con el tiempo este valor también puede ser reforzado o disminuido según las circunstancias o la aparición de nuevos argumentos.
- Por otro lado, la aceptación de jerarquías entre las premisas de una argumentación implica que éstas no están *aislados* entre sí, como en una demostración formal. La interacción constante entre los elementos de una argumentación impide de por sí la existencia de una estructura formal *a priori* que sea vehículo de validez lógica.
- En el terreno de las demostraciones formales el empleo de la repetición de ciertas premisas o la sola acumulación de detalles sólo tiene por efecto volver el sistema más complicado de utilizar e ineficiente en términos prácticos. En cambio, al estar dirigida la argumentación a una persona concreta, la repetición de ciertos datos puede tener su efecto en la *psiquis* de la persona, reforzando la presencia y la jerarquía de las premisas utilizadas.
- Las demostraciones pretenden aislar la forma del contenido para usarla como transmisora de la verdad de las premisas a la verdad de a conclusión. Sin embargo, la argumentación no intenta realizar la

separación entre forma y contenido sino que, al contrario, las interacciones entre técnica y objeto de argumentación confieren una nueva dimensión a los argumentos. Las técnicas discursivas están unidas a su materia. Hay técnicas mas o menos adecuadas a ciertos contenidos las técnicas son, en parte, juzgadas con respecto a ellos, más que los contenidos juzgados pos su adecuación a técnicas. Se ha dicho, por ejemplo, que en una demostración la falsedad de la concusión se retrotrae a la falsedad de por lo menos una de las premisas. En una argumentación se trata más que todo de transmisión de adhesión y, pese a la manera como lo presentan algunos autores[40], no es necesario que la falta de adhesión de la conclusión se traslade a un desacuerdo en lo que concierne a las premisas, pues en la argumentación entran otros factores como la adecuación de una técnica a una materia tratada. Se puede impugnar la utilización de una técnica para derivar una conclusión y mantener por ello el prestigio de todas las premisas utilizadas.

- La rigidez formal impide que en el interior de un sistema lógico se generen tesis incompatibles entre sí, caso contrario el sistema se torna inservible[41]. En cambio, dos argumentaciones puede partir de premisas o nociones iguales y llegar a conclusiones variadas y hasta contrapuestas. En cada caso lo que se modifica es la interpretación de los datos, la presentación de las nociones, o la utilización de un procedimiento argumentativo distinto en cada caso.
- Unido a esto último, vimos antes que el estudio de la demostración por la lógica formal está sistematizado. La lógica pretende ser ella misma un *sistema* formal de sus principios formales por lo que sería imposible que en ella (en su sistema) apareciera la negación de una de sus reglas. En cambio las argumentaciones y su estudio no pretenden ser sistema, y bien puede suceder que se encuentre un argumento y un contraargumento para la misma cosa. Esto es también consecuencia de aislar metodológicamente a la Teoría de la Argumentación de todo asunto sobre la verdad: al ser la labor de la teoría un análisis del discurso persuasivo, aquél que causa adhesión, puede por tanto concebir la existencia de un discurso y su

[40] Gomez, León A,*¿Se pueden formalizar los argumentos?*. Conferencia. Pág, 97
[41] Con excepción de los sistema paraconsistentes que serán motivo de análisis más adelante.

contrario(la doctrina sofista de los *dissoi logoi*), cosa imposible si estamos en el terreno de la verdad objetiva.

- Para terminar, la lógica hace un estudio sistemático de los razonamientos según so forma, por tanto, discrimina de manera categórica y objetiva entre razonamientos correctos (formalmente) y razonamientos incorrectos o *falacias*; la Teoría de la Argumentación, al suspender el prejuicio que eleva la forma lógica a único criterio de lo lógico, reconoce que todo razonamiento está situado en un contexto argumentativo y que, por lo tanto, hay razonamientos más o menos correctos según la circunstancia en el que se le inserte, por lo que no se puede distinguir, sin tomar en cuenta el grado de evidencia que generan en una situación determinada, entre falacias incorrectas y argumentos correctos.

3. la demostración como caso límite de la argumentación.
el proyecto de lógica ampliada.

Resulta extraño corroborar que después de parecer oponer demostración y argumentación Perelman esté pensando en eliminar los límites que ha definido entre ellas. Sin embargo, las mismas definiciones de los conceptos y aquello que subyace a ellos prueba que las diferencias entre demostración y argumentación son sólo diferencias de grado. En la medida en que precisamos las nociones, en que insertamos las argumentaciones en un sistema de pensamiento determinado, nos elevamos en grados de abstracción creciente que nos acercan a los sistemas lógicos. Las pruebas a este respecto pueden resumirse en las siguientes: 1. la identificación de los grados de adhesión con los grados de evidencia. 2. la derivación del principio de identidad formal de la ley de justicia formal, la ley de inercia y los principios de acuerdo establecidos. 3. la delimitación de las nociones a través de su inserción en sistemas de pensamiento. 4. La naturaleza de los argumentos cuasilógicos.

1. La regla básica de la noción de justicia formal: los seres de una misma categoría esencial deben ser tratados de la misma manera, se fundamenta en el principio de semejanza de los seres o las situaciones. Teniendo en cuenta que la semejanza es un caso de la identidad, siendo la identidad una

semejanza absoluta, se puede *derivar* el principio de identidad del principio de justicia formal. El principio de identidad formal: (A=A), es la regla básica de todo formalismo. Él está en la base de la univocidad de las nociones y los signos, de la tautología de las leyes lógicas. También está fundamentando toda la metafísica racionalista como principio básico de la razón teórica[42]. Sin embargo, la derivación del principio de justicia a través del principio de identidad no es posible, una vez que se ha alcanzado la identidad la semejanza desaparece para siempre, los dos seres idénticos pasan a ser indistinguibles. Esto, entre otras cosas, lleva a que Perelman postule el "primado" de la razón práctica sobre la teórica[43]. Lo que nos interesa anotar por ahora es que existe una manera de pasar de lo práctico a lo teórico a través de acercamientos sucesivos hacia el límite ideal de lo idéntico. Pero esto sólo está esbozado, hasta aquí hemos visto únicamente que hay una primacía de lo práctico sobre lo teórico, i. e.: lo argumentativo sobre lo demostrativo.

2. Al inicio del Tratado Perelman se pronuncia contra la idea de evidencia como caracterizadora de la verdad racional[44]. La evidencia sería aquello contra lo que todo espíritu debe ceder, aquello que no debe dejar duda alguna de que lo evidente debe *necesariamente* ser de esa manera, excluyendo a su paso lo contrario. La evidencia se identificaría así con la evidencia formal, y una prueba lógica sería una reducción a la evidencia[45]. Sin embargo para Perelman tal reducción de la noción de prueba es injustificada, y no tiene en cuenta que, según la teoría de la Argumentación, la adhesión a una tesis es de intensidad variable, y tal evidencia racional no es sino un grado concreto de adhesión que se caracteriza por la admisibilidad absoluta de la tesis. Mientras más adhesión se genere, más nos estaríamos acercando al *ideal* de evidencia racional que, en últimas, se identificaría con la prueba formal que garantiza objetivamente la transmisión de la verdad de

---

[42] El principio de identidad se encuentra como axioma principal de la metafísica racionalista de Leibniz como el principio de identidad de los indiscernibes: "si dos individuos fuesen semejantes e iguales, y en una palabra, indistinguibles en sí mismos, no habría principio de individuación, o diferentes individuos en ta condición". Cfr, Leibniz G, *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano*, México, Porrúa, 1977. Pág 182.

[43] Cfr, Gomez A L. *el primado de la razón práctica*, Cali, Universidad del valle, 1998.

[44] Perelman, Tratado, Pág 33.

[45] Ibíd, Pág 34.

[36] Ibíd, Pág 213.

las premisas a la conclusión. De esta forma en lo que concierne al *efecto* de la prueba no hay distinción más que de grado entre argumentación y demostración.

3. Vimos que una de las diferencias entre argumentación y demostración es que, en la segunda, las nociones son unívocas en vez de confusas. Ahora bien, las nociones en una argumentación no solamente son confusas sino que son plásticas, quiere decir que su grado de confusividad puede restringirse o ampliarse. El concepto que sirve de marco a la plasticidad de las nociones es el de *campo de aplicación*. Una noción clara es aquella de la que son conocidos todos sus casos de aplicación y no admite, por tanto, un uso imprevisto[46]. Fuera de un sistema formal sólo puede permanecer clara una noción en campos de aplicación en los que se ha establecido acuerdos de interpretación, de esta forma se integra la noción en un sistema de pensamiento más o menos determinado que aporta un sistema de referencia y de reglas con el cual interpretarla, y que regule su aplicación. Vemos entonces que la gradualidad esta inserta también en la capacidad de oscurecer o clarificar las nociones; tendemos a un ideal de univocidad, y en el límite una noción es totalmente unívoca sólo "si su campo de aplicación está totalmente determinado, lo cual sólo es posible en un sistema formal del que se puede eliminar cualquier imprevisto"[47].
4. Los argumentos cuasi lógicos son aquellos que apelan a estructuras lógicas o a relaciones matemáticas para extraer su fuerza persuasiva, se asemejan así a los razonamientos formales, pero esta semejanza es aparente, pues no poseen la univocidad y los otros conductos simbólicos formales que garantizan la necesidad de la conclusión. Pero, sostiene Perelman, aún cuando su prestigio les viene de su parecido con la forma lógica "el razonamiento formal resulta de un proceso de simplificación que únicamente es posible en condiciones determinadas, en el interior de sistemas aislados y circunscritos"[48]. De esta manera, Perelman invierte la relación entre razonamientos formales y no formales. Por siglos se había mantenido que los razonamientos no concluyentes eran copias imperfectas, *engañosas apariencias* de razonamientos en regla lógica. Ahora los argumentos no

---

[47] Ibid, Pág 213.
[48] Ibid, Pág 303.

formales son la fuente misma de donde surgen los formales por medio de procesos de simplificación y circunscripción. Nuevamente nos encontramos con la idea de la sistematización de las argumentaciones a través de acuerdos, más o menos establecidos, en diferentes áreas de pensamiento. Es de suyo evidente que aquí la diferencia entre demostración y argumentación cuasi lógica se da por el grado de evidencia (aceptancia) que se le concede al sistema de pensamiento que contiene la argumentación cuasilógica. En el caso de un sistema bien determinado aceptado por todos en sus reglas y en la unanimidad de la interpretación de sus nociones, el razonamiento se acercará a una demostración. Mientras la unanimidad se vea rota o nuevas experiencias o interpretaciones oscurezcan o pongan en duda la aplicación de la noción estaremos en el campo de lo cuasilógico, en maneras cada vez más adversas para el asentimiento del sistema en su totalidad[49]. La diferencia de grado entre demostración y argumentación concierne también a la adhesión conseguida por el sistema en su conjunto, la intensidad de la adhesión es medida no tanto por lo que permite sino por los obstáculos que supera cuando se enfrenta a la corriente psíquica de auditorio o a aquellos sistemas de pensamiento a los que se adhiere[50].

Se ve entonces que al hablar de demostración y argumentación estamos hablando de una diferencia de carácter gradual. Podemos transmutar el estatus mismo de una argumentación al insertarla en un corpus de pensamiento, en un *sistema*, ya sea jurídico, filosófico o científico.

De hecho, el principio de justicia formal se fundamenta sobre una ley de carácter más vasto que Perelman llama *principio de inercia* según el cual "se puede suponer mientras no se demuestre lo contrario, que la actitud adoptada anteriormente -opinión manifestada o conducta preferida- se continuará en el futuro, bien por el deseo de coherencia, bien gracias a la fuerza de la costumbre"[51]. Para Perelman, este principio (un principio de carácter más que descriptivo, explicativo de las tendencias humanas), regla la conservación del precedente y permite la aparición de la *estabilidad*, de lo reglado en lo que a

---

[49] Por otro lado, sólo cuando se está al interior de un sistema bien determinado de creencias aceptadas por un grupo particular surge el problema de que se pueda efectuar una prueba en pro y el contra de un concepto.

[50] Cfr, Ibid, Pág 97.

[51] Ibid, Pág 178.

cuestiones sociales y argumentativas se refiere. Pues bien, las normas jurídicas, las leyes científicas y los axiomas de los sistemas formales son meras *encarnaciones* más o menos ideales de este principio, nacidos de la necesidad de estabilizar, en derecho, algunos juicios en sistemas de pensamiento que deben mantenerse lo más coherente posible frente a las contingencias exteriores, ya sea sistemas jurídicos, teorías científicas o simples patrones sociales de juicio[52].

Esto nos lleva a concluir que, en forma, no parece haber una distinción entre argumentación y demostración, sólo una clarificación de las condiciones que permiten "normalizar" las argumentaciones para cierto tipo, y más amplios auditorios, al insertarlas en grados progresivos de sistematización social y conceptual[53]. En últimas, para citar un autor que hubiéramos querido tratar en nuestro trabajo y que Perelman, al parecer, conoció muy bien: al argumentar todos nosotros "apuntamos a un ideal: lo que sería correcto decir en todas las circunstancias, con cualquier propósito, y frente a cualquier auditorio" (John Austin en, *cómo hacer cosas con palabras*[54]).

Ya que los razonamientos demostrativos son sólo una circunscripción de un tipo de razonamientos de carácter más vasto, se puede derivar la idea de *ampliar el concepto de lógica*, que había estado reducida a acoger un sólo un nivel de graduación en los razonamientos, para incluir aquellos que serían la fuente de la riqueza de la lógica, a ampliar lo lógico (aquello que merece ser estudiado por la lógica) se ampliaría lo racional a su paso. Perelman mismo se pronuncia al respecto: "si una concepción reducida de prueba y de la lógica ha acarreado una concepción sucinta de la razón, la ampliación de la noción de prueba y el enriquecimiento de la lógica que resulta de ello sólo pueden, a su vez, influir en la manera en que se entiende nuestra facultad de razonar"[55]

---

[52] Cfr, Ibid. Págs 168-184.

[53] El caso de la filosofía parece escapar a esta regla ya que ésta no parece tener un corpus o sistema de creencias aceptado unánimemente, ni una manera de regular las conclusiones a las que llega (Cfr, Ibid, Pág 171). Sin embargo, los pensamientos de cada filósofo particular sí pretenden hacer un sistema de pensamiento más o menos coherente, pese a lo que puede suponerse como pretensiones asistemáticas de algunos.

[54] Barcelona, Piados, 1981.

[55] Op cit , Pág 767

Será nuestro objetivo al final de este trabajo llevar a cabo ese proyecto al *describir* (aunque no definir) esta nueva lógica y sus posibles funciones como ciencia a la luz de la misma teoría de la argumentación de Perelman

Pero, aunque parece que las diferencias entre demostración y argumentación se han mostrado graduales, parece haber una diferencia esencial en la manera como es expuesta a diferencia en los diferentes apartes del Tratado, cierto descontento con algo "oculto" en la demostración: la demostración *pretende* ser cerrada, objetiva, atemporal, impersonal y necesaria. Implica el cierre del lenguaje, la sistematización pura aislada de cualquier experiencia.

Todas estas características no hacen parte de ninguna prueba o razonamiento históricamente concebido. Son, al contrario, propiedades del formalismo lógico, predicados de la *idea* de sistema formal. Idea que desde el punto de vista de la lógica ampliada no es más que una idea límite: Un ideal de argumentación que al desear convencer a *todos* en *cualquier momento* y sobre *cualquier asunto*, no tiene más remedio que aislarse de todo aquello que excluye el vehículo objetivo de la forma. Esto no es más que una pretensión, idea metafísica, ideal de una racionalidad cuyas limitaciones internas expone el teorema de Gódel.

A menos que queramos colocarle límites a la razón humana es necesario aceptar, partiendo del estudio de las argumentaciones, que es necesario realizar una distinción que aísle metodológicamente la idea de sistema formal de lo lógico. El Teorema de Gõdel nos aporta esto, en la medida en que confina lo formal en sus propios límites y lo separa de sus posible "interpretaciones", de aquello que intenta circunscribir.

Recordemos que para Deaño la lógica es pura y simplemente lógica *formal*. Bajo esta premisa ninguna ampliación como la expuesta aquí es posible. El formalismo, como ya expusimos, parece estar inscrito en la "naturaleza" inferencial del lenguaje ordinario e inclusive en la configuración de nuestro entendimiento. Esta es una tesis que deberemos combatir más adelante, lo haremos mostrando de qué manera se configura la identidad misma de los sistemas formales despúes que se exhiben con cuidado sus limitaciones y qué diferencias lo separan de los lenguajes de nuestra vida cotidiana, aquellos que utilizamos para pensar, explicar y comprender.

En lo que sigue, esperamos hacer una reseña histórica dirigida a explicar la aparición de conceptos tales como "forma lógica", "axiomática", "sistema formal" que son el eje de nuestro trabajo. Veremos que ha habido una serie de transformaciones que han modificado las nociones descritas. Intentaremos también resolver cuáles son los cambios significativos de lo que se entiende por *lógico* y cómo se unió este concepto con la idea de sistema formal a través de la fusión entre lógica y matemática. Nuestro último objetivo en el próximo capítulo es preparar la comprensión de la problemática teórica que terminó con los trágicos (para algunos) resultados de los estudios de Gödel.

CAPITULO II

HISTORIA DEL NACIMIENTO DE LOS SISTEMAS FORMALES Y EL CONCEPTO DE LÓGICA (FORMAL).

> Las proposiciones y demostraciones se escribían sobre una delgada oblea, con tinta compuesta sobre una mezcla encefálica. El estudiante tragaba la oblea hallándose en ayunas, y en los tres días sucesivos no debía comer ni beber nada, fuera de pan y agua. Una vez digerida la oblea, la tintura ascendía al cerebro, llevando consigo la demostración.
>
> Swift

> "El Hombre es vil,
> a todo se acostumbra"
>
> Dostoievski

La historia de los sistemas formales es la historia de la *restricción* de la intuición y el afán moderno por la *infalibilidad* del *método* (el problema del 5to postulado y las geometrías no euclideanas). La historia de la lógica formal es la historia de la *ampliación* de la *forma* lógica (desde el limitado silogismo de Aristóteles hasta la axiomática moderna de Russell). Mientras los sistemas formales surgían, la forma lógica se ampliaba a causa del uso de simbolismos y la puesta en rigor de las derivaciones (Frege); el simbolismo con su labor de depuración del lenguaje ordinario, y la rigorización como único camino para la infalibilidad.

La lógica sufrió grandes cambios al identificar, en el siglo XVII y los siguientes, el ideal de método infalible con el método matemático, y al identificarse, al mismo tiempo, la razón con el cálculo matemático (Hobbes, Leibniz), con la posterior transformación conceptual de la lógica matematizada en una combinatoria de símbolos sin contenido. Lo que vino después fue una interacción cruzada entre la forma lógica y el simbolismo matemático, entre lo necesario y lo infalible, que terminó por generar el primer sistema formal para la lógica matemática.

En este capítulo expondremos esa historia que terminó por reducir la *derivación lógica* de los griegos con la *permutación formal* de los modernos, y la idea de que la racionalidad formal es infalible.

1. el nacimiento de la ciencia lógica. Aristóteles.

Referirse a la lógica de Aristóteles sin hacer una breve referencia a Platón es una afrenta sobre el espíritu del nacimiento de la lógica. En Platón se encuentra el germen filosófico de la lógica formal, puede que él no la haya creado, pero la asentó sobre pilares epistemológicos inconmovibles.
Vale la pena tener en cuenta que de la doctrina platónica de las ideas surge la reflexión sobre la validez universal del conocimiento y la postulación de que todo conocimiento real (conocimiento de ideas y no de apariencias) es así de necesario y universal, al igual que las ideas que intenta sostener. Todo razonamiento que desee conocer en realidad debe apegarse a la doble regla de necesidad y universalidad, los razonamientos no necesarios y no universales serán mero "conocimiento de apariencias"(Este pasaje platónico expone a la perfección lo dicho hasta ahora "puesto que los razonamientos tienen un parentesco respecto de los objetos que explican, a lo que permanece, a lo que es fijo y translucido para el entendimiento deben corresponder razonamientos sólidos y consistentes; mientras que los razonamientos que se refieren a la copia, que no es más que una imagen del ser, serán verosímiles, dado que lo que el ser es al devenir lo es la verdad a la creencia"[1].
La importancia de la existencia de esta ley necesaria y universal es resumida por Bochénski " la idea de semejante ley se halla en estrecha relación con la doctrina platónica de las ideas, surgida a su vez de la reflexión sobre la geometría, ya para entonces constituida. Hasta el punto se halla determinada por este pensamiento toda la tradición occidental postplatónica, que a un occidental no le es fácil caer en cuenta de su enorme importancia. Sin él concepto de ley universal no era posible la lógica formal"[2].

[1] Platón, Critias, citado por Campos, *Introducción a la lógica y la geometría griegas*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 1994. Pág 327.
[2] Bochénski, *Historia de la lógica formal*, Madrid, Gredos, 1985. Pág 45.

Razonamientos así de necesarios y de universales sólo podrán encontrarse en un "algo" que permita aplicarse en toda circunstancia y sobre cualquier ámbito de conocimiento. Esta es la esencia de la idea forma lógica.

Desde otro punto de vista Platón es el padre de la lógica. La lógica griega nace en el seno de la dialéctica, en la metodología del discurso que pretende batirse con el adversario, pero apoyado en un discurso sobre la verdad.

Aristóteles

¿Cómo asegurar la verdad en el seno de la discusión dialéctica, cuando incluso los sofistas inventas técnicas para engañar al adversario y hacerse a su aprobación sobre materias que ellos mismos parecen ignorar?, ¿qué hay de inflexible, de seguro en el lenguaje que me permita tener una constante firme en ese suelo de engaños, o que me permita llegar, como Platón deseaba, infaliblemente a la verdad?.

Estas palabras bien resumen las motivaciones de Aristóteles para la creación de su lógica, ella nace como un nuevo campo de investigación científico en el vasto terrenos de la *praxis* discursiva y de los procedimientos, técnicas y artimañas utilizados por los Sofistas, Sócrates y Platón cuando de discusión filosófica se trataba[3].

La lógica aristotélica nace entonces en medio de una especie de crisis de la razón, pero también como la madurez misma del pensamiento discursivo, es decir cuando éste "resulta capaz de cuestionarse a sí mismo y a su propio método de proceder, hasta llegar a establecer qué es la razón misma, o sea, qué hay que hacer para razonar, así como cuando y sobre qué cosa cabe razonar"[4]. Ella (la lógica) no es ciencia, ni acción moral, ni, como será para muchos, objeto de determinada realidad sino una propedéutica general de todas las ciencias. Las cuales deben someter sus discursos a su dominio después de clarificar sus primeros principios con el fin de llegar a un conocimiento sólido y universal.

La lógica se exhibe como una manera de explicar y normativizar el acto de realizar inferencias en el lenguaje ordinario. Aristóteles ya tiene una idea clara de lo que un razonamiento es: cuando afirmamos o negamos no razonamos

[3] Cfr, Ibid, Pág 51.

sino sólo cuando pretendemos derivar una proposición de otra por medio de un nexo.

Para Aristóteles el nexo común a todo razonamiento es el *silogismo*, una forma lógica que asegura que, si las premisas son verdaderas, la conclusión lo será igualmente. En nuestra exposición de los argumentos de la lógica forma tuvimos oportunidad de dar ejemplos a este respecto.

Ahora bien, ¿cómo Aristóteles pudo llegar a la idea de abstraer una forma silogistica en el razonamiento?, ¿Cuál es la *génesis* de la forma lógica?.

El primer tratado de lógica de Aristóteles es "Los Tópicos"[5], donde él se ocupa de los silogismos *dialécticos*, aquellos que tienen como premisas afirmaciones fundadas en la opinión de los hombres y no en la verdad objetiva. La génesis de la forma lógica tiene aquí su lugar, pues el terreno más seguro para buscar una constante racional en argumentos cuyas premisas no son enteramente verdaderas sino meramente plausibles es la *coherencia* misma del discurso.

Ya que el valor de su verosimilitud finita, de su imperfección, se encontraba en la *materia*, en el contenido de discurso, Aristóteles abstrajo la *forma*, un esquema de razonamiento que le garantizara una manera más segura de fundamentar el conocimiento. En eso reside la fuerza de la doctrina del silogismo en el terreno de la dialéctica. Sólo más tarde Aristóteles, en los "analíticos primeros" describe el silogismo demostrativo como aquel cuyas premisas son objetivamente verdaderas y, por tanto, puede llegar a conclusiones infalibles.

---

[4] Realle G, *Introducción a Aristóteles*, Barcelona, Herder, 1985. Pág 139.

[5] Las obras lógicas de Aristóteles fueron recogidas por Andrónico de Rodas en el 1 D.C., bajo el nombre *Organon* (instrumento). El orden de organización se le debe a él. Sin embargo, la redacción por Aristóteles fue más bien, según Bochénski: "los tópicos", a él le sigue "peri hermeneia", el libro b de los "analíticos posteriores" y los analíticos primeros(Cfr, Bochénski, Pág 55).

[5] En ese sentido, la reducción histórica del silogismo aristotélico al silogismo analítico tiene causas que están por fuera de lo lógico y tienen que ver con la valoración del ámbito reconocible de la verdad (Cfr, Gonzales Bedoya, Jesús, *Prólogo* al tratado de la argumentación, Chaïm Perelman. Pág 7). Nótese, en este sentido, que Kant criticará a la dialéctica por utilizar la forma lógica para construir la apariencia de un conocimiento "cuyos caracteres deben, muy al contrario, extraerse del acuerdo con el objeto y, por ende, del contenido". La lógica formal no puede negociar con ningún elemento material verosímil. De este modo Kant elimina la dialéctica como parte de la lógica pura y la relega a ser un mero "*kathartikon*" de lo que parece estar de acuerdo con los criterios formales de la verdad, aunque no lo esté, en realidad.

Nótese que las diferencias entre uno y otro silogismo (entre e silogismo analítico y el dialéctico) son extralógicas, en el sentido en que ambos se fundamentan en una forma lógica común y su única diferencia se encuentra en el tipo de verdad material de las proposiciones admitidas. Esta simetría es fruto de la génesis del silogismo aristotélico que, como buena lógica, no toma partido por el valor de verdad material de sus premisas. Será también algo que se desvanecerá en los estudios lógicos posteriores cuando se privilegie la idea de conocimiento objetivo y universal sobre el conocimiento contingente y probable basado en la simple opinión[6].

Los silogismos tiene como estructura dos premisas y una conclusión. Cada premisa consta de un término (x o y) que aparece en la conclusión, y un término medio (b) que no se encuentra en la conclusión pero sí en las dos premisas, y sirve de enlace para la derivación de la conclusión[7].

Aristóteles los presenta, al parecer tomando como analogía los procedimientos matemáticos de su época, por medio de variables simbólicas: letras que no tenían como objetivo representar un elemento concreto, sino dotar un vacío que puede ser substituido por una materia concreta. Por último, las premisas están clasificadas en tipos según su forma sentencial interna.

Según Bochénski, en Aristóteles en encuentra resumidos todos los elementos de la lógica posterior

a. Una idea clara de lógica con validez universal

b. El empleo de variables

c. Formas sentenciales con constantes lógicas

Pero, la forma silogística aristotélica no se encuentra totalmente aislada de sus contenidos, esta más bien presa de la ontología ya que el nexo que une la verdad de premisas y conclusión no reside en la pura forma sino que se fundamenta en un predicado de universalidad propio de los objetos. Para que haya demostración, sostiene Aristóteles, "sólo hay necesidad de que una sola y misma cosa pueda con verdad ser atribuida a muchos seres; porque sin esta

---

[7] En nuestro ejemplo de capítulo 1, teníamos que x =racional, y=ateniense, b=hombre. De modo que hombre es el término que enlaza las dos afirmaciones, él es la razón de la conclusión. Si es verdad que los atenienses son racionales es porque son hombres

condición no existe lo universal; sin lo universal no hay término medio, y por tanto no habrá tampoco demostración"[8]

Pero, no hay que olvidar que, con la forma silogística, se pretende explicar el acto de realizar inferencias en el discurso. De pasar en el pensamiento y en el lenguaje de una pretensión de verdad a otra pretensión de verdad, de la verdad de un objeto a la verdad de otro. Pero, para concluir este objetivo el razonamiento es resumido, explicado bajo una estructura que no le pertenece sino que ha sido superpuesta hasta el punto de identificarlo con él ("el silogismo es una enunciación <λογοσ>en la que, sentadas ciertas proposiciones, se concluye necesariamente una proposición diferente de las proposiciones admitidas, mediante el auxilio de estas mismas proposiciones"[9]) y la *posibilidad* de realizar esta explicación/reducción ha sido, desde Aristóteles, un supuesto de toda la lógica formal, supuesto que terminará por identificar razonamiento lógico (inferencia o *logos*) con derivación a partir de reglas sobre una forma, y a postular el principio implícito que verdadero y lógico (deducible) se identifican.

Para terminar aquello que en este momento nos interesa de Aristóteles, hay que expresar que él es el primero en tener el razonamiento mismo como objeto de análisis. Su estudio no se restringe a la forma lógica sino a las condiciones mismas de la demostración y su metodología en las ciencias.

Fue el primero en postular explícitamente que no es posible demostrar todo en un sistema de pensamiento, ya que toda demostración debe fundarse sobre principios primeros imposibles de demostrar so pena en adentrarnos en derivaciones hasta el infinito o en peticiones de principio.

Los primeros principios de las ciencias deben estar basados en la intuición, a partir de estos primeros principios las ciencias van construyendo su saber de silogismo en silogismo analítico. Esta es la primera formulación del principio metodológico de la axiomática.

[8] Aristóteles, *Analíticos Segundos*, capítulo 11.

2. el surgimiento de la axiomatica. la geometria euclidea.

El método axiomático no es mas que la elección dentro de una teoría, de ciertos enunciados que se juzgan fundamentales por su evidencia para, a partir de ellos, y considerando ciertas reglas apropiadas, derivar el resto de los enunciados que se consideran verdaderos al interior de la teoría.

Esta separación entre unos enunciados fundamentales y otros derivados de aquellos produce "un orden de filiación en los enunciados de la teoría: ésta no se presenta ya como una yuxtaposición de enunciados, sino como serie ordenada en donde se procede de lo más conocido a lo menos conocido siguiendo un encadenamiento riguroso"[10].

El método axiomático así explicado tiene, al menos, dos efectos: permite jerarquizar un grupo de enunciados de una teoría o ciencia, y por otro lado, esta jerarquización coloca a los enunciados en una estructura u orden que nos permite realizar combinaciones de enunciados cada vez más complejas a partir de los primeros más sencillos por medio de reglas intuitivas o previamente establecidas. También permite una gran reducción en lo que concierne al orden y sistematización de los estudios de la teoría que ha sido axiomatizada. Mediante la axiomatización nosotros reducimos toda la teoría a unos cuantos postulados que la engloban y permite que la captemos de un solo golpe. Nuestros estudios ahora se pueden reducir al análisis de unos cuantos postulados y sus carateristicas internas y de relación.

La creación, en su sencillez y armonía, de un método así, sólo era posible al interior de la mentalidad griega: los griegos tomaron los hechos dispersos encontrados y puestos en funcionamiento práctico por otras grandes civilizaciones y los transformaron en una estructura de saber sistemática, alejada de lo empírico para acoger la abstracción y la generalidad, dispuestas como fin ultimo del saber. La culminación de este ideal griego en el área de las matemáticas se tiene en los Elementos de Euclides, redactados aproximadamente en el 300 a. c[11].

---

[9] Aristóteles, *Tópicos*, Cap 1.
[10] Ladriére, *limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, Tecnos, pag, 51.
[11] En lo que respecta al valor matemático y a la originalidad del libro en su totalidad se sostiene que, aunque la mayoria de los teoremas habían sido demostrados por geómetras anteriores a Euclides. Los axiomas y la ordenación de los teoremas se deben al mismo Euclides. Es él hasta donde se tiene referencia el único creador del

Por aproximadamente 22 siglos "los elementos" serán, hasta la geometría de Hilbert, el único paradigma de sistema axiomático. Su larga tradición influirá no sólo en las matemáticas y en la ciencia, sino también en la manera como se entienda el concepto de forma y de inferencia lógica. La metodología de la axiomática se mostrará como un modelo de encadenamiento riguroso aún más poderoso que la silogística aristotélica (de hecho, la axiomática euclideana supone y engloba en su estructura a los razonamientos aristotélicos).

Si Aristóteles había deseado para la ciencia una construcción a partir de primeros principios, los Elementos de Euclides es la obra que le dará a esta idea su estatus cognitivo, metafísico. Ahora sí es cierto que toda ciencia madura es organizable sobre primeros principios, la geometría lo demuestra. Es más, es *esta* organización la que le concede ser tenida por madura. Los elementos de Euclides al confirmar este ideal lo instauró en derecho como la fuente epistemológica, el objetivo metodológico, la finalidad última de toda ciencia, e inclusive en nuestro siglo el sistema axiomático es tenido como "el sistema nervioso central de todas las matemáticas viventes"[11]

A lo largo de los siglos se estudiará los elementos no tanto como un tratado de geometría o incluso de lógica sino como una maravillosa lección de epistemología griega "más que el aspecto lógico (mecanismo de implicación)se quería aprender en Los Elementos cómo engranar tantas verdades tan bien constituidas, intemporales y que por añadidura engastaban admirablemente con la experiencia"[12].

Esta manera de pensar motivó miles de problemas en la filosofía, entre los que resaltamos el problema de la autoevidencia del 5to postulado, el cual trataremos más adelante; y el problema de la conexión entre creación matemática y realidad física. Sobre este punto también la controversia nos interesa. Por siglos se pensó que al estar las verdades de la geometría de

método axiomático. La metodología de Euclides será tomar ciertos enunciados que le parecerán autoevidentes en la practica geométrica y postularlos como "axiomas" a partir de los cuales inicia una derivación de otros enunciados geométricos llamados "teoremas" que tienen a estos, digámoslo así, como premisas. Para Euclides "Elemento" es, según Proclo "aquello más simple, en que se divide un compuesto", de esta forma tenemos ciertas cosas como principios, que son los axiomas, y otras que "aparecen como resultado de ellas" que serían los teoremas, (Cfr Campos. Pág 2).

[11] Bell E., Historia de las matemáticas, México, F. C. E. 1995. Pág 81

[12] Campos, Pág 6.

Euclides tan engarzadas con la experiencia hasta el punto de ser una con ella en su universalidad, esa geometría sería entonces la única posible, tanto para la realidad física como para la manera de percibir de los seres racionales. Pero, si la geometría esta ajustada a la realidad por el método axiomático, y esa es la única geometría posible, debe ser que *esa* estructura axiomática es también connatural a la geometría tanto en la realidad como en los cerebros racionales y, asumiendo el desiderata aristotélico, todo conocimiento científico legítimo contendría también oculto en su misma naturaleza una organización esencialmente axiomática. Ella, en el transcurso de la historia, no será el orden que los hombres *le han dado* a su conocimiento, sino el orden que los humanos *encuentran* en el conocimiento, o que por lo menos los humanos *proyectan* trascendentalmente al conocimiento y a la realidad.

Estas expresiones son un resumen de lo que fue el verdadero concebir epistemológico de la filosofía y las matemáticas por más de veinte siglos a partir de Euclides, y son consecuencia de la forma como el mismo Euclides postuló su método y como se le concibió.

Ya nos referimos al hecho de que para la tradición la geometría de Euclides se asentó sobre enunciados *autoevidentes*, *universales* y de valor *ontológico*. Esto no es una hipótesis aislada: En el texto original de Euclides casi todas las demostraciones van acompañada de una figura, pero éstas no se reducen a ser meras ilustraciones sino que, al contrario, contienen un valor especial en la eficiencia del método geométrico: las figuras ayudan al geómetra a derivar las consecuencias de los postulados e inclusive, "hay la propensión a confundir el concepto con el dibujo e, inconscientemente, a aceptar las propiedades de este último"[12].

La evidencia que dota de fuerza al método axiomático euclideano se refiere aquí no a la pureza de una estructura formal lógica sino a las figuras mismas como trampolines epistemológicos de la conclusión deseada[13]. Es en este sentido que Kant se ve llevado a hacer una justificación epistemológica de la geometría de Euclides elevando como fuente de su coherencia y verdad, no a

[12] Kline, M, *Matemáticas para estudiantes de humanidades*, México, F.C.E., 1992. Pág 30

[13] De hecho, cada prueba va acompañada por un enunciado que se refiere exclusivamente a la figura respectiva, y una construcción que indica como se debe proceder para el trazado de las figuras requeridas para seguir la demostración (Cfr, Campos, Pág 11)

una estructura formal subyacente, sino a una *intuición pura del espacio* propia de los seres humanos racionales[14].

Pues, por siglos el sistema euclideano fue único paradigma indudable del rigor, pero en el seno de su estructura llevaba el germen que hará explotar la unión epistemológica entre método axiomático y realidad física intuitiva, aquella unión que los sumía en la misma pasta ontológica.

La desunión es la que va a generar la necesidad de fundamentar todo sistema axiomático en su propia coherencia lógico formal, aislándolo de toda evidencia posible y, a su vez volviéndolo capaz de *a posteriori* captar en completud una serie de intuiciones que se encuentran aisladas de él, desde el punto de vista epistemológico.

Por ahora deberemos ver una revolución simétrica en el seno de la lógica, revolución que asentó la base de la racionalidad lógica sobre las matemática, alejándo a la lógica de su génesis discursiva y acercándola a la metodología axiomática formal, que se creará posteriormente para ella.

3. el espiritu programatico de la logica matematica. leibniz.

Salidos del periodo medieval, periodo para algunos de estancamiento en lo que a la lógica se refiere, entre los siglos XVII y la primera mitad del XIX entramos en el período de la lógica clásica donde los asuntos lógicos a resolver se inclinan más hacia aspectos psicológicos y epistemológicos. En los autores de

[14] Para Kant las verdades matemáticas no serán verdades analiticas(verdades lógicas), como en Leibniz, sino juicios de un tipo muy especial por medio de los cuales tenemos la posibilidad de extraer una verdad material de elementos a priori insertos en nuestra propia intuición pura del espacio (geometría) y el tiempo (matemática). ellos dotarían a la geometría de juicios sintético a priori (los axiomas autoevidentes) con los cuales construir todo su edificio científico. No es que las verdades matemáticas sean subjetivas sino muy al contrario que su objetividad se encuentra inserta en nuestra manera de percibir la experiencia sensible. Esto en especial es importante por dos razones. La primera es que Kant con esta teoría está dando un estatus de derecho a una situación epistemológica de hecho: la intuición utilizada por sus contemporáneos para entender el sistema euclideano. Kant es la prueba que el sistema euclideano no estaba pensado formalisticamente. La segunda razón es que la idea Kantiana de los juicios sintéticos a priori será objeto de las críticas de los logicistas desde Frege hasta Hilbert, los cuales postularán, de nuevo como Leibniz, la analiticidad de las verdades matemáticas. El Teorema de Gödel, aunque no vindica a Kant, muestra que el espíritu de los programas logicistas y formalistas tampoco da cuenta del concepto de verdad en esta ciencia.

[15] Bochénski, Pág 14.

lógica "impera universalmente la opinión de que el formalismo tiene que ver muy poco con la verdadera lógica"[15]. Esta visión fue impulsada por el contexto filosófico y social del Humanismo creciente, donde se favoreció la evidencia de las vivencias interiores de los hombres por encima de los cánones sociales ordinarios. En este contexto es la ciencia retórica la que vuelve a resurgir como fuente de experiencias sociales aglutinantes y como manera de transmitir vivencias emotivas particulares. Hay un especial rechazo de toda tradición de la mano del surgir de la filosofía moderna y de la modernidad en general. Resaltan en este período autores como Vico, en el caso de la revalorización de la retórica y, por supuesto más tarde, Descartes.
Nos merece especial atención este autor que, aunque no trataremos con especial dedicación ya que tenemos otros intereses sobre los estrictamente filosóficos, merece una breve reseña. Pues es Descartes quien inicia una revolución filosófica comparable a la de Platón en tiempos de los Sofistas

En Descartes se observa, a diferencia de otros autores de la época, un claro desinterés por los asuntos de la retórica. La retórica se reduce a mero ornato más relacionado con la estética (poética) que como medio de prueba. Pero Descartes no aprueba tampoco el silogismo aristotélico como guía para la razón. El silogismo, pretende sostener, sólo sirve como medio de prueba heurístico y explicativo, aun como arte de la palabrería sutil, pero no como método de *búsqueda de la verdad*.
La verdad se obtiene de acuerdo a evidencias intuitivas que deben seguirse unas de otras, desde las primeras de carácter innato y subjetivo, hasta las derivadas de éstas. No debe darse nada por supuesto y aquello que es meramente plausible debe tomarse por incorrecto.
La nueva racionalidad de la duda metódica y la intuición evidencial presenta nuevos problemas, hay que asegurar que cada paso dado no nos descarrile de la estrecha vía de la certeza. Es por esto que Descartes se ve llevado a la elaboración de un método objetivo de conocimiento que le asegure el paso de evidencia en evidencia racional. Este método en los primeros textos de Descartes (Por ejemplo, en sus "*Reglas para la Dirección del Espíritu*") tiene claros elementos de carácter matemático. En autores posteriores será

identificado con la axiomática eucideana. De esta manera la racionalidad filosófica y científica se ve identificada con el proceder matemático, confirmando y hasta radicalizando la posición de Aristóteles.

Al rechazar el silogismo aristotélico y concluir en un método de razón geométrico, Descartes desplaza la racionalidad del ámbito modélico del discurso al de la matemática.

La influencia de Descartes en este sentido es innegable ya que es uno de los primeros motivantes filosóficos de la nueva lógica formal matemática como medio de transmisión objetiva de verdades de carácter evidente. Leibniz, a quien encontraremos a continuación, es heredero de esta filosofía.

Por último Descartes realiza el primer llamado moderno a la rigurosidad: "orden, convencimiento, tomar por falso todo lo que no sea demostrable, seguridad de no omitir nada, no dar un paso antes de convencerse de la veracidad de los anteriores", se volverán "lugares comunes" en toda la filosofía posterior, por no mencionar el llamado a la claridad y la distinción, con el cual la idea de la univocidad da el paso de su ámbito gramatical, sugerido por la utilización de constantes en el silogismo aristotélico, al ámbito de las nociones y de los conceptos. Por lo que, a partir de él, se inicia una larga tradición de críticos del lenguaje natural, por ser vago, oscuro e impreciso. Entre los autores que impulsaron esta tradición de crítica se encuentran Locke, y el mismo Leibniz.

Leibniz.

La importancia de Leibniz para el surgimiento de la logica simbólica es comunmente discutida. Sus aportes reposaron en suspenso histórico por muchos años antes de que fueran revividos por Frege quien fundamentó su investigación lógico-formal en la idea de característica leibniziana. Sin embargo, vemos necesario su estudio precisamente por esta razón, por haber servido de catalizador de los pensamientos sobre la lógica en autores como Frege (padre de la lógica moderna), y porque su sistema resume en su totalidad el *espíritu* del programa logicista y formalista que tuvo su culminación cenital con los positivistas lógicos y con Hilbert. Pensamos que no hay fuera de Leibniz aspiración que hayan mantenido estas escuelas.

El primer aporte de importancia de Leibniz a la lógica matemática es su idea de los axiomas *idénticos*. Entre otras cosas, éste parece ser el inicio conceptual del que se partió para postular las verdades de la lógica como tautologías vacías de contenido y válidas en todos los mundos posibles. De aquí también parte el principio de reducción de la lógica a la metodología axiomática y la matematización de los principios lógicos

Por último se encuentra el llamado de Leibniz a la creación de un lenguaje formal artificial y universal como transmisor y descubridor del conocimiento.

Por ahora iniciemos con la cuestión de los axiomas idénticos:

En lo que concierne a la axiomática como método de prueba y organización Leibniz sabe que es imposible eliminar completamente la apelación a axiomas, toda demostración debe partir de ciertos presupuestos, pero es posible, al contrario, no aceptar sino axiomas idénticos[16]. ¿Qué entiende Leibniz por axiomas o juicios idénticos?.

Leibniz ha postulado previamente su distinción entre juicios o verdades de razón y de hecho[17]. Según él las verdades de razón son aquellas que son necesarias puesto que su opuesto es imposible, su verdad se haya fundada sobre el *principio de no contradicción*.

Las verdades de hecho son aquellas que son contingentes, puesto que su opuesto es posible, su verdad esta fundada en el principio de *razón suficiente*. Ahora bien, a su vez, estas verdades pueden subdividirse cada una en verdades primitivas y verdades derivadas[18].

Las verdades derivadas se saben por razonamiento en el caso de las de razón, o por inducción en el caso de las de hecho. Las verdades *primitivas*, tanto las de hecho como las de razón, en cambio se saben por intuición directa. Las verdades de razón primitivas son aquellas que no pueden ni necesitan ser demostradas puesto que son enunciados *idénticos*, "las verdades primitivas de razón son las que yo llamo con un nombre general idénticas, porque me parece que no hacen más que repetir la misma cosa, sin enseñarnos nada"[19]

He aquí unos ejemplos dados por el mismo leibniz: "A es A", "el rectángulo equilátero es un rectángulo equilátero", "si A es no B, de aquí se sigue que A

[16] Leibniz *Nuevo tratado sobre e entendimiento humano*, México, Porrúa, 1977. Pág 301.

[17] Leibniz, *Monadología*, (tres textos metafísicos), Bogotá, Norma, 1996. Págs, 392, 393.

[18] CFR, Op Cit, Pág, 271.

[19] Ibid, pag 271

es no B", esta es claramente la noción de tautología, verdades válidas en todos los mundos posibles ya que no puede concebirse un mundo donde no sean verdad o donde dotando de contenido sus variables no resulten enunciados con un valor de verdad infinito. Leibniz se adelanta a las críticas sobre la supuesta frivolidad de estos razonamientos sosteniendo que las consecuencias de la lógica son demostrables a partir de principios idénticos[20]. Y no sólo la lógica se rige por estos principios sino, (y precisamente porque) la matemática y la geometría se rigen también por ellos.

Contrario a la creencia de la época, sobre todo a la posterior a Kant hasta Frege, para Leibniz los enunciados de la matemática pueden reducirse a este tipo de verdades cuya certeza puede reducirse a la pura forma idéntica[21].

De hecho, Leibniz construye una prueba de lo anterior derivando el juicio matemático "2+2=4" a partir de 3 axiomas o definiciones idénticos y solo una regla de transformación[22]. Para Leibniz la lógica es tan susceptible de este tipo de demostraciones como la misma geometría, de allí se podrá derivar que también en la lógica se debe procurar el uso de idénticos primitivos para sus deducciones y que ella debe amoldarse a este ideal surgido del seno de la matemática.

En este sentido, podremos ver la inspiración leibniziana de la lógica matemática del siglo XIX, en particular en los proyectos de Frege, Russell y, en menor medida, Hilbert: 1) la construcción de una teoría que comprenda todas las identidades lógicas 2) la definición de conceptos matemáticos por medio de conceptos de lógica pura 3) la demostración de axiomas y conceptos específicamente matemáticos a partir de las identidades lógicas 4) la construcción de un lenguaje formalizado capaz de servir de medio de expresión para la lógica pura.

Este último aporte, esta vez de tipo programático, es esbozado por Leibniz en uno de sus escritos de juventud (De arte combinatoria) donde se postula la necesidad de construcción de una lógica simbólico combinatoria que sirva de vehículo para la demostración de verdades de todo tipo.

---

20 CFR, Ibid, pag 272, Donde Leibniz pretende probar esto explicando el modo Barbara del silogismo aristotélico a partir de principios idénticos de razonamiento.
21 Ibid, Pág, 350.
22 Ibid, 305.

Leibniz parte de una idea de carácter metafísico según la cual los entes están constituidos por un *número* de partes (reales o conceptuales)[23]. Si buscamos por medio del análisis en los entes y en las ideas podemos llegar a los componentes últimos de éstos. Al encontrar estos componentes primitivos, de carácter discreto, podemos preguntarnos si al combinarlos de nuevo podemos acceder a las verdades completas y al orden de los entes en el universo. Leibniz se pregunta entonces por la variabilidad combinatoria de ciertos caracteres o símbolos (que representarían los componentes primeros) dados cuando se los somete a combinación(complexión) y a permutación (variación de orden). Leibniz esta resuelto entonces en encontrar un alfabeto de ideas primitivas al que corresponderá a cada idea un carácter o símbolo. Notemos el entronque que existe con su idea de los juicios de razón primitivos, pues a cada idea primitiva corresponderá un juicio de razón primitivo y un símbolo.

Este es el proyecto de la *Characteristica Universalis*, un alfabeto de ideas transformadas en símbolos tipográficos de manera que "mediante la combinación de estos símbolos y el análisis de las palabras resultantes se podrá descubrir y discernir todo[24]. De esta forma podemos "hacer perceptible por los sentidos el análisis de las ideas, y dirigirlo mecánicamente como con un cable, pues el análisis de los caracteres es algo perceptible por los sentidos"[25], así tendremos un instrumento de lógica inventiva y de deducción que sirva para la organización y crecimiento de todas las ciencias (incluyendo la jurisprudencia y la moral).

Tal vez ayude a entender la influencia de Leibniz el sostener que los sistemas fomales de la lógica hoy en día no son más que este tipo de característica formal, junto con reglas fijas que dirijan la combinación y permutación, lo que sería la gramática ideal de Leibniz. Este hombre se adelantó a su época.

El proyecto de Leibniz incluye cuatro pasos 1) la derivación por medio del análisis de un sistema de primitivos que debe incluir no sólo sustantivos sino modos y relaciones[26] 2) la elaboración de una gramática general ideal para estos signos 3) la elaboración de una serie de caracteres que serán

[23] Leibniz, *De arte combinatoria*, Santiago de Chile, Univ Católica de Chile, 1989, "Con dios": Parágrafo 10.
[24] Leibniz , En Bochénsiki. Pág 289.
[25] Leibniz, En Bochénski, .Pág 209.
[26] Leibniz, *De arte combinatoria*, Parágrafo 66.3.

manipulados por el cálculo 4) la elaboración con lo conseguido de un sistema de deducción universal para la solución de todos los problemas de las ciencias (*mathesis universalis*).

Leibniz se apoya para este proyecto en su idea de lo que es una proposición (una aserción en el lenguaje ordinario): Toda proposición es una *combinatoria* de sujeto y predicado[27]. La *serie* de las proposiciones lógicas nacen de encontrar todas las posibles combinaciones de sujetos de un predicado y viceversa[28]. La cópula "es" se relaciona a su vez con la suma y la resta, por lo que la verdad o la falsedad de una proposición esta representada en la combinatoria leibniziana como una relación entre números[29]. De esta forma tendremos un instrumento "que guíe el espíritu como las líneas en la geometría"[30] pero todo al costo de reducir el lenguaje a relaciones aritméticas por medio de la analogía propuesta.

Para este objetivo no nos podemos valer del lenguaje ordinario, no sólo porque está lleno de sinónimos, entrelazamiento de significados y ambigüedades, sino además porque nos hace retener mucho en la mente y dificulta la deducción rigurosa. Es necesario encontrar una manera de separar las ideas primitivas, para elucidar la serie de los números de los entes y sus primitivos, poder *contarlos* y *combinarlos* sin que nuestra mente se pierda en los detalles de cada construcción. Para esto es necesario la construcción de un lenguaje universal que desembaraze al espíritu de las ambigüedades de lenguaje ordinario.

Como sostiene Leibniz en los "nuevos ensayos": "el álgebra hace ver que se pueden hacer grandes descubrimientos sin recurrir siempre a las idea mismas de las cosas". De esta forma, Leibniz retoma el ejemplo del álgebra para postular una especie de "pensamiento ciego" como método de la razón. La importancia de este concepto es resumida por Eco de esta manera "el pensamiento ciego manipula signos sin verse obligado a evocar las idea

---

[27] Ibid, parágrafo 55.
[28] En un texto posterior Leibniz postula como ejemplo de este proceso el análisis del concepto de Hombre: se puede descomponer éste en dos ideas, Animal y racional si le asignamos a animal el número 2, y a racional el número 3, el concepto de hombre se expresaría con 2*3. Una proposición es verdadera cuando el número del sujeto es divisible por el número del predicado, así todos los hombres son animales corresponde a la fracción 6/2, cuyo resultado confirma su veracidad
[29] Ibid, parágrafo 63.
[30] Leibniz, En Bochénski. Pág 298.

correspondientes. Por esto aumenta el alcance de nuestra mente, del mismo modo que el telescopio aumenta el alcance de nuestra vista, sin provocarnos un cansancio excesivo(...) la intención de Leibniz era crear un lenguaje lógico que, como el álgebra, pudiese conducirnos de lo conocido a lo desconocido mediante la simple aplicación de reglas operativas a los símbolos que utilizan"[31]

Son tres los fundamentos del proyecto Leibniziano, el primero la interpretación de mundo como caracteres discretos y diferenciables entre sí (monadología); el segundo, la interpretación de las proposiciones como relaciones matemáticas; el tercero, la idea de la razón como cálculo: Leibniz se aferraba a la idea hobbesiana de que el pensamiento racional podía reducirse a un cálculo, que lo racional *es* un cálculo, y todo cálculo, agregaría Leibniz, es un cálculo sobre símbolos. Es por esto que el ideal de pensamiento ciego sirve tan excelentemente a la razón.

Dos cosas más hay que decir. Primero: Leibniz no es un formalista estricto, para él el cálculo es un instrumento para la manipulación de ideas, no es completamente formal pues se acoge a la interpretación de los caracteres en entidades primitivas. Pero esto no quita que en Leibniz la carga de la verdad reside en la manera en que de la *forma* de la proposición se reproduce una verdad objetiva con independencia de la naturaleza de las cosas[32]. Podría uno decir que hay una armonía preestablecida (o isomorfismo) entre mundo, ideas y la formalidad de la lengua característica ideal.

Segundo: todo el sistema de la combinatoria leibniziana esta fundamentado en la idea de que es posible enumerar el número de cosas y juicios verdaderos por medio de un sistema de cálculo formal, Leibniz desea que su *mathesis* le dé un conocimiento *completo* de todas las cosas. El proyecto de Leibniz se fundamenta en la existencia de este lenguaje universal y general, dueño de todos los secretos posibles y *conectado* a la verdad. La noción de completud semántica se encuentra aquí expresada, y es también aquí donde los resultados de limitación gödelianos darán su primera estacada[33]

---

[31] Eco U., *La búsqueda de la lengua perfecta*, Barcelona, Grijalbo Mondarori, 1994, Págs, 237-238.
[32] Ibid, Pág 239.
[33]Leibniz también presume la existencia de un *procedimiento* que permita resolver todo problema relativo a un campo y a todo el raciocinio en general. Veremos que estos dos

La historia de la lógica de aquí en adelante puede sostenerse sola sin una remisión a la geometría, los sistemas formales en la lógica surgen en Frege con independencia a ella, pero una clarificación de la historia del concepto de sistema formal y de la tensión entre forma e intuición no puede sucederse sin tocar el tema de la crisis de 5to postulado.

4. la historia de un problema. el 5to postulado y la nueva geometría de david hilbert.

La historia de la geometría moderna es la historia de un problema. Ese problema puede resumirse en un concepto: autoevidencia (aunque las consecuencias de su solución excederán años luz de importancia a este concepto). El protagonista de este problema es el 5to postulado de Euclides. Nosotros estaremos interesados en definir de qué manera este problema es el impulsor de la concepción moderna de los sistemas axiomáticos, y cómo a partir de allí se originó toda una revolución en la manera de definir el conocimiento lógico-matemático. La revolución, para resumir, "obligó, en efecto, a los lógicos matemáticos y los filósofos que se dieron por aludidos, a emprender un examen de conciencia crítico acerca de la relación que puede existir entre sistema formal y mundo externo"[34].
Sólo a partir de esta revolución se pudo liberar la fuerza formal y *creadora* del método axiomático inaugurado por Euclides.

¿Es la geometría de Euclides una necesidad lógica?. Por siglos se sostuvo que sí, que su orden era parte de nuestra estructura del espacio y de nuestra forma de percibirlo, pero todo ese edificio de pensamiento estaba construido tímidamente sobre la supuesta autoevidencia y estatus ontológico de los axiomas de Euclides. Este edificio tan sólidamente construido ocultaba una grieta difícil de disimular, rellenar o esconder.

---

tópicos leibnizianos(el problema de la completud, el problema del método universal) están relacionados con los problemas con que se encontrarán los lógicos matemáticos, en especial Hilbert, al tratar de fundamentar la matemática sobre el formalismo.

[34] Campos, *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 1994, Pág 245.

Según la Definición 23 del libro I, de Los Elementos "líneas rectas paralelas son líneas rectas coplanares que, prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran en ninguno de los dos"[35]. El 5to axioma prescribía que por un punto dado exterior a una línea recta se podía trazar una y sólo una paralela.

El problema al que nos hemos estado refiriendo es la supuesta *falta de evidencia* que incluso los griegos coterráneos de Euclides creían encontrar en el "*indefinidamente*" de la definición. Esta falta de evidencia se apoyaba en que, de esta manera, este axioma intentaba prescribir aquello que ocurría en algún lugar, allá en el infinito. Las líneas paralelas nunca se encontrarían por mucho que las extendiéramos *hasta el infinito*. Trascendía de esta forma el ámbito de la experiencia y se disponía a la duda[36].

Pese a que muchos intentaron probar la verdad del axioma[37], sólo fue a partir de los resultados de Friedrich Gauss(1777-1855) donde se concibió la idea de una geometría sin el 5to postulado. Gauss se dió cuenta que los restantes nueve axiomas de Euclides no prescribían de forma alguna la estructura del axioma de las paralelas (el axioma era independiente), y la consecuencia de

[35] Ibid.Pág 156.

[36] Esto no quiere decir que se dudara de la veracidad del axioma y, de hecho, el punto era ese: la geometría de Euclides estaba avalada por sus resultados y por la ontología del espacio en el universo. Lo que se dudaba era simplemente de su autoevidencia, de sus estatus de axioma, por lo que se derramaron por siglos ríos de tinta tratando de demostrar que éste era deducible de los otros nueve dados por Euclides. Nunca se pudo demostrar el hecho. Incluso se probó la substitución del axioma de Euclides por otros de carácter equivalentes, pero todos postulaban directa o indirectamente una afirmación sobre algo que pasaba en un lugar del espacio infinito. Entre los que intentaron resolver el asunto por medio de este artilugio se encuentran a Proclo, Jayam, Wallis.

[37]Girolamo Saccheri (1667-1733), por ejemplo, quien al parecer fue el primero en decidir aplicar, para felicidad de los historiadores, el método indirecto de demostración para probar el honor de las presunciones de Euclides. Quería mostrar que el sistema de Euclides era el unico posible no sólo en la experiencia sino desde el punto de vista lógico. La estrategia de Saccheri no carecía de elegancia. Según Euclides por un punto exterior a una recta pasa solo una paralela; si Euclides esta en lo cierto, razonaba Saccheri, si tomamos, en conjunto con los otros axiomas, las otras dos posibilidades contrarias a nivel lógico (que no pase ninguna recta paralela o que pasen más de dos rectas paralelas), deberemos tarde o temprano en las derivaciones construidas llegar una contradicción inadmisible que nos muestre indirectamente el genio de Euclides al postular la única posibilidad lógica y real. Saccheri demostró mas de 15 teoremas que hacen ahora parte legitima de las geometrías de Lobachevsky y Bolyai, y creyó encontrar en sus construcciones contradicciones que en realidad no existían. Siguió presa de sus prejuicios pero inauguró de esa forma, sin iniciarla, la historia de las geometrías no euclideanas.

esto era evidente para él, pues "si hubiera libertad para elegir el axioma de las paralelas, podría uno escoger un axioma diferente del de Euclides y elaborar una nueva clase de geometría"[38]. Aceptó pese a sus prejuicios (pues al principio de su historia estaba convencido de que era posible probar el 5to postulado) que no es posible deducir el 5to postulado de los otros al no haber ninguna contradicción si se los substituye. Gauss desarrolló las implicaciones de una geometría de más de una paralela (infinitas para ser exactos), pero no publicó sus resultados. Tenía miedo de la burla. Tuvo suficiente, como la mayoría de nosotros, con trascender sus propios prejuicios[39]

Se llegó a decir que estas geometrías o no eran ciertas o, si lo eran, no eran aplicables a la realidad: sólo simples excentricidades matemáticas. Muchos más sostuvieron que, o eran todas lógicamente admisibles o no lo era ninguna[40]

Hubo de esperar casi 40 años para que se les reconociera la labor a los creadores de esta nueva geometría. No sólo fue el rechazo explícito de algunos, sino la mirada denunciadora del ridículo expuesto lo que afectó a todos los que al principio se atrevieron a hablar de geometría sin el 5to postulado. Los matemáticos tan felices como estaban en sus prejuicios, no soltarían un bien tan preciado como la creencia ciega en un sistema tan maravillosamente correcto como el euclideano. La distinción que se les pedía entre coherencia formal e intuición, entre *lo posible* por medio del cálculo y *lo real* en el espacio era demasiado sutil para una mente habituada al kantismo y apegada sus verdades intuitivas. Bajo la revolución de 5to postulado, que muchos refieren como una gran fractura epistemológica, se concibió que la organización axiomática tenía un poder interno que no tenía nada que ver con el contenido ontológico, intuitivo, de los objetos que describía. Los resultados físicamente paradójicos y coherentemente lógicos de las nuevas geometrías, impulsaron la idea que era posible hacer axiomática *sin* geometría, y esto es lo que nos interesa: *sin contenido alguno*, con la pura forma de la estructura axiomática.

---

[38] Kline, Pág 454.

[39] Los que aparecen como creadores de las geometrías no euclideanas son Nicolai Lobachevsky, 1826 y janos bolyai, 1829. Con fecha de sus trabajos hechos públicos.

[40] Para una discusión mas detallada de estas polémicas ver Bell, 343 y ss.

Esto generó un cambio radical en la manera en ver la ciencia aludida "hasta el punto de lo que se llamaba geometría en una fase del desarrollo apenas hubiera sido reconocida como tal en una fase anterior"[41]. La geometría ahora será simplemente uno de tantos contenidos que se amoldan a una estructura formal *depurada e independiente*. El directo responsable de este cambio es David Hilbert (1862-1943).

Hilbert

Hasta la aparición de las no euclideas, la axiomática y la geometría están fundidas, pero han evolucionado para llegar a la meta final de su historia, su escisión, como consecuencia de la revolución de 5to postulado.

Según Campos el debate que suscitó el quinto postulado de Euclides mostraría "que estaba en la naturaleza de la investigación geométrica, el que se vislumbrarán algún día los otros casos posibles (las otras geometrías). Una vez encontrados éstos y estudiadas sus consecuencias, tenía que producirse un examen del estatuto del sistema euclideano desde el punto de vista lógico, y provocar determinados ajustes". Si estructura formal e intuición geométrica han de permanecer desligados, deberemos realizar un análisis de la estructura formal que la depure de su contacto con la intuición que, como hemos experimentado, es un material variable y poco fiable; por siglos hemos creído en la verdad absoluta de Euclides y éste nos ha fallado desde la raíz.

A consecuencia de los trabajos de Lobachevsky y Bolyai se inicia una serie de críticas a la axiomática de Euclides que versaron precisamente sobre aquello que le faltaba a Euclides para hacer un tratamiento estrictamente axiomático (lo que quiere decir más estrictamente forma) de la geometría[42]. Estas críticas desembocarán en los trabajos de David Hilbert.

Todas las críticas van encaminadas a condenar el enlace epistemológico que unía el débil sistema axiomático de Euclides con las propiedades intuitivas de

---

[41] Bell, 338

[42] Entre las críticas más importantes que encontramos se hallan las de Felix Klein y Bertrand Russell. Se sostuvo, por ejemplo, que de los postulados propuestos por Euclides no se seguían, en estricto rigor, todos los teoremas propuestos. Euclides, y esto es importante, supone axiomas no enunciados ni derivados de los ya enunciados. Se deja llevar implícitamente por las propiedades de las figuras en el papel para derivar sus resultados utilizando reglas de derivación no explicitadas, carece su geometría de axiomas de ordenación que soporten un "ideal de encadenamiento rigurosamente lógico". Para un tratamiento más detallado de estas críticas consúltese Campos, Cap VII.

la teoría geométrica: libre ahora de la intuición que lo sostenía (por haberse mostrado insuficiente y parcial), el encadenamiento formal mostraba sus fallas y reclamaba una purificación por venir; es a este plan que Hilbert dedica sus *fundamentos de geometría*(1899).

Los "Fundamentos de Geometría" de Hilbert es una obra que sirve de base a toda la geometría anterior, no sólo la euclideana sino también la no euclideana[43]. No da cabida a figuras en el papel por lo que la intuición espacial desaparece completamente dejando paso al ideal del rigor requerido por un formalismo que ahora se revela autónomo, todas las reglas de derivación están explicitadas desde el inicio y no tiene lugar ninguna laguna deductiva.

En Hilbert puntos rectas y planos "aparecen como sistemas de objetos pensados, en el sentido de imaginados, sin precisión alguna de su naturaleza"[44]. Los términos geométricos son ahora fijados en su significación sólo por el uso que de ellos prescriben los axiomas, no por su definición implícita e intuitiva[45]. Las relaciones espaciales tales como "estar entre", "ser congruente" aparecen no con su significado en el sentido ordinario, ni siquiera en su significado espacial, sino en el de un lenguaje formalizado: los axiomas hacen posible esta descripción. Ellos definen implícitamente los términos y las relaciones asumidas entre ellos. Además, las reglas de derivación que los manipulan son reiterativas y autoreferentes en el sentido que cada una remite a las demás. Las fórmulas del sistema pasan a ser simples sucesiones finitas de signos y las derivaciones pasan a ser simples transformaciones de esas sucesiones de signos siempre guiadas por una regla. En pocas palabras cualquier cosa que pueda entenderse como gnoseológica esta fuera de contexto. Estamos frente a una simple combinatoria de signos que mientras pasa de axiomas a teoremas se vuelve cada vez más compleja.

Las implicaciones del cambio generado por el quiebre epistemológico euclideano reformularán las relaciones existentes entre sistemas axiomáticos y

---

[43] Campos, 352.
[44] Ibid, 428.
[45] Esto quiere decir que ahora punto, recta y plano significan sólo cualesquiera clase de objetos que se adecuen en sus relaciones a la configuración formal autónoma. Esto es lo que Hilbert quería expresar con su famoso "uno siempre debe poder decir, mesa, taburete, vaso en vez de punto recta plano"(Ibid, Pág 479).

realidad, entre sistemas y verdad. Desde ahora, éstos términos deben reconocerse escindidos:

En las axiomáticas no formales había una *jerarquía epistemológica* que garantiza la verdad de los axiomas evidentes y la de los teoremas derivados. "Jerarquía", pues se fundamenta en axiomas como enunciados de evidencia paradigmática de donde se derivan aquellos menos evidentes. "Epistemológica", pues lo que se presume es la verdad absoluta de éstos axiomas.

En los sistemas formales puros esta jerarquía epistemológica se pierde, la intuición de verdad se elimina, el contenido se evapora: "el sistema axiomático [como sistema formal] deja de tener como fin la reproducción del orden natural que existe entre los enunciados de una teoría, para limitarse a introducir un orden que, en si, puede ser cualquiera"[46]. El sistema, entonces queda sólo y sólo debe sostenerse.

Lo que hace Hilbert puede resumirse de esta forma: su geometría aislada epistemológicamente de las intuiciones se fundamenta únicamente en un aparato simbólico que cobra vida propia con independencia de si los queremos interpretar como enunciados del espacio. Esta nueva geometría ya no puede entenderse como una descripción del espacio físico sino como una ciencia formal Hipotetico Deductiva. Con los aportes de Hilbert, "la axiomática se desprende de la geometría y se constituye en una disciplina *sui generis*[47], en la ciencia de los sistemas formales.

Los inconvenientes de esta nueva manera de hacer geometría generarán la crisis de los fundamentos de la matemática tal como Hilbert los vivió, y serán responsables directos de los acontecimientos que desencadenarán los resultado trágicos de las investigaciones de Hilbert: si no hay conexión entre forma y contenido, ¿qué me garantiza que la forma es coherente, y qué me garantiza que acoge en su seno toda mi intuición?.

[46] Ladriére, *Limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, Tecnos, 1969, Pág 52.
[47] Op cit, 478

5. la fusión última entre lógica y matemática. La lógica formal en surgimiento. Boole, Peano, Frege y Russell.

La nueva lógica moderna[48] nace en el periodo entre la última mitad del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX. Si aceptamos que el nacimiento de una ciencia culmina con el establecimiento de sus límites, podemos sostener que el último capítulo del nacimiento histórico de la lógica matemática moderna se sitúa en 1931, con los estudios de Gödel sobre la incompletud del sistema formal lógico de segundo orden.

Las características principales de esta nueva lógica, características que la definen en contraste con la noción de lógica anterior (ya sea aristotélica o trascendental) son las siguientes:

1) Se apoya en un cálculo artificial como "principio universal del método lógico"[49], las leyes de la lógica dejan de ser postuladas con un lenguaje natural para ser expuestas como simples elementos constructivos de un cálculo simbólico. Todos los elementos implicados en esta descripción son representados con un lenguaje artificial, no sólo las variables sino también las constantes de conexión. Por esta razón el simbolismo se vuelve connatural a la lógica y la idea de derivación lógica llega a identificarse con la de *implicación sintáctica* (seguimiento de una regla para la deducción de una proposición sobre otras).
2) Relacionado con lo anterior se tiene una diferencia en el método de investigación. Mientras las lógicas anteriores, que descansaban sobre los términos del lenguaje natural, y realizaban *abstracciónes* de los términos de este lenguaje para postular las leyes y construcciones lógicas, la lógica

[48] La nueva lógica sume varios nombres según tradiciones y autores. Para unos es lógica simbólica, para otros, *lógica matemática*, algunos la llaman simplemente *lógica moderna* o *formal*, por último simplemente, *logística*. Nosotros, por ahora, la llamaremos indistintamente por estos términos según qué aspecto de ella queramos resaltar.
[49] Bochénski, Pág 281.

?

71

matemática actúa a la inversa[50], construyendo primero un lenguaje formal artificial, y *despues*, buscando una interpretación de este artificial en el lenguaje ordinario. Es cierto que los detalles de construcción obligan a adecuar previamente lo simbólico con lo lingüistico, pero siempre se puede hacer la separación entre la génesis de lo lógico y el fundamento de este, tal cual lo hizo Frege[51]. Sea cual sea la forma en el que se le vea, el lenguaje artificial se verá como indispensable ya que las precisiones que con él se lograrán serán casi imposibles de llevar en términos de un lenguaje no simbólico.

3) Como consecuencia de lo anterior, la lógica matemática moderna se autoreconocerá como un *substituto* del lenguaje ordinario a la hora de realizar demostraciones rigurosas en las ciencias y la filosofía. Habrá una tendencia a olvidar inclusive la relación entre los principios lógicos que postulan y el lenguaje ordinario No se preocuparán los autores de esta lógica por cuestiones de carácter metafisico o psicológico (la mayoria de ellos se muestra como un reaccionario del psicologismo aplicado a la lógica), aunque muchos de ellos pensarán estar haciendo una descripción de las leyes *objetivas* del pensamiento (Boole, y con las debidas precisiones, hasta el mismo Frege), el razonar queda así identificado al cálculo, dejando entrever con esta actitud una gran influencia de la idea Hobbesiana de racionalidad, extendida por Leibniz y otros.

4) Por último, esta lógica nacerá en el seno, no de una aclaración de lo lógico en el lenguaje, sino de una fundamentación del conocimiento matemático como paradigma de pensamiento riguroso, racional e indudable. Esto es crucial para nosotros. La lógica simbólica moderna es una lógica vertida hacia la matemática, y sólo en segundo plano hacia la inferencia en el lenguaje, en esto se siguió también a Leibniz. Sólo que aquí la posición de Leibniz es radicalizada: no es sólo que las leyes lógicas se deriven de la matemática, es que la lógica esta *elaborada* para representar estructuras matemáticas.

---

[50] Ibid, 281.

[51] Aunque, afirmar esto puede resultar menos una aclaración que una acusación a Frege, ya éste no ve la fuente de realidad de los principios lógicos en el formalismo puro. Tendremos oportunidad de aclarar esto más adelante, pero pensamos que la diferencia entre contexto de descubrimiento y de justificación es una buena forma de explicar la actitud general de los lógicos frente a sus construcciones.

El proceso general de surgimiento de la lógica matemática es el de una interacción entre el simbolismo matemático y la transformación de las leyes lógicas en proposiciones analíticas(Frege) de las cuales se pueden derivar enunciados matemáticos. De esta forma, la lógica se transforma en formal al reducirse a simple analiticidad y símbolo; la matemática se vuelve lógica al reducirse las técnicas de prueba de los matemáticos a los descritos por las leyes lógicas previamente matemátizadas. Estas leyes surgen del análisis de los procedimientos efectivos de razonamiento empleados por los matemáticos, hasta ese momento, de manera implícita.
Por tanto, se ve que la formulación misma de los principios lógicos se fundamenta, en su génesis, en la matemática, y no en el discurso lingüístico.

Los que encabezan la lista de los primeros exponentes de la lógica moderna son Boole y Frege. Los dos tienen como motivación de su trabajo realizar una síntesis de lógica y matemáticas. Boole, por su parte es el primero en aplicar las herramientas simbólicas del álgebra a la lógica. Estos procedimientos lo llevan incluso a expresar en términos del álgebra principios básicos de la lógica como el *tercio excluido* y la *no contradicción* que hasta ese momento no habían sino recibido un tratamiento discursivo y simplemente supuestos en las derivaciones. Los principios de la lógica (principio de identidad y de contradicción) entonces serán, por primera vez desde Aristóteles, utilizados como principios de deducción formal: Será el primer paso para la axiomatización. Por medio de este tratamiento matemático de la lógica se entiende como poco a poco ella es capaz de concebir, por primera vez, que la validez de sus principios no depende de la *interpretación* de los signos, sino de las leyes por las cuales se combinan éstos.

Antes de pasar a la exposición de nuestro autor principal (Frege) haremos un breve paréntesis para referirnos a Peano: Este autor tiene el mérito de haber sido el primero en haber querido aplicar la idea de método axiomático a la matemática. Postula una serie de axiomas que consideraba daban representación absoluta de lo que se entendía intuitivamente por número entero, este sistemas de axiomas será utilizado tanto por Russell, como por Hilbert para la construcción de sus teorías. Los axiomas se limitaban a mostrar cómo era posible construir desde "0" la sucesión infinita de los enteros. Los axiomas de Peano son los siguientes:

1) 0 tiene la propiedad de ser un número entero.
2) No existe un x tal que x tenga la propiedad de ser un número entero y que 0 sea el sucesivo a x.
3) Si x tiene la propiedad de ser un número entero, y y es sucesivo de x, entonces y tiene la propiedad de ser un número entero.
4) Si $x = y$, y si z' es sucesivo a x, y z'' es sucesivo a y, entonces $z'=z''$.
5) Si 0 tiene la propiedad A, cualquiera de su sucesor tendrá tal propiedad, y si x es un sucesor de un número, su sucesor y tendrá la propiedad A[52].

Este, entre otras cosas, es el primer ejemplo de captura finita de un concepto de características infinitas, como es el de número natural. Principio que será la punta de lanza del formalismo hilbertiano. Sin embargo no hay que engañarse, si Peano hubiera estado en lo cierto y estos 5 axiomas englobaran a la perfección el concepto de número, el resultado obtenido por Gödel hubiera sido imposible.

Frege

Un paso adelante sobre todos los autores de la lógica matemática encontramos a Frege(1848- 1925). La importancia de este autor para la historia de la lógica merecería todo un capítulo en un trabajo como el nuestro, pero aquí estaremos interesados en mostrar únicamente cómo se modifica con él, el proceso de postulación de los principios lógicos, y en señalar cómo la *exigencia de rigor* que se encuentra en él impulsará progresos inimaginables en lo que respecta a simbolización de los cálculos lógico-matemáticos de modo que después de él se entiende que la lógica formal está matemátizada y formalizada a la perfección.

De hecho Frege es el primero, después de Leibniz, en postular de manera clara, llevado por su rigorismo, que los razonamientos lógicos deben ser

[52] 1) relaciona al cero con un predicado de un sólo argumento que se entiende de forma intuitiva como número entero. 2) sostiene que cero es el primer número. 3) indica que a partir de la sucesión podemos construir la serie de los enteros. 4) muestra que un entero sólo puede tener un sucesor. 5) es el axioma de inducción que muestra que una propiedad de un número es compartida por sus sucesivos. Cfr Ladriere, Págs 35, 36.

guiados por un cálculo simbólico donde toda derivación esta guiada por una regla.
Su objetivo es reducir la aritmética a la lógica. El nexo entre lógica y matemática es tan profundo que, según Frege son casi indistinguibles, hasta el punto de postular siguiendo a Leibniz, y no a Kant, que cada enunciado matemático puede ser entendido como una ley lógica de carácter analítico[53].

Sin embargo Frege no es un formalista en todos sus términos: la lógica no es un juego de símbolos sino una ciencia de pensamientos objetivos (verdades objetivas): proposiciones ideales donde lo que importa es el sentido transmitido independiente del conducto psicológico. El hombre puede captar las verdades de la lógica pero no producirlas. El pensamiento es objetividad pura que no es violada siquiera por la particularidad del objeto al que se refiere. Pero, precisamente por esto, las únicas diferencias entre las manifestaciones del pensamiento objetivo de la lógica está "en la mayor o menor pureza e independencia de influencias psicológicas y de auxiliares externos del pensamiento, como lenguaje, signos numéricos y cosas parecidas"[54].
Sin embargo, para poder llegar a captar en toda su pureza las verdades de la matemática y de la lógica es necesario entonces que se eliminen esos elementos impuros en los razonamientos matemáticos: intuiciones, psudoevidencias y reglas sin enunciar. Obligado a denunciar las lagunas inferenciales en las demostraciones matemáticas, y a exigir la descomposición de las pruebas en sus pasos lógicos simples de tal forma que no se deje nada a la intuición psicológica, Frege realiza su trabajo de depuración. Es cierto que la apelación de la intuición es necesaria ya que se deben reclamar unos axiomas no demostrados. Pero, lo que se puede pedir es que, tanto estos axiomas como todos los métodos de deducción e inferencia estén explicitados y admitidos desde el principio. Frege desea colocarse un paso más allá del mismo Euclides, que desconocía esas incómodas complicaciones.
La diferencia de Frege con respecto a los anteriores lógicos es precisamente estas exigencias de rigor, lo que Frege desea y logra es "un conjunto de reglas que regulen el paso de una proposición o de dos a otra nueva, de tal forma que

---

[53] Cfr, Frege, *Fundamentos de la Aritmética*, Barcelona, Laia, 1972. Pág 111.

no tiene lugar nada que no este de acuerdo con estas reglas. Mi meta es, pues, una ininterrumpida exigencia de precisión en el proceso de demostración, y la máxima exactitud lógica, a la vez que la claridad y brevedad"[55].

Frege, en últimas, aspiraba a poder separar toda intuición, sobre todo la intuición psicológica, de las matemáticas y la lógica Esta idea sólo será verosímil hasta que no se haya inventado un método que evite la infiltración de procesos de prueba no lógico formales al interior de las matemáticas. Para esto Frege crea la *Begrirffsschrift* (Conceptografía, 1879) "destinada a permitir una mayor brevedad y claridad en la expresión y a proceder según unas pocas reglas fijas, como en un cálculo, de modo que no se permita ningún paso que no sea conforme a las reglas establecidas de una vez por todas"[56].

La Begriffsschrift puede ser entendida como la primera obra de la lógica matemática moderna. Vemos en Frege desde el principio una resonancia del concepto leibniziano de *lingua characteristica:* Se trata del primer sistema de lenguaje puramente artificial diseñado para acoger una teoría lógica a partir del modelo tipográfico y procedimental de la matemática. Es la primera vez en la historia del pensamiento que se construye un cálculo formal con el objetivo de servir como representación de las leyes del pensamiento verdadero.

Este es el legítimo nacimiento de la lógica *formal*, y donde se muestra claramente una de sus diferencias con las anteriores concepciones de lógica. La lógica se realiza *a priori*, tratando de rescatar sólo aquellos elementos que en el lenguaje ordinario son relevantes para la deducción, y desechando todo lo demás. Esto le permite a Frege hacer una manipulación, en términos de símbolos, de conceptos que se habían mostrado casi imposibles de caracterización lógica adecuada, como el concepto de cuantificación[57].

---

[54] Ibid, pág 15

[55] Frege, En bochénski. Pág 298

[56] Op Cit, Pág 114

[57] Los cuantificadores en el sistema de Frege son pequeños operadores que pueden unirse a las variables para definir su propia aplicación sobre el conjunto de entidades que denotan (así de x puede decirse "para todo x" o "para algún x"). Ahora bien, el manejo que se les da a estos conceptos no conserva nada de su expresión en los lenguajes ordinarios. Lo que hace Frege es abstraer del lenguaje únicamente el *sentido* de la cuantificación (esto es, la capacidad del lenguaje de expresar la generalidad), y luego construir una metáfora simbólica (incluida las reglas de inferencia para manipularla) que diera cuenta de este sentido. De esta manera el sistema de Frege exhibe las limitaciones del lenguaje ordinario para expresar adecuadamente sus estructuras lógicas y muestra la forma como los lenguajes artificiales pueden eliminar

Aunque, como hemos dicho antes, si reniega de los lenguajes ordinarios por su imperfección e incoherencias, al igual que Leibniz, no por ello Frege era un formalista. El formalismo ignora el *contenido objetivo* de la aritmética y la lógica, contenido que no se encuentra en ningún lenguaje, ni ordinario ni artificial[58]. En cambio las proposiciones son sólo el ropaje del pensamiento con sentido. Este sentido es independiente de la corriente de las conciencias psíquicas de los pensantes y también de los objetos físicos, pero a la vez es aquello de lo cual se puede plantear con rigor si es o no verdadero. Frege incluso pensaba, en oposición a Hilbert que sólo la verdad de los axiomas (su sentido objetivo) garantizaba la consistencia o no contradicción de los símbolos en el cálculo[59].

Pero, al tomar Frege el concepto kantiano de analiticidad e identificarlo con la verdad lógica, al igual que lo hizo Leibniz con sus principios de razón, abre las puertas a una sutil correspondencia entre los principios lógicos y las derivaciones puramente formales que tratan de combinatorias de símbolos sobre la base de la ley de identidad y la tautología vacía de contenido. Este proceso, totalmente ajeno al propio espíritu de la lógica ontológica de Frege, terminará con la total identificación de lo lógico (de la inferencia lógica) con aquello permitido por una regla de derivación en un mero juego de cálculo.

---

el inconveniente, depurando y clarificando el *sentido* del lenguaje de manera apropiada.

[58] Si los símbolos con los que se expresa la aritmética son vacíos de todo contenido entonces, ¿qué queda de su verdad?. La aritmética y la lógica dejarían de ser ciencias de la verdad y la falsedad y pasarían a ser un juego de proposiciones sin alma.

[59] El formalismo es entonces sólo de carácter operatorio y provisional. Es necesario para darnos una idea de la pureza de ese mundo lógico, pero no tiene nada que ver con la naturaleza de las verdades de la lógica, cuyo reino se encuentra más allá, en una ontología superior, en lo no real objetivo. La lógica, para Frege, es simplemente una ciencia de estos pensamientos sin sujeto cognoscente. Es importante resaltar esta forma de pensamiento pues nos muestra cómo Frege mantenía abierto un diálogo entre principios semánticos ontológicos y lógicos (aunque su semántica este restringida y logizada, y su ontología sea simplemente una lógica formal "espiritualizada"). La lógica entonces no se pierde en un mero cálculo aunque sí se restringe al análisis de ciertas verdades de carácter atemporal e impersonal, cuya realidad es independiente de todo lo demás, hasta de sus usuarios.

Russell

El nacimiento de la lógica matemática va a la par de sucesos ocurridos en el ámbito de la matemática misma: la aparición de las paradojas lógico matemáticas[60]. Cantor había iniciado una reevaluación de la idea de infinito actual considerada por la tradición como un inexistente matemático[61], Entre Cantor y Frege se dió el nacimiento de la teoría de conjuntos y de la definición de número como clase. Pero en combinación, el infinito actual de Cantor y la teoría de conjuntos permitieron que al interior de las matemáticas se construyeran paradojas a partir de la ideas de conjuntos infinitos y de conjuntos que se incluyen a sí mismos.. Se inicia entonces la crisis de fundamentación de las matemáticas, surgirá la necesidad de fundar las matemáticas sobre bases seguras y despojarla para siempre de contradicciones. Tres escuelas se disputarán el honor: el intuicionismo (Brouwer), el logicismo (Russell), y el formalismo(Hilbert).

Bertrand Russell es el sucesor de Frege en todos los sentidos. Si Frege fue el primero en construir un sistema a la manera de calculo para fomalizar la lógica, es Russell el primero en organizarla de forma axiomática este sistema, colocándolo en el camino del orden científico de la época. Si Frege muestra que es posible reducir la matemática a la lógica, Russell es el primero en demostrarlo basado en los propios avances de Frege con respecto al concepto

---

[60] Este cuadro se puede completar con la previa crisis de la intuición en geometría y la total caída del paradigma euclideano que insinuaba indirectamente la posibilidad de expulsar la intuición también en las matemáticas (intuición que Kant había querido elevar a condición absoluta del conocimiento en esa ciencia), y también con el resurgir en Frege de la idea Leibniziana de la analiticidad de las verdades matemáticas. Entre la más famosa de las paradojas a las que nos referimos es la realizada por Russell: sea los conjuntos que se incluyen a sí mismos incluido a su vez en un conjunto ¿Este nuevo conjunto se incluye a sí mismo o no se incluye?. De cualquiera de las dos respuestas surge contradicción.

[53] Por tradición aristotélica el infinito se veía simplemente como infinito potencial, nunca actual

[61] Para Frege el número no es una propiedad de las cosas sino la *extensión* de un concepto, para Russell un número es la clase de todas las clases con la misma cardinalidad (emparejamiento de uno a uno).

de número[62] y demostrando aquello que por su minuciosidad Frege no demostró.

La tesis central es entonces, como en Frege, que la matemática y la lógica son idénticas. La idea de Russell es que todas las verdades matemáticas pueden reducirse a un grupo de proposiciones resultante de implicaciones lógicas[63]. Lo que Frege se había propuesto y que Russell retoma es describir la teoría de conjuntos como parte de la lógica (lo cual es discutible) y utilizarla para trazar un puente entre lógica y matemática a partir de la definición de número como clase.

En los *principia mathematica* Russell presenta la definición referida. Muestra la matemática como reducible a su rama más básica, la aritmética. Luego señala cómo es posible definir todas las nociones aritméticas en términos de su lógica formal (que incluye la teoría de conjuntos), y "resuelve" la crisis de la consistencia de los sistemas matemáticos al reducirlos al problema de la consistencia de la lógica formal misma, lo cual Russell no coloca en duda. Su objetivo último es reducir todos los problemas de matemática, incluidos la naturaleza del numero, las paradojas y el infinito, a problemas de lógica pura.

El sistema presentado por Russell en sus "principia"[64] axiomatizará la lógica proposicional dispuesta simbólicamente por Frege.

El logro de Russell esta en poder abarcar todas las complejidades sintácticas de la formulación de sentencias simples de los lenguajes ordinarios en unos pocos principios de carácter formal, utilizando sólo dos conectivas relacionales (negación, disyunción) y unos cuantos axiomas, que no hacen más que reglar el comportamiento simbólico de estas conectivas primitivas. Con esto se termina de identificar la lógica con un modelo epistémico de corte matemático, y su relación con el lenguaje ordinario se reduce a una simple génesis lingüística.

---

[62] Para Frege el número no es una propiedad de las cosas sino la *extensión* de un concepto, para Russell un número es la clase de todas las clases con la misma cardinalidad (emparejamiento de uno a uno).

[63] "Los progresos en lógica simbólica permitieron la refutación de la filosofía matemática kantiana la cual postulaba la creencia que las verdades matemáticas estaban fundamentas en unos principios sintéticos a priori, construidos a partir de intuiciones puras del espiritu" Cfr, Russell, *Los principios de la matemática*, Madrid, Espasa Calpe, 1977. Pág 29.

[64] Véase Apéndice 1.

Todas las paradojas (incluidas, aunque en menor medida, las paradojas semánticas como la de Epiménides, que encontraremos en el capítulo que sigue) Russell esperará resolverlas con su teoría de los tipos lógicos. Que trata de eliminar la posibilidad que se generen autoreferencialidades en los enunciados matemáticos. Pensamos que este intento de resolver estos problemas, aunque poco aceptado en la actualidad, merece detenerse en él:

La teoría de los tipos pretende eliminar el circulo vicioso de la autoreferencialidad postulando que "una función proposicional que contiene una cuantificación referida a funciones proposicionales de orden n, si puede afirmarse significativamente de funciones proposicionales de orden n, es de orden n +1 cuanto menos"[65]

La idea de Russell era que cada función sentencial tuviera un ámbito de significación llamado *tipo* (u orden) que restringiera los argumentos para los cuales esa función se aplica de forma que, si una sentencia habla de *todos* los valores de la función que contiene, se debe sobreentender que esta sentencia pertenece a un tipo diferente de la función que contiene[66].

Lo que se tiene con esto es una *jerarquía* de tipos lógicos dirigidos a describir una sola realidad matemática. Se elimina la autoreferencialidad y la paradoja, pero a costa del fraccionamiento o la desaparición de la unidad del objeto. Por ejemplo, la paradoja de Epiménides no queda resuelta con la teoría de los tipos en el sentido de inserta en un marco teórico que la interprete de tal forma que elimine su carácter paradójico, lo que se hace más bien es desaparecerla al hacer imposible su construcción autoreferencial. De esta

[65] Gödel Kurt, *Obras completas,* La lógica matemática de Russell. Madrid, Alianza, 1981. Pág 306

[66] En la teoría de los tipos los signos de primer tipos son las variables o constantes que designan individuos, las de segundo tipo designan propiedades o clases, las de tercer tipo designan clases de clases o propiedades de propiedades y así hasta donde queramos. Esto evita que una fórmula hable de una clase que es miembro de sí misma pues la inclusión del "en sí misma" ya implica que no es una *fórmula del tipo 2*, sino una *fórmula de tipo 3 que habla sobre una fórmula de tipo 2*. Este sistema coloca en duda muchos de los método de prueba y de las fórmulas matemáticas demostradas y por mucho tiempo utilizadas. Para contrarrestar esto Russell postula el llamado axioma de reducción, introducido para justificar razonamientos donde se habla de un conjunto total (todas las propiedades de a, todas las funciones de a), pero que, aunque son afectados por la escisión de tipos, se presentan como evidentemente verdaderos. Por medio de este axioma se postula que toda sentencia de un tipo es equivalente a una de tipo superior y que los valores de cada una son satisfechos por la otra.

[67] Mas adelante veremos cómo Gödel logra mostrar que la autoreferencialidad no es un error de carácter lógico que lleva obstinadamente a la contradicción sino que puede ser utilizado como método de diagnóstico de forma clara y aislada de toda paradoja.

forma, la teoría de los tipos no supone más que un prejuicio negativo contra la autoreferencialidad[67].

Pero la concepción logicista de Russel no será la llamada a radicalizar la posición con repecto a las relaciones entre formalismo y matemática. Esta es tarea del formalismo de Hilbert.

La extensa exposición de Hilbert tiene un doble objetivo: primero mostrar la culminación de todo un pensamiento filosófico que despoja a las matemáticas y a lógica de todo contenido, y que se presenta así como el final de nuestro recorrido; segundo prepararnos para el contexto filosófico en el que Gödel demostró su teorema, para poder percibir las consecuencias de éste.

7. la forma como principio último de la verdad matemática. Hilbert y la axiomatización de la matemática.

Hilbert, padre de la geometría moderna y el precursor de la escición definitiva entre geometría y axiomática, también se ocupó del problema de los fundamentos de la matemática. Los postulados de la escuela *formalista* hilbertiana pueden resumirse de esta manera:

- La matemática no puede reducirse a la lógica.
- La matemática tiene su fuente en la intuición primordial del signo
- Al igual que la geometría, la matemática en general se reduce a un repertorio de fórmulas vacías de todo contenido
- La matemática debe ser, por tanto, organizada de forma axiomática
- La construcción de esta axiomática debe estar soportada en su legitimidad por dos tipos de prueba: la prueba de no contradicción y la de completud.

Este último elemento caracteriza, a su vez, el llamado programa de Hilbert para la fundamentación de las matemáticas, que se verá duramente afectado por los resultados obtenidos por el Teorema de Gödel.
Es menester explicar cada *item* de los mencionados para tener una mejor visión de la naturaleza de la filosofía de las matemáticas en Hilbert.

Que Hilbert entendiera la naturaleza de las matemáticas como ajena a la lógica no presupone que para él no valieran los principios lógicos en ella, de hecho, para Hilbert, la lógica entendida *como* la estructura *formal* deductiva de los razonamientos es lo único posible en matemáticas. Que la matemática no pueda reducirse a la lógica quiere decir en el contexto de Hilbert que antes de cualquier uso de razonamientos lógicos debe darse cierto *material* (en el sentido litera de término) del que la matemática misma surge. Este material, *inmediatamente* evidente para la intuición matematica, es el signo concreto, la notación de tinta en e papel, y que es de carácter *extralógico*, lo que parece significar esto para Hilbert es que e signo es *anterior al pensamiento*[68]. "En el principio era el signo", reza la máxima hilbertiana.

Toda la matemática, al igual que la geometría debe organizarse, a través del signo, en sistemas formales de tipo axiomático. La idea de Hilbert era explicitar las relaciones de los signos utilizados en las matemáticas de tal forma que se les pueda transformar sin tener en cuenta su significado, utilizaríamos entonces "signos de número, que son números y que componen completamente a los números(...) pero están desprovistos de significado"[69]. Con esta manera de pensar pretende crear toda una teoría axiomática del número apoyado, entre otras, en las ideas predecesoras de Peano. El método de Hilbert inicia con la suposición de existencia de todo el sistema de los números para, a partir de allí, buscar por medio del análisis axiomas formales que puedan satisfacer el sistema en su totalidad.

De hecho Hilbert plantea el "despojar también los signos lógicos de todo significado, como ya se hizo con los de la matemática y declarar que las fórmulas del cálculo lógico no significan nada en sí mismas"[70].

Las consecuencias inevitables de la extensión del sistema axiomático de la geometría a las matemáticas darán lugar a las consideraciones que llevarán, tarde o temprano, a los resultados de Gödel.

Que la matemática sea comprendida bajo este credo implica, en un primer término, una apelación al relativismo puro, pues desde ahora, el fundamento de *verdad* de los enunciados matemáticos no se encuentra en una evidencia

[68] Campos, 502.
[69] Hilbert, en Campos 497.
[70] Ibid, 506.

extraformal, sino en la pura intuición de los signos en las proposiciones demostradas, y una proposición demostrada se encuentra en este estatuto sólo desde el punto de vista de un sistema de axiomas hipotético: "se acabó la matemática sostén por tantos siglos del racionalismo, como sistema de verdades absolutas. Las verdades matemáticas son aquellas fórmulas para las cuales existe una demostración. Una demostración no existe sino dentro de un sistema formal. Dado que hay más de un sistema formal, una demostración lo es únicamente dentro del sistema formal donde esta fue constituida"[71]. Los resultados desencantadores obtenidos por la revolución de las geometrías no euclideanas (y sistematizados por Hilbert mismo en sus "fundamentos") se extienden ahora al *corpus* entero de la matemática.

La segunda de las consecuencias es más importante para nosotros, y expuesta por Hilbert como el problema de encontrar ese grupo (o grupos) de axiomas especifico que proporcione *todos* los enunciados matemáticos verdaderos, y sólo esos. De esta forma nace *el problema de la completud* de los axiomas de la teoría de números que Gōel resolverá, de forma positiva para los axiomas del cálculo lógico de primer orden y de forma negativa para el cálculo de segundo orden, aquel expuesto como el formalizador de toda la aritmética intuitiva.

La tercera de las consecuencias surge directamente de la independencia lógica de los formalismo con respecto a la intuición. Si la matemática es una simple estructura de formas desplegada a partir de unos axiomas hipotéticos cuya superioridad sobre otros axiomas posibles no se encuentra fundada en ninguna verdad absoluta o evidencia indudable, entonces, ¿Que nos garantiza que tales axiomas no nos llevaran a falsedades o, peor, *contradicciones* en un futuro posible?, ¿cómo evitar la contradicción *a priori*?
El problema es, de hecho, mucho más profundo desde la perspectiva de la filosofía de las matemáticas de Hilbert, pues para él la matemática es signo y forma de signo, se despliega por todo el universo axiomático de lo posible en el terreno de la forma. Desde su perspectiva, los conceptos *existen* de manera matemática si los axiomas que los definen son no contradictorios: "si puede probarse que los atributos asignados a un concepto, al aplicarles un número

[71] Ibid, 498.

finito de procesos lógicos, no pueden tener por consecuencia una contradicción, sostengo que la existencia matemática del concepto queda probada ipso facto"[72]. De igual forma, si un concepto resulta contradictorio, para Hilbert, no existe.

Con todo esto Hilbert pretendía demostrar la no contradicción y la completud de los sistemas formales que contienen las matemáticas con sendas exigencias metodológicas que pueden resumirse en su idea del *finitismo*.

El finitismo en Hilbert tiene un significado preciso, sin embargo, no fue él mismo Hilbert quien realizó una descripción adecuada y concisa de él[73]. Fue, en cambio, Herbrand quien de esta forma caracterizó el espíritu de toda una filosofía de las matemáticas: "(en el finitismo) nunca consideramos más que un número finito dado de objetos y de funciones; estas funciones están bien definidas, y su definición hace posible el cálculo de sus valores de manera general; nunca enunciamos que un objeto existe sin dar los medios para construirlo; nunca consideramos la totalidad de todos los objetos de una colección infinita; y cuando decimos que un argumento (o un teorema) es cierto para todo x, queremos decir que, para cada x tomado en particular, es posible repetir el argumento general en cuestión, que debe ser considerado meramente como el prototipo de estos argumentos particulares"[74]

Podemos tener de esta forma una idea de las exigencias radicales del formalismo finitista de Hilbert, éste pretendía cercar el concepto matemático de infinito en un sistema fijo de axiomas que permitieran recorrerlo en un número finito de pasos lógicos. El desiderata del pensamiento finitista se enmarca al final de toda una tradición del rigor al elevar éste a una obligación epistemológica: "el requisito de la deducción lógica mediante un proceso finito es sencillamente el requisito del rigor en el razonamiento. Este requisito del rigor, que ha llegado a ser proverbial en relación con la matemática, corresponde a una *necesidad filosofica general de nuestro entendimiento*"[75].

---

[72] Ibid, 483.
[73] Ver Campos, 500, 501.
[74] Herbrand, en Campos, Pág 500, 501.
[75] Hilbert, en Campos, Pág 482, subrayado nuestro.

Pero, ¿cómo probar que, *en un número finito de pasos lógicos,* que un sistema de axiomas hipotéticos y no evidentes no lleva a contradicción, si los teoremas construibles por medio del sistema son, en potencia, *infinitos*?. ¿Qué nos garantiza que en algún momento en el tiempo no se llegará a una deducción contradictoria? ¿Y qué decir cuando el sistema intenta formalizar una teorías como la de los números que, de por sí, ellos mismos son infinitos?

A. La metamatemática

Para poder cumplir con los excesivos requisitos de su propia teoría Hilbert se ve obligado a introducir ciertos elementos que aunque ya formulados antes, es con él que adquieren relevancia revolucionaria para la filosofía matemática del siglo XX: La concepción finitista de la fundamentación y la *teoría de la demostración* o *metamatemática*.

El pensamiento central de Hilbert no era otro sino formalizar los enunciados y las demostraciones de las matemáticas y, luego, tomar estas cadenas de símbolos de los enunciados formalizados y las más largas cadenas de cadenas que eran también las mismas demostraciones como objetos de análisis formal. Por medio de esta teoría, por primera vez en la historia de la lógica y la matemática, la demostración formal y la deducción se transforman en *objeto* de estudio matemático.

Hilbert creía poder evadir el problema de la infinitud potencial de los teoremas al analizar las relaciones estructurales que unían las proposiciones con los axiomas de tal manera que pudiera encontrar patrones formales finitos en estas relaciones que pudieran ser objeto a su vez de análisis y demostración, en un número finito de pasos. La metamatemática, o teoría de la demostración, a diferencia de la matemática vacía de contenidos, se refiere a un contenido intuitivo en la medida en que trata las relaciones estructurales posibles de un texto sintáctico es, por decirlo de alguna forma, un estudio estructural y comprensivo de un texto sintáctico. Así Hilbert pedía que las consideraciones intuitivas fueran desplazadas desde las demostraciones hasta las consideraciones sobre las demostraciones.

Por último, deberemos hablar sobre el mismo estatuto exigido por Hilbert para la prueba de consistencia o no contradicción.

Ya Hilbert se había preguntado por la necesidad de demostración de la coherencia de los axiomas de su geometría y había resuelto la dificultad por medio de una estrategia considerablemente bella: logró mostrar que el armazón formal de la geometría era representable por medio del sistema de coordenadas cartesiano[76], al del álgebra y a partir de allí, al de la aritmética, por lo que, si la aritmética era coherente y no llevaba a contradicciones, como siempre se había y se ha creído, entonces también la geometría lo era[77]. De esta forma la geometría es coherente sí y sólo sí lo es la aritmética. Pero, ¿Cómo *demostramos* ahora la coherencia de la aritmética misma?

Mientras la geometría se puede fundamentar de manera relativa, apelando a representar las estructuras formales de ésta, en otro ámbito del que se suponga la no contradicción, como la aritmética, con la propia aritmética esto no es posible. La aritmética (así como la lógica) no tiene un substrato más bajo a nivel intuitivo, formal o matemático que pueda servir como base para una prueba relativa.

Hilbert había reconocido la importancia del trabajo realizadopor Whitehead y Russell para organizar la lógica de manera axiomática y su idea de reducir la matemática a la lógica. Pero también los axiomas de la lógica, desde el punto de vista de Hilbert, sufren de la misma infección de relativismo hipotético-deductivo que afecta a la geometría y la matemática. ¿Hay acaso contradicciones en el seno de estos axiomas de la lógica? Esto es algo que debe ser igualmente demostrado por lo que, en el caso de la aritmética y la lógica (en particular, esa parte de la logica que formaliza la aritmética) era apremiante fundamentar la prueba de contradicción de manera *absoluta,* por medio de un razonamiento metamatemático que pudiera formalizarse *en el seno mismo del sistema formal de que nacía,* de forma que se pudiera cumplir con el ideal de autonomía absoluta de los sistemas formales. Si esto no fuera posible el programa de Hilbert fracasaría pues siempre se podría preguntar por la coherencia de una prueba que tuviera como matriz un sistema formalmente más vasto que su sistema objeto. ¿Es acaso este metasistema utilizado, coherente?.

---

[76] Tendremos oportunidad de referirnos más adelante a este método indirecto de demostración como la adquisición de una *correspondencia biunivoca* entre dos sistemas formales.

[77] Aunque desde un punto de vista más profundo los criticó por querer hacer esta reducción sobre los pilares de los axiomas de infinitud y el de reducibilidad que, desde el punto de vista de Hilbert, eran hipótesis de contenido no formales sin prueba de consistencia. Cfr, Campos 510.

Hilbert creía que este programa de fundamentación salvaría completamente a las matemáticas y le devolvería un renovado papel en un nuevo racionalismo, mejorado y ampliado. Si no tenemos ya la apelación a la evidencia de la *verdad absoluta* de las matemáticas sino que debemos aceptar la *relatividad absoluta* de nuestro conocimiento, es también cierto que las pruebas de no contradicción y de completud nos salvarían de cualquier duda sobre nuestra coherencia y sobre la totalidad de nuestro conocimiento. La nueva verdad sólida sería la verdad de lo formal, y esta verdad no dejaría lugar a ninguna incógnita sobre ningún saber, el escepticismo estaba, al fin, derrotado... "Cantor ha dicho: la esencia de las matemáticas es su libertad. Yo quisiera añadir para que me oyesen los escépticos y los pusilánimes: en las matemáticas no existe el *ignorabimus*, sino que, por el contrario, siempre estamos en situación de contestar todas las preguntas dotadas de sentido(...) nuestra inteligencia nunca recurre a misteriosos artificios; contrariamente, procede según reglas perfectamente determinadas que se pueden formular explícitamente y que constituyen la garantía de la objetividad absoluta de su juicio"[78]. Nunca en la historia de la matemática, y quizás de la filosofía se había expuesto un racionalismo más cáustico y agresivo como el descrito aquí. Hilbert creía tan firmemente en el método axiomático como paradigma último de todo conocimiento científico racional[79], que su fe inquebrantable en la razón sería la última manifestación de un racionalismo de nuevo siglo, confiado en la única y nunca temida tradición del método científico objetivo que dotaría al hombre del saber absoluto, del "si" o "no" para todo problema, y la regla de justicia con la cual medir todo conocimiento posible.

Recapitulación

Las lógicas y los sistemas estudiados hasta aquí son lógica formales pero todas en un sentido distinto, mientras el silogismo aristotélico era una forma restringida y ontologizada, la forma de la lógica matemática se presenta en un nivel más elevado, más libre y omniabarcante. Los procesos de rigorización y

[78] La idea de Hilbert de la resolución de todo problema matemático dice en realidad que, o bien se encuentra la solución del problema o bien se demuestra la imposibilidad de su solución. Pero lo que probará Gödel es que existen problemas que ciertos sistemas son incapaces de resolver tanto de manera positiva como negativa, aún existiendo una solución al problema.

[79] Campos, 494.

de simbolización matemáticas terminaron con destruir la unión de la forma lógica con el lenguaje y volverla una simple combinatoria de símbolos a servicio de la matemática. El resultado de este proceso es resumido por Russell: "La consecuencia es que ahora es completamente imposible trazar una línea entre las dos (lógica y matemática); las dos son, efectivamente, una sola cosa. Difieren como un muchacho de un hombre: la lógica es la juventud de la matemática, y la matemática la plenitud de la lógica"[80].

Aquello que se tenía por principio lógico también fue ampliado a la pura forma y restringido a su vez a ella. Primero fue un silogismo, paso lógico de dos premisas a una conclusión, luego, con Leibniz, se identificó con la analiticidad y como paradigma de todos los principios el de identidad, más tarde se amplio a un mero conjunto de símbolos obtenidos, mediante reglas preestablecidas de un conjunto de principios de carácter redundante.
Cualquier apelación a un discurso (presente implícitamente en la formulación aristotélica), a una ley metafísica o a una regla psicológica fue restringiéndose hasta desaparecer. Esto hace parte de proyecto moderno de lógica que postula una erradicación del psicologismo en ella. En esa batalla de depuración el arma de batalla es la distinción entre "génesis" y "fundamentación" que Frege impuso como argumento definitivo en el terreno del análisis de las ciencias exactas. Bajo esta distinción todo psicologismo y lingüisticismo son desterrados de la lógica, sólo para colocar en su lugar a la matemática. La nueva lógica formal intenta describir una racionalidad matemática no una racionalidad discursiva.
Nótese que bajo esta distinción, ninguna ampliación de la lógica ta como la postula Perelman, es posible. En Perelman, tras la idea de demostración como caso límite de argumentaciones se esconde la idea que la fundamentación de la lógica *es* genética de la lógica. Ambos discursos, el de "fundamentación" y el de "génesis", están relacionados.
Sin embargo, el proyecto de lógica matemática encuentra su fundamento en la idea leibniziana de un *lenguaje universal* que pudiera contener a *todos* los

---

[80] Russelll, *Obras completas*, Tomo 2, Introducción a la filosofía de las matemáticas, Bilbao, Aguilar, 1973. Pág 1382.

objetos, *todos* los principios de razón y *todos* los métodos de conocer. La prueba de que la lógica formal matemática tiene esto como presupuesto necesitaría de una larga argumentación, sin embargo, podemos captar la idea principal en el proyecto filosófico del ***positivismo lógico.***

En su interior podemos encontrar, en muchas maneras, una identificación de extensión de los términos "lógica formal", "lenguaje" y "mundo". Los límites de la lógica son los límites permitidos del lenguaje; los límites del lenguaje marcan los límites del mundo (Wittgenstein). De esta manera la lógica alcanza a describir el marco del mundo, aquello donde se muestra lo posible. Lo que está por fuera de la lógica está fuera del mundo y por lo tanto, no existe.

Es sobre esta supuesta completud de un lenguaje universal que el teorema de Gödel muestra que la lógica, tal como la concibieron los positivistas lógicos, es incompleta.

En este punto el proyecto de Hilbert es la representación del ideal de totalidad formal en la filosofía de las matemáticas.

Todos los problemas hilbertianos (en lo que concierne a cuestiones de fundamentación): la completud de cálculo de predicados de primer orden, la completud del análisis de la teoría de los números(cálculo de predicados de segundo orden y superiores), el problema de la consistencia de los dos cálculos, serán resueltos en menos de dos años después de formulados por una sola persona, Gödel, quién demostrará que la fé de Hilbert estaba cimentada sobre el suelo de arena de la imposibilidad.

CAPITULO III

LOS SISTEMAS FORMALES Y LAS REPRESENTACIONES PARADÓJICAS

> O, si se prefiere, podría imaginarse una máquina en la que las premisas se introdujeran por un lado y los teoremas salieran por el otro; como la legendaria máquina de Chicago en la que los cerdos entraban vivos por un lado y salían por el otro transformados en jamones o embutidos. El lógico no necesita saber qué hacer más que esas máquinas"
>
> Henry Poincaré

Con el recorrido realizado por la historia del formalismo lógico y el método axiomático hemos tenido tiempo de obtener una idea intuitiva de lo que llamamos un sistema formal. Este es el momento que hemos elegido para explicitar el concepto colocando en suspenso la historia de su génesis y concentrándonos en los elementos puramente formales de aquello que nos interesa. No queremos substituir la explicación histórica que para nosotros es primordial en nuestras consideraciones, sino mostrar los detalles que se hacen necesarios para la verdadera comprensión de lo que, después de Hilbert, ha venido ha significar la noción que analizamos. Nuestro propósito primordial es precisar nuestro lenguaje con las definiciones técnicas necesarias y colocarnos en posición ideal, para la posterior exposición del teorema de Gödel. Al final echaremos un vistazo a algunos elementos que esperamos nos ayuden a una mejor comprensión teórica del teorema, sobre todo la noción de representación. Nos interesaremos también en especial por los antecedentes históricos que encontramos, en algunas paradojas, de la metodología utilizada por Gödel para la demostración de su teorema

1. sobre el concepto de sistema formal

Imaginemos un universo totalmente aislado, determinado y finito (o numerable) de entidades distintas entre sí llamadas *símbolos*, o alfabeto de símbolos:

$\alpha,\beta,\chi,\delta,\varepsilon,\phi,\gamma,\eta,\iota,\varphi,\kappa,\lambda,\mu,\nu,\pi,\theta,\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\varpi,\xi,\psi,\zeta$..

Estos símbolos deben entenderse absolutamente sin significación alguna, al mejor estilo de la escuela formalista de Hilbert, y bien podrían substituirse por otros símbolos (la utilizacíon, algo pedante, del alfabeto griego es accidental) con tal que, a cada aparición de un símbolo particular, se le cambie por otro particular definido previamente. De hecho, la única diferencia entre uno y otro símbolo del alfabeto es simplemente que son distintos unos de otros, no hay jerarquías ni relaciones epistémicas entre ellos. Son sólo eso, símbolos.

Imaginemos ahora conjuntos de símbolos llamados *palabras*. Palabras pueden ser:

βοα, δεασον, γασολινα.

Pero también, aunque menos interesante:

λλλλλλλ, εφκεφκεφκ.

Podemos sostener, por ahora, que no hay reglas que nos definan qué es una palabra con tal que este construida con el alfabeto de símbolos postulado. Las palabras van a ser nuestro material de trabajo, su número puede ser infinito con tal que estén constituidas cada una por agrupaciones finitas de símbolos. El significado de las palabras es igual de indeterminado que el de los símbolos, completamente nulo.

De nuevo, usemos nuestra imaginación para postular una serie de *reglas*, una lista finita de substituciones admisibles entre algunos conjuntos o subconjuntos de palabras:

$\lambda\alpha\sigma = \alpha\sigma$

$\alpha\sigma o = \alpha$

$\nu\alpha\sigma o = \rho o\nu$

$\sigma\alpha\nu = \lambda\iota\rho o\nu$

$\gamma\alpha\sigma = \delta\varepsilon\lambda$[1]

Esto nos quiere decir que, si en el conjunto-palabra "δελασ" encontramos, como es confirmable, la aparición del subconjunto "λασ" (referenciado en la primera regla) estamos en legítimo derecho de substitur ese subconjunto por el subconjunto que figura al otro lado de la igualdad "ασ", colocándolo en el mismo lugar donde aparecia el primero, de esta forma:

$\delta\varepsilon\underline{\lambda\alpha\sigma} = \delta\varepsilon\underline{\alpha\sigma}$

A partir de aquí sostenemos que las palabras "δελασ" y "δεασ" son *equivalentes,* pues hay un método de ir de una a la otra y viceversa a través de las substituciones admisibles. El "problema de las palabras" consiste en decidir si dos palabras cualesquiera dadas previamente son equivalentes la una a la otra por medio de finitas transformaciones a partir de las reglas postuladas. Un ejemplo más largo de lo anterior se encuentra en la equivalencia de las dos palabras "γασαν" y "δεαν", su equivalencia se prueba de esta manera:

$\gamma\alpha\sigma\alpha\nu = \delta\varepsilon\lambda\alpha\nu = \delta\varepsilon\lambda\alpha\sigma o\nu = \delta\varepsilon\alpha\sigma o\nu = \delta\varepsilon\alpha\nu$

Por medio de esta serie finita de *transformaciones* hemos hecho una *deducción* de la equivalencia. Decimos entonces que existe un medio de ir de "γασαν" a "δεαν", y de "δεαν" a "γασαν" sin que se viole (y esto es determinante) ninguna regla y sin que tengamos que añadir ninguna a las admisibles desde el principio.

Este ejemplo (de la matemática de los cálculos asociativos) resume, en lo esencial, lo que se entiende aquí por sistema formal o cálculo. No son estos más que complejos de vínculos simbólicos que pueden construirse de forma artificial, a la manera de juegos de relaciones vacíos de cualquier contenido, no tienen ningún tipo de significado por fuera de las propias estructuras que los definen. No son, por tanto, ni verdaderos ni falsos, no son más que un *juego de formas*, un constructo artificial cuyas relaciones y símbolos pese a ser en sí vacíos de contenido pueden llegar a representar en un momento elegido, en el caso de sistemas más intrincados que el descrito, elementos de una cierta teoría o

---

1 El conjunto de reglas descrito es tomado de: Penrose, Roger, *la nueva mente del emperador*, Barcelona, Grijalbo Mondarori, 1998. Págs176-178. Para más información

ciencia, no importa cual sea esta, con tal que el sistema formal se preste para representarla.

Sin embargo, como ya dijimos, la "significación" de los elementos de un cálculo no tiene que deberle nada a esta teoría o interpretación sino sólo a las reglas que han de ser explicitadas con toda rigurosidad con el objetivo de "desembarazar al espíritu": de no utilizar nuestra intuición extraformal al juzgar las manipulaciones que el sistema describe.

La intuición, aunque no puede eliminarse completamente, ya no afecta a los contenidos de los conceptos o expresiones sino que se reduce, como bien lo aclararía Hilbert, a facilitar las manipulaciones y derivaciones de los símbolos: sólo es necesaria para identificarlos, distinguirlos y reemplazarlos[2].

---

sobre los cálculos asociativos consúltese: Trakhtenbrot, B. A. *algoritmos y computadoras*, Mexico, Edit limusa, 1985

[2] Ladriére, 52. Es interesante para nosotros aclarar la diferencia entre lo que se entiende por "**sistema formal**", y un "**cálculo**". Un cálculo es una combinatoria de elementos formales, "un conjunto de reglas operatorias" que contiene, una lista de símbolos (1), las reglas de construcción de expresiones con estos símbolos (2) y las reglas de transformación de estas expresiones en otras expresiones. Por "expresión" entiéndase simplemente un conjunto de símbolos construidos bajo la legitimidad de las reglas de construcción. Un sistema formal, según Ladriére puede ser entendido como una *abstracción* de los símbolos que lo configuran, al igual que como una *abstracción* en calidad de forma de lo que aquellos símbolos pueden significar: inferencias en un lenguaje ordinario, en el caso de la lógica. En pocas palabras, un sistema formal esta unido por un cordón umbilical semántico a aquello que representa. Un calculo, en cambio, ya no es entendido como una abstracción propiamente dicha sino como una simple combinatoria aislada de elementos, una plataforma de combinaciones sintácticas independiente tanto de los símbolos que lo caracterizan como de lo que pudiesen significar. Así, "un sistema formal constituye una *extensión* del lenguaje que utiliza para su formulación (lenguaje natural), mientras que un calculo se *superpone* a este lenguaje" (Ladriére, pg 58. Cursiva nuestra).

Un sistema formal no es un constructo fijo en su totalidad en lo que respecta a su presentación pues entre sus propiedades esta la posibilidad de una *variabilidad combinatoria*. Diferentes axiomas, reglas de inferencia o conectores, pueden dar cuenta de un mismo sistema. El cálculo de predicados, por ejemplo, creado por Frege, puede ser descrito con sólo dos conectores, o con uno (la barra de Sheefer) y con únicamente dos reglas de inferencia. No hace falta ser un lógico avezado para notar que, así descritos, todo sistema formal esta sostenido por uno o varios cálculos y que todo sistema formal puede ser entendido también como uno. Para nosotros, como también para Ladriére, "sistema formal" y "cálculo" son nociones totalmente equivalentes que podremos utilizar indistintamente. Los resultados que obtendremos pueden aplicarse tanto a uno como a otro concepto. Las implicaciones del "cordón umbilical" semántico que preservan los sistemas formales, en contraposición con los meros cálculos, esperamos serán aclaradas más adelante.

93

Nuestro ejemplo preliminar de un sistema formal como cálculo asociativo no da cuenta siquiera de las mínimas complejidades de los sistemas utilizados para formalizar la lógica, pero es un buen comienzo intuitivo para ir construyendo, al agregar elementos que lo precisen, una imagen cada vez más adecuada de lo que deberemos entender, de ahora en adelante, como sistema axiomático formal. Por ahora aclararemos algunas generalidades del simbolismo formal, como tal.

Un **símbolo** es un elemento gráfico concreto (tinta en el papel) que es utilizado para representar *clases de objetos* o *funciones de relación de estos objetos*, cada uno de los cuales (los objetos o las relaciones) puede tomarse, aunque no lo sea, de forma unívoca y precisa. En un sistema formal un símbolo reemplaza completamente estas entidades hasta el punto que el conocimiento de éstos no es ya necesario para la manipulación de los símbolos. De esta forma, una persona que conoce el sistema en su totalidad puede manipularlo sin saber siquiera cuál es su objetivo, si alguna vez lo tuvo.

En los libros de texto observamos cómo los sistemas formales son descritos a través de símbolos y, de hecho, es posible expresar que un sistema formal es simplemente un sistema de signos, junto con reglas para utilizarlos[3], la importancia de los símbolos, desde este punto de vista, es innegable.

Tuvimos, con anterioridad la oportunidad de observar cómo la utilización de los símbolos facilitó en la practica los procesos de rigorización en la creación histórica del concepto que estudiamos: el símbolo permite que el lógico se concentre "en lo esencial", esto es, en las estructuras sintácticas que unen formalmente los elementos de un sistema.

Mediante los símbolos "ponemos bien en evidencia que los resultados de nuestro razonamiento no dependen del significado *especial* de esas expresiones, sino de las relaciones abstractas que las vinculan con otras"[4], los símbolos ayudan de esta forma a la pura realización mecánica del sistema formal por medio de la economía del pensamiento y la precisión. El símbolo además facilita los procesos

[3] Gödel, *obras completas*, Madrid, Alianza, 1981, pag 151
[4] Cohen Morris, *introducción a la lógica*, Mexico, FCE, 1993, pag, 144

psicológicos del pensamiento que debe manipular entidades tan abstractas y contraintuitivas como son las formas puras.

Es, sin embargo, necesario aclarar que todo lenguaje es, de hecho, simbólico. Los lenguajes usan esos símbolos o signos que son las palabras para categorizar y clasificar, para generalizar o restringir. Pero los lenguajes naturales son, desde la modernidad, ambiguos e imprecisos, y los símbolos artificiales ayudan a eliminar la vaguedad de los lenguajes naturales los cuales cargan las palabras con toda una historia social de matices significativos. A las notaciones simbólicas, al contrario, se les puede aplicar sin prejuicios[5] esa unicidad artificial que se desea. Podemos fácilmente entender, por medio de estas consideraciones por qué la idea de la esencial necesidad del lenguaje artificial para la conformación de los sistemas formales es muy popular entre los lógicos matemáticos.

Pero, desde nuestro punto de vista, la idea de sistema formal o de calculo se asemeja no tanto a un "instrumento" lógico sino precisamente a un objeto de carácter matemático. Los signos inscritos en el papel por el lógico, por ejemplo, son simples ventanas intuitivas que le ayudan a manipular correctamente y con eficacia las idealidades formales. Los símbolos son, si se quiere, las huellas contingentes pero necesarias de la existencia del sistema formal en la esfera física del papel y en la psíquica del lógico o matemático, sólo desde este punto de vista nos parecen esenciales[6].

<u>estructura general de los sistemas formales:</u> Para la construcción de un sistema formal para la lógica es necesario formalizar las relaciones que deben unir a los

---

[5] Cfr, Campos Alberto, *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Edit Univ nacional, Bogotá, 1998. Pág, 429.

[6] En un sistema formal se utilizan los símbolos sólo en su función designativa, esto es "para *representar* las componentes primitivas y las operaciones del sistema, a la manera de nombres para designar las componentes primitivas y las operaciones"[6]. Los símbolos, por tanto, solo están allí como representantes de los objetos que designan, y en ultimo término, de las *formas puras* que conforman el sistema, ya que estos objetos están definidos a través de ellas. Estos "representantes" que son los símbolos pueden ser intercambiados, modificados o, en el caso de los *softwares* de computadoras, eliminados completamente.

Aunque, para que el sistema pueda desplegarse practicamente, es decir, para que pueda ser usado o manipulado, debe tener un "representante" en el mundo fisico, aun si este se encuentra en una maquina computadora: "una maquina debe tener un *alfabeto* adecuado para representar la informacion. en lugar de usar simbolos escritos, una maquina símbolos con otros. Estas relaciones entre los símbolos se describen a través de reglas.

Así, un sistema se manifiesta en un primer momento a través de *filas* de signos, pero al contrario que en nuestro ejemplo, donde no había reglas que determinaran el conjunto de símbolos que conforman una palabra, no cualquier combinación arbitraria de símbolos puede ser un componente del sistema. A diferencia de lo que sucede en un mero cálculo asociativo, nos interesaremos en construir filas de signos que puedan llegar a representar la sintaxis de un lenguaje o las fórmulas de una teoría matemática, por lo que deberemos restringir la aparición de un signo al lado de otro[7]. Estas nuevas combinaciones deben someterse a la configuración de una estructura u orden que es el que conforma realmente al objeto formal.

Las **reglas de formación** permiten seleccionar, entre las combinaciones particulares de símbolos que conforman tales filas, cuales son o no aceptadas por el sistema, es decir, cuáles son las *expresiones bien formadas* de éste. Como ya hemos dicho, la aceptancia de una fila de signos sobre otro en un sistema formal no tiene que ver nada con lo que puedan significar estas filas de signos, su uso y aceptancia esta fijado de antemano por las reglas formales, y las reglas los definen. Esto quiere decir entre otras cosas que la homogeneidad de los símbolos permanece, no hay una jerarquía ni valorativa, ni epistemológica que los ordene, la diferencia entre un símbolo y otro esta definida sólo por la regla de formación que dicta su aparición válida al lado de otro.

Una **proposición** no es más que una secuencia de símbolos aceptada por el sistema bajo la legalidad de una regla de formación. Tanto los símbolos como las reglas para conformar las expresiones bien formadas del sistema hacen parte de lo que se conoce como la **morfología** del sistema.

Entre las proposiciones hay unas que se tienen por esenciales pues son las que permiten derivar todas las demás proposiciones del sistema, estas proposiciones

---

representa la informacion mediante condiciones fisicas distinguibles, tales como voltajes electricos diferentes o estados diferentes de magnetizacion" (Trathtenbrot, B. A, Pág 13).

[7] Este orden debe dar cuenta del modo como el predicado sigue al sujeto, y de los elementos que los unen, cada uno representado por un símbolo.

son los conocidos **axiomas**. De nuestro cálculo asociativo se puede decir, o que carecía de axiomas o bien que la lista de identidades o de substituciones admisibles hacía el papel tanto de axiomas como de **reglas de derivación o inferencia.** Estas reglas son precisamente las que permiten pasar, de forma dinámica, de los axiomas a otras proposiciones.

En los sistemas para axiomatizar formalmente la lógica o la matemática es necesario distinguir entre estos dos elementos de forma que se distinga entre los enunciados no demostrados con pretensión de "verdad" y las reglas lógicas que permiten construir *otros* enunciados a partir de estos. Pero, las reglas de derivación se limitan a permitir pasar de una expresión bien formada del cálculo (que puede ser un axioma) a otra expresión bien formada que esté en coherencia con las anteriores[8]. Aquellas proposiciones del sistema que pese a no ser axiomas son derivables de ellos se llaman **teoremas.**

La noción de derivabilidad en los sistemas formales puros se refiere sólo a una transformación permitida por una regla. Que un teorema sea **derivable** quiere decir que existe una sucesión de proposiciones(premisas) que, mediante la aplicación de una determinada regla de derivación, tiene a esta proposición particular como resultado(conclusión)[9]. Cada una de aquellas proposiciones que sirven de premisas debe ser o un axioma, o un teorema (es decir, una proposición derivada previamente de los axiomas)[10]. Esta relación de derivabilidad no se pierde ni siquiera cuando llegamos a los primitivos axiomas, pues cada axioma

[8] En el caso del cálculo asociativo las reglas de derivación sólo permitían la *substitución* de un subconjunto de símbolos por otro. Este es un caso paradigmático de tipos de reglas pero no siempre se resumen a eso. En algunos casos delimitan la *aparición* de un nuevo símbolo o conjunto de símbolos, en otros la *separación* de un subconjunto de símbolos para crear un nuevo conjunto.

[9] Tambien, se dice que una proposicion es **refutable** cuando su negacion es derivable del sistema, pero esta nocion no es absoluta. la distincion entre derivacion y refutacion solo existe en los sistemas con operador negacion, en casos diferentes, donde no es posible construir algo asi como "la negacion de una proposicion o tesis" se habla simplemente de "deduccion", en todos los casos.

[10] CFR, ladriere, 54. Desde un punto de vista puramente formal no es perfectamente adecuado sostener que el sistema esta limitado porque debe dar por supuestas ciertas hipótesis (axiomas). El sistema se encarga en la manera descrita, de cerrar *completamente* su estructura a cualquier intuición resultante de la arbitraria escogencia de los axiomas.

debe ser comprendido como una proposición autoderivable. Los axiomas deben ser el único caso de una derivación que no necesita el uso de una regla[11].

Debemos explicar un poco mas esta idea de derivabilidad: Esta relación se ha explicado generalmente con la de implicación. "La conclusión esta implicada en las premisas. Es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa". Esto ya supone la noción de verdad pero en la axiomática pura esto tiene su equivalencia: los teoremas están contenidos en los axiomas como resultado de transformaciones hechas en su forma conjunta a través de la combinatoria permitida (por una regla) de sus símbolos. Los teoremas expresan únicamente la forma de los axiomas de una manera simbólica más compleja. Los teoremas no deben agregar ni un solo hecho estructural distinto a los ya establecidos. Un teorema puede tener menos, pero no más de lo que dicen los axiomas del sistema. Las reglas de derivación, en este sentido, deben garantizar que al realizar una derivación no se haga más que transformar la forma expresada por los axiomas en conjunto *sin modificarla*. Lo que se cambian son las configuraciones internas de los símbolos y las relaciones sintácticas de los primitivos y de los axiomas, pero la identidad, la vaciedad formal, se mantiene.

Lograr tal coherencia entre el material formal de los axiomas y la configuración dinámica de las reglas no es nada fácil, y de ningún modo se puede tener una idea clara de cómo pueda ser esto. Sólo en una axiomática intuitiva como la euclideana era sencillo solucionar este problema pues en ella la calidad del material axiomático era garantizada por el sentido común y la autoevidencia de los mismos. Al despojarnos de ese sostén intuitivo quedan ahora las preguntas, como lo vimos en Hilbert, por la coherencia del sistema y, en el caso de los sistemas más complejos donde una senda teoría debe ser sistematizada por unos cuantos axiomas, por la completud de los teoremas. Preguntas que se refieren a la metateoria de los sistemas formales.

[11] "Todo axioma es derivable, pues debe ser considerada como la proposicion final de una derivacion de la que constituye unica componente". Ladriere, 54. CFR tambien a este respecto Raymond Wilder, *el metodo axiomatico*, Enciclopedia Sigma de las Matematicas, Barcelona, Grijalbo, 1983, Pg 47

2.LA METATEORIA DE LOS SISTEMAS FORMALES

Un sistema formal puede ser utilizado de diversas maneras, como por ejemplo, de apoyo para la formalización de una teoría, o simplemente como un puro juego calculístico sin ningún tipo de sentido exterior a él (como cualquier juego). Sin embargo, un sistema puede ser visto también como un objeto que se intenta estudiar.

Se llama **metateoría** a toda consideración que tenga como objeto de estudio el sistema formal y sus propiedades[12]. Llamamos **lenguaje-objeto** al sistema formal estudiado por una metateoría particular. La lengua que se utiliza para describir el lenguaje-objeto es llamada **metalengua.** La metalengua debe tener expresiones que designen los elementos del sistema, pero a la vez y por lo general, debe tener medios de expresión más potentes que éste, si su objetivo ha de ser estudiarlo.

La metateoría puede reducirse al análisis sintáctico de los símbolos, o puede incluir elementos semánticos. La **sintaxis** se ocupa del "puro estudio de las relaciones de los signos entre sí, la teoría de la construcción e identificación de las secuencias de signos bien formadas". La **semántica** "se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello que éstos designan, entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de ellos" [13]. Una metateoría semántica estudia las posibilidades de *interpretación* de un sistema, es decir, la significación potencial del sistema y su relación general con un dominio de objetos[14].

La importancia de las metateorías se vuelve~~n~~ evidentes en el caso de, por ejemplo, evidenciar las imposibilidades de un sistema. En el caso de las proposiciones que el sistema puede probar la mejor manera de hacerlo es exponer la cadena deductiva que tiene a esa proposición como última componente. En el caso de nuestro cálculo asociativo, para exponer la equivalencia de dos palabras no hicimos más que esto. Pero, por ejemplo, en el caso de las dos palabras siguientes: "γασταρ" y "δελαταρ", lograr una cadena deductiva de tipo ordinario es inútil pues estas palabras no son equivalentes. ¿Cómo probamos *este* hecho?

---

[12] veáse para una explicación más detallada de este tema el capitulo anterior en lo referente a la metamatemática de Hilbert.

[13] Deaño, 28.

[14] Ladriére, 66.

La forma más efectiva de hacerlo no es utilizar las reglas de derivación dadas sino tomar a éstas como "objetos" de análisis para razonar acerca de lo que ellas dicen. Debemos por tanto analizar el sistema *desde fuera*, y sin su ayuda[15].

Hasta Gödel todas las teorias metateóricas eran no formales o semiformales, es decir, utilizaban términos de los lenguajes ordinarios acompañados con símbolos utilizados para *nombrar* los símbolos del sistema (generalmente se utilizan estos mismos símbolos con comillas)[16]. Gödel será el primero en formalizar una metateoría. Este es, primeramente, el objetivo de su técnica de aritmetización: transformar parte de los razonamientos metaformales en proposiciones descriptibles por el mismo sistema objeto. Esto supone dar lo que parece dar un paso positivo para cumplir con el ideal de fundamentación finitista de Hilbert, aunque veremos que es un paso que nos llevará a lo contrario. Tendremos ocasión de extendernos en este punto.

Antes de hablar de las propiedades metateoricas de los sistemas formales mostraré la diferencia entre los conceptos de "representación" e "interpretación" de un sistema formal.

Al tener un sistema formal podemos intentar "atribuir un *sentido* a sus componentes primitivas poniéndolas en correspondencia con determinados objetos perfectamente definidos. Se denomina **representación** de un sistema a una correspondencia biunívoca entre los componentes primitivos de un sistema y una clase particular de objetos"[17]. Toda representación es isomórfica con el sistema, en el sentido que, a cada elemento del sistema corresponde uno y solo uno de los objetos de la representación y viceversa (biunivocidad).

Un ejemplo de representación de una proposición aislada(sin tener en cuenta otros elementos del cálculo) puede darse de esta manera: tomemos la estructura formal (($p \rightarrow q$). Hagamos corresponder "p" con la clase "hombre" y "q" con la clase "perro", por último hagamos corresponder el conector "$\rightarrow$" con la relación

15 Un lector interesado puede tratar de construir un meta-argumento que demuestre la imposibilidad de la equivalencia propuesta.

16 Este es una de las razones por las cuales Hilbert supone para la metamatemática de su invención un tratamiento intuitivo de los elemento formales de los cálculos.

17 Ibid, 56.

semántica "ser esposo de". De esta forma hemos establecido con éxito una correspondencia entre una expresión aislada del cálculo y un conjunto de objetos o hechos particulares. De más decir que esta representación aunque isomórfica no tiene ningún sentido coherente, pero ningún lógico nos denunciaria ya que no es necesario, aunque sí posible, que haya coherencia interna entre los miembros u objetos que *representan* al sistema. Lo único importante es que haya una correspondencia biunívoca entre los elementos del sistema y los elementos de la representación.

Más adelante tendremos la oportunidad de volver sobre esta idea de extrema importancia para la comprensión de la técnica utilizada por Gödel para probar su teorema.

Una **interpretación** de un sistema formal, en cambio, es una correspondencia entre las proposiciones elementales de un sistema con determinadas clases de enunciados cuya verdad o falsedad se determina *independientemente del sistema,* de manera que las proposiciones derivables del sistema correspondan enunciados verdaderos. A causa de este último requisito, de una interpretación se debe exigir una coherencia interna independientemente de su correspondencia biunívoca con ciertos elementos formales.

La noción de interpretación se encuentra intimamente ligada con la de modelo, un **modelo,** en pocas palabras, es un conjunto de objetos existentes o de enunciados verdaderos que conforman un *teoría intuitiva* de carácter no formal, se supone(o se muestra) que el cálculo da cuenta de las relaciones entre estos objetos o enunciados de manera que a las proposiciones derivables del cálculo correspondan enunciados verdaderos del conjunto[18]: dar una interpretación de un sistema formal no es otra cosa que poner en evidencia un modelo suyo.

[18] Esto quiere decir que la correspondencia adoptada entre un modelo y su cálculo debe garantizar que los axiomas del sistema se conviertan en enunciados verdaderos del sistema formal, y que la aplicación de las reglas de derivación postule teoremas que puedan ser, a su vez, ser interpretados para satisfacer enunciados verdaderos de la teoria-modelo. De esta forma logramos tener la correspondencia general mostrada en el cuadro de la página siguiente.
[18] Ibid, 57.

Los enunciados de la geometría son pues un modelo de la estructura axiomática formal que formaliza la geometría misma. Esta distinción entre "armazón formal" y "modelo" es, como podrá imaginarse, consecuencia necesaria de la nueva manera de ver la relación entre sistemas formales y realidad. No se supone como hecho que un sistema formal esté dando una configuración epistemológicamente válida de ninguna realidad. Es posteriormente que se postula como posible la relación entre estos dos elementos.

Sin embargo, la correspondencia establecida entre el sistema formal y su modelo no es necesariamente isomórfica (biunivoca), como lo es en la representación[19]. Si logramos mostrar que hay una fórmula *verdadera* del modelo que no corresponde con una proposición *deducible* del sistema, la interpretación perderá su isomorfismo. El teorema de Gödel, precisamente, permite llegar a esa conclusión en lo que respecta al sistema que pretende formalizar la aritmética intuitiva.

SISTEMA FORMAL	**TEORIA MODELO**
PROPOSICION	ENUNCIADO
DERIVACIÓN	DEMOSTRACIÓN
PROPOSICIÓN DERIVABLE	ENUNCIADO CIERTO
PROPOSICIÓN REFUTABLE	ENUNCIADO FALSO

<u>Propiedades metalógicas de los sistemas formales:</u> En un sistema axiomático euclideano fondo y forma están entremezclados, por lo que la estructura formal del sistema tiene su fundamento y justificación en los contenidos de la teoría geométrica.

La certeza de las evidencias intuitivas garantizaba que el sistema, en el caso de Euclides, 1) tuviera axiomas no solo autoevidentes sino *únicos y absolutos* ya que provenían de supuestas evidencias únicas y precisas que podían dar cuenta de *toda* la geometría posible 2) que al estar asentado sobre axiomas geométricos intuitivamente verdaderos el sistema logrado no fuera más *contradictorio* que la ontología de la geometría misma.

Con Hilbert, sin embargo, hemos visto cómo estas suposiciones se desmoronan desde su base. El sistema ahora debe garantizar, al menos estos requisitos, por sí sólo y de forma interna.

Que los axiomas sean únicos y absolutos...............*Independencia*

Que den cuenta de todo lo verdadero en el modelo.........*Completud*

Que los axiomas no sean contradictorios..................*Consistencia*

Existen por lo menos dos propiedades metateóricas(consistencia y completud) que nos interesan para la exposición del teorema de Gödel, sin embargo, nos referiremos a dos más (independencia y decidibilidad) que en otros contextos son de gran importancia para establecer las limitaciones de los formalismos.

Independencia.

Los axiomas de un sistema formal son, o deben ser, condición necesaria y suficiente del sistema mismo, cada axioma, y la elección que se haga de estos, forjará el destino formal de la teoría. El requisito de independencia afecta directamente a la escogencia de estos axiomas y de formas muy diferentes, pues puede exigirse tanto de cada axioma, como del sistema de los axiomas en su totalidad.

Cuando se pide de cada axioma en particular no pasa de ser un requisito práctico. Un axioma no independiente es aquel que puede ser derivado como teorema a partir de los axiomas restantes del sistema, cuando esto sucede, el axioma se vuelve innecesario por redundante y lo mejor es colocarlo en el orden de los teoremas para así ahorrar primitivos y hacer el cálculo menos complejo.

Se llama independiente a un axioma cuando no puede ser obtenido como teorema a partir de los restantes. Esto quiere decir que cada axioma es una proposición formalmente autónoma con respecto a las otras. Si a un sistema formal le restamos un axioma de este tipo habrán teoremas que necesiten a tal premisa de su derivación por lo que el sistema será incapaz de derivar o refutar todas sus expresiones válidas.

Un *grupo sistemático* de axiomas es independiente cuando ninguno de ellos puede ser obtenido como teorema a partir de los restantes. Cuando a un grupo sistemático de axiomas independientes se le agrega un axioma no derivable de ellos este agregado no puede ser sino una expresión no permitida del cálculo, el sistema entonces se vuelve inconsistente. Este último caso en particular presupone que el sistema primitivo es completo sintácticamente[20]

Consistencia.

La consistencia *sintáctica* o no-contradicción puede ser definida de dos formas: un sistema es no contradictorio si, a partir de los axiomas dados, no es posible derivar a la vez un teorema y su negación. También es posible decir que un sistema es consistente si *no toda proposición expresable en el sistema es derivable.*

De las dos la última es mucho más precisa pues no lleva dentro de sí el prejuicio de la negación contradictoria y puede servir también para los cálculos que no tienen el operador "negación". Las dos definiciones, sin embargo, coinciden: si un sistema puede derivar *todas sus expresiones bien formadas*, entonces derivará indistintamente tanto A como no-A.

El requisito de la consistencia, o de la no-contradicción es de extrema importancia, pues este vela por la coherencia interna del sistema. Si un sistema es inconsistente sus contradicciones lo vuelven inútil pues no permite discriminar bajo regla entre las proposiciones verdaderas que le pertenecen y las que no. De esta forma el sistema producirá tanto sus axiomas como las negaciones de sus axiomas, auto aniquilándose en un giro suicida. A un sistema de este tipo se le acusa de **trivial**.

La consistencia *semántica* es mucho más compleja. Puede decirse que un sistema es inconsistente semánticamente si no existe ninguna interpretación o modelo para él. Esta definición se basa en la idea que la sola existencia de un modelo garantiza la consistencia sintáctica del sistema. Esto, naturalmente, se fundamenta en la suposición de que no hay contradicciones en el modelo utilizado. También puede decirse que un sistema es inconsistente semánticamente cuando tiene una *infinidad* de modelos, y esto pues la trivialidad

[20] Ver más adelante la nocion de completud que explicamos, Cfr tambien en Deaño, 170.

del sistema le permite derivar cualquier proposición que el formalista se proponga.

ω consistencia: Un sistema formal es ω inconsistente si existe una interpretación suya que *niega* cierto tipo de verdades afirmadas por él como proposiciones derivables[21].

Si de un sistema podemos derivar la afirmación de que "no *todos* los x tienen la propiedad p", pero una sucesión infinita de proposiciones derivables nos dicen "x1 tiene la propiedad p, x2 tiene la propiedad p, x3 tiene la propiedad P,..." y, por tanto, no podemos ofrecer un ejemplo derivable *particular* de x que *no* tenga tal propiedad, entonces el sistema no es ω consistente[22].

La ω consistencia fue introducida por el lógico Allfred Tarski, a través de consideraciones semánticas. En su idea original el predicado "p" en el formalismo correspondía a un predicado aritmético cuya relación con los números enteros ofrecía la posibilidad de que todos los x encontrados o derivados hasta el momento tuvieran tal propiedad, pero su enumeración completa fuera *infinita,* por lo que no se podría nunca asegurar la existencia o inexistencia del caso negativo.

Todo los sistemas ω consistentes son consistentes, pero no todos los consistentes son ω consistentes, por lo que el último requisito es mucho más exigente y profundo, aunque sólo es aplicable a los sistemas con cuantificador universal y operador negación. Tengamos esto en cuenta pues vamos a necesitar la ω consistencia como presupuesto de la prueba del teorema de Gödel, por ahora, podemos olvidarla.

La pregunta ahora sería ¿Cómo podemos probar la consistencia de un calculo?. Esto puede hacerse de dos formas como ya lo vimos con respecto a los intentos de Hilbert : 1) tomando un conjunto de objetos exteriores al sistema que puedan conformar una interpretación de este, de esta forma si el modelo que conforma la interpretación es consistente, el sistema lo será también. 2) por medio de una prueba finitista que se adecúe sólo a requisitos de carácter sintáctico al interior mismo del sistema y que no incluya ninguna apelación a la metateoría semántica

---

21 Cfr, Ladriére, 68.
22 Cfr, Ladriére, 69.

de éste. Esta es la clase de prueba que pedía Hilbert para su programa de fundamentación de la matemática.

Completud[23]**:**

La completud *sintáctica* se predica de un sistema solo si toda fórmula o su negación es derivable de él, es decir si el sistema puede producir todas sus proposiciones bien formadas.

La completud *semántica* se predica si "toda proposición válida del sistema es derivable, y recíprocamente"[24]. Una proposición es valida si, respecto a la interpretación que se da de ella en un modelo, esta resulta ser una fórmula cierta; por lo que es lo mismo decir que en un sistema semánticamente completo cada proposición derivable o refutable del sistema corresponde con un enunciado verdadero o falso (respectivamente) de un modelo dado.

La *completud semántica absoluta* se logra si el sistema es completo *en todos los modelos posibles* del sistema[25].

Cuando por lo menos una expresión bien formada del calculo no es derivable ni refutable, el calculo es sintácticamente incompleto y la proposición se llama **indecidible,** si la proposición resulta corresponder con un enunciado valido del modelo la incompletud se tornará semántica.

El mero requisito de la completud sintáctica vela porque el sistema mantenga un equilibrio entre su capacidad expresiva y su poder deductivo pero, mucho más importante que esto, la completud semántica garantiza que el sistema se adecue a la perfección con la teoría que intenta formalizar. Si una formula indecidible corresponde con un enunciado verdadero del modelo entonces el sistema es incompleto y hay verdades de la teoría formalizada que nunca obtendremos pues el calculo será incapaz de deducirlas en su seno. Siempre tendríamos problemas irresolubles y verdades inaprensibles para ese formalismo.

---

23 Ladriére utiliza el termino saturacion para referirse a la completud. Nosotros hemos preferido, sin embargo, conservar el termino mejor conocido.

24 Ladriére, 70

25 la completud semantica absoluta es un requisito fuerte que no tienen por que cumplir todos los calculos practicamente eficientes, para muchos es simplemente necesario una **completud relativa,** válida solo para una interpretacion particular. Sin embargo, la logica ha sido vista, por toda una tradicion tan larga como la misma logica, como un "discurso de discursos" por lo que un sistema formal valido para formalizar la logica debe ser, por definicion, absolutamente completo.

Decidibilidad.

Un sistema formal es decidible si existe un procedimiento *mecánico* efectivo, en un numero finito de pasos, que permita establecer si dada una proposición del sistema es derivable o no, aun si desconocemos la existencia efectiva de la derivación o refutación en curso[26].

Para el calculo proposicional existe por lo menos un método muy popular: las tablas de verdad. Si al tomar una proposición cualquiera no sabemos si es o no un teorema pues no hemos obtenido su derivación o refutación, podemos aplicar el procedimiento de las tablas de verdad para saber si hemos de seguir tratando de probarla o si sencillamente no existe como teorema derivable a partir de los axiomas, las tablas de verdad sin embargo, no *prueban* la proposición mencionada.

La mayoría de los métodos de decisión no son, al mismo tiempo, de demostración, Sin embargo, existe lo que se conoce como algoritmo, un **algoritmo** es un método (formal) de decidibilidad que no se restringe a *mostrar* la validez formal de una proposición sino que es, al mismo tiempo, una demostración suya[27]. Los algoritmos sirven comunmente para la resolución de conjuntos extensos de problemas o tipos de proposiciones.

Esto, podemos notar, tiene una relación directa con el "problema de la decisión" resucitado en 1901 por Hilbert (respecto a las ecuaciones diofánticas) después de ser esbozado en toda su generalidad por Leibniz. Recordemos que la esperanza de Hilbert era la de encontrar un algoritmo *total* que pudiera resolver un conjunto extenso de problemas matemáticos, sino todos.

Antes de pasar a una mirada más atenta a la relación entre los sistemas formales y la lógica podemos recapitular estos detalles sobre la naturaleza de los sistemas formales

---

26 Cfr Ladrière, 71

27 De hecho, puede entenderse que, hasta Gödel, los sistemas formales eran una especie de algoritmos absolutos ya que en ellos se podian deducir mecánicamente todas las proposiciones que ellos mismos establecían.

1) Estos son estructuras formales que configuran a la perfección el propio sentido de sus componentes, de tal forma que no es necesario apelar a una evidencia o intuición exterior al sistema para manipularlos con éxito.
2) En ellos es posible determinar efectivamente si un conjunto de componentes del sistema pertenece o no a este y cómo se llega a él.
3) Estos componentes del sistema pueden ser interpretados como representantes de elementos exteriores a él, y de esta forma, adquirir un sentido. El sistema entonces es una plataforma independiente sobre la cual se puede extender un campo o sistema de saber intuitivo.
4) Pero, como consecuencia de las dos primeras características, un sistema formal se identifica plenamente por el hecho que, *aun el que no conoce el posible significado exterior de los componentes del sistema*, puede manipularlo con éxito al estar determinado por reglas que eliminan absolutamente toda ambigüedad de interpretación o decisión sobre cómo obtener los resultados.

Esta última característica es para nosotros la más importante y la que marca la diferencia pragmática *esencial* entre un sistema axiomático como el de Euclides, y un sistema formal puro. Muchos de los componentes, axiomas y demostraciones utilizados por Euclides se fundamentan en intuiciones, elementos semánticos de contenido en los primitivos y evidencias espaciales que son captadas a través de las figuras. Sin estas intuiciónes extraformales, aquel que no conociera el significado geométrico de las estructuras, (como ya lo vimos en las críticas formuladas a este respecto por, por ejemplo, Russell), sería incapaz de concluir todos los cálculos euclideanos, en este sistema forma y contenido están, todavía, fusionados.

<u>La metateoría de los sistemas formales y la lógica:</u> Ahora que hemos expuesto las más importantes propiedades metateóricas de los sistemas formales, vamos a hacer un análisis más extenso de lo que hemos llamado semántica de los sistemas formales, esta vez aplicando lo que hemos expuesto al caso particular de la formalización de la lógica. Como ya sabemos, la lógica nació como lógica formal, pero el formalismo lógico como tal nace apenas con Frege, antes de él las formulaciones de los lógicos permanecían aisladas, organizadas de forma

asistemática y sobreviviendo adjuntas a las máculas del lenguaje ordinario que las plagaban de ambigüedad y poca precisión. Estas expresiones, al igual que en la geometría euclidea, por no ser formalidades, lograban su cometido también a través de conexiones de carácter intuitivo.

Sólo a partir de Frege, la lógica matemática moderna construye un aparato técnico y sistemático de *estructuras simbólicas* que pueda abstraer, aislar y dar cuenta de las expresiones lógicas del lenguaje natural y que cuenten con las mismas facilidades que los sistemas formales ofrecieron a la geometría (jerarquización de enunciados, orden, sistematicidad). Así, "la historia de la lógica contemporánea es la historia del destierro de la intuición del reino de la lógica, en lugar de la intuición, la formalización. Y la formalización supone la explicitación del desarrollo deductivo, la programación del curso entero de la demostración"[28].

La razón de que la lógica se construya ahora por medio de una serie de conexiones simbólicas dotadas de una fuerza interna que se debe explicitar con independencia de la consideración de los significados posibles de las proposiciones, es que estas estructuras deben servir para *fundamentar formalmente* las argumentaciones cualesquiera de una o todas las teorías lógicas, de una o todas las inferencias o razonamientos humanos sin importar las variaciones de contenido o de quien realice los cálculos o demostraciones.

Esto se ha intentado bajo la suposición de que es posible reducir todas las implicaciones semánticas (y pragmáticas) de las inferencias lógicas (razonamientos efectivos en el lenguaje) a una derivabilidad puramente sintáctica, basada sólo en la ejecución de ciertas operaciones mecánicas.

La pregunta es ¿Es esto posible?.

Notemos que la semántica de un sistema formal esta satisfecha cuando logramos presentar un modelo de este. La teoría lógica como tal puede entenderse como simple modelo de un conjunto de cálculos formales. Las proposiciones del sistema en este caso pasan a representar, enunciados, afirmaciones, razonamientos o procesos que están *por fuera* del calculo.

---

[28] Deaño, 124.

Esto no es tan sencillo como pueda parecer, se necesita algún tipo de regulaciones que restrinjan las representaciones de los símbolos para que estos adquieran sentido. Estas regulaciones asignan a cierto conjuntos de símbolos del sistema a una "familia de campos"[29] del modelo. En el caso de la lógica ciertos signos deben representar sujetos, otros predicados, otros funciones lógicas como "implicación", "conjunción"[30].

La construcción semántica de una *teoría formal* (entiéndase por esto un sistema formal junto con su teoría modelo) nos debe garantizar, en últimas, que toda proposición derivable del sistema se corresponda con un enunciado valido del modelo y, a la vez, que todo enunciado valido del modelo tiene un correspondiente proposicional derivable al interior del calculo. Si estos dos requisitos se cumplen podremos decir que la teoría lógica, o una parte de ella, es formalizable en su totalidad y de esta forma podremos deshacernos de la teoría y manipular el calculo en una especie de revivido "pensamiento ciego".

Ambos requisitos son necesarios. Si logramos garantizar que toda verdad es derivable, pero no que toda derivación es verdadera entonces tendremos dificultades para saber si nos encontramos con una *verdad* derivable o con una *derivación* vacía de verdad teórica; y aun mucho peor, si logramos mostrar que toda derivación es verdadera, pero no podemos mostrar que toda verdad es derivable el sistema se vuelve incompleto, y la formalización se derrumba por sus bases. Estos requisitos son probados (cuando esto es posible) por medio de los llamados **metateoremas** que son simplemente pruebas formuladas en la metateoría del sistema en cuestión[31] Para probar que un sistema formal tiene una semántica aceptable se utilizan dos metateoremas generales. Un **teorema de corrección**[32] permite afirmar que si una proposición es una expresión demostrable es también parte del modelo. El sistema que pretenda formalizar la lógica entonces permitirá sólo derivaciones de formulas o enunciados validos y refutaciones de formulas o enunciados falsos, respectivamente. Un **teorema de**

[29] Cfr, Ladriére 58

[30] Recordemos que el significado logico de estos terminos es intuitivo, mientras que en el sistema que los formaliza este significado es reemplazado por la forma como configuramos los simbolos independientemente del significado logico de éstos.

[31] Cfr, Ladriére, 64-65

Lógica de enunciados?

completud permite a su vez afirmar que si un enunciado hace parte del modelo corresponde siempre a una proposición deducible del sistema. Un sistema formal para el que se haya logrado demostrar este teorema permitirá derivar todas las verdades de la lógica y refutar todas las falsedades de la misma. La existencia de una prueba de este último tipo corresponde el cenit de todo formalismo lógico.

En este momento estamos ya en capacidad de explorar los sistemas formales que pretenden formalizar la lógica para mostrar si cumplen o no con las propiedades que hemos descrito: ?

Cálculo de predicados: Este cálculo intenta formalizar las relaciones de derivación que existen entre las proposiciones simples del lenguaje natural. Entre otras cosas, esto quiere decir que a cada proposición se le asigna un valor de verdad cerrado que no tiene relación alguna con sus componentes internos. De este sistema podemos decir sin temor a equivocaciones que cumple con todos los requisitos posibles descritos por las propiedades de los sistemas formales. Para este calculo existe una prueba de corrección y una de completud absoluta (tanto sintáctica como semántica), de esta forma estamos seguros que el sistema no deja pregunta lógica sin responder con un "verdadero" o un "falso".

El calculo es también decidible por medio de las tablas de verdad, así podemos saber en cualquier momento si un tipo de formula es o no derivable del calculo. Nos encontramos aquí con el logro más poderoso del formalismo lógico.

Sin embargo, hay que aclarar lo siguiente: la semántica de un calculo cualquiera también es una *construcción*. En el caso del calculo de proposiciones se ha tratado de una semántica apoyada en una interpretación extensional[33] de los significados de los términos lógicos y que, además, no reconoce la existencia de enunciados deícitos.

Las nociones semánticas que se utilizan para formalizar ciertas teorías lógicas "se desarrollan en términos de conceptos que se consideran tienen una relación directa con *el uso que se hace de las oraciones de un lenguaje*; para dar el ejemplo

---

[32] Cfr, M. Dummett, *La verdad y otros enigmas*, mexico, FCE, 1984. Pág, 377

[33] Es decir,, no basada en el significado de los terminos lógicos sino en la enumeracion exhaustiva de los miembros pertenecientes a las clases lógicas o familia de campos de cada simbolos.

más obvio, los conceptos de verdad y falsedad"[34]. Cuando reproducimos cierta semántica para hacerla coincidir con un formalismo estamos rompiendo, en muchos casos, esa relación dinámica y orgánica directa que hay entre los conceptos y oraciones de un lenguaje y su uso pragmático.

Lo que tratamos de sostener con Dummet es que el calculo de predicados es completo a la luz de una semántica especifica que *determina* el significado de los términos lógicos de un lenguaje natural, por lo que el calculo de predicados formaliza la lógica sólo "bajo el supuesto de que todas nuestras oraciones poseen valores de verdad de manera categórica, (si esto es así) simplemente no hay nada que podamos pensar que las tablas de verdad dejen sin explicar en cuanto al significado de los operadores oracionales para los que son correctas"[35].

No es nuestro objetivo realizar una critica a este tipo de consideraciones que, entre otras cosas, no tiene en cuenta grados de probabilidad cuantitativa o cualitativa en lo que respecta a la noción de verdad, que olvida las explicaciones intencionales de los términos lógicos, y que ni siquiera se pregunta por la incidencia pragmática del uso del lenguaje en lo que respecta a ese mismo significado. Muy al contrario, nosotros estamos interesados en llevar al limite este tipo de pensamiento. Suponerlo para mostrar cómo, aun así, los sistemas lógicos a los que se les aplica son insuficientes para formalizar el lenguaje interpretado como ha sido por tales semánticas reductivas. Por eso nos haremos a la triste idea que el calculo de predicados, junto con su semántica, es un logro loable, aunque limitado en su capacidad de expresión, del formalismo lógico.

Cálculo lógico cuantificacional de primer orden: Este calculo puede entenderse como una profundización en el análisis formal de las proposiciones ya que aquí se tienen en cuenta los componentes internos de cada proposición particular (sujeto y predicado). Este sistema incluye las **variables individuales** que denotan sujetos individuales, incluye además los **cuantificadores** que permiten, aplicados a las variables individuales, hablar sobre conjuntos enteros de sujetos, o de sujetos particulares. Incluye, por ultimo, las **variables predicativas** que denotan predicados aplicados a sujetos o conjuntos de ellos.

[34] Dummett, 380, cursiva nuestra.
[35] Dummett, 381.

Con el calculo proposicional de primer orden nos elevamos un poco mas en la visión del formalismo. Tenemos aquí también un calculo coherente semánticamente, y del que se puede dar una prueba de completud en sentido semántico (la prueba de esto fue dada por Gödel en 1931, con su famosa tesis doctoral[36]), esta prueba nos da una constatación de que el cálculo es completo de forma *absoluta,* lo que también puede entenderse como un gran logro del formalismo.

Con respecto a si el calculo es decidible tenemos que hacer aquí reservas que no tuvimos con el calculo de predicados. A. Church probó en 1936 que, aunque el cálculo es semánticamente completo, no existe un procedimiento mecánico que permita establecer para una proposición cualquiera si es o no deducible[37].

Esto quiere decir que, si después de haber deducido millones de teoremas no hemos logrado deducir uña proposición x, no podemos decir nada de su verdad o falsedad. Tendremos que seguir deduciendo, quizás hasta el infinito, sin saber si la proposición se nos dará algún día, pese a que sabemos que el cálculo es completo y, por esta razón, en algún lugar perdido en la irrealidad formal del calculo la proposición es de hecho, valida o no valida.

Es de notar que cuando se establece un resultado como el que mencionamos ahora, no sólo vale para el cálculo descrito, sino también opera para los cálculos superiores, por lo que debemos mencionar desde ahora que el calculo de predicados de segundo orden y los de orden superiores, también sufren de métodos de decisión efectivos[38].

Cálculo lógico cuantificacional de segundo orden: Este calculo permite, en resumen, la cuantificaron de las variables predicativas. Este calculo, como veremos con Gödel, representa el principio de la caída del sueño formalista. Gödel es precisamente el que muestra una prueba de incompletud semántica para el

---

[36] Cfr Gödel,Kurt, *Obras completas*, Alianza, Madrid, 1981

[37] aunque hay metodos locales para clases restringidas de proposiciones.

[38] Es sabida la problemática que la indecibilidad ha causado en la búsqueda de prueba para algunos enunciados matemáticos, como el teorema de Goldbach. Hasta ahora no se ha encontrado prueba alguna de él, y el resultado de Church nos garantiza que, a menos que la *creatividad* de algún matemático nos dé la respuesta, ésta nos estará velada, aunque exista.

cálculo de segundo orden. Las consecuencias de este hecho las analizaremos con posterioridad al análisis de la prueba en cuestión.

Fíjese dónde empezaron a aparecer los problemas: el cálculo de proposiciones hablaba de simples proposiciones y de las relaciones formales entre ellas. Los teoremas posibles son infinitos, pero cada proposición es, por decirlo de alguna forma, "un mundo aparte".

Los cálculos de predicados además de tener teoremas infinitos pretenden analizar una *totalidad.* Totalidad que se refiere a las *relaciones entre proposiciones a traves sus variables y predicados, relaciones producidas por los cuantificadores de universalización (relaciones que pueden asociar, de un solo golpe, teoremas infinitos).* Dejaremos hasta aquí por ahora.

Sobre el cálculo de deducción natural: Hasta ahora nos hemos concentrado en estudiar los sistemas fórmales como sistemas axiomáticos, sin embargo esta no es la única manera en que se ha intentado formalizar la lógica.

En lo que respecta al cálculo de predicados y al cálculo cuantificacional de primer orden, tenemos también lo que se conoce como un sistema de inferencia natural. El cdn fue creado por Gentzen[39] como una manera de acercar mas este calculo a la estructura de razonamiento que tienen los sujetos al utilizar las teorías lógicas. Aunque no contamos con espacio suficiente para una exposición detallada de este sistema nos interesa dejar claro las diferencias entre éste y el sistema axiomático[40], ya que, entre otras cosas, este sistema es el que se enseña comúnmente en los cursos normales de lógica.

El calculo de deducción natural sirve en la practica como intermedio entre el sistema formal axiomático y su modelo lógico. Una estructura axiomática, hemos visto, parte de principios tautológicos y llega solo a teoremas tautológicos, fórmalmente validos para cualquier interpretación. Por tanto, en el proceso de derivación axiomática no se toma una posición metaformal sobre la *verdad* de las variables o proposiciones en curso.

Sin embargo, en los razonamientos naturales de los sujetos no parten de tautologías vacías sino de proposiciones que presume verdaderas para así

[39] Ladriére, 74.

114

demostrar la verdad de *otras* proposiciones. No se trata entonces de axiomas tautológicos sino de premisas de razonamiento. Las conclusiones de un cdn solo son verdaderas si se aceptan como verdaderas estas premisas.

Sin embargo el armazón general con el que se deriva esta conclusión esta fundamentado en una estructura formal de carácter tautológico, que puede ser, por tanto, derivado del calculo axiomático.

En un cdn, la verdad de las conclusiones se basa no en una tautología sino en la *conjunción* de la estructura formal del sistema con el valor de verdad metaformal de las premisas que el sujeto presume[41].

La importancia de los cdn para la teoría lógica es innegable, estos permiten la formalización de procesos de prueba usados comúnmente en matemáticas y filosofia como son, por ejemplo, el método de reducción al absurdo. Abren el paso igualmente a la posibilidad de formalizar teorías intuitivas completas al poder sistematizarlas formalmente de manera mas adecuada a los procedimientos usados en el discurso.

Pero, lo importante aquí es observar, como hemos dicho, que un cdn introduce el valor de verdad de ciertas variables como premisas, de esta forma media entre el sistema formal puro y la semántica de la practica lógica. Esta mediación sólo es posible cuando hay una prueba de completud semántica ya establecida para el cálculo (la prueba de que todos los enunciados verdaderos que el sujeto puede suponer están representados por proposiciones derivables), lo que, como veremos, parece imposible cuando llegamos al cálculo cuantificacional de segundo orden, y superiores.

[40] Tomamos como base de nuestras consideraciones sobre los cdn las explicaciones que de ellos encontramos en A. Deaño. Cfr, deaño, pg 142 y ss.

3. Representación, autoreferencialidad y paradojas lógicas.

En paginas anteriores mencionamos la idea de representación como una forma de establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de un sistema formal y otro tipo de objetos exteriores a él. Nosotros ejemplificamos esta idea buscando una representación de una proposición *aislada* con cierta clase de objetos arbitrarios. Sin embargo, este ejemplo, aunque correcto, no hace honor a la verdadera importancia de este método.
Si tuviéramos en cambio que encontrar la representación de un sistema formal *en su totalidad* veríamos que esta idea no es tan ingenua como parece a primera vista. Tengamos en cuenta que, al rastrear la representación de un sistema formal, todos los componentes del sistema (incluyendo axiomas, símbolos aislados y todos los teoremas) deberán estar *biunívocamente* representados por un conjunto de entidades independientes a él.
Por medio de esta biunivocidad propia de la representación lo que logramos es la demostración de que existe una *identidad estructural*: una misma estructura formal de relaciones entre uno y otro campo de representación, o entre un sistema formal y otro, pese a sus diferencias de contenido y de presentación. Es así como se utiliza la idea de representación en matemáticas para, por ejemplo, probar la consistencia de un conjunto de axiomas a través de su representación por un modelo matemático del que se presume la consistencia.
La idea de representación no esta limitada al estudio de los sistemas formales sino que es un instrumento matemático de prueba cuyo uso obtiene su vigor matemático en el argumento por la diagonal de Cantor y, a partir de allí, en algunas paradojas (como la de Richard y la de Epiménides), y en el propio teorema de Gödel.
Precisamente, nuestro interés en esta técnica y en sus ejemplos más intrigantes, que veremos a continuación, reside en que uno de los métodos más originales de Gödel para la construcción de su teorema es el establecimiento eficaz de una representación entre el sistema formal creado para formalizar la aritmética y los números enteros que hacen parte de la misma teoría aritmética, de manera que a

---

[41] Cfr Deaño, 146.

cada símbolo del sistema, a cada formula bien formada del sistema, a cada cadena de proposiciones, e inclusive a muchos enunciados metaformales, corresponda uno y solo un numero entero.

No estamos, por tanto interesados en una exposición amplia y detallada de estos ejemplos, no nos interesa su naturaleza o el significado de "lo paradójico"[42] como tal, sino sólo aquello que nos pueden ofrecer para la mejor comprensión de la técnica matemática de la que se vale nuestro autor para la prueba de su teorema.

El argumento por la paralela de Cantor.

Cantor es, podemos atrevernos a decir, el padre de la matemática moderna. La teoría de conjuntos, del cual fue creador, permitió los maduros intentos de formalización de la matemática de los cuales Russel fue protagonista. Sin embargo, el mayor logro de la teoría de Cantor fue la manipulación efectiva de un concepto tan problemático para la matemática anterior como es el concepto de infinito.

Es claro que la enumeración exhaustiva y real de un conjunto infinito es imposible, nadie podrá nunca contar hasta el final los números enteros. Pero lo que cantor se preguntó lo haría apelar al procedimiento de representación más famoso de la historia de la matemática.

Cantor preguntó en pocas palabras si podía probar que otros tipos de conjuntos de números eran o no igual de infinitos que los números enteros. Para esto hizo corresponder biunívocamente el conjunto de los enteros con otros conjuntos de números, para, a partir de allí, ver si enumerando el primero de los conjuntos(el de los enteros), esta enumeración le daba, a su vez, la enumeración del segundo conjunto. Esto puede hacerse, por ejemplo con los números naturales y el conjunto de los pares de esta forma:

1------2
2------4
3------6
4------8

[42] Digamos, sin embargo que todas las paradojas que mencionaremos suponen en su fundamento la aceptancia del principio de contradiccion, como tambien lo hace el teorema de Gödel. Mas adelante tendremos la oportunidad de mostrar cómo es posible evadir estos resultados por medio de las lógicas paraconsistentes.

5------10
...
Pero la existencia de conjuntos de números más grandes que el infinito era algo casi impensable antes de la correspondiente pregunta de Cantor. Veremos cómo esta idea tan contraintuitiva puede ser demostrada a través de la misma técnica de representación que le dió a Cantor resultados positivos como el descrito con anterioridad[43].

Pongamos a prueba el método de Cantor para considerar si los números naturales son o no igual de infinitos que los números *reales*. Los reales son aquellos números que pueden encontrarse entre 0 y 1. Estos números tienen dos propiedades especiales: su expansión decimal es infinita, entre dos números reales siempre hay un tercero involucrado.

Tratemos de colocar entonces en correspondencia uno-a-uno a los números naturales con los reales:

0---0,**1**834649...
1---0,2**5**34757...
2---0,27**4**7382...
3---0,298**3**673...
4---0,2383**7**74...
5---0,82736**7**3...
6---0,237674**5**...
....

Si los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad (es decir, si numerando a uno enumeramos al otro), esto quiere decir que la lista de los reales es exhaustiva y no falta ningún numero allí. Pues bien, si esto es así entonces no podremos construir un numero que no este en la lista.

Sin embargo, Cantor mostró que existe tal numero, para ello tomó la línea diagonal formada por los números que se encuentran resaltados en la correspondencia gráfica que hemos hecho, esta diagonal es, como podemos pretender mediante la suposición de la lista, infinita hacia las dos direcciones de los dígitos. Ahora. tomando el numero dictado por este corte diagonal, Cantor construyó un número que difiere en +1 en cada fracción del número original, así:

---

[43] los numeros racionales son aquellos que pueden ser descritos por fracciones como 4/8, 34/7, 2/9

N diagonal-------0,1543775...

N construido----0,*2654886...*

Este número no se encuentra en la lista ficticia pues difiere del primer número en la primera decimal, del segundo en la segunda decimal, etc. El conjunto de los reales entonces no es numerable por medio de la correspondencia de estos con los naturales, existe por lo menos un real, que se escapa a la enumeración, lo que en pocas palabras quiere decir que tal correspondencia, no existe.

Lo que Cantor pasó a preguntarse es si el mismo conjunto de los enteros puede estar en correspondencia con el conjunto *de todos sus subconjuntos.* Si esto es así, entonces no hay ningún grupo de enteros que pueda escaparse a cierta sistematización formal a través de un sistema que pueda dar cuenta del conjunto de todos conjuntos de los enteros[44].

En realidad este no es un simple ejemplo aislado de representación sino que la naturaleza de los resultados de Cantor esta ligada a los gödelianos pues, lo que prueba el teorema de Gödel desde esta interpretación, es que "dada una enumeración de los conjuntos de enteros, no es posible caracterizar todos esos conjuntos de manera efectiva; se puede establecer la existencia de un numero entero *i* (correspondiente al número g de la expresión construida por Gödel) y de un conjunto *En* (que corresponde a las proposiciones *derivables*) para los cuales no es posible decidir si este entero pertenece o no a este conjunto"[45] no esperamos que se entienda del todo o que estamos expresando ahora, sólo queremos sentar al paso que lo que veremos en el próximo capítulo es consecuencia matemática de los argumentos primitivos de Cantor, que subyacen en el fondo metodológico y teórico de todas las limitaciones de los formalismos.

La paradoja de Jules Richard.

El procedimiento de representación utilizado en la paradoja de Richard (Jules Richard, 1862-1956) es intuitivamente más cercano al argumento de Gödel de lo que puede parecer el argumento primitivo de Cantor, ya que no se limita a

[44] Cfr Ladriére 352-354.

[45] Ladriére, pag 348.

establecer una representación matemática sino que utiliza esta representación para producir un argumento de carácter metateórico y contradictorio.

Lo que la paradoja de Richard hace es establecer una representación entre los números enteros y las *definiciones* aritméticas que podemos dar de estos. una definición de un numero entero puede ser, por ejemplo:

2----- *único número primo par*

El procedimiento de Richard fue el siguiente[46]: tómese una lista de todas las definiciones de las propiedades aritméticas de los números enteros, luego tomamos la lista y la ordenamos de forma arbitraria por el número de letras que contengan que en todo caso debe ser finito, caso tal que haya definiciones con el mismo numero de letras las organizaremos por orden alfabético.

Lo importante aquí es que podamos darle a cada definición una correspondencia uno-a-uno con un numero entero, de forma que mientras vayan aumentando el numero de letras de la definición, aumente también el dígito entero correspondiente.

Si vemos la correspondencia con detenimiento veremos que algunos números no sólo están ligados con una definición si no que están también *definidos* por esta definición. Llamemos entonces **no richardiano** al número entero que esta definido por la propiedad que se le asigna en la representación (el ejemplo dado un párrafo atrás sería el de un numero no richardiano). De igual forma, llamemos **richardiano** a aquel numero que *no* esta definido por la propiedad que le hemos asignado.

Hemos visto que de un momento a otro tenemos una propiedad que no habíamos incluido en la lista: ser richardiano o no ser richardiano, por lo que podemos proceder a agregarla a la lista primitiva. Esta propiedad **ser richardiano** tiene, como es de esperarse, su numero *n* correspondiente.

En este momento inicia el argumento paradójico: ¿Es *n* mismo richardiano o no richardiano?

Si *n* es **richardiano** quiere decir que no tiene la propiedad asignada, entonces *n* es, a la vez **no richardiano.**

[46] Me apoyo en esta construccion en Newman/Nagel pg 78- 81.

Si n es **no richardiano** tenemos entonces que le debemos asignar la propiedad a la que esta ligado, entonces, n es **richardiano.**

En este punto la contradicción es expresa y la paradoja parece evidente.

Volvamos de nuevo sobre lo dicho y analicemos la naturaleza de los argumentos por los cuales llegamos a esta conclusión:

Si invertimos el razonamiento y lo vemos desde la perspectiva no ya de las definiciones sino de los enteros, lo que se nos pide es que establezcamos una correspondencia entre estos y sus definiciones o propiedades *aritméticas*.

Sin embargo, la propiedad ser richardiano no es una propiedad aritmética sino una que surge a través del arbitrario método de representación que hemos creado para ordenar la serie de las propiedades, es por tanto, una propiedad *meta-aritmética*. Pero, las proposiciones metateoricas pueden contener los *nombres* de las expresiones aritméticas, pero no las expresiones mismas (ya que no las usan, sino que las nombran), por lo que superponerlas acriticamente seria un error.

La definición de un número como richardiano o no richardiano no puede ser parte de la lista inicial, pues si eso sucede estaríamos confundiendo la teoría aritmética, con su metateoría. Este es el hueso débil de la paradoja de Richard, pues si nos atenemos a no confundir lo teórico con lo metateórico, la paradoja desaparece, pues simplemente no es posible formularla.

Sin embargo, la paradoja de Richard nos permite ofrecer un ejemplo de cómo a través de un método de representación podemos *crear*, como lo hace la paradoja, o simplemente *representar* propiedades metateóricas al interior de una teoria[47].

Pero, el teorema de Gödel no confunde el sistema formal que utiliza con su metateoria, además, el sistema de representación que utiliza es mucho más complejo y preciso.

La paradoja de Epiménides, el mentiroso. Esta paradoja puede formularse de la siguiente manera:

Epiménides, el cretense, dice que todos los cretenses son mentirosos.

Esta, que es una de las tantas formulaciones de la paradoja de Epiménides[48] es, desde un punto de vista puramente formal, inexacta. Puede que todos los cretenses mientan pero no debe suponerse que lo hagan todo el tiempo; puede que mientan un día sí, y un día no. La paradoja de Epiménides alcanza su cenit sólo cuando el acto de enunciar una mentira recae, sin lugar a duda, y de forma atemporal, en la expresión misma que enuncia Epiménides.

Si se cumple esa condición observamos que el enunciado se torna *autoreferencial,* es decir, predica algo de sí mismo. Desde este punto de vista, la formulación siguiente, aunque despojada de los conflictos griegos de autenticidad expresiva, es mucho más adecuada:

la oración impresa en la pag 116, línea 10 de este texto es falsa[49]

Aquí el carácter autoreferencial es evidente, además, esta formulación coloca en el centro de la cuestión a una noción de real importancia para nosotros, la noción de *verdad.* Nos referiremos a la oración anterior como "p", para resolver lo que hay aqui de paradójico:

Si p es verdadera entonces la oración de la página 116 línea 10 de este texto no es verdadera, pero resulta que esta oración es la misma p, por lo que *si p es verdadera, p no es verdadera.* El mismo resultado puede obtenerse si suponemos en el inicio que p es falsa, como puede el lector verificar por sí mismo.

La paradoja de Epiménides surge del hecho de no distinguir entre lenguaje objeto y metalengua, solución que el mismo Aristóteles habia intuido aunque muy tímidamente[50]. En efecto, la afirmación sobre la verdad o falsedad de un enunciado en una lengua cualquiera debe expresarse en la metalengua

---

[47] Newman, Nagel, 81.

[48] Diógenes de Laercio le atribuye esta paradoja a Eubúlides, aunque en su poco lógica prehistoria debe incluirse tambien un texto de San Pablo (Tito, 1, 12) que al parecer hace referencia al propio Epiménides, sabio griego del siglo VI a.c. (cfr Bochénski, pag 142, donde tambien se encuentra un pequeño comentario sobre el impacto de esta paradoja sobre el mundo antiguo.

[49] Citada por tarsky, formulada por Lukasiewicz. Tarski, *the semantic conception of truth and the fundations of semantics,* pag 13. Para la reconstruccion conceptual de la paradoja nos valemos tambien de este texto.

[50] Cfr, Bochénski, pag 143.

respectiva. La paradoja de Epiménides surge cuando no se realiza esta distinción y utilizamos para los diferentes substratos la misma lengua base[51]

La paradoja de Epiménides es simplemente un enunciado autoreferencial que predica de sí mismo "no soy verdadero". La relación que esto puede tener con el teorema de Gödel[52] se evidencia en el momento que se describe el teorema como una proposición autoreferencial que predica de sí mismo "no soy deducible".

Entre los dos tenemos dos diferencias generales y de extrema importancia.

La primera es que la técnica de Gödel permite hacer una traducción *legitima* del metalenguaje al interior del lenguaje formal primitivo a través de la técnica de aritmetización. De esta forma hacemos que el sistema se autoreferencie sin confundir ambos estratos.

La segunda diferencia notoria es que el teorema de Gödel se asienta en la descripción de una propiedad perfectamente definible (es decir, construible *sintácticamente*) al interior del sistema formal a través de la técnica de aritmetización: la propiedad de ser o no derivable, mientras que la paradoja de Epiménides, por el contrario, utiliza la noción *semántica* de "verdad" que no puede definirse al interior del sistema.

Como conclusión de lo anterior podemos sostener, primero que todo, que la mencionada irreductibilidad de la noción de verdad al interior del sistema formal es el hecho básico del que surge la limitación que describe el teorema incompletud gödeliano.

En efecto, la idea de que la noción de verdad adjunta a un sistema formal no puede expresarse al interior del mismo sistema lleva directamente a la afirmación de existencia de proposiciones indecidibles.

---

[51]En este caso utilizamos la lengua española como ambos. Debemos resaltar el hecho, al que volveremos más tarde, que los lenguajes ordinarios o naturales son, a la vez, sus propios metalenguajes. Para Tarsky, un lenguaje de este tipo es semanticamente *cerrado*, y para el caso de los lenguajes formalizados o semiformalizdos esta propiedad se transforma directamente en la *inconsistencia* del mismo.

[52] La relacion entre la paradoja de epimenides y el teorema de godel proviene, en último término de su correspondiente semejanza con el argumento por la paralela de Cantor. En efecto, es posible traducir el primero a un derivado del último a traves de su interpretacion por medio de la teoria de conjuntos. Para esto véase, Ladriére, pags 351, 352

Sabemos que en el cálculo cuantificacional de segundo orden puede demostrarse *el teorema de corrección*, el cual afirma que todas las proposiciones del cálculo coinciden con enunciados verdaderos, por lo que, si también tomamos la no expresividad de la noción semántica de verdad en este calculo como premisa tenemos este razonamiento donde "V" equivale a lo verdadero, "D" a lo deducible, y la premisa 3 representa el teorema de corrección:

1-V no puede expresarse en el sistema
2- D puede expresarse en el sistema (a partir de la aritmetización)
3- todo D es V
/ existe al menos un V que no es D[53]

Resultado que no es más que la existencia de al menos una proposición verdadera e indecidible.
La prueba de la no expresividad de la verdad al interior del sistema formal fue dada por Tarsky[54] un poco antes que los resultados de Gödel. Pero Gödel llegó independientemente a sus resultados apoyado en consideraciones propias sobre la noción de verdad[55]. Nuestro autor además no solo se detiene en mostrar la simple *existencia* de proposiciones indecidibles, como se sigue de los resultados de Tarsky, sino que *construye* un ejemplo de ésta, sin mencionar que también exhibe un método para construir *infinitas* proposiciones como la suya.

Considerando esto ultimo, para finalizar, podemos resaltar la importancia de la noción de *infinito* para las reflexiones anteriores.
La distinción que hemos establecido entre lengua y metalengua no es del todo absoluta. La metalengua Mx de una lengua objeto x puede tomarse ella misma como lengua objeto de una metalengua MMx, y así sucesivamente. Así, lo que en realidad tenemos es una serie estratificada de lenguas: x, Mx, MMx, MMMx, etc.

---

[53] Cfr, Gödel pg, 173
[54] Véase, Ladriére Cap VIII, secciones 1 y 2
[55] Invirtiendo la relacion entre Tarsky y Gödel puede decirse tambien que el teorema de Gödel sirve como *evidencia* de la no expresividad de la verdad que Tarsky se encarga de demostrar de forma directa.

La confusión entre lengua y metalengua que existe en la paradoja de Epiménides puede, en este sentido, *extenderse* hasta el infinito de esta forma:

p1:p1 es falsa

p2: p1 es falsa

p3: p2 es falsa[56]

...

El teorema de Gödel por su parte también conduce a una regresión al infinito por medio de la construcción estratificada de varios sistemas formales cada uno con su propia proposición indecidible, cada uno utilizando como un nuevo axioma la proposición indecidible del sistema inferior. Más adelante veremos la importancia de este suceso, pues el teorema de Gödel no marca, desde nuestra perspectiva, una absoluta distinción *de hecho* (aunque sí *de derecho*) entre lo formal y lo intuitivo, sino que, al contrario, es posible aproximarse a lo intuitivo cada vez más por medio de estratificaciones similares aunque nunca alcancemos, como en la asíntota, completud en el reino de lo formal.

Este resultado se amplía cuando analizamos, como lo haremos, la posibilidad de sistemas formales *no Gödelianos* que pueden, entre otras cosas, introducir en su seno una estratificación infinita de pequeños subsistemas formales.

Veremos, por tanto, que los resultados de Gödel no son una destrucción de la posibilidad de los formalismos, sino muy al contrario, una nueva ampliación (y corrección) de su poder bajo nuevas comprensiones de lo formal y su relación con lo intuitivo.

Por lo pronto podemos adelantar que las consideraciones sobre los sistemas formales, de las cuales el teorema de Gödel fue pionero nos llevan también a una nueva consideración de lo deducible. Esta no es una noción estática sino dinámica. Nuevas intuiciones pueden dar pie a nuevas construcciones formales más vastas y comprehensivas.

CAPITULO IV

EL TEOREMA DE GÖDEL EN CONJUNTO CON SUS CONSECUENCIAS

> El maestro Gutei levantaba el dedo siempre que se le hacia alguna pregunta acerca del Zen. Un joven novicio comenzó a imitarle este gesto. Cuando a Gutei le contaron de la imitación del novicio envió a alguien por él, y le preguntó si era verdad. El novicio admitió que así era, Gutei le preguntó si comprendía. En respuesta el novicio levantó el dedo índice. Gutei, preparado para la respuesta, pronto se lo cortó. El novicio salió corriendo de la pieza aullando de dolor. Al alcanzar el umbral Gutei lo llamó "¡Muchacho!". Cuando el novicio se dio vuelta Gutei levantó su dedo índice. En ese instante el novicio se iluminó.
>
> Koan Zen

> Ya he dicho por qué no quería afirmar que mi dedo hace parte de mí; pero es verdad que me pertenece y que forma parte de mi cuerpo"
>
> Leibniz

Nos hemos dotado ya de los tecnicismos adecuados, estamos en capacidad de exponer, en términos más precisos, qué fue exactamente lo que Gödel demostró con su prueba, y más específicamente cómo lo demostró.

Una exposición que ahonde en los detalles técnicos completos y precisos del artículo de Gödel sería ardua e ineficiente como guía explicativa. Para lograr lo anterior sólo habría que transcribir el artículo matriz de Gödel (de no más de 35 suscintas páginas), colocarlo como apéndice a la espera que se le entienda y se le pueda comprender solo.

Nuestro objetivo, en cambio, es más modesto y amplio a la vez: marcaremos las pautas para la *comprensión* lógico-formal del artículo y dejaremos claro los aspectos y pasos formales básicos de la construcción de la sentencia indecidible con el objetivo de ser ampliamente entendidos. Queremos en especial resaltar aquellos detalles que son importantes a nivel lógico formal:

la aritmetización de la metateoría, la peculiar autoreferencialidad de la sentencia indecidible y el estatus de verdad del teorema. La presentación que se hará supone que se conocen previamente los detalles de cálculo de predicados de segundo orden (y en especial, el sistema Pm) que ha sido presentado como parte del Apéndice 1. Dado que hemos reducido el simbolismo al mínimo hemos tenido, sobre todo en los primeros puntos, que sacrificar brevedad por explicación. De todas formas, pensamos que hemos logrado un equilibrio entre ambos dada la complejidad del objeto[1].
Los últimos segmentos de este capítulo estarán dedicados a una exposición de las principales consecuencias de la incompletud de los cálculos lógicos y de las resonancias filosóficas y lógicas que tiene, según nuestros objetivos, este suceso.

Por ahora, resumiremos en términología más adecuada qué fue exactamente lo que hizo y demostró Gödel:
Si tomamos como premisa la coherencia (y más en especial la ω coherencia) del cálculo de predicados de segundo orden y de la aritmética en general se puede comprobar la existencia de proposiciones *indecidibles* ocultas en su interior. Esto demuestra que este cálculo es *sintácticamente incompleto*, es decir, que es posible construir sobre las bases de las reglas de formación, proposiciones formales que están más allá de la propia deducibilidad del cálculo. Lo peor para los formalistas y positivistas es que esta proposición indecidible construida por Gödel es inmediatamente intuíble como una *verdad matemática* tan cristalina como una sumatoria con los dedos. Esto comprueba sin lugar a duda que los sistema formales de cierta capacidad son igualmente incompletos de manera *semántica*: hay verdades de la teoría matemática intuitiva que ningún cálculo es competente para cubrir.

[1] Pensamos que hemos logrado hacer una presentación clara y rigurosa tanto del Teorema como de la técnica de Gödel; presentación que pensamos ostenta varias ventajas de comprensión, completud y secillez frente a otras informales que nos han servido de ayuda. Véase en especial: Nagel, Newman, *El teorema de Gödel*, Madrid,

La estructura del teorema se puede reducir a una fórmula de dos estratos, así:

1) $\forall x\ (\neg \mathrm{Dem}\ x\ , y)$

2) $\forall x\ (\neg \mathrm{Dem}\ x\ , 121/y)$

La fórmula "1" se lee: "*Para todas las fórmulas x, x no es una demostración de y*". La fórmula "2" tiene el mismo significado, sólo que la variable libre y (variable no ligada a un cuantificador) ha sido sustituida por un numeral (signo que denota un número), en este caso, "121" que *representa metamatemáticamente* a la fórmula anterior. Ahora, resulta que la fórmula "1" y "2" son la misma, pues la segunda surge de la primera cuando se le sustituye su variable libre por su representante aritmético, con el resultado que lo sostenido en realidad por "2", es que "2" es no deducible, de lo que esperamos derivar la incompletud del cálculo[2].

Hay, por ahora, varios problemas a resolver: Se debe mostrar cómo es posible que un número represente a una proposición; la manera en que el cálculo puede construir proposiciones que representen sus propios términos y, más en especial, sus propiedades metaformales tales como "x es una fórmula", "es demostrable" y "x no es demostrable a partir de..."; también debe clarificarse cómo sustituir variables por numerales que representen proposiciones, en proposiciones.

Todos estos problemas se resuelven explicando: **1a** El proceso de aritmetización. **1b** La traducción de las propiedades metaformales por medio de funciones recursivas. **1c** La representación de la relación "demostración" al interior del cálculo. **1d** La operación sustitución de una variable por un numeral.

Tecnos, 1994. capítulo VII. Hofstadter D., *Gödel, Escher, Bach,* Barcelona, Tusquets, 1987. Capítulo 10.

[2] Este esquema obviamente no es exacto, sólo intenta capturar de manera intuitiva la esencia formal del teorema, luego tendremos que acercarnos paso a paso a una construcción más detallada cuyo resultado diferirá un poco del exhibido por nosotros, entre otras cosas, porque en la construcción de Gödel se encuentran los dos estratos subsumidos en una sola fórmula.

Estos elementos se presentan como condición necesaria y suficiente para la construcción del teorema.

1. artmetización y funciones recursivas.

Hemos visto que un sistema formal no es otra cosa sino un "juego de formas", un constructo artificial cuyas relaciones y símbolos pese a ser en sí vacíos de contenido pueden llegar a representar elementos de una cierta teoría o ciencia. De esa forma logramos que el sistema *hable* de la teoría por nosotros. Pero a Gödel le interesaba para sus pruebas que el sistema hablara no ya de una teoría exterior a él, sino de sus propias fórmulas, de sus propiedades o de las mismas cadenas deductivas que lo conformaban, a la manera de la metamátematica de Hilbert. Lo que Gödel pensaba era precisamente volver al sistema Pm un examinador de su *propia* metateoría, esto, en parte, parecía estar a un paso de cumplir los oníricos finitistas de Hilbert.

Logró esto mediante una técnica realmente revolucionaria que establecía una relación de circularidad isomórfica entre el sistema formal y la teoría formalizada, en este caso la aritmética. La llamada *Aritmetización* (o numeración de gödel), el núcleo medular de la prueba:

Gödel asigna mediante su técnica un número aritmético a cada símbolo, variable, fórmula, y hasta a cada demostración perteneciente al sistema formal. Cada número es llamado número g de la formula o demostración. Podemos construir con esos números una imagen reflejada del sistema formal en las funciones aritméticas que el sistema esta enseñado a formalizar. De esta manera, Gödel logra que el sistema manipule sus propias estructuras al referirse a los números g de las funciones que lo *representan* en un nivel meta lógico. Se instaura entonces al sistema Pm como un sistema globalmente autoreferenciable.

Nuestro objetivo, por ahora, será entender el proceso de aritmetización y la idea de función recursiva, que serán la herramienta principal para la construcción de la prueba. Con ellos explicaremos los dos elementos más, necesarios para la construcción: la propiedad de ser una "demostración" y la función "sustitución".

1a. Aritmetización de Pm a la manera de Gödel.

Nosotros sabemos cuándo una proposición de un sistema formal es un teorema. Cuando hablamos de "saber" nos referimos a enunciados *metateóricos* sobre el sistema que nosotros expresamos con recursos exteriores al sistema en curso. Es cierto que las reglas de éste nos muestran a nosotros, con clara evidencia, cuando un subconjunto de proposíciones es una derivación, pero aislado el sistema mismo, éste no puede construir una proposición formal afirmando que "algo" es una derivación suya.

La aritmetización de los sistemas formales nos permite sin embargo encontrar una manera de *formalizar* estos enunciados en el mismo sistema a través de un recurso de representación. Esta idea es una descendiente directa del argumento por la paralela de Cantor, ya que lo que hacemos aquí es buscar una *correspondencia biunívoca* entre todo el conjunto de símbolos y sus subconjuntos permutaciones (proposiciones) y un subconjunto "g" de los números enteros.

Todos los sistemas formales son susceptibles de ser aritmetizados, el único requisito indispensable es ser lo suficientemente cuidadoso como para utilizar la estructura interna de los enteros logrando que, a cada proposición o propiedad del sistema, corresponda un número determinado o una función aritmética y sólo una.

Me propongo ahora presentar la aritmetización del sistema Pm, tal cual lo expuso Gödel en su artículo. Como primer paso para la aritmetización hacemos un listado completo de todos los símbolos *primitivos* que conforman al sistema Pm, y hacemos corresponder a cada símbolo primitivo un número primo de esta forma:

1......... **0** -- Cero	5......... ┌ -- Negación
3......... **s** -- Función sucesor	7......... **v** -- disyunción

9........ ∀ — Universalización 13........) -- paréntesis
11......... (-- paréntesis

Ahora debemos asignar biunívocamente para cada *variable* un número especial. Como el sistema Pm incluye la teoría de los tipos tenemos que existen variables infinitas (pero enumerables) de tipos infinitos. El problema es resuelto representando cada variable de tipo *n* con la potencia n de un número primo mayor que 13. Así, por ejemplo, para las variables de tipo 1 que representan individuos (números) tenemos:

x.......17
y.......19
z.......23

Para las variables de tipo 2 que representan sentencias asociamos

x^2.........17^2
y^2........19^2
z^2........23^2

Así, sucesivamente con todos los tipos necesarios. De esta manera tenemos que podemos representar cada símbolo del sistema biunívocamente en el conjunto de los enteros.

Llamemos a cada número representante de un símbolo del sistema, su número g respectivo. Una fórmula como: ∀x (x s0 v sy) "*Para todo x, x es el sucesor de cero o de y*"[3], se encuentra representada por la sucesión de números g: "9, 17, 11, 17, 3, 1, 7, 3, 19, 13".

Pero esto no es nada todavía. Nótese que hemos hablado de representación de "los símbolos de una fórmula", no de la fórmula misma. Hasta ahora, hemos hecho una simple representación de los símbolos del cálculo en los enteros, pero no del cálculo en su totalidad. Para realizar lo último habría que representar con *un número*, no sólo cada símbolo, sino cada una de las fórmulas del cálculo. Esto no lo hemos hecho hasta ahora: necesitaríamos fundir en un sólo número los g de los símbolos de cada fórmula, de tal

[3] Como nos encontramos simplemente con un ejemplo no nos preocuparemos por su precisión o si existe un sentido intuitivo verdadero que le corresponda.

manera particular que podamos rescatar cada vez la fórmula, y que a cada fórmula corresponda un número y sólo uno. Lo que necesitamos, en pocas palabras, es una manera de organizar estos símbolos para que, al traducir una fórmula a un número este número pueda después ser "desmontado" en los g de los símbolos.

Con el fin de lograr esto asignamos a cada secuencia ordenada de números g primos: g_1, g_2, g_3, g_4,... g_n, una secuencia tal que, a cada entero g de la secuencia (secuencia que describe una fórmula), le corresponda una nueva secuencia prima potenciada así: 2^{g_1}, 3^{g_2}, 5^{g_3},... p^{g_n}.

Para construir el número g de una fórmula sólo basta entonces multiplicar esta nueva secuencia. De esta forma el número g de "∀x (x s0 v sy)", se computaría así:

∀	x	(	x	s	0	v	s	y	)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
9	17	11	17	3	1	7	3	19	13
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

$$\mathbf{2}^9 \times \mathbf{3}^{17} \times \mathbf{5}^{11} \times \mathbf{7}^{17} \times \mathbf{9}^3 \times \mathbf{11}^1 \times \mathbf{13}^7 \times \mathbf{23}^3 \times \mathbf{27}^{19} \times \mathbf{29}^{13} = g$$

Este proceso es reinvertible en su totalidad: es decir, dado un número entero podemos descomponerlo en sus factores primos y verificar si se compone de números g de símbolos y reinstaurar la estructura de la proposición que representan[4].

El mismo proceso o similar puede seguirse si queremos aritmetizar cadenas de *cadenas* de símbolos, es decir, representar un conjunto de proposiciones, como una deducción por ejemplo, con un solo número g:

[4] Con el fin de lograr la biunivocidad de los números en la representación de las fórmulas, Gödel utiliza un famoso teorema aritmético: el teorema de la unicidad de la descomposición de los números en sus factores primos. El teorema sostiene que dado un número no primo este puede descomponerse siempre *en una única lista* de números primos. Los números g de las fórmulas del cálculo estarán representados en la aritmética por números no primos cuya factorización sea una lista ordenada de primos elevados a una potencia que coincida con los números g de los símbolos primitivos. Está claro que no todos los enteros no primos son números g pues no todos cumplen con esta condición.

Sean a, b, c, d, e, los números g de las proposiciones A, B, C, D, E. El número g de esta cadena de proposiciones esta dado por: $\mathbf{2}^{a} \times \mathbf{3}^{b} \times \mathbf{5}^{c} \times \mathbf{7}^{d} \times \mathbf{9}^{e}$..

Podría uno preguntarse... ¿Qúe más hemos ganado con esto sino una inútil y complicada traducción? Esto es cierto, pero esta traducción nos permitirá ir más lejos de lo que suponemos. Recordemos que la noción de representación biunívoca es análoga a la de *identidad estructural.* Ella muestra que dos campos de objetos, pese a sus diferencias de presentación, comparten la misma estructura formal subyacente. Es así como Descartes logró analizar y manipular algebráicamente figuras geométricas *representándo* las lineas que las conformaban en su plano cartesiano, el cual las traducía a fórmulas aritméticas a términos del álgebra. Lo que hemos hecho hasta aquí es describir el "plano gõdeliano" con el que, igualmente, podremos *analizar aritméticamente* a Pm con sólo analizar las relaciones aritmético-formales entre los enteros g que lo representan. La diferencia con Descartes es que aquí es el mismo sistema Pm el que se *auto*analizará. Cómo se realiza lo anterior es a lo que nos dedicaremos en lo que sigue.

1b. Traducción de la metateoría de Pm a partir de las funciones recursivas.

Todos los sistemas formales pueden aritmetizarse como lo describimos antes, pero no en todos los sistemas formales es posible, a través del recurso a la aritmetizacion, reconstruir formalmente la metateoría del sistema. Éste debe ser lo suficientemente complejo para describirse a sí mismo, i.e.: debe ser lo suficientemente capaz como para tener una *formalización* de la propia aritmética.

Este es un aspecto crucial de la técnica de Gödel, establecer un doble circuito interno entre Pm aritmetizado y la aritmética. El circuito va del sistema a la aritmética (al formalizarla), y de la aritmética pasa de nuevo al sistema (a través de la manipulación por parte del sistema de expresiones numéricas g que lo representan). El sistema se analiza y manipula así mismo al analizar y manipular estas expresiones.

Para poder establecer este doble circuito Gödel se apoya en lo que podíamos llamar un "tercer término". Lo que se conoce como la teoría aritmética de las *funciones recursivas*[5] que le permite una precisa manera de construir, al interior de la aritmética, la metateoría de Pm.

La recursión era ya conocida antes de Gödel y, de hecho, uno de los primeros en mostrar su importancia para la lógica matemática fue el mismo Hilbert. Gödel fue, sin embargo, el primero en expresarla de manera efectiva como manera de tratar de caracterizar el concepto de procedimiento mecánico al interior de la aritmética [6]

---

[5] Cfr, Ladriére. Pág 84.

[6] En el capítulo anterior describimos a los sistemas formales como estructuras simbólicas manipulables a través de procedimientos mecánicos, pero nada dijimos sobre la dificultad de encontrar una definición precisa de lo que *sea* un procedimiento mecánico. Todo lógico o matemático tiene una idea intuitiva de esto, pero existe una dificultad esencial en cuanto a precisar esta intuición. Esta dificultad radica en su misma naturaleza. En primer lugar, tal intuición esta exenta de cualquier contenido sustancial describible, fíjese que es una intuición sobre un procedimiento él mismo formal. Además, la idea de *lo calculable* a través de un procedimiento mecánico está impregnada de relativismo y demasiada generalidad pues lo que es calculable en un cálculo particular no es calculable en otro. Esta relatividad esencial y la ausencia de contenido material describible son los principales problemas de una caracterización precisa de la noción. Sin embargo, para poder demostrar que *ningún* procedimiento mecánico (que todo sistema formal concebible) puede superar las limitaciones que el Teorema postula, es necesario apoyarse en una definición exacta de lo que se entiende por resolubilidad en un sistema formal, esto es, una definición precisa de procedimiento mecánico. Esta definición quedó circunscritas con las investigaciones de Alan Turing. Turing concibió la idealización de una máquina que según él, estaba en capacidad de realizar todo tipo de procedimiento mecánico (véase, *On computable numbers with an application to the entscheidungsproblem*). Recordemos que el mismo Gödel fundamentaba sus planteamientos en la definición de las funciones recursivas. En conjunto, Churh y Turing (1936) expusieron la tesis según la cual toda función recursiva es calculable por medio de una "Máquina de Turing". De esta manera pretenden haber realizado una definición estricta de lo que se debe entender por "procedimiento mecánico": procedimiento efectuado a través de *cualquier* sistema formal concebible. Valga la aclaración que el concepto de Máquina de Turing y de recursividad intenta *dar cuenta* de una intuición, por lo tanto, cabe la posibilidad de que sea encontrado un contraejemplo intuitivo. Sin embargo, actualmente se acepta que es improbable su existencia.

Primero que todo deberemos explicar lo que una función aritmética es.

En aritmética tenemos lo que son términos, un *término* es una expresión matemática formada por signos constantes o variables, "x +7 x", por ejemplo, es un término. Cada variable presente en un término podrá ser sustituida por un número específico y particular "A" que determinará el valor de la expresión para cada caso. Una *función* es la abstracción de un término, donde se sustituye la, o las variables, cada vez con cada uno de todos o un subconjunto de los enteros. Obtenemos de esta manera una *tabla de valores* para la función, tabla que muestra el resultado de la operación descrita por el término para las diferentes sustituciones de su variable, y donde a cada argumento (número que sustituye a la variable) corresponde no mas que un sólo valor resultado.

Por ejemplo, para el término "*x* 5 3 ", se tiene la función *f*(x)[7]

argumentos posibles de x	tabla de valores de la función *f*: *triplicar el número*
0	0
1	3
2	6
3	9

Lo que "define" una función, y lo que la diferencia de un término, es su tabla de valores[8]. En las funciones *hacemos abstracción de las operaciones específicas de los términos para fijarnos solamente en las* ***relaciones*** *existentes entre los diferentes argumentos x y sus valores asociados*. Si dos términos aritméticos son diferentes en su notación pero tienen una misma tabla de valores son de hecho una misma función.

Ahora bien, el concepto de recursividad se utiliza en aritmética para definir un tipo de funciones especialmente transparentes. Una función *recursiva* es,

---

[7] Una función tiene la forma *f*(x) o *f*(x,y), donde *f* representa la operación aritmética que le da cuerpo a la función. "x" e "y" representan los *argumentos* de la función, resultado de las distintas sustituciones a que esta sometida la variable del término aritmético. Si un x es un ya determinado argumento de una función *R*(x), y *a* es el valor asociado a éste, decimos que x y *a* están en la *relación R*.

en pocas palabras, "una función cuyos valores pueden ser calculados progresivamente partiendo de valores previamente conocidos"[8].

Una función recursiva se define por un *esquema de recursión* que puede ser descrito como un conjunto no ambiguo de reglas las cuales a partir de un dato previo cualquiera (*argumento* de la función) muestran el valor de la función característica para ese dato. Un esquema de recursión no es más que un algoritmo, un procedimiento mecánico de resolución de la función, dada una lista de argumentos cualquiera.

Los esquemas de recursión deben mostrar respectivamente cómo calcular el valor de la función para el argumento 0 y luego, cómo calcular ese mismo valor para cualquier número natural través de la utilización de la función sucesor como sus respectivos numerales[9] (0=0, s0=1, ss0=2, sss0=3, etc). De igual forma pueden mostrar cómo lograr su valor para n +s cuando se conoce previamente como dato inicial a numeral n[10]. un ejemplo sencillo y bonito de esquema de recursión es el siguiente:

$$x+0 = x$$

$$x+ sy = s(x+y)$$ [11]

Esto debe entenderse como un conjunto de instrucciones para calcular el valor de la suma de un número por x, siendo este número 0 y sus sucesores. De esta forma los esquemas de recursión muestran un método para

---

[8] Ladriere, 84.

[9] La función sucesor nos muestra como obtener el conjunto total de los enteros a través de "cero" sumando una unidad a la vez (esto es, *reiterando* la función sucesor). Esta funcion es caracterizada por los axiomas de Peano que ya tuvimos la oportunidad de encontrar en el capitulo II.

[10] En un principio tenemos un *esquema de recursión primitiva* que muestra precisamente como pasamos del valor de una funcion cualquiera para el argumento n, al valor de esta para n+1, por lo que el esquema de recursion primitiva se encuentra a la base de todo esquema de recursión. Aparte de este esquema primitivo tenemos los esquemas que caracterizan las *funciones recursivas primitivas*. Las funciones recursivas primitivas son aquellas funciones simples que, a la manera de axiomas, pueden servir para construir otras funciones partiendo de un esquema de recursión primitiva y de ciertos procedimientos, igualmente recursivos, dados con anterioridad. Todas las funciones aritmética elementales (+, -, x, potenciación) son definibles por medio de este proceso. Cfr, Ladriére. Pág 85.

[11] Ejemplo tomado de, Crossley J. N., *¿Qué es lógica matemática?*. Madrid, Tecnos, 1988. Pág 125.

caracterizar funciones de la aritmética de forma constructiva, i. e., dando un paso a la vez, sin dar saltos intuitivos y sin tomar ningún dato no dado previamente (como consideraciones sobre conjuntos infinitos o premisas con cuantificadores de universalización que hablan sobre totalidades que pueden ser infinitas). Tan transparente es este tipo de funciones que puede ser descrita fácilmente utilizando solamente el cálculo proposicional fregeano.

Los *esquemas* de recursión definen de esta forma *propiedades* de un cierto grupo de enteros, o *relaciones* entre dos o más enteros y, como pueden obtenerse a partir de la simple aplicación del cálculo proposicional, nos encontramos aquí con un "representante" aritmético de un procedimiento de cálculo probadamente mecánico, completo, consistente y decidible.

Ahora bien, lo que deseaba Gödel era formalizar la metateoría del sistema *SF* a partir de definiciones recursivas. Para esto debe mostrar que la idea de función recursiva es adecuada para formalizar enunciados metateóricos: Esto será fácil de probar, puesto que las pruebas metateóricas utilizan por lo general razonamientos por *inducción estructural*[12], esto es, se parte de propiedades estructurales simples compartidas por cierta clase de entidades del sistema (como los axiomas), y luego se muestra, de a-uno-en-uno, que esta propiedad es "hereditaria" sobre la aplicación de las diferentes reglas de derivación.

Las características de las definiciones recursivas son precisamente esas. Se parte de un dato previo y luego se calcula de a-uno-en-uno el valor de las funciones. Además, los esquemas de recursión definen funciones que *relacionan* a números enteros, mientras que, paralelamente, las propiedades metateóricas muestran *relaciones* que existen entre elementos del sistema y, si hemos sido capaces de dotar a cada elemento del sistema con una representación numérica g, estaremos en capacidad de mostrar las relaciones entre los distintos elementos del sistema en términos de una función que relaciona dos o más números g, teniendo en cuenta que cada

[12] Cfr, Ladriere. Pág 94.

elemento del sistema esta biunívocamente representado en el conjunto de los enteros[13]. Por tanto, tenemos:

A: Es posible representar el esquema de recursividad de una función a partir de los elementos formales de un cálculo apropiado (como el Pm dado por Gödel, que incluye el cálculo proposicional simple de Frege).

B: Los números g son una representación isomórfica de los elementos del sistema Pm al interior de la aritmética, por lo que estamos legitimados a presumir que éstos números pueden estar relacionados entre sí por funciones aritméticas (de extrema complejidad) que representarían propiedades o relaciones metateóricas de esos elementos de Pm que representan, relaciones o propiedades definibles por esquemas de recursión formales *al interior del propio sistema*. De hecho es así, recordemos que las reglas de transformación no hacen más que subdividir, agregar, suprimir y permutar conjuntos discretos y finitos de símbolos. Todas estas son operaciones que se analogan a las de dividir, sumar, restar, intercambiar... Todas operaciones matemáticas legítimas.

Hay una razón de peso para haberle dedicado tanto tiempo a la definición de las funciones recursivas y su relación con el análisis metateórico de Pm:

Si Gödel hubiera dejado su artículo hasta aquí, eso hubiese sido suficiente para ganarse un lugar en la historia de la lógica matemática. Por dos razones:

1) Las funciones recursivas recogen la "esencia" de lo que se entiende por un procedimiento mecánico. Esto no estaba claro para el mismo Gödel en el momento de redactar su artículo, pero cada vez más se comprendió, en especial por el trabajo de Alan Turing, que las recursivas recogían la intuición base sobre la que estaban construidos todos los cálculos formales posibles, de manera que, calculable en un sistema formal venía significando: representable por medio de una función recursiva.

2) El método de Gödel parecía estar cumpliendo el sueño formalista de Hilbert mejor de lo que el mismo Hilbert hubiera imaginado. Lo que Gödel

había hecho era formalizar la metamatemática, y no sólo eso, sino que lo había hecho formalizando a *Meta*-Pm al *interior* de Pm. Ahora teníamos un método para analizar finitamente (la idea de función recursiva se atiene a cualquiera de los requisitos finitistas) a Pm desde él mismo, con lo que una prueba de completud, y más importante, una prueba absoluta de no contradicción parecían estar vuelta la esquina. Esto, además, sugería que, en verdad, los sistemas formales podían llegar a ser lenguajes cerrados, capaces de autoanalizarse absolutamente sin salir de sí mismos y sin deberle nada a nadie.

1c.La relación metateórica "Demostración".

Armado con el aparato técnico de la aritmetización y definidas las funciones recursivas, Gödel describe al interior del cálculo 45 de estas funciones que representan al interior del cálculo otras tantas metapropiedades del mismo[14]. Una de las últimas es la de "ser una derivación" o "ser una deducción de". Recordemos que derivaciones son simplemente modificaciones tipográficas que inician desde los axiomas y son conducidas por reglas definidas. Ahora bien, cada axioma del cálculo tiene un número g determinado, y cada paso reglado (inferencia inmediata) esta representado por una relación aritmética

[20] Gödel construye las definiciones de los términos metateóricos en términos de funciones numéricas, de manera que las primeras sirven para la progresiva construcción de las posteriores. En especial describe y representa a "x es una variable, la negación de x, es el numeral que designa el número n, x es una fórmula elemental, la fórmula que resulta de reemplazar en x cada aparición libre de u por Y(la función "Sust"), x es una inferencia inmediata de y y z, x es una deducción (función "Dem")". Por último Gödel describe la función "x es una fórmula deducible", de la cual no puede afirmar que sea recursiva (Cfr, Gödel, *Obras Completas*, Madrid, Alianza, 1981. Pág 72) y, de hecho, no lo es. Si bien nosotros podemos mostrar cuándo dos números "x" y "y" tiene la propiedad de ser una par de prueba (uno derivación del otro, unidos por la relación "Demx;y"), no podemos ofrecer un procedimiento mecánico (recursivo) que nos permita sostener de una proposición y cualquiera si esta tiene un número x que sea su derivación. Para esto tendríamos que hacer un recorrido por todas las posibles derivaciones del cálculo en busca de aquella apropiada que derive a "y", búsqueda que puede extenderse hasta el infinito, y no tenemos procedimento adecuado de búsqueda (como si lo existe para el cálculo proposicional), y como consecuencia del resultado del teorema de Gödel, ni siquiera sabremos si tal número de la derivación asociada existe o no (Cfr, Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach.*, Barcelona, Tusquets, 1987 Pág 492).

recursiva entre dos números (los números g de la proposición primitiva y de la proposición derivada).

Por lo tanto, una cadena de derivación cuyo número g es "1969", por dar un ejemplo, y cuya conclusión tiene el número g "369" tiene una función recursiva "Demx" que la describe, así:

La función recursiva Demx representa el par de prueba descrito, si y sólo si es válida para su argumento *1969*, cuyo valor asociado es *369*, y vale por tanto cuando 1969 es el número *g* conjugado de las proposiciones que hacen de derivación, y 369 lo es de la proposición conclusión.

Desda ahora entiéndase que si decimos "Dem (x, y)" estamos sosteniendo una función recursiva representable en Pm, la cual sostiene a nivel metamatemático que el número x representa una secuencia de fórmulas que sirven de derivación a la proposición cuyo número g es y.

1d. La función "sustitución".

Una de las reglas de básicas de toda axiomática compleja es la posibilidad de sustituir un signo del sistema por otro signo, siempre y cuando se haga la sustitución en todas las apariciones del signo.

Esto se representa a nivel de las funciones recursivas por la función "sustitución". Esta función describe el proceso de reemplazar una variable libre de una proposición por un numeral[15]. Por ejemplo, dada la proposición: "x + sso = sssso", que llamaremos "*a*", podemos reemplazar a x en *a* por un numeral, digamos el numeral de 2; se expresa como sigue: (Sust *a*, x, 2). Esto está expresando una función recursiva que vale entre tres números (el número g de *a*, el número g de x y el número g del numeral de 2).

Es necesario aclarar un poco más qué significa en realidad (Sust a, x, 2), ella se puede leer de esta manera peculiar: *"la proposición que resulta de sustituir x por el numeral de 2 en la proposición a"*. Vemos que la función

[15] Decimos numeral y no número, pues nosotros no podemos reemplazar, en una proposición de un cálculo, una variable por un número que hace parte no del sistema sino de su modelo matemático: las proposiciones de un cálculo no llevan números en el sentido en que éstos no hacen parte de sus símbolos. De hecho, un

aritmética (Sust a, x, 2) no es sino la designación de una proposición en términos de *descripción* de su número g respectivo (a partir del resultado de tal función aritmética que tiene por argumentos otros números g previos). ¿Qué proposición es esta?: "ss + sso = sssso", lo cual es cierto y demostrable. Pero no nos importa en este contexto. Lo verdaderamente importante es tener en cuenta desde ahora que cada vez que se hable de una aplicación de "Sust" que con ello estamos describiendo metamatemáticamente un número g de una proposición.

Existe un caso especial "Sust" que es el que necesitamos para la construcción del Teorema. Llamemos a este caso especial "SustG".

Esta función aplicada a nuestro ejemplo *a* anterior "x + sso = sssso", se enuncia: (SustG x, *a*). quiere decir: "*la proposición resultante de sustituir x, por el numeral del **número g de a, en a***". Es decir, incluimos el numeral del número g de una proposición cualquiera en una variable libre de ella misma. Convengamos resumir esto con "(a//x)". Nuestro ejemplo quedaría así:

((x//*a*) + sso = sssso) = (sss... ***a* veces**... sss + sso = sssso).

Esta función nos ofrece una manera de construir proposiciones autorefenciales tantas como queramos pues podemos agregar el numeral de una proposición en su interior, con lo que el predicado asociado a la variable queda aplicado a ella misma. Muchas de estas proposiciones serán falsas y refutables, como nuestro ejemplo, y otras verdaderas y deducibles. Pero, la proposición que intentamos construir es de otro tipo. No esperemos más.

2. la construcción del teorema de gödel

Aquel que haya entendido lo anterior puede sostener que se encuentra en capacidad de comprender el teorema gödeliano, de hecho, puede que ya lo haya entendido de manera intuitiva y sólo necesite un empujón. A partir de aquí las cosas se tornan verdaderamente breves y sencillas e invito a los

número *no es* un símbolo. Sin embargo, los numerales, que sí son símbolos del sistema, *representan* cada uno un número al interior del cálculo. Véase Apéndice.

lectores que, guardando cierto grado de atención siempre necesaria, se relajen y disfruten de lo que viene a continuación.

Vamos a construir una proposición autoreferente de la cual no es posible deducir ni ella ni su negación, por la sencilla razón de que ella afirma de sí misma que es no deducible. Probaremos después que, de hecho, es indecidible. Se seguirá de esto que la proposición representa a nivel de su interpretación aritmética un enunciado verdadero de la teoría de números.

La construcción del Teorema de Gödel es una secuencia de tres pasos de complejidad creciente. No es construcción en el sentido de derivación a partir de axiomas seguida de reglas (teorema), sino la construcción de una expresión bien formada del cálculo. Lo que se designa como "Teorema de Gödel" no es la fórmula misma sino su derivado significado metamatemático, el cual sostiene la existencia de una fórmula indecidible del cálculo Pm, pero verdadera aritméticamente.

Nuestro primer paso es construir una proposición que sostenga únicamente que *existe una proposición del cálculo que no es un teorema.* Esta afirmación deberá traducirse al lenguaje del cálculo Las reglas de formación y la conversión en términos recursivos de la metapropiedad Dem nos lleva a expresarla como:

I $\quad \forall z, \ (\neg \ \mathrm{Dem} \ (z, x))$

De tal forma que se lea: "Para todo z, z no es (el número g que representa) una sucesión de fórmulas que sirva de demostración a (una fórmula de número g) x"[16].

Vemos que tenemos un cuantificador de universalización gobernando a la variable z, esto significa que, *cualquiera que sea* la derivación de Pm, esta

[16] El significado aritmético real de I es "Para todo número z, la función ¬Dem, lo coloca en relación aritmética *¬Dem* con x". Sin embargo su traducción metateórica es la que hemos descrito, pues "y" y "x", representan metamatemáticamente números g de proposiciones y ¬Dem representa una propiedad metateórica que vale para estas proposiciones. De ahora en adelante, haré abstracción del significado aritmético primario, lo mencionaré cuando sea pertinente y registraré solamente el significado metateórico o metamatemático.

derivación no es demostración de x. Tenemos también una variable libre x susceptible de ser sustituida. Si se sustituye por un número g sostendrá una falsedad refutable o una verdad demostrable sea respectivamente el número correspondiente. Por ejemplo, si reemplazamos x por el numeral g de "ssssssso = s0" (8 es igual a 1) será demostrable y verdadera, ya que no hay demostración de semejante estupidez. Pero será falsa y refutable si la sustituimos por algo como "s0 = s0".

Nosotros no haremos ni lo uno ni lo otro, lo cual sería trivial para nuestros propósitos. En cambio, nos limitaremos como segundo paso a introducir otra variable libre y que representará un número cualquiera. La introduciremos mediante la inserción de la función *SustG* y su aplicación a la variable libre x:

II $\quad \forall z, (\neg \text{ Dem } (z, x) \wedge (\text{SustG } x, y))$

Nótese el significado profundo de II, ésta sostiene que: "Para todo z, z no es una demostración de x, cuando sustituimos x por *el número que representa la proposición y, que se obtiene al sustituir la variable x de II por el numeral de y*". Podemos escribir II de manera sintética así:

IIa. $\quad \forall z, (\neg \text{ Dem } (z, x, x//y))$

Téngase en cuenta que no hemos dicho todavía qué numeral es y, no hemos dicho qué número g le pertenece, ni qué fórmula representa este número. Puede ser cualquiera, por lo que la fórmula matemática que designa esta proposición no es todavía ni verdadera ni falsa. Esta proposición a medio construir es simplemente un marco vacío que representa una fórmula metamatemática cuyo significado es *que la propiedad ¬ Dem vale para la proposición z en relación con* ***la proposición resultante*** *de realizar SustG con ella misma.* Nótese que no sabemos todavía de qué proposición hablamos.

Nos encontramos en el último paso de la construcción, el más sencillo, pues nuestra proposición IIa es una proposición del cálculo que debe tener su propio número g que le representa, nombremos a este número "**g**". Veamos qué pasa si tomamos a IIa y aplicamos a su única variable libre y, la cual ha sido "SustGintroducida", una nueva y simétrica función SustG donde introduciremos esta vez, no otra variable sino el numeral del número **g.** El número g de la misma IIa:

III. $\forall z, (\neg \text{ Dem } (z, x, \ x//y) \wedge (\text{SustG } y, \mathbf{g}))$

Esta es la proposición que representa el famoso Teorema de Gödel que hemos estado buscando. ¿Cuál es el significado de III?. "***La proposición que resulta de sustituir y por g en IIa*** *no tiene demostración*". Pero, ¿cuál es esta proposición?. Es la misma proposición III pues ella misma esta *representada* por el número (SustG y, **g**), aquel que designa ***la proposición que resulta de sustituir y por g en IIa,*** que es precisamente lo que hemos hecho para llegar a III. Por lo tanto, III afirma de sí misma que es no deducible.
Resumamos a III así:

IIIa $\forall z, (\neg \text{ Dem } (z, x, \ x//\mathbf{g}))$

Nótese el sospechoso parecido de IIIa con IIa. IIIa no es sino un caso especial de IIa (recuérdese su significado: *no hay una demostración para* ***la proposición resultante de realizar SustG con ella misma***). Si aislamos el hecho que esta referida a una propiedad particular, la de no ser demostrable, podemos decir que esta proposición IIa es algo así como un "esquema de autoreferencialidad". IIIa no es sino un caso concreto de proposición autoreferente, que nace de la autoreferencialidad de una proposición que, ella misma, se refiere a la autoreferencialidad[17].

[17] Véase, Hofstadter. Pág 498.

No es que IIIa se refiera a sí en el sentido en que se señale a sí misma con un dedito circular o se contenga tipográficamente en su propia notación. Es autoreferencial en el sentido en que muestra una relación recursiva (¬ Dem) que vale para un entero **g** en relación con otros números (y en especial con todos los z). Sólo posteriormente, a un nivel metamatemático, *nosotros* percibimos que este número representa a la misma proposición construida. IIIa, de esta manera, dice de sí misma, a través de la descripción de una propiedad de su propio número g representativo, que es indemostrable.

Si estamos capacitados para hablar de autoreferencia legitima es que la identidad estructural que hemos encontrado entre el subconjunto g de los enteros y sus propiedades, y las proposiciones y estructuras de Pm, es tan transparente y definida que a nivel formal no existe diferencia alguna, son idénticos.

Pero, y esto es importante, la no distinción entre un nivel y otro pueden llevar a paradojas iguales a la de Richard, contradicciones que, precisamente Gödel con la distinción MetaPm aritmético y Pm formal, esta evitando de manera precisa. Si nos confundiéramos seria fácil llegar a una contradicción en la aritmética basados en los razonamientos metamatemáticos y metaformales que expondremos a continuación.

Convengamos llamar a IIIa, "**G**". Hasta ahora, sólo hemos *construido* a **G**, la cual afirma de sí misma que es inderivable. Ahora debemos *demostrar* efectivamente su carácter de inderivabilidad y, en especial, que es indecidible (que ni **G**, ni ¬ **G** son derivables). La demostración de lo anterior se da en dos segmentos:

1. Utilizemos un razonamiento indirecto y supongamos primero que **G** sea derivable. Si esto es cierto entonces debe "existir un número z que es el número g de la derivación de la proposición cuyo número g resulta de ***sustituir y por g en IIa*** (o sea **G**)". Esto se expresa así:

$\exists z, (\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$

Pero esta proposición de ser derivable (y debe ser derivable si tal número existe) no es otra sino un caso especial de *contradictoria* de **G** (aquel donde se intercambia Universalización por Particularización, y se elimina la negación del predicado relacionado a la variable cuantificada). Por lo que la posible derivación de **G** entra en contradicción con la misma **G**, que entre otras sutilezas afirma su inderivabilidad: estaríamos derivando de Pm una proposición falsa por el mismo hecho de ser derivable.

Esto nos lleva a que si **G** fuera derivable llegaríamos de inmediato a una contradicción en Pm y, como hemos tomado como premisa desde el principio que Pm es coherente, nuestro supuesto (la derivabilidad de **G**) es falso, **G** es inderivable. No existe un número g de la derivación de **G**.

2. Nos queda todavía mostrar que no es posible demostrar ¬ **G**. Para esto volvemos a lo mismo. Supongamos que ¬ **G** sea derivable. Esta proposición no es otra que la misma **G** precedida de la constante "negación":

$\neg \forall z, (\neg\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$

Su significado es "Se niega que para todo número z, z no sea la derivación de la proposición cuyo número g es **g**". Estamos hablando aquí de una propiedad (la de *no* ser una derivación de **g**) que se *niega* de todos los números z posibles. En pocas palabras, *existe* un z que es una derivación de **g**. Pero, de hecho, como hemos ya mostrado en nuestro segmento 1, tal número z con *esa* propiedad no existe, y no sólo eso, sino que puede mostrarse deductivamente que ningún número cuenta con ella. Podemos mostrar, por ejemplo, que:

A. $\exists z, (\neg\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$ donde $z = 1$, es cierta y derivable.

B. $\exists z, (\neg\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$ ... $z = 2$, es cierta y derivable.

C. $\exists z, (\neg\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$ ... $z = 3$, es cierta y derivable.

D. $\exists z, (\neg\ \mathrm{Dem}\ (z, x,\ x//\mathbf{g}))$ ... $z = n$, es cierta y derivable.

Por tanto, en caso de que nuestra supuesta proposición ¬ **G** sea derivable, Pm sería ω- inconsistente[18], ya que podemos demostrar que una propiedad (la de no ser una derivación de **g**) es compartida por toda una serie de números a través de sendas proposiciones de la forma "$(\exists z/n_1, n_2, n_3,\dots n_n)$",

[18] Cfr, capítulo III.

pero habría una proposición (cierta y derivable) de la forma "(∀z, nuestro supuesto)", que nos diría, así no más, que existe un número que no tiene tal propiedad, aunque nunca podremos dar tal contraejemplo adecuado de ello (si Pm y la aritmética son consistentes)[19].

Por tanto, con el objetivo de salvaguardar la ω-consistencia (y la consistencia), no sólo de Pm sino de la aritmética misma, y dado que no podemos demostrar bajo estas premisas ni **G**, ni ¬ **G**, hemos de concluir el carácter indecidible (expresable pero no deducible) de la proposición que nos concierne. Q. E. D.

Pm es incompleto *sintácticamente* . Nos encontramos frente a la ilustre "primera parte" del Teorema de Gödel.

Ahora la "segunda parte": ¿Es **G** verdadera o falsa *aritméticamente*?. Es decir, ¿expresa esta proposición una verdad del modelo de Pm?. Pensemos en esto, puede que **G** esté expresando una fasedad, puede que precisamente por eso sea indecidible, si esto es así, aunque seguiría siendo delicado que Pm no pudiera refutar una falsedad de teoría de números, la cosa no sería de muerte. Pero si **G** es verdadera el asunto es mucho más complicado. Recordemos que el sentido de ser de Pm es absorber *todas* las verdades de la teoría de números con el fin de que la aritmética *fuera* Pm, de tal manera que la interpretación (el contenido) de Pm fuera lo menos importante. Nos quedaríamos sólo con los vínculos formales del sistema para representar nuestras abstracciones sobre los actos concretos de contar, restar y agrupar cosas, números o clases. No necesitaríamos más *pensar* en números o cantidades, sólo en símbolos y sus estructuras. No habría necesidad de ninguna intuición por fuera de la forma y Pm sustituiría no sólo instrumental sino *epistemológicamente* a la aritmética.

Ahora bien, ¿Es **G** verdadera o falsa *aritméticamente*?. Véase que **G** está describiendo una propiedad de un tipo de conjuntos de enteros z, propiedad que es expresable en Pm aunque no deducible, y que resulta ser cierta en

[19] Cfr, Gödel. Pág 169.

sus propios términos, es decir, tales números cuentan efectivamente con tal propiedad[20]. La verdad de **G**, de hecho, ya la hemos establecido por medio de un razonamiento metaformal exterior al cálculo mismo, y que se apoya precisamente en las particulares relaciones matemáticas que guardan los enteros z, x y **g**.

Recordemos también el *significado* proposicional de **G** misma, la cual sostiene su propia inderivabilidad. Ella dice de sí "*no soy demostrable*". Si no es demostrable, como dice, entonces *es* verdadera. Puesto que hemos demostrado que es indecidible, la verdad que afirma de ella misma es intuitivamente tan transparente "como una sumatoria con los dedos".

Su verdad resulta aún más evidente cuando reconocemos el hecho de que todas las proposiciones aisladas de la familia "($\exists z/n_1$, n_2, n_3,...n_n)" son verdaderas, y de la verdad de éstas hay un sólo paso legítimo, por el procedimiento de inducción matemática, para aceptar la proposición universal que las resume. Esta no es otra que la misma **G**^{n}.

Pero, si **G** es verdadera Pm es incompleto de manera *semántica*. Hay una verdad de la aritmética que está incapacitado para representar o deducir. Lo que significa que Pm no puede formalizar a la aritmética de manera que despida de una patada la intuición "extra Pm". De nuevo, Q. E. D.

La proposición **G** es el "dedo" que hemos sabido cortar de Pm para iluminar con su verdad nuestra conciencia de lo que él esta, y no esta, capacitado para hacer.

Consistencia y completud.

Hemos mostrado que Pm es incompleto, pero ¿qué queda de su consistencia? Este es un requisito más caro y delicado desde todo punto de vista. La motivación original de Gõdel era "resolver" el problema de la demostración absoluta de consistencia de Pm. Pero, luego se dio cuenta que

[20] Tal propiedad es que no hay un modo recursivo de relacionar todo el conjunto de los números g de las proposiciones bien formadas de Pm, con los números g de los axiomas y las derivaciones (el conjunto z de los g).

[21] Dummett Michael, *La verdad y otros enigmas,* El significado filosófico del teorema de Gõdel, México, F.C.E., 1990. Pág 272.

su idea lo llevaba a la construcción de una sentencia indecidible. Este resultado destruye completamente toda posibilidad de encontrar tal demostración. La razón es que la primera consecuencia de **G** es que puede ella ser utilizada para demostrar que no es posible tal prueba. Vamos a mostrar la manera de hacer esto de manera sencilla:

Por medio de la metatraducción recursiva podemos construir la proposición que representa metamatemáticamente en Pm su consistencia así:

$\forall x, y, z\ (\neg\ ((\text{Dem } x, z) \wedge (\text{Dem } y, \text{Neg } z)))$[22]

Por otro lado, que Pm sea incompleto quiere decir que no podemos deducir a **G**. Como la misma **G** predica esto de sí misma, ella arrastra en su significación metamatemática la incompletud de cálculo, y como hemos mostrado que Pm bajo el supuesto premisa de que sea contradictorio es incompleto, podemos construir una proposición condicional que sostenga a nivel metamatemático "*si* Pm es consistente *entonces* es incompleto" colocando la proposición que representa la consistencia de antecedente, y la que representa la incompletud de consecuente, de esta manera:

$\forall x, y, z\ (\neg\ ((\text{Dem } x, z) \wedge (\text{Dem }, \text{Neg } z))) \rightarrow \forall z, (\neg\ \text{Dem } (z, x, x//\mathbf{g}))$

El resto se resuelve por sí mismo: resulta que si logramos conseguir una derivación del antecedente (una prueba de que Pm es consistente) podríamos derivar el consecuente, que no es otro que **G**. Pero habíamos dicho que Pm no tiene derivación de **G**, y caso tal la tuviera Pm sería contradictorio. Luego, sólo podemos demostrar la no contradicción de Pm, si Pm es contradictorio.

Por lo tanto, como suponemos que nuestra aritmética es consistente, haríamos bien en aceptar que no existe una prueba *finitista* de no contradicción de Pm: Pm no puede probar su propia consistencia.

De todo lo anterior se desprenden ciertas consecuencias que colocan en tensión las dos propiedades metateóricas más importantes de Pm:

- La única manera de que Pm sea completo es que sea inconsistente.

---

[30] Esta proposición se lee: "para todos los números x, y, z , no puede ser cierto que x sea una derivación de z, y al mismo tiempo y sea una derivación de no z". Cfr, Gödel. Pág 166.

- O bien, si Pm quiere mantenerse consistente debe permanecer incompleto.
- Y mientras sea incompleto no podrá nunca demostrar su propia consistencia.
- De hecho, que no pueda demostrar su consistencia es el único argumento posible que Pm puede ofrecernos para que se le siga considerando consistente.

Esto no quiere decir que no haya prueba posible de consistencia para Pm. La prueba puede existir, pero ésta no es *absoluta*, es decir, tiene que apoyarse en un sistema formal exterior a Pm y más vasto que él: con recursos de formalización más potentes. Así mismo, no podremos demostrar la consistencia de este sistema más vasto sino apelando a *otro* que lo contenga y así sucesivamente hasta donde queramos. Luego, el resultado de Gödel se mantiene: un sistema formal de complejidad igual o superior a Pm no podrá nunca demostrar su propia consistencia, siempre dependerá de una intuición que lo relacione con otro sistema exterior.

3. CONSECUENCIAS GENERALES DEL TEOREMA DE GÖDEL

A. Primacía de la intuición sobre la formalización.

Las consideraciones anteriores nos permitirán ser sintéticos en lo que sigue. Tenemos claro ahora que un sistema formal de complejidad razonable no puede contener toda la intuición que se propone formalizar. Pm pretendía transformar las operaciones concretas de la aritmética utilizadas para referirse a cantidades, tamaños y formas, en procedimientos abstracto formales sin contenido, pero vemos que tal contenido rebasa las posibilidades de la forma de manera *absoluta*. ¿Absoluta?.

Puede pensarse que se podría llegar a completar a Pm de alguna manera. Qúe pasa si, por ejemplo, ya que hemos mostrado la verdad evidencial y primitiva de **G**, la agregamos los axiomas de Pm. Será Pm completo ahora?. No. Si hacemos esto podremos construir una nueva proposición $\mathbf{G}_1$

indecidible. Si agregamos $\mathfrak{G}_1$, esta vez podremos generar $\mathfrak{G}_2$, y así sucesivamente. De modo que por mucho que Pm desee capturar todas las intuiciones matemáticas, la intuición matemática siempre va *un paso más allá*, aplanando el cálculo por medio de su metatraducción aritmética y generando un autoreferente indecidible[23].

Esto sugiere indirectamente una primacía de la intuición sobre la formalización.

Hay un sentido de esta primacía que es, digámoslo así, trivial; el *genético*: el sistema ha dependido de la intuición para su génesis. Los sistemas formales nacen de la intuición, y a partir de esta intuición sobre un sistema de objetos (modelo) se crean las relaciones abstractas del sistema. Es cierto que el sistema es independiente después de creado pero siempre lleva consigo una infancia intuitiva. Sólo por medio de una "abstracción sobre abstracciones" se dice, como sostiene el credo de la lógica moderna, que el proceso es inverso (se crea el sistema, luego se le busca un modelo).

El otro sentido se encuentra cuando se considera la relación entre el sistema, el modelo y nuestro uso de él:

Ningún sistema formal ni se comprende ni se manipula sólo. Y mediante sea manipulado por personas, su uso está ligado al modelo que contiene. Cierto que es posible ver al sistema como un simple juego vacío de formas, pero ese tipo de utilización sólo tiene cabida en la cabeza de los lógico lúdicos, aquellos que no se interesan por el significado o los usos de lo que manipulan. Aparte de esto, toda utilización instrumental de un sistema depende de aquello que intenta formalizar, es esa fuente la que le da sentido. Si no fuera así, estaríamos topándonos a cada rato con expresiones que no vamos a poder resolver como verdaderas. La intuición siempre es necesaria.

---

[23] Este resultado no hizo parte del artículo matriz de Gödel, pero es una consecuencia directa de sus planteamientos. Fue propuesto por Turing en su artículo "sistemas de lógica basados en ordinales". Veáse. Penrose, pag 150

En últimas es también cierto que el sistema, para ser utilizado, depende de consideraciones que están por fuera de él, en el sentido de que dependemos de un lenguaje extraformal que sirva de metalenguaje para su estudio (un lenguaje natural u otro sistema mucho más amplio). Esto es, en parte, consecuencia de teorema gödeliano sobre la inexistencia de prueba de consistencia en Pm, el cual muestra que el sistema aislado, no puede ser instancia de comprensión formal absoluta de sí mismo. Lo que queda claro cuando volvemos al hecho que el sistema es lo suficientemente listo para *expresar* una verdad, pero sin la intuición matemática o seríamos capaces nosotros de *reconocerla* como tal.

Unido directamente con esto esta la idea tarskiano-gödeliana de la imposibilidad de representar la noción semántica de verdad dentro de sistema. Si esto fuere posible, ninguna remisión a modelos del sistema fuera imperiosa, y la formalización fuera tal que no habría necesidad de ir a las significaciones intuitivas para resolver una cuestión. Pero, ya sabemos que no. Por lo tanto el sistema no es capaz de dar una descripción epistemológica ni de sí, ni de sus posibles interpretaciones. Esta descripción sólo le puede venir de fuera, de su modelo interpretativo. Hay un abismo entre lo semántico y lo sintáctico, y es lo semántico lo que *sostiene* intuitivamente a lo sintáctico.

B. La naturaleza de las matemáticas y el programa de Hilbert.

Cuando nos referimos, en el capítulo dos, a los axiomas de Peano dijimos que fue el primer intento de englobar una noción infinita dentro de los parámetros finitos de la axiomatización. Este no es un caso aislado sino que la aspiración misma de las matemáticas. Los sistemas formales nacen en ese contexto. Pero lo que muestra el teorema es que consideraciones sobre el infinito, producidas por querer expresar una totalidad de entes relacionados entre sí por medio de generalizaciones de universalización (el conjunto de todas las infinitas derivaciones, de todos los infinitos teoremas)[24], rebasan toda capacidad de cualquier sistema. Los resultados gödelianos confirman que no hay manera de una caracterización finita, sistemática y *completa* no sólo de la serie de los naturales, sino de muchas otras clases infinitas de estos números.

Por tanto, la noción de número natural no es caracterizable (definible) por medio de ningún sistema formal. Cualquier significación que tenga esta noción escapa de una manera que es interesante aclarar: de ser posible una adecuada carateriżación de los naturales debe existir un *criterio* definitivo para determinar si algo es o no predicable con verdad de todos los naturales "y justo este concepto de fundamento es el que el Teorema de Gódel muestra que es indefinidamente ampliable; para cualquier caracterización definida de una case de fundamentos para hacer una afirmación acerca de todos los números naturales, habrá una ampliación natural de esa clase"[25]. Esto nace de hecho de que es imposible definir una clase finita o infinita de números sin que e principio de inducción nos permita reiterar la función sucesor y agregar un nuevo componente no especificado en la clase primitiva. Esta ampliación natural de los naturales nos lleva a sostener que la misma noción de "número" es "vaga" en un sentido *inherente:* "la razón por la cual el concepto de <número natural> es vago de manera inherente es que una de sus caracteristicas fundamentales, que deberá incluirse en la caracterización del concepto, es la validez de la inducción con respecto a cualquier propiedad bien definida; y el concepto de una propiedad bien definida presenta a su vez una variedad particular de vaguedad inherente, a saber, la extensibilidad indefinida. Un concepto es extensible indefinidamente si, para cualquier caracterización definida de este concepto, existe una extensión natural de esta caracterización, lo cual lleva a un concepto más inclusivo"[26]. Desde este sentido la limitación de los sistemas formales reside en que en éstos no pueden dar cuenta de todas las infinitas extensiones de las propiedades de los naturales, en especial, la de ser un enunciado matemático verdadero de sistema.

[24] Cfr, capítulo 3.
[25] Dummett M, Pág 273.
[26] Ibid, 275.

Siempre hay posibilidad de aumentar los criterios (demostraciones válidas) por los cuales sostenemos que una expresión matemática es verdad y, como todo sistema formal tiene una caracterización finita de todas sus posibles demostraciones (en términos de axiomas finitos y reglas fijas de inferencia), ellos no pueden englobar completamente todas las verdades posibles. El Teorema de Gödel no hace más que evidenciar este hecho[27].

Es en esto donde reside la verdadera y más importante relación que existe entre el argumento por la paralela de Cantor y los resultados de Gödel: el argumento cantoriano exhibe claramente la posibilidad de transgredir una lista numérica infinita mostrando la manera en que esta misma lista puede ser usada mediante un metaargumento para crear un nuevo miembro de la lista que esta no contiene.

Con respecto a los resultados de Gödel en referencia al programa de Hilbert las conclusiones ya se habrán evidenciado solas. Hay tres puntos en los que el programa de Hilbert se ve afectado:

1. Hilbert pedía una prueba finita de completud para el cálculo lógico Pm con el objetivo de demostrar que formalismo y matemáticas coincidían al nive de las verdades matemáticas posibles. El Teorema de Gödel muestra que tal prueba no existe en el sentido que el cálculo es todo menos completo.
2. La noción de existencia matemática de Hilbert implicaba una prueba de no contradicción. Sin esta prueba la existencia de objeto matemático podía ponerse en duda. Además Hilbert obligaba a que, en el caso de las matemáticas como un todo, se debía encontrar una prueba absoluta que no dependiera de ningún referente exterior. Los resultados de Gödel prueban que una demostración de existencia absoluta es imposible, con lo que, si se sigue el programa hilbertiano, tal como fue planteado, la existencia de la matemática misma nunca podrá ser demostrada en términos absolutos.
3. Por último, Hilbert tenía la pretensión de que todo problema matemático pudiera resolverse mediante un sí o un no. La existencia de un indecidible a interior de Pm muestra lo contrario. Con el agravante que tal

[27] Ibid, 281.

indecidible resulta ser verdadero cuando se analiza al sistema desde su exterior.

Sin embargo, esto no implica un fracaso de la tentativa hilbertiana. En especia, su distinción entre matemática y metamatemática sigue vigente, y hasta reforzada por la técnica de aritmetización de Gödel. Lo único que resulta verdaderamente afectado es la idea fundamental de Hilbert de que la matemática puede reducirse a un formalismo sin contenido.

Lo que esta en juego no es la reinatura de las matemáticas sino su fundamento, su propia naturaleza negativa: si una teoría matemática quiere ser completa, tiene tres opciones: ser inconsistente y llevar consigo el peso "de falsedades verdaderas(deducibles)"; incluir dentro de sus axiomas todas las infinitas verdades de la matemática (cosa que no merece siquiera el comentario); o simplemente no ser enteramente formal[28]. Pero, lo que debe entenderse como matemáticas de manera positiva desde Gödel no queda con esto claro, "el sólo demostró que la matemática *no* es <sintaxis>, pero todavía estamos muy lejos de tener una idea clara de lo que la matemática *es*"[29].

C. Límites de la racionalidad formal.

Por racionalidad formal entendemos todo aquel comportamiento humano que se atiene y decide sobre un problema a partir de un sistema formal que cree o se sabe que formaliza ese ámbito de cosas en donde el problema surge. Esto implica que el que se cobija bajo el grueso manto de la racionalidad formal *no tiene necesidad de comprender* el significado de lo que decide, y tampoco siente la necesidad de apelar para dar o fundamentar su decisión al *contenido* de aquello que debe decidir, ni a sus creencias, valores o imaginación. Ni siquiera debe *pensar cómo decidir* pues el sistema lo dota de todas las instrucciones adecuadas para ello, decidir se reduce a proseguir las órdenes del sistema sin salirse de ellas. Tampoco se pregunta por la

[28] Cfr, Wang 61.
[29] Ibid, 61.

conveniencia o no de aquello que ha decidido, pues acepta acríticamente[30] lo que ha derivado del sistema.

Esta descripción de racionalidad formal se atiene sólo a aquello que hemos descrito como particularidades de los sistemas formales: hemos querido realizar una traducción pragmática de esas particularidades, traducción que no pretende ser completa; pero sí esencial.

Ahora bien, tal confianza en un sistema de pensamiento resulta refutada por el Teorema de Gödel por razones que esperamos ya hallan quedado claras con todo lo que hemos dicho anteriormente, en el sentido que ni siquiera en el ámbito de las matemáticas básicas tal racionalidad opera efectivamente. Siempre es posible expresar un problema legítimo de modelo pero que no tiene solución a menos que se salga uno de los parámetros del sistema.

La limitación descubierta por Gödel no es la única existente aunque si la mas escandalosa, por probar sin lugar a dudas la imposibilidad de reducir todo pensamiento racional a formalismo. Lo que el teorema comprueba es que, aun si fuera *creíble* la erradicación de toda otra fuente de racionalidad diferente al formalismo lógico en una ciencia desde las altas matemáticas, pasando por los sistemas jurídicos hasta lo más profundo de la filosofía, aun si fuera posible, tal "completa" formalización se pagaría con lagunas de ignorancia deductiva en algún nivel. Habría verdades, normas o problemas

---

[30] Cuando llamamos pensamiento acrítico al pensamiento o a la racionalidad formal, no queremos decir que ésta no tenga fundamento racional, que no halla "razones" que esgrimir a su favor. Lo tiene, pero este fundamento ha sido previo a la decisión tomada y no tiene nada que ver con ella en su particularidad, ni en los contenidos que lleva.

El fundamento racional de la racionalidad formal se encuentra en dos hechos interconectados: 1) En una experiencia anterior para la que el sistema ha resultado eficaz, verdadero o adecuado. 2) en la confianza en que la génesis o elaboración del sistema dio cuenta de todo lo atinente a la generalidad de los casos a los que se aplica. Nótese dos cosas que son independientes a la formulación de la idea de racionalidad formal y que son, al parecer, incompatibles: primero, que el fundamento racional es *exterior* al sistema del que trata, y segundo: que este fundamento, según la descripción que de él hemos propuesto, termina identificándose con la idea de inercia descrita por nosotros en el primer capítulo en el marco de la Teoría de la Argumentación de Perelman. Sólo que aquí esta experiencia previa termina siendo cosificada e impersonalizada *al interior* del sistema, de tal manera que ya no vale que tal inercia se deba sacrificar si existen

156

No creo que tenga mucho sentido decir que la "indeterminación" del derecho se origine en la "incompletud" de la lógica formal

inaprensibles e indecidibles para una mente apegada a la racionalidad formal. Por ende, la única salida razonable, es aceptar la limitación de esta racionalidad, la incompletud patológica del cálculo deductivo: su inoperancia en ciertos niveles del conocimiento conceptual e intuitivo.
Este, precisamente, es uno de los argumentos utilizados por Perelman para no aceptar el formalismo jurídico en el derecho: el juez, como supuesto práctico inviolable, no puede denegar justicia aún si el sistema jurídico es incapaz de darle las herramientas adecuadas para decidir. Como ningún sistema formal de cierta complejidad puede resolver todas las instancias de lo que puede expresar, la racionalidad formal no puede ser ejercida en el derecho so pena de indecisión jurídica[31].

Este resultado podemos reforzarlo explicando una limitación más de los formalismos a la que ya nos referimos: la insolubilidad del problema de la decisión para la lógica de primer orden y superiores[32].
Todos los sistemas formales son concretizaciones de métodos mecánicos subsumidos en una estructura forma que los sistematiza. Por tal razón, uno pudiera esperar que todo procedimiento mecánico, toda formalización posible, toda derivación que se necesitara, fuese viable conseguirla a través de un método igualmente mecánico. De ser así todas los problemas resolubles a través de procedimientos mecánicos pudieran ser resueltos con sólo computar el método formal adecuado. Toda la inteligencia utilizada para crear procedimientos formales sería ella misma reducible a formalización.

buenas razones para ello. La razón se encuentra aislada de otras posibles razones mientras se crea que ella reside en el *interior* de sistema.

[31] "Hemos aprendido que la claridad de las nociones y la univocidad de los procedimientos de deducción están ligadas a la limitación de expresiones no decidibles, es decir, de expresiones de las que no se puede demostrar ni a verdad ni la falsedad, cuando se ve más allá de los sistemas elementales. Al contrario, desde que uno quiere que una lengua, tal como la lengua natural, sea capaz, en principio, de expresaro todo, si uno obliga al juez competente, bajo denegación de justicia, a zanjar todos los pleitos que se le someten conforme al derecho vigente, no se puede mantener las mismas exigencias de univocidad y de rigor en la formación de las reglas de lenguaje y en la determinación de las técnicas de motivación de los juicios" (Perelman, citado por A León Gómez en "El argumento por el contraejemplo", págs 22,23).

[32] Cfr, cap 3.

En el caso de la matemática este problema se reduce a la existencia de un algoritmo[33] que resuelva todos los problemas matemáticos posibles.

Como ya habíamos dicho, desde Turing y Church se sabe que esto no es posible. Hay problemas matemáticos para los que existe una solución formal y mecánica, pero cuya solución debe ser encontrada de manera no mecánica (de nuevo, primacía de la intuición sobre la formalización).

Por tanto, a partir de la lógica de predicados de orden 1, ningún sistema formal puede dar cuenta de todos los procedimientos mecánicos *posibles* en su interior. No existe un procedimiento universal que resuelva todos los problemas como Leibniz y Hilbert deseaban. Las operaciones mecánicas del pensamiento no pueden ser, ellas mismas, mecanizadas[34].

La conclusión general de todo esto es "que no podemos agotar, en lo actual, todas las posibilidades de razonamiento que nos son, en principio, accesibles. No existe sistema cerrado que sea el paradigma de todo discurso, el canon supremo de la razón. Cualquiera que sea el sistema que podamos considerar, siempre quedan formas de razonamiento que le son extrañas"[35].

Resulta escandaloso comprobar que la racionalidad formal depende de la inteligencia aún en su propio terreno. Ella no puede *crecer* de manera aislada.

Hay otra dimensión de las consecuencias de las limitaciones gödelianas que no trataremos aquí extensamente pero que nos gustaría referirnos a ella, al menos porque fue uno de nuestros motivantes para interesarnos por los resultados de Gödel: Se cree que el Teorema de Gödel es un argumento en contra de la posibilidad de una emulación del cerebro humano por parte de máquinas computadoras. Aunque hay algunos que consideran así[36], no creemos que sea un argumento siquiera poderoso. Parte como premisa

---

[33] Cfr, Ibid.
[34] Cfr, Crossley J. Págs 24, 25.
[35] Op cit, Pág 342.
[35] Gödel, pág 180, Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos.
[36] Cfr, por ejemplo, Penrose, en *La nueva mente del emperador*, Barcelona, Grijalbo Mondarori, 1999.

precisamente de la tesis que intenta probar: que el cerebro no es un sistema lo suficientemente parecido a un computador como para que pueda valer alguna variante de Teorema de Gödel o alguna limitación similar.

Por ahora, los cerebros humanos sobrepasan a las computadoras en tantos sentidos que es mejor no extenderse en ello. Pero, desde nuestro punto de vista, la posibilidad de la Inteligencia Artificial no queda refutada por el teorema de la misma forma que éste no dice nada de cómo funciona nuestro cerebro: si han pasado poco más de cincuenta años desde la aparición de la primera computadora y se ha logrado tanto, nosotros esperaríamos unos doscientos más para hablar de cierta imposibilidad de as máquinas en ese sentido (el cerebro humano necesitó millones de años de evolución), más cuando ni siquiera se ha podido lograr una definición adecuada de qué se debe entender por "inteligencia".

El más grande abismo entre computadoras y cerebro humano está, por ahora, en la incapacidad de las primeras de crearse nuevos axiomas[37]. Es en este sentido que, para Gödel, hay cierta claridad de la diferencia entre unos y otras: para él, la tesis que intenta la reducción del cerebro a una computadora supone que "una mente finita sólo es susceptible de tener un número finito de estados distinguibles"[38]. Pero, según él, lo que sucede es exactamente lo contrario: "la mente en su uso no es estática, sino que está en constante desarrollo. Esto se ve por ejemplo, considerando la serie de los axiomas de infinitud cada vez más potentes en la teoría de conjuntos, cada uno de los cuales expresa una nueva idea o intuición.(...). Por lo tanto, aunque en cada estadio del desarrollo de la mente el número de sus posibles estados es finito, no hay razón ninguna por la que este número no podría converger hasta el infinito"[39].

---

[37] Esto supone una breve aclaración. Una máquina puede crearse nuevos axiomas en le sentido que se encuentre en su programa una rutina que inserte nuevos procedimiento, basados en ciertas experiencias que la máquina está enseñada a procesar, pero ninguna máquina puede modificar su programa. Sin embargo, esta sigue siendo una objeción de hecho, claramente refutable por la experiencia.

[38] Ibid, 180.

Dicho sea de paso esto se relaciona con la manera en que el mismo Gödel suponía que podían *superarse* los resultados de sus investigaciones. Según él, es posible completar progresivamente el análisis de la matemáticas por medio del establecimiento de nuevos axiomas a través de procedimientos intuitivos (no mecánicos). El argumento de Gödel reside en una analogía entre la forma como la ciencia adquiere conocimientos y os procesos de aprendizaje de los infantes. Un niño aprende en dos niveles, uno en el cual éste experimenta con los objetos a su alrededor y con la relación entre estos y su propio cuerpo; y otro nivel en el cual el niño es capaz por sus propios medios de comprender mejor su lenguaje. En este tipo de nivel el niño pasa a estados de conciencia mayores que es imposible preveer *a priori*, de a misma forma nosotros podemos extender nuestro conocimiento al captar conceptos que antes no teníamos ni eramos *a priori* capaces de preveer:

> "Namely, it turns out that in the sistematic establishment of the axioms of mathematics, new axioms, which do not follow by formal logic from those previously established, again and again become evident. It is not at all excluded by the negative results mentioned earlier that nevertheless every clearly posed mathematical yes-or-no question is solvable in this way. For it is just this becoming evident of more and more new axioms on the basis of the meaning of the primitive notions that a machine cannot imitate"[40].

Como último punto, el Teorema de Gödel, aunque establece límites a la racionalidad formal, no lo hace de manera absoluta. El teorema le pone coto definitivo a la racionalidad formal que se circunscribe en sus procedimientos a sólo *un* sistema formal específico que supone completo, olvidando de esa manera toda posible intuición. Pero, el mismo Teorema sirve para confirmar que lo no deducible en un sistema puede ser deducible en otro *superior*, por

[40] Gödel, The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, documento electrónico.

lo que, por lo menos en algunas áreas límpidas del conocimiento como las matemáticas, si es cierto que la intuición siempre va un paso sobre lo formal, lo es también que, como Aquiles, lo formal acorta infinitamente la distancia aunque sin lograr nunca atrapar su presa. Esto es una prueba de la potencial capacidad del método deductivo cuando este se fundamenta en intuiciones para avanzar progresivamente.

E. sistemas formales no gödelianos y paraconsistentes.

Vamos a deternernos en la reseña de dos tipos de sistemas formales, que por sus particularidades parecen abrir, después de Gödel, un nuevo capítulo en la historia de los sistemas formales. Se trata de los sistemas No-Godelianos (Ng)[41] y los sistemas paraconsistentes (Pc)[42]. Cada uno de éstos tiene sus específicas propiedades que los hacen interesantes para nosotros. Sólo de unos de ellos, los Ng, se puede sostener que son consecuencias indirectas del teorema gödeliano. Los otros enmarcan su influencia en nuestro trabajo más bien en la relación general entre lógica y formalismos.

Sistemas no gödelianos: Con la aceptación del teorema de Gödel por parte de los matemáticos se inauguró una nueva era en la historia de la ciencia cuyo objeto de estudio son los sistemas formales. Desde ahora, había que aceptarse la incompletud absoluta de los sistemas a partir de cierto rango de complejidad, precisamente aquel rango necesario para la formalización de las matemáticas. Los resultados de Gödel fueron, sin embargo, tan espectaculares que no se dejó de preguntar si en realidad habría alguna posibilidad de "evadirlos", creando sistemas formales en los que sus argumentos no pudieran tener efecto.

En este marco nacen los sistemas Ng, sistemas formales que por medio de diferentes artilugios logran evadir la construcción gödeliana, aunque como veremos en aquellos que expondremos acá, no logran evadir los resultados generales de incompletud.

[41] Cfr, Ladriere, Pág 323.
[76] Cfr, Bobenrieth A., *Inconsistencias ¿por qué no?*, Bogotá, Tercer mundo, 1996.

El tipo de sistemas Ng más interesantes para nosotros son los sistemas de estratificación interna. Este tipo de sistemas ya el mismo procedimiento de Gödel los sugería al proponer una serie de nuevos sistemas a partir de Pm, los cuales tuvieran como nuevo axioma la proposición indecidible del sistema anterior, y cuando postula que la única manera de demostrar ciertas propiedades metateóricas de los sistemas es utilizando un nuevo sistema más poderoso, de forma que, en ambos casos tenemos una serie de sistemas superpuestos externamente unos sobre otros.

Los sistemas de estratificación interna son aquellos que pueden construirse para incluir en su propio seno una serie ordenada e indefinida de sistemas cada uno más poderoso que el otro, con nuevos niveles de demostración que permitan formalizar nuevas propiedades de un sistema inferior. Cada subsistema tiene nuevas posibilidades de construcción que amplían su alcance formal

Entre estos sistemas tenemos la Jerarquía de Implicaciones de Churh[43] que contiene como particularidad interesante una serie transfinita de operadores de implicación, cada uno con una *clase* de cuantificadores aplicados a diferentes elementos de un nivel-sistema.

Para construir la proposición **G** es necesario poder decidir en un momento determinado una función correspondiente al operador de implicación en un sistema (o a una serie numerable de éstos), pues esta función(que no, es otra que Dem) es la que nos muestra qué proposiciones son derivables en el sistema. Ahora bien, si existe un número indefinido de operadores de implicación y no hay un procedimiento efectivo que nos permita reconstruir cada uno de estos operadores, **G** será imposible de construir pues la función metateórica correspondiente no será capaz de representar unívoca y finitamente en el propio cálculo y así... ¿Qué nos garantiza que no se nos escapa un operador de la clase implicación a la que la proposición construida esté asociada?[44].

---

[42] Cfr, Ladriére, Pág 325.
[43] Cfr, Ibid, 326, 327.

En general, tenemos dos manera de evitar la construcción de **G**. La primera, construyendo sistemas que no contengan operadores necesarios para su construcción (cuantificadores, constante negación), pero restringiendo el alcance del sistema al paso. La segunda, recurriendo a una estratificación interna del sistema que, a la larga, sacrifica su unidad ya que éste nuevo sistema no es más que una serie de subsistemas apoyados unos sobre otros[45]; o recurriendo a una descomposición también estratificada de la noción de implicación formal (derivación) al interior del sistema.

Pero, aun así, en este tipo de sistemas se presenta la no completud, esta vez una completud de una clase diferente a la de Pm: estos sistemas tienen la propiedad de ser indefinidamente extensibles por lo que, cuando se llega a un nivel efectivo dado, siempre puede ser construido un nivel mayor ajeno a la efectividad planteada.

Los planteamientos de incompletud entonces siguen vigentes nunca será posible incluir en un solo sistema las potencialidades inferenciales del discurso "Dado un sistema cualquiera siempre es posible enriquecerlo, pero nunca se puede asegurar haber agotado el campo del discurso, ni siquiera haber alcanzado el límite de lo que es efectivamente formalizable"[46].

Al parecer esta es una conclusión poco esperanzadora en lo que respecta a las posibilidades de formalización, pero sólo en la medida en que estemos interesados en encontrar *un* sistema cerrado y unitario que permita formalizar de golpe todo un sector del conocimiento, o todo él. Es pues, una limitación que vale para el logicismo formal que pretende llegar a sistemas absolutos.

Sin embargo, si prescindimos de ese presupuesto, podemos pensar que la existencia de sistemas Ng de estratificación interna abre un nuevo capítulo en la historia de los sistemas formales, capítulo que puede llegar a servir para una tímida reconciliación entre lógica y formalismos.

---

[45] Cfr, Ibid, 330.

Sistemas lógicos paraconsistentes: Desde Aristóteles se esgrimen varios argumentos en contra de la posibilidad de negar en lógica el principio de no contradicción: decía que la realidad no es contradictoria, que es imposible desde el punto de vista psicológico que uno acepte una verdad y una falsedad sobre un mismo tema a la vez, que aquel que niega el principio de no contradicción lo presupone, etc.

Más contemporáneo es el "prejuicio" de trivialidad de los sistemas inconsistentes. Este es un prejuicio derivado de un principio del Pseudo-Escoto, el llamado *Ex Falso Sequitur Quodlibet* según el cual de dos premisas contradictorias se podría extraer cualquier proposición, por lo que la carga real de información que el sistema nos estaría dando sería nula en su totalidad pues un sistema que no distingue entre sus teoremas y aquellos que no lo son no puede afirmar nada sin negarlo al mismo tiempo.

Recordemos que según Hilbert contradicción significa inexistencia, con lo que tal principio vuelve a elevarse a un nivel ontológico (si es que se puede sostener algún tipo de ontología en el estricto formalismo hibertiano).

Hasta hace unas décadas se creía que evitar el principio de no contradicción en el ámbito de los sistemas formales era imposible. La aparición de las lógicas paraconsistentes refuta esta apreciación.

Las Pc nacen a partir de la pregunta de si era posible crear una lógica sin principio de no contradicción al igual que había sido posible crear una geometría sin el 5to postulado[47].

En 1963 el lógico brasileño Newton Da Costa crea el primer sistema formal sin principio de no contradicción, y sin el fenómeno de trivialización.

Desde ese momento la variedad de sistemas creados en este sentido sobrepasa cualquier enumeración. Sistemas que tienen la capacidad de formalizar la teoría de conjuntos y, a la vez, permiten la existencia de conjuntos con crácteristicas contradictorias como los de la clásica Paradoja de Russell. Sistemas donde existen espacios de indeterminación semántica

---

[46] Ibid, 330.
[47] Cfr, Bobenrieth, Pág 188.

para evaluar la verdad de algunas proposiciones, en algunos de estos sistemas no se puede decidir si la negación de una proposición será verdadera o falsa.

Se ha establecido inclusive la posibilidad de existencia de lógicas multideductivas[48] las cuales son sistemas lógicos que incluyen dos(o varios) subsistemas formales con tipos distintos de postulados y tipos distintos de deducción, cada uno de ellos puede acarrear la derivación de teoremas inconsistentes con las derivaciones de otro. El sistema general que enmarca los diferentes subsistemas estaría construido de tal forma que permitiera la subsistencia de estas contradicciones. Esto permitiría la formalización de áreas más extensas de conocimiento en ciencias que en conjunto pueden llegar a tener enunciados contradictorios. En la física contemporánea, por ejemplo, puede encontrarse múltiples hechos para los que estos sistemas pueden ser utilizados, como el caso de las dicotomias entre la mecánica clásica y la cuántica[49].

Sistemas que intentan englobar no sólo grados de verdad como las lógicas difusas sino grados de contradicción. Otros sistemas pretenden englobar cierto grado formalización de las leyes de la dialéctica hegeliana.

En este contexto, se puede llegar a pensar que las Pc pueden llegar a servir como una vía de acceso a ampliaciones de la idea de lógica formal, de manera tal que ésta pueda ampliar su rango de actuación sobre las inferencias en el lenguaje ordinario, habida cuenta que las argumentaciones (tal y como las entiende la teoría de la argumentación de Perelman) se sirven muchas veces de nociones contradictorias entre sí, y a la existencia de argumentos contrarios sobre una misma cosa.

Esto merece varias consideraciones aclaratorias:

La existencia de la lógica paraconsistente es, en primera medida (no la única), importante para nosotros pero en un sentido muy diferente al antes expuesto: ella muestra que en el campo de lo formal existe una libertad que no debemos por qué esperar que se refleje en la realidad del discurso. No es

---

[48] Ibid, 294.
[49] Cfr Ibid, 295.

evidente cómo estas nuevas lógicas deban interpretarse en modelos discursivos, aunque no dudamos que esa posibilidad exista en muchos casos.

Uno de los problemas de las Pc es que hay una aparente desconexión entre sus resultados y los *usos* del lenguaje que uno podría esperar que formalizen, pues su creación no tiene nada que ver con un análisis del lenguaje, sino en la aparición de nuevas técnicas formalísticas abstractas.

Por otro lado, las argumentaciones "utilizan" las contradicciones de modo diferente a estas lógicas.

La contradicción[50] es un *motor* de nuevas argumentaciones. En la medida en que una contradicción aparece la tarea de las argumentaciones posteriores es evitarla a toda costa. La diferencia con las Pc es que aquí la contradicción surge como un nuevo acontecimiento en el tiempo, y sólo *a posteriori* se elimina. Pero se elimina.

En cambio, las Pc intentan, no sólo hacer valer la contradicción de forma absoluta por medio de nuevos operadores lógicos y a modificación de os anteriores, sino *atraparla a priori* en una estructura formal artificial donde no es posible nuevas apariciones en el tiempo. Con esto cometen el error simétrico al de las lógicas donde el principio de no contradicción se respeta también *a priori*, con la consecuencia que hunden la noción de contradicción en el mismo estatismo que la argumentación, con su flexibilidad pragmática y temporal, intenta evitar.

[50] Perelman realiza la distinción entre contradicción e incompatibilidad la contradicción se restringe al ámbito de las demostraciones formales. La argumentación, en cambio, al no ser enteramente formal y estar relacionada con valores, acciones contingentes y normas de acción trata más bien de incompatibilidades. Éstas pueden ser ocasionadas no sólo por proposiciones aisladas sino por choques entre normas y sus aplicaciones, entre acciones encontradas, valores opuestos, etc. Mientras las contradicciones son eludidas *a priori* en los sistemas formales lógicos. Las argumentaciones están abiertas a las incompatibilidades en cualquier momento y el propósito de argumentos posteriores es *evitar* la incompatibilidad o suprimirla por medio de una elección, una distinción en el tiempo o una nueva interpretación de las nociones que generan la incompatibilidad. Nosotros damos la distinción como sobreentendida y nos limitamos ha hablar simplemente de contradicciones.

Sin embargo, las Pc ayudan a confirmar la fuerza potencial de las posibilidades de la forma ya que, por un paradigma aceptado por siglos en la lógica, se creía que un manejo coherente de contradicciones era imposible. Además, la existencia de lógicas Pc que pueden sistematizar contradicciones entre sistemas aislados (multideductivas), y de otras que pueden manejar "grados" de contradicción confirma que no se ha dicho la última palabra al respecto. La progresión geométrica con que se efectúan nuevos logros en el campo de lo formal, nos dejan abierta la posibilidad de un diálogo entre lo puramente formal, y los razonamientos no formales.

C. Lenguajes y formalismos.

En este aparte perseguimos dos objetivos: pretendemos penetrar en el trasfondo de la noción de sistema formal con el objetivo de dejar claro cuáles son las razones internas que llevan a los sistemas formales a tener limitaciones del tipo descrito aquí. Sostenemos entonces que todas las limitaciones de la idea de sistema formal, pilar de la lógica formal, son explicables a partir de la propia *estructura interna* del los formalismos, tanto las imitaciones tipo-Gödel, como las que surgen de la comparación entre inferencias realizadas dentro de un sistema formal y las realizadas dentro de un lenguaje ordinario.

Por otro lado, recordemos lo que sostuvimos se encontraba implícito en los argumentos de la lógica formal a partir de las ideas de Deaño: la lógica formal pretende que la forma lógica se encuentra, de alguna forma, inserta en el lenguaje ordinario, como si el lenguaje ordinario fuera, en su estructura profunda no siempre explícita, formal.

Nuestro segundo objetivo es, precisamente, mostrar que entre sistemas formales y lenguajes ordinarios hay diferencias insuperables y esenciales[51].

[51] Para esto nos serviremos de texto de Ladriére: "Limitaciones internas de os formalismos", Madrid, Tecnos, 1969, capítulo x. Muchas de estas consideraciones estarán ligadas a las relaciones entre los sistemas formales y modelos matemáticos. Hemos de prevenir sobre esto ya que nuestra motivación desde el principio ha sido la pregunta sobre la formalización de la lógica, entendida como la ciencia del estudio

No pretendo en lo que sigue dar pruebas contundentes y absolutas de ello, sólo deseo plantear juicios y problemas que, en este momento para nosotros, resultan decisivos.

En nuestro primer capítulo aprendimos que según Perelman las limitaciones de la lógica formal con respecto al discurso ordinario surgen "de un proceso de simplificación que únicamente es posible en condiciones determinadas, en el interior de sistemas aislados y circunscritos"[52] Aquí no estamos interesados tanto en explicar con detenimiento estas limitaciones que pueden ser derivadas de su trabajo de diferenciación entre deducción y argumentación sino en mostrar desde lo formal, qué se entiende por procesos de "simplificación" producidos al interior de los sistemas formales, con el fin de dejar claro que las limitaciones de esta especie son también consecuencia directa de la estructura interna de los sistemas formales, pilares de construcción de la lógica formal moderna.

La meta de la univocidad: Desde el racionalismo cartesiano la exigencia del rigor en el tratamiento de los pensamientos ha llevado a la creencia que tanto las ideas como las palabras que las nombran deben ser claras y distinguibles con precisión una de otras. En conjunto con esto, la tesis según la cual las palabras (y la lengua en general) son empleadas por los hombres para ser "signos de sus ideas" nos ha ofrecido una visión instrumentalista del lenguaje que nos lleva a concebir la idea de una supuesta imprecisión patológica del lenguaje para referenciar los pensamientos siempre vistos como límpidos y precisos, imprecisión que es necesario corregir o eludir. El lenguaje desde este punto de vista no es acción que edifica el pensamiento sino mero medio para registrarlo y transmitirlo.

La aspiración al rigor impulsó entonces el deseo de construcción de un lenguaje depurado, unívoco, que conectara cada término o palabra posible

---

de la inferencia *formalmente* válida. Suponemos entonces que hay cierto distanciamiento entre el objeto de la lógica (el razonamiento) y el de las matemáticas. Sin embargo veremos que, con los debidos ajustes, estas observaciones de carácter global son aplicables a modelos tan diversos como la parte del lenguaje natural utilizado para demostraciones lógicas.

con una determinada idea. Lo que se pretendía era la creación de un modelo de lenguaje que sea *isomorfo* con la realidad significativa de nuestras comunicaciones. Este proyecto pretendía eliminar toda ambigüedad del lenguaje y proporcionar así un instrumento eficaz para la difusión del conocimiento (recuérdese la *characteristica* de Leibniz). Sólo con la aparición de la lógica formal, con Boole y Frege (quien todavía conserva los vestigios del deseo de este lenguaje perfecto), se pensó haber encontrado un camino que parecía seguro para lograr la tan necesitada perfección y univocidad del lenguaje.

La lógica formal moderna, al pretender ser una concretización de aquello que hay de formal en el razonar humano con el lenguaje ordinario, nace, según se dice, a partir de este mismo lenguaje, para corregir su ambigüedad. Sin embargo, la lógica formal ya no utiliza como lenguaje matriz siquiera a un derivado, o a una abstracción, del lenguaje cotidiano, sino algo muy diferente: un cálculo simbólico organizado como sistema cerrado. Es precisamente al interior de los *sistemas formales*, donde la aspiración a la univocidad se lleva al límite y donde se descubren las inherentes limitaciones que esto presupone.

Lograr la univocidad en los lenguajes ordinarios supone, lo mismo que tuvo que suponer Leibniz con su proyecto de característica, que los términos de un lenguaje ordinario están sometidos a relaciones finitas y numerables. Supone también la premisa más fuerte que estos elementos del lenguaje ordinario pueden ser ordenados en series numéricas que permitan su identificación numérica.

Pero, en estos tipos de lenguaje, los enunciados se integran en un continuo de significaciones que sobrepasan el aspecto formal, no tenemos aquí una clara línea de demarcación entre lo sintáctico y lo semántico, más allá de esto inclusive, las propias palabras interactúan entre ellas y se modifican entre sí al acompañarse de otras, o al aparecer en diferentes contextos.

---

[52] Perelman, *Tratado de la argumentación*, Madrid, Gredos, 1994. Pág 303.

En una urdimbre de sentidos *internos* las palabras se unen entre sí por distintos procesos de resonancia semántica: toda significación de una palabra remite a otra significación de una palabra relacionada con la primera, pero distinta. No es posible en el lenguaje cotidiano nombrar un objeto o sentidos que permanezca aislado de sus objetos o sentidos vecinos. Al negar algo lo sacamos a la luz, y de alguna forma lo afirmamos; al nombrar un objeto hacemos que la conciencia recaiga también sobre los objetos con los que el primero esta relacionado. La elección de un término no deja de influir en los demás, aunque no se les nombre.

Estos pueden ser tomados como ejemplos de principios básicos del uso del lenguaje y de nuestra relación con él. Estas conexiones nada tienen que ver con la forma sino con el contenido significativo de las mismas palabras.

Nótese el parecido de este planteamiento con las llamadas *nociones confusas* descritas por Perelman. Las nociones confusas no pueden encerrarse en horizontes de significación precisos, se determinan en cambio por límites borrosos creados precisamente por esas interacciones sin las cuales sería imposible el desarrollo del pensamiento o, al menos, su evolución.

La naturaleza de las nociones confusas esta sujeta, como hemos visto al fenómeno de la interacción e inagotabilidad de sus interpretaciones, de esta forma el continuo de significaciones a las que remite un término se extiende más alla de sí mismo, jalonando en su seno a una "familia de palabras" con las cuales está unido[53] y que están relacionadas entre sí, no por un sistema rigido de relaciones o de derivaciones, sino por sus propios sentidos internos de significación y por el *uso* que se haga de ellas en un relacionado contexto.

El contraste entre las nociones univocas y las confusas es explicado por Perelman sosteniendo que una noción es unívoca "si su campo de aplicación esta totalmente determinado"[54]. Las nociones unívocas son entonces definidas desde un punto de vista pragmático: sólo en el momento en que se logra, o se supone, que todos los usuarios de un término lo interpretan de la

[53] Cfr, Perelman, Pág 242.
[54] Ibid, 213.

misma manera, sin dar lugar a equívocos "lo cual sólo es posible en un sistema formal del que se puede eliminar cualquier imprevisto"[55]

Pero, ¿por medio de qué proceso de simplificación formal se llega a la noción unívoca, si las nociones en los lenguajes ordinarios son confusas y sus interacciones infinitas?.

Esta es la respuesta que esperamos responder aquí basados en los análisis de Ladriére sobre la naturaleza de las limitaciones formales. Perelman, por su parte, trata de las consecuencias y condiciones prácticas de la univocidad, no habla directamente, ni esta interesado, en el *cómo* formal de estas limitaciones, pues su preocupación es más que todo práctica.

Para iniciar nuestro recorrido hemos de sostener que las interacciones de las que hablamos al tratar las nociones confusas en un lenguaje ordinario también existen, aunque en un menor grado, al interior de las ciencias exactas como las matemáticas. Desde esta perspectiva, Ladriére manifiesta que la fuente de las intuiciones matemáticas reside en una experiencia particular mediante la cual se tiene "acceso" al mundo de los objetos matemáticos[56]. El autor expone la manera como la realidad matemática es ofrecida a traves de evidencias mediatizadas por construcciones intuitivas donde se utilizan datos no formales como construcciones de figuras y la propia intuición perceptiva de la manipulación de los símbolos.

Estas evidencias no formales son, para Ladriére, los pilares de la construcción de nuevas teorias[57]. Los dominios matemáticos son "desvelados" no de forma inmediata, sino paso a paso. Cada nuevo objeto matemático abre nuevas perspectivas que no estaban insertas deductivamente en los objetos antes evidenciados, estando en capacidad de modificar el sentido de objetos anteriores que los precedieron, integrándolos

[55] Ibid, 213.

[56] Notemos la clara adherencia de Ladriére al platonismo como filosofía matemática, idea muy común después de los resultados del teorema de Gödel y que él mismo defendía.

[57] Fíjese, por ejemplo, en las consecuencias de las limitaciones acerca del problema de la decisión, lo que muestra que estas evidencias hacen parte también de la manera como se crean las *deducciones* mismas al *interior* de las teorías.

o extendiendo su importancia[58]. La propia noción de número natural presenta una especie de "vaguedad inherente" que nos permite, al igual que podemos ampliar los usos de una noción en el lenguaje, ampliar indefinidamente las propiedades y elementos pertenecientes a una case numérica dada.

Cuando se construye un sistema formal, sea para la formalización de la lógica, sea para la formalización de una rama de las matematicas, se cortan esas conexiones internas de sentido que unen los objetos o los términos de un lenguaje. En el caso de las palabras, la aspiración a la univocidad no es mas que el *recorte* de esas interacciones que nos permiten pasar de una significación a otra, o de una interpretación a otra.

Cómo se logra esto? En contraste con lo que sucede en un lenguaje ordinario, donde el significado de las palabras es impuesto por sus propias interacciones, por el contexto o por el estado de ánimo de los usuarios, en un sistema formal esa fuente del significado *ha sido proyectada hacia afuera y disecada en elementos discretos*: "el movimiento de la palabra se ha retirado, dejando los elementos del discurso valerse por sí mismos, en una dispersión que permite precisamente considerar *cada uno por su propia cuenta y someterlos a operaciones de numeración*"[59].

El término aquí no esta sujeto a ninguna interpretación contextual (con respecto a otros significados o con respecto a los usuarios) pues se la ha aislado de los demás. Aislado de esta manera puede dársele un significado convencional delimitado, y lograr transformarlo en unívoco.

Lo que distingue estructuralmente a un lenguaje natural de uno artificial es que en los artificiales-formales los términos (y las relaciones que se establecen entre ellos) están organizados en elementos *discretos* que pueden

[58] Recuérdese, por ejemplo, la manera como Cantor obtuvo su teoría de los números transfinitos a través de procedimientos de representación sobre diversos tipos de números. Recordemos aquí que aunque el procedimiento de representación es utilizado para demostrar o refutar isomorfismos formales, el mismo no es un procedimiento formal. El acto de comparación de una estructura sobre otra se parece más, como ya o sostuvimos en nuestro primer capítulo, a un procedimiento a medio camino entre los argumentos cuasi lógicos y la analogía.
[59] Ladriére, 359 subrayado nuestro.

representarse cada uno por *un* numero y así, someterse a representación por medio de la serie de los enteros. He aquí porqué es posible una traducción aritmética de los elementos de un sistema, traducción que es imposible con un lenguaje ordinario ya que las significaciones en interacción no se dejan determinar por procesos cuantitativos.

No se pueden determinar los *significados* de las palabras de forma que puedan ser contados y alineados biunívocamente con sus respectivos términos, los significados forman un continuo que desborda su representación en palabras determinadas. Mientras que los sistemas formales y sus símbolos son su propia instancia de concretización de su significación formal, las palabras sólo remiten a un significado que no se encuentra en ellas sino que depende de procesos sociales y de emociones subjetivas.

Lo que se produce entonces con una traducción formal del lenguaje queda suficientemente claro:

1. El corte de las conexiones internas de sentido entre las palabras tiene como efecto la identidad aislada de las palabras consigo mismas lo que de inmediato produce la "fragmentación" del lenguaje y la supresión del contexto en que nacen y se interpretan.
2. Este corte de las conexiones internas tiene también como resultado que los términos sean tematizados únicamente por su sola forma, ya que desde ahora, aislados, los significados ordinarios se quiebran, el contenido pasa a un segundo plano y es allí donde entra la ilusión de dotarlos de una significación nula.
3. La univocidad entonces sólo es posible restringiendo la significación, lo que termina con "la fragmentación del lenguaje y la renuncia a la idea de un lenguaje total"[60].

Esta última afirmación es una referencia directa a otra de las consecuencias de nuestro teorema. Recordemos que al final de capítulo dos hicimos una breve referencia a la idea positivista, proveniente en parte de Leibniz, de la posibilidad de un lenguaje universal formal para las ciencias que diera cuenta de todo el conocimiento al que podemos aspirar tener.

El teorema de Gödel muestra que *un* sistema formal total es imposible. En la medida en que se crea un sistema, el lenguaje significativo se quiebra y el sistema sólo puede dar cuenta de un número finito de significaciones aisladas. La incompletud no tarda en aparecer cuando se intenta englobar otro tipo de significaciones.

Con los lenguajes ordinarios este inconveniente no existe pues estos integran dentro de sí la posibilidad de transgredir sus propios límites en la medida en que sus nociones pueden extender sus significados y usos indefinidamente. Y esta posibilidad a su vez está dictada porque las relaciones que guardan las nociones entre ellas impiden que se les considere como elementos del lenguaje aislados entre sí.

<u>Los formalismos como sistemas cerrados y atemporales:</u> Esta segunda parte estará interesada en mostrar la manera en que el formalismo logra aislar los elementos que antes se hallaban insertos en una corriente de sentidos experiencial y los decanta en un sistema de relaciones formales, por lo que lo que hemos dicho anteriormente presupone lo que está por venir. Veremos que la univocidad es fruto de la forma como el sistema se aísla de la experiencia y, por tanto, del *tiempo*, es decir, de las intuiciones vívidas y contextualizadas de las que nacen las significaciones.

La idea de la completud de los *sistemas* en general ha sido reiterativa en toda la historia de la filosofía, no sólo es una exigencia que se hace a los sistemas formales de la lógica sino mas bien, a todo tipo de sistemas de carácter filosófico, todos los autores que pretenden hacer sistema, asumen a su vez que éstos deben ser, o son, englobantes de la realidad, de forma que, fuera de estos, no quede verdad ni falsedad no tematizada. Los grandes sistemas de los siglos pasados, en especial Leibniz, Kant, Hegel, pretenden

[60] Ladriere, 354.

cercar "Lo Real" en una estructura conceptual casi igual de artificial que cualquier sistema formalizado.

Como ya lo hemos estudiado, la completud semántica indica que el sistema formal absorbe totalmente la teoría o lenguaje de forma que se puede prescindir totalmente de estos para manipular al sistema. La idea central de la formalización reside en la *sustitución* de todas las experiencias e intuiciones posibles en un campo, por la configuración finita y *a priori* de una estructura autónoma creada *a posteriori* sobre una experiencia, pensamiento o argumentación.

Veamos cuáles son las consecuencias de la completud formal de ser esta posible:

Una de las primeras consecuencias de la formalización absoluta es la desaparición epistémica de la intuición primigenia que ha sido formalizada, "desde el momento en que el campo intuitivo queda absorbido en el sistema, éste no puede considerarse como mero instrumento. Al hacerse coextensivo con la realidad que trataría de conocer, no se distingue ya, finalmente, de la realidad misma."[61] Ninguna apelación al campo intuitivo como tal sería necesaria, y ningún dato o experiencia nuevo podría agregar información más de lo posible en las entrañas del formalismo en curso.

El sistema sería entonces *él mismo autónomo, no sólo con respecto a* la intuición y la experiencia, sino también amparado al interior de si mismo de los embates de la voluble y ambigua conciencia humana. Un sistema asi, "una vez construido proliferaría por sí mismo, descubriendo de forma progresiva todas las virtualidades inscritas en el campo de lo deductivo. aplicando uniformemente procedimientos establecidos de una vez para siempre, haría superflua toda iniciativa verdadera del pensamiento: ofrecería un cuadro operatorio en cuyo recinto todo problema podría encontrar solución de tipo mecánico. sería capaz, en fin, de reflejarse totalmente en sí mismo: suministraría todos los procedimientos necesarios para formular y resolver los problemas que pudiese formularse a su respecto y *sería, en si mismo, su propia metateoría*". Al ser idêntico con su propia metateoría se eliminaría toda distinción entre pensar *dentro* del sistema y pensar *acerca* del sistema por fuera de él[62], "el advenimiento de un sistema así realizaría la desintegración de la experiencia, el fin del diálogo incesante con el mundo que constituye la vida de la ciencia y el establecimiento de una totalidad cerrada, plena y silenciosa en la que no habría ya ni mundo ni ciencia, sino solamente el retorno eterno de lo homogéneo, el cambio perpetuo de lo idéntico a sí mismo" [63]

Los sistemas formales descritos de la manera anterior sólo pueden entenderse como una idea cuya meta final, lo sabemos desde Gödel, es inalcanzable. Un sistema formal que adquiera *a priori* la completud semántica de todo proceso discursivo que este proyecto requiere, es imposible.

Las razones de ello están relacionadas con la actitud de sistema frente a la corriente temporal en que están insertas todas las experiencias y vivencias humanas.

Al igual que en el pensamiento matemático, en todos los campos o teorías intuitivas, los conceptos y entramados de éstas son ganados y configurados a través de todo tipo de experiencias *a través del tiempo*. El conocimiento no se nos da como un todo, sino como una progresión de datos en el tiempo que se organizan y se modifican, a sí mismos o con nuestra ayuda.

---

[61] Ibid, 340.

[62] Ibid, 339. El englobamiento por parte del sistema no sólo afecta al objeto de conocimiento sino también al mismo sujeto. El sistema engloba todas las actividades del sujeto de tal forma que este esta igualmente *formalmente* en su seno. El sujeto mismo, por su parte, reclama para si y para su actividad intelectual una autonomía que obtiene al interior del sistema, pues éste es una realidad en la que su actividad puede adquirir sentido sin necesidad de procesos extraños al propio sistema. El sistema es una balsa que salva al sujeto y a su pensamiento de los embates de la indecisión y la difusidad de la experiencia. El sistema formal termina entonces por transformarse en un modelo objetivado del pensamiento, contradictoriamente separado de este mismo pensamiento y de toda otra cosa que no sea él, "nos encontramos pues ante la idea limite de un sistema perfectamente cerrado que no remite nada ni ningún concepto al exterior del sistema cortado de toda raíz y de todo horizonte, viviendo de su propia inteligibilidad, uniendo paradójicamente los caracteres de la cosa a los de la consciencia". (Ibid, 340).

[63] Ladriére 340.

En el caso de los lenguajes ordinarios estos elementos circunscritos a lo experiencial adquieren una nueva dimensión no compartida por las matemáticas, pues estos elementos son adquiridos también con la variedad de las interpretaciones intersubjetivas: todos hablamos un mismo idioma, pero no todos lo hemos adquirido sobre experiencias similares, y cada experiencia condiciona lo que significa en nosotros una expresión. No es solo que los términos de un lenguaje cotidiano estén sujetos a modificaciones que surgen de la posibilidad de nuevos datos a la luz de nuevas experiencias, sino que las experiencias múltiples ya se encuentran en el lenguaje a través de las variadas interpretaciones intersubjetivas de un mismo término.

En la medida que un lenguaje quiere ser completo, debe abrirse a estas experiencias. Y no sólo es que haya nuevas experiencias que modifiquen hechos, es que lo que entendemos por un "hecho" ha sido dado a través de experiencias intersubjetivas, y a cada cual según la suya.

Pero los sistemas formales intentan absorber la actividad en la que las nociones son dadas[64]. Este caso patente puede ser ejemplificado con la aparición de nuevos descubrimientos en la ciencia. Las definiciones *científicas* de nuevos hechos científicos tienden a aislarlos de su contexto de descubrimiento y ha dar de ellos definiciones que los transforman en tautologías o primitivos de teorías más extensas que las anteriores. "Una vez transformado en tautologia, la afirmación se integra en un sistema deductivo; puede ser considerada analítica y necesaria, y ya no parece estar vinculada a los azares de una generalización empírica"[65]

La experiencia entonces es abolida como vehículo y génesis del objeto que ha sido formalizado, el pensamiento "debe conseguir aislarlo de la experiencia vívida en la que se manifiesta y representarlo bajo una forma que solo conserve de la intuición datos completamente elementales,

[64] Cfr Ladriére, 340.
[65] Op cit, 337.

fácilmente controlables y verificables"[66]. El contenido intuitivo del objeto es eliminado para solo dejar su forma: las conexiones simplificadas que mantiene con otros objetos adyacentes a los que se les ha efectuado la misma operación, objetos que pueden ser permutados y administrados, según compartan vínculos formales isomorfos.

Estos elementos ahora se transforman, según Ladriére, en "actos tematizados": objetos a los que se les ha despojado de toda referencia a la experiencia que los encarna y en la cual nacieron.

Un acto tematizado es un *proceso* llevado a cabo por la conciencia que se proyecta al exterior de ésta y aplicándolo a objetos precisos y unívocos entre los cuales se pueden establecer operaciones determinadas e inmutables[67], la conciencia se transforma entonces en una cosa, y los objetos a los que se les aplica en una serie de "pseudocosas".

Son a estas pseudocosas (no a las nociones o términos que siempre están unidos a un contexto, a un sentido lleno de plasticidad) a las que se les administra la univocidad necesaria para la creación de sistemas formales. Separadas de su corriente experiencial las nociones o términos se tornan discretos, rígidos e inmutables, se les puede enumerar, contabilizar y, en último término, tratarlos como símbolos sin significado material. De esta forma un sistema formal se reduce a ser, de manera negativa, la congelación del dato experiencial que manifiesta un objeto al pensamiento, objeto que a su vez ha sido formalizado en el mismo acto de congelación.

Podemos resumir todo lo anterior sosteniendo que, mientras el lenguaje ordinario puede ser entendido como una experiencia, los sistemas formales ya no pueden ser entendidos como una, son mas bien experiencias cosificadas.

Si es cierto que los sistemas formales son autónomos con relación al lenguaje del que provienen también lo es, por lo dicho, que esta autonomía (o completud cuando se logra) está circunscrita al pedazo de experiencia del

[66] Ladriére, 339.
[67] Ibid, 359.

que provienen[68]. En el momento que el sistema pretende englobar una nueva experiencia, la incompletud hace su aparición, ya que el sistema, para lograr la formalización requerida, se ha cerrado a cualquier tipo de experiencia posterior.

En el caso del pensamiento matemático la conciencia, según Ladriére se expande a partir de tematizaciones progresivas que se manifiestan en las sucesiones numéricas: la conciencia enumera los términos y, luego de esto, es capaz de enmarcar lo enumerado en un marco formal posteriormente concebido[69], como hemos visto el marco formal creado esta condicionado por la sucesión lograda y no puede dar cuenta de una nueva enumeración.

Fíjese la simetría de este planteamiento de Ladriére en relación con la teoría de Perelman sobre las nociones unívocas: la rigidez de las nociones depende de la no existencia de una interpretación divergente. Esta nueva interpretación no compatible con las anteriores solo puede venir dada, por definición, en el seno de una *nueva experiencia*, en la inserción de la noción en un nuevo contexto o en un razonamiento antes no dispuesto[70].

Esta la *ratio* última de la limitación de los formalismos: su finitud temporal, su atemporalidad. A nivel práctico se manifiesta esta limitación con la posibilidad de que una nueva experiencia redirija la información que el sistema trata de contener hacia nuevas interpretaciones no tenidas en cuenta en su realización y que es incapaz de estructurar. El sistema de esta forma queda sumido en sus límites.

Pues siempre nos queda la potencialidad de ir tanto más allá de lo efectivamente construido en términos matemáticos como de toda experiencia particular en nuestra vida o en el lenguaje: los sistemas formales no están circunscritos al campo de lo *construible* sino al de lo efectivamente construido, aquello que está en el futuro, en cambio, no es

[68] Cfr, Ibid, 362.
[69] Recordemos que una noción definida claramente es aquella de la que se conocen *todos los casos de aplicación* y que invalida *a priori* todo uso posterior no previsto. Nótese que conocer todos los casos de aplicación de una regla o noción es estar en capacidad de enumerarlos y tener un *método de decisión definido* que nos informe en cada caso si nos encontramos ante una aplicación o frente a una no aplicación.
[70] Perelman, 219 y ss.

accesible a ningún sistema, no se les es dado y, por lo tanto, no pueden nunca alcanzar la totalidad de las manifestaciones de los objetos, en general.

Los lenguajes ordinarios, al contrario, están abiertos a la experiencia en primera medida porque, a través de ellos, podemos describir nuevas situaciones apoyándonos en la flexibilidad de sus nociones y en la evolución que nosotros mismos damos a sus significaciones. La diferencia con los sistemas formales es que aquí, nosotros somos los que generamos el movimiento de cambio.

Pero esto no quiere decir que los lenguajes ordinarios sean completos en el sentido que todo lo que tiene sentido pueda expresarse o *defenderse* en él. Nuevos términos o sentidos son necesarios para nuevas experiencias, y nuevas experiencias amplían y restringen el significado de los términos.

Mientras no existan esas nuevas experiencias *intersubjetivas* puede que no estemos siquiera en capacidad de defender experiencias que hemos adquirido *subjetivamente*: la no-completud es una carencia que se encuentra inclusive en los lenguajes ordinarios cuando los sometemos a la contingencia del tiempo y a la multiformidad de las experiencias humanas en la que, de hecho, están inscritos.

La diferencia es que, en los lenguajes ordinarios, existen esas interacciones entre términos y sentidos que nos permiten *a nosotros* manipular las palabras y crear nuevos modos de pensar *sin violar ninguna regla del juego del lenguaje y sin salirnos de él*, esto es lo que parece imposible dada la rigidez de los sistemas formalizados[71].

En los sistemas formales no es posible negar una cosa y afirmar luego su contraria bajo un nuevo contexto o una nueva información, precisamente por que dentro de ellos los conceptos quedan fijos, aislados de la corriente temporal que les dé vida. Los componentes del sistema se dan como

---

[71] Esto no quiere decir que los lenguajes naturales evolucionen por sí solos. Es claro que, aislados de sus usuarios, los naturales yacerían estáticos y muertos. Pero, sin que el lenguaje dicte esta posibilidad de evolución tal proceso sería imposible. Igualmente, no queda claro cómo puede construirse un sistema formal que pueda

experiencias extraídas de su corriente temporal y extrapoladas a un nuevo ámbito donde el tiempo en el cual fueron generadas no tiene sentido alguno.

La inaprensibilidad de la temporalidad es la que define estas limitaciones y, sea dicho, también las nuestras como humanos finitos que somos: "no existe un momento que sería en sí mismo la recapitulación de todos los demás, un presente que absorbiese en si mismo el pasado y el porvenir y que se dilatase a todas las dimensiones de la experiencia. El único presente que nos es accesible es un presente marcado de precariedad"[72].
En este sentido las limitaciones de los sistemas formales testimonian, por radicalización, nuestra propia finitud en el curso del tiempo.

A partir de aquí podemos aclarar la diferencia esencial que observamos (la incompatibilidad esencial que encontramos) entre lenguaje y forma lógica:
La forma lógica no surge sólo a través de un proceso de simplificación, sino a través de la supresión del fenómeno temporal que está inserto en la manera como se interconectan lenguaje ordinario y seres humanos. Los lenguajes ordinarios llevan el tiempo insertos en él, es parte de su génesis, de su uso y su riqueza. Pero, al lado tiempo no hay forma posible. La forma suprime el tiempo y se coloca, por tanto, en un ámbito donde los entramados del lenguaje ordinario desaparecen.
Sostener que la forma es una abstracción de lenguaje en la medida que se usa para realizar inferencias es suponer que hay segmentos del lenguaje que pueden escapar al tiempo, colocándose con ello *por fuera* del mismo lenguaje. Por fuera de nuestro uso de él.

Sólo la idea de *forma* imposibilita el poder captar el tiempo, pero este resultado también se ve reforzado cuando analizamos el otro componente de la idea de sistema formal: la noción de *sistema*.

---

automodificarse e interactuar con sus usuarios, procesos que los lenguajes ordinarios realizan perfectamente.
[72] Ladriére, 361.

La lógica formal no sólo pretende ser formal sino sistemática. El paradigma de organización axiomática en la lógica comenzó a surgir con Leibniz, vía Frege terminó materializándose con Russell. Un paradigma nacido en el seno de las matemáticas. Por medio de él se pretende recoger todas las posibilidades del discurso inferencial en una estructura finita y rígida de relaciones y principios. El sistema termina entonces de cerrar la imposibilidad de la forma para captar el tiempo ya que ésta se cierra *a priori* a cualquier intrusión exterior.

Pero los lenguajes naturales no son sistema ni pretenden serlo, las relaciones entre sus elementos varían con el tiempo y con el espacio. Sus elementos, y esto es importante, no son discretos, no pueden ser enumerados como si es posible hacerlo con los números enteros o con los elementos de un sistema formal.

CAPÍTULO V

Lógica, formalismo lógico y racionalidad

> Dios no ha sido tan mezquino con los hombres como para limitarse a hacerlos bípedos dejando a la lógica la labor de hacerlos racionales.
>
> Jhon Locke [paráfrasis]

> Todo hombre crea su dios.
>
> Innmanuel Kant

En los capítulos anteriores hemos analizado cómo la apuesta al rigor en los análisis lógicos nos llevo progresivamente a la idea de *sistema formal*: una construcción simbólica que moldeara en la univocidad sus elementos constitutivos y que describiera de manera tan exacta y sistemática sus operaciones hasta el punto de volverse él mismo única instancia de éstas, aislándose de todo aquello que pudiera encontrarse fuera de ellas: la experiencia, la intuición, la temporalidad y el lenguaje.

El objetivo para el cual fue vislumbrado este particular objeto era englobar las interacciones intuitivas de la teoría que le sirviera como interpretación o modelo. El sistema pretendería así, por medio de su aislamiento y nitidez formal, envolver todo o una parte del campo de la intuición transformándose en una plataforma que, retirada totalmente de la realidad intuitiva, al mismo tiempo, la explicara, hasta el punto de confundirse con ella.

En el caso concerniente a la ciencia de la lógica, esta "realidad" a la que nos referimos es la doctrina intuitiva de la inferencia, objeto de esta ciencia.

Como hemos visto, la importancia del teorema de Gödel desde este punto de vista, es exhibir las limitaciones de esta aspiración al mostrarnos cómo ningún sistema formal de cierta complejidad puede resolver todas las instancias de su interpretación.

La idea de un sistema tan comprehensivo que no se distinga de la realidad que intenta describir (así esta realidad lógica se restrinja a la supuesta existencia de inferencias "formales"), fue una falsa aspiración de los lógicos matemáticos, una especie de quimera impuesta por un falso ideal. Pues, en el estricto sentido en que se debe entender el término formal, el concepto general de una inferencia o implicación *formal* es, en lo que a esta lectura concierne, un inexistente, una confusión provocada por el hecho de no distinguir en principio, y por definición, entre los sistemas formales y los contenidos intuitivos lógicos que se encuentran a su base y a los que pretende operacionalizar[1]. El teorema de Gödel entonces marca un punto de escisión epistemológico entre sistemas formales e *interpretaciones posibles* de estos. Esto vale tanto para la matemática como para las inferencias en el lenguaje ordinario.

De esta manera hemos tratado de explicar *desde lo formal* la evidente existencia de inferencias *no formales* con una carga, que hemos supuesto desde el principio de nuestro trabajo, legitima de valor racional.

Pero, estos resultados pueden obtenerse de muchas variadas maneras.

En las próximas paginas presentaré el proyecto de lógica dialéctica de Henry Lefébvre[2], propuesto por el autor como forma de defensa de la lógica dialéctica, pero también como forma de reconciliación con la lógica formal clásica. De la teoría dialéctica necesitamos, por ahora, que nos muestre cómo podemos liberar con un fundamento *filosófico*, a la lógica de su encadenamiento, explícito o implícito, con la noción de sistema formal.

[1] Esta afirmación se fundamenta, como se ha visto, en la no convergencia de la verdad y la demostrabilidad. Como ya hemos observado, el calculo de predicados y el calculo lógico de primer orden son tanto sintáctica como semánticamente completos, esto quiere decir que en ellos verdad y demostrabilidad coinciden *localmente*, aun así, y obviando las limitaciones de la notación de los cálculos y las condiciones restrictivas de sus semánticas, si se considera la separación entre el sistema formal propiamente dicho y su modelo lógico, la diferencia entre lo verdadero y lo deducible puede seguir sosteniéndose en su sentido general.

[2] En Lefébvre, Henry, *lógica formal, lógica dialéctica*, México, Siglo veintiuno, 1984.

Pero, nuestro objetivo será más profundo pues lo que haremos más adelante será aplicar los resultados que encontremos en Lefébvre en consideraciones sobre la lógica en su papel como ciencia racional.

1.el proyecto de una lógica dialéctica en henry lefébvre

Según Lefébvre los nuevos estudios lógicos generados por la nueva lógica moderna (lógica simbólica o logística) provocan una ruptura, un desdoblamiento de la lógica. Este desdoblamiento progresivo generó un primer polo dirigido a la pura formalización y axiomatización, que terminó por considerarse como la verdadera ciencia lógica. Al mismo tiempo, todo lo que en lógica se consideraba como la aplicación práctica de los términos lógicos, y que por tal razón podía entenderse como lógica no pura, por estar en relación con los contenidos específicos de otras ciencias, quedó relegado a un segundo polo, como lógica aplicada (praxeología, teoría de la decisión, [argumentación]) [3]

Para Lefébvre esa ruptura corresponde a la escisión ontológica entre forma y contenido[4]. Por medio de este proceso de división progresivo, más amplio que la lógica misma, y gestado desde el movimiento sofístico hasta la lógica matemática moderna, la lógica formal fue aislada idealmente de todo contenido de la experiencia y el lenguaje reduciendo éstos hasta hacerlos desaparecer, quedando solo la forma pura y cerrada consigo misma, que termina desvaneciéndose en el vacío tautológico.

Esta desaparición progresiva es una manifestación de lo que Lefébvre entiende por metafísica[5]. La metafísica "reifica" la forma lógica a través de una identificación de sus principios mas generales y vacíos (principio de identidad, de no contradicción) con el ser absoluto o con el mismo pensamiento previamente substancializado[6]

[3] Todo lo que podia entenderse como lógica aplicada se consideró secundario para los estudios lógicos. Kant, por ejemplo, distingue entre lógica pura y lógica aplicada, que seria la aplicación de los principios lógicos a otras ciencias, en especial la psicología, caso tal versaría sobre esas mismas leyes lógicas pero sometida a los obstáculos de los prejuicios, los fenómenos contextuales y las inclinaciones. Según Kant, solo la primera de estas lógicas, la pura, merece el nombre de ciencia).
[4] Ibid, Pág.17-18.
[5] Ibid, 33-34.
[6] Ibid, 152.

Como ejemplo instructivo de la consumación de este ideal podemos valernos de la *lógica* de Kant.

Para Kant el entendimiento esta sujeto, como todo en la naturaleza, a reglas. Entre estas reglas están las que se distinguen por ser necesarias, que son precisamente las producidas por el mismo entendimiento. Es posible descubrir estas reglas reflexionando sobre el uso mismo de éste. Aquellas reglas son, sin embargo, independientes de la experiencia y no tienen en cuenta distinción alguna entre los objetos que sirven de contenido al entendimiento: son reglas formales del entendimiento que piensa: Reglas de la *lógica*.

Pero Kant va mas allá sosteniendo que la lógica formal es, a la vez, un *canon* del entendimiento por cuanto muestra las condiciones (siempre formales) del acuerdo del entendimiento consigo mismo. La lógica formal es la ciencia racional por excelencia, no sólo según la forma sino también por su *materia* pues, mágicamente diría Lefébvre, es la ciencia racional de la razón.

"De ahí que las reglas universales y necesarias del pensamiento en general no puedan concernir mas que a su sola *forma*, y en modo alguno a su *materia*. Por consiguiente, la ciencia que contiene estas reglas universales y necesarias es simplemente una ciencia de la forma de nuestro conocimiento o del pensamiento"[7],

Esto es lo que Kant entiende por lógica. Una ciencia de la forma, cuyas reglas terminan identificándose con las del mismo pensamiento en cuanto se toma a éste aisladamente. De esta forma, Kant termina fusionando los caracteres ideales de la noción ideal de sistema (formal) con el pensar mismo.

En lo que concierne a este asunto Lefébvre continua:

"Seria fácil, además, mostrar como muchos "pensadores" modernos oscilan entre estos dos postulados:

a)las implicaciones del funcionamiento del "espíritu" se "reducen" a la forma lógica, guia de la reflexión, que ordena y jalona los caminos del pensamiento.

[7] KANT, *lógica* [introducción].

B) estas implicaciones (cuyo carácter "transparente y vacío" es conocido) no dejan por ello de constituir por ello un sistema cerrado, una sustancialidad que permanece "inconsciente" en el funcionamiento real del pensamiento[8].

Lefébvre nos muestra la imagen de un pensamiento cosificado y restringido en sus propios límites formales. Según Lefébvre, un pensamiento descrito de esta manera, y que entienda la lógica formal en este sentido metafísico, pretenderá *derivar*, por medio de uno u otro procedimiento, el contenido actual del pensamiento de la pura forma, ignorando o restringiendo la aparición de los verdaderos contenidos en el pensamiento[9].

Pero, Lefébvre no sostiene, como ampliaremos más adelante, una negativa rotunda a la forma lógica, simplemente se opone a una interpretación "metafísica" de ésta: aislada de los contenidos, pero pretendiendo ser coextensiva con ellos, haciéndolos innecesarios y sumiendo al pensamiento en una rigidez formal patológica[10].

Hasta aquí Lefébvre nos ha mostrado desde un punto de vista filosófico el problema que ya analizamos con respecto a la incapacidad de os sistemas formales de englobar todos los contenidos intuitivos (materiales) de un saber y, a la vez, puede que sustente de forma más especulativa las críticas perelmanianas a la demostración. Pero ahora es cuando, liberados del *formalismo*, necesitamos colocar en su lugar a la *lógica formal* y a la lógica en general. Lefébvre mismo da un paso a este respecto:

La idea misma de una ciencia lógica, para Lefébvre, implica cierto proceso intelectual, un *movimiento* del pensamiento que desea aprehender contenidos, no

---

[8] Lefébvre, Pág 34.

[9] Sin embargo, estas criticas parecen adecuarse mas a Leibniz que a Kant. En efecto, Leibniz es el que desarrolla la tesis hobbesiana según la cual, "toda operación en el espíritu es un calculo". Pretende Leibniz, por otra parte, derivar todos los objetos (verdaderos)del pensamiento por medio de su calculo de razonamiento (calculus ratiocinator) transformando la lógica en un *ars inveniendi*. Estas pretensiones son ajenas a Kant quien ve en la forma lógica solo una "condición negativa" de la verdad. Sobre las críticas de Lefébvre que pueden aplicarse a kant. Cfr Lefébvre, Pág, 66.

[10] Ibid, 167.

es simplemente capturarlos mediante una forma, sino volver hacia ellos en la medida en que la lógica en su carácter formal, sin destruirlos, los anula.

La eliminación del contenido debe ser momentánea, lo cual hace necesario elaborar una lógica que explique el paso del entendimiento a través del vacío formal hacia las relaciones concretas y sus contenidos objetivos, insertos en las contradicciones sociales y materiales. Esta nueva lógica (y esto, como veremos, es de extrema importancia) no destruiría la forma lógica sino que la envolvería[11], colocándola en su lugar de acuerdo con la más o menos riqueza de los contenidos, los cuales siempre se presentan como imprescindibles. Para esto, Lefébvre considera necesario una lógica lo suficientemente flexible como para capturar esos contenidos que, de por sí, son "contradictorios" y *mediar* entre ellos y la forma lógica, una lógica que permita explorar los pasos graduales existentes entre forma y contenido. Este es el papel de la dialéctica[12].

El propósito último de Lefébvre es la creación de una lógica entendida no ya como una lógica de la forma sino como una lógica de contenidos, que permita captarlos para así elevarse dialécticamente hacia las formas (nuevas formas) ya reconciliadas con esos contenidos alcanzados.

Para esto es necesario la consumación de una *lógica concreta* cuya labor sea captar los contenidos para, a partir de allí, iniciar la ascensión hacia las abstracciones formales. Esta lógica concreta, según Lefébvre heredaría y superaría la técnica del diálogo y la discusión sofística: "La técnica del dialogo y la discusión había sido practicada por los sofistas, pero para hacer que las tesis chocaran y se destrozaran unas a otras(...) Arranquémosle, pues, a la sofística el arte de la discusión; veamos lo que puede hacer un *dialogo* libre y vivo, que se mueve entre las tesis contradictorias, pero al que un pensamiento seguro y leal dirige hacia la verdad"[13]

[11] Ibid, 100- 101

[12] Lefébvre llama "dialéctica", apoyado en Hegel "*al movimiento mas elevado de la razón, en el cual las apariencias separadas pasan la una a la otra... y se superan*". Cfr, Ibid, 197.

[13] Ibid, 197.

¿Acaso no es eso lo que se viene haciendo desde finales del s. XIX?

2. sobre la lógica y la distinción entre lógica y logística.

A partir de aquí, este texto parte de la premisa de que es posible realizar una lectura que identifique la *lógica concreta* de Lefébvre con la *lógica no formal* de Perelman como propuesta de rehabilitación de la lógica aristotélica en toda su amplitud y el poder epistémico del diálogo y la persuasión.[14]

Voy a apoyarme en esto para realizar lo que considero un esbozo de interpretación cruzada de la teoria de lógica dialéctica de Lefébvre y los resultados ya reseñados que obtuvo Perelman en su estudio sobre la teoría de la argumentación. Pretendo esbozar de allí explicaciones sobre la naturaleza de la lógica como ciencia racional. Nuestro objetivo también es, a partir de la clarificación de lo anterior, reconocer el papel del conc~~epto general de "forma"~~ en la lógica, un reconocimiento de ésta que pueda servir de instrumento de análisis en un rastreo sobre problemas filosóficos más comprehensivos, en la medida en que nuestra interpretación pretende tener una visión *global* de la lógica como ciencia y sus relaciones con la experiencia humana y la racionalidad.

Pero antes, trazaremos una distinción de términos que nos permita colocar en orden los datos que hemos adquirido a través del estudio de los sistemas formales, la argumentación y su relación con la lógica. La distinción esta motivada entre otras cosas por la diferencia observada entre los Sistemas Formales y la teoría lógica de la inferencia que le sirve de modelo.

La idea de sistema formal aislado como fuente (racional) de la lógica corresponde en Lefébvre a lo que él llama "formalismo": la transformación de la idea límite de sistema formal en un objeto reificado que se identifica totalmente con sus

[14] No es ajeno a esto el hecho de las fuertes relaciones entre Perelman y la filosofía dialéctica de, por ejemplo F. Gonseth y su Escuela de Zurich. Por otro lado, pueden mostrase que muchas de las intuiciones filosóficas con las que parte Perelman en el tratado se encuentran ya trazadas en el estudio de Lefébvre y no es claro cuanto pudo influenciar el proyecto de una lógica concreta en la elaboración *filosófica* de la "nueva retórica", sin embargo, en este texto por lo menos, nunca menciona Perelman una conexión con él, y hasta lo desperdicia en citas meramente ejemplificantes.

contenidos (completud formal), en otras palabras: la lógica como metafisica. Pero, los sistemas formales como objetos limite del pensamiento son un hecho notable y es nuestro interés no descuidar su importancia. Precisamente por esto, la principal labor de la distinción es metodológica: evitar la confusión entre la idea de forma o sistema formal, y el objeto especifico de la lógica.

Lógica y logistica: La lógica como ciencia racional siempre estuvo unida a un proyecto de "búsqueda" de la verdad, tanto si se interpreta esto como el anuncio de las reglas para guiar bien su razón (lógica de *port royal* y otros), tanto si se lo hace como *ars inveniendi* o método universal para su producción (Leibniz) o como condición negativa de ésta (Kant).

La lógica, aunque no ha tratado de la verdad, la ha llevado inserta en su seno, pues su labor siempre ha sido el análisis de esos actos de pensamiento por los cuales hemos querido fundamentarla.

Con Gödel hemos descubierto que lo verdadero y lo deducible no pueden coincidir. Que ni siquiera es posible construir la noción de verdad en el seno de un formalismo aislado. Esto es así porque la noción de verdad es una noción que por mínimo que se considere es *semántica*, y toda semántica está por fuera de los formalismos. Puede ser parte de ellos, pero solo como propiedad de sus interpretaciones.

La lógica desde su nacimiento ha sido una garantía de verdad en tanto esta viene de razones esgrimidas en el discurso. Estas inferencias (consecuencia esto de la imposibilidad de identificar verdad con deducibilidad) no pueden, ni en el discurso, ni en la lógica como la ciencia que las tiene por objeto, reducirse a lo formal.

Sin embargo, hemos observado en lo precedente cómo la lógica moderna utilizó la idea de un constructo formal como *criterio normativo* para la validación de las inferencias que debían ser consideradas "legitimas" o "racionales", esto se encuentra tanto en Leibniz como en Boole, Frege y Hilbert.

Esta lógica moderna, lógica simbólica, o *logística*, como hemos preferido llamarla, se aleja de esta forma del propósito originario de la lógica tradicional, el análisis del razonamiento o la inferencia discursiva, para determinarse por un ideal colocado acríticamente por encima del estudio de la inferencia: el ideal de formalización[15]. Un ideal cuyo resultado límite (en cuanto se haya separado de su proceso constructivo y aislado de toda otra cosa salvo de sí mismo) fue, la idea o concepto de sistema formal.

Esta logística ya no tiene su origen, aunque lo pretenda, en una "reflexión sobre pensamiento", sino en una oculta identificación de éste con las propiedades estructurales de los sistemas formales[16].

Lo que deseamos subrayar, pese a esto, es que el estudio de los sistemas formales en tanto descritos con precisión y limitados en su totalidad adquiere una importancia más que nitida.

Nuestra comprensión de la logística no es peyorativa, aunque sí restrictiva, la *logística* (la ciencia de estudio del estudio de los sistema formales) ya no es *lógica*, y lo que hay que evitar es su confusión con la comprensión de la ciencia cuyo objetivo es el estudio de la inferencia.

¿Qué queda, entonces, de la logística y su ideal de formalización matemática?

En general el término logística se ha utilizado, para abarcar las diferentes extensiones técnicas de la lógica llevados a cabo desde Boole o Frege[17] y que han tenido como objetivo la utilización de recursos simbólicos extraídos de diferentes áreas de la matemática como el álgebra para representar los resultados en el estudio del razonamiento. El *objetivo* de la logística es aumentar el nivel de rigurosidad y de formalización de los análisis lógicos[18]. Pero no solo esto, la

---

[15] Este ideal, a su vez, se suscribía a un más amplio proyecto racionalista en filosofía y en las ciencias en general, en este sentido el ideal de formalización coincide con la tentativa a rigorizar el pensamiento por medio del recurso a la evidencia por encima de otros medios intuitivos.

[16] Tengamos en mente aquí que, como tratamos de sostener en el capítulo II, la lógica moderna nace en el seno del estudio de las demostraciones matemáticas, no en el estudio del lenguaje ordinario. Este hecho es uno de nuestros argumentos para realizar la distinción propuesta.

[17] Tradicionalmente se coloca como fecha de nacimiento de la logística el año 1879, año de publicación de la *Begriffsschift* fregeana.

[18] Recordemos: en general la logística adopta la forma de cálculo. Se elimina todo recurso a las explicaciones intencionales y se le da primacía a las relaciones u operaciones sobre los conceptos, se utilizan notaciones algebráicas que facilitan la cuantificación de las constantes. Se realiza, por último, una analogía entre las constantes lógicas y las operaciones de la aritmética básica. El principal objetivo de los logísticos fue la reducción

logística rechaza de plano toda consideración intuitiva sobre los procesos efectivos de razonamiento en el lenguaje y se presta a la creación de una estructura de calculo artificial que pretende atrapar y reducir la noción de inferencia o consecuencia lógica representando este proceso de carácter semántico desde afuera, en un sistema autónomo que ya nada tiene que ver con la inferencia.

La logística entendida como la escena histórica de este proceso termina conduciendo a un aislamiento artificial de la forma y se presta así para una interpretación "metafísica"[19] del concepto de sistema formal, que la lleva a identificar las propiedades de éste con las propiedades de la lógica, del razonamiento por entero.

Todo esto pese a que el sistema formal es solo un artificio que operacionaliza y hace sólo más manipulable a su modelo de interpretación.

¿Cómo fue posible esto? No es nuestro objetivo hacer un estudio de aquellas causas que se insertan en contextos filosóficos, pero si resaltar su posibilitante lógico: Desde el punto de vista de la logística, las razones de esta confusión se encuentran en la no delimitación formal de su verdadero objeto: los sistemas formales, dictado por su ideal de formalización.

Vimos ya cómo la comprensión del método axiomático en la geometría de Euclides, al no ser formal en su totalidad, creó una ambigüedad entre la estructura axiomática y el modelo geométrico en su superficie. Esta identificación sola se quebró con el descubrimiento de la independencia del quinto postulado y la axiomatización a la manera de Hilbert. La lógica en particular vivió un proceso análogo: La idea de un sistema formal autónomo y aislado permaneció al principio borroso, impreciso y mezclado con connotaciones que estaban por fuera de su propia estructuración formal, confundiéndose con las intuiciones lógicas que pretendía formalizar hasta el punto que aquellas intuiciones parecieron adoptar las propiedades de la forma.

Sólo cuando este objeto fue construido formalmente a la perfección, lo que en nuestras palabras quiere decir *limitado* a la perfección (lo que, en estricto sentido, solo ocurre con la metamatemática de Hilbert y los resultados de Gödel), se le

---

del análisis matemático a estructuras lógicas, de paso, este objetivo llevó a una formalización de la lógica precedente y a su expansión.

pudo separar de su modelo al que estaba unido acríticamente. Era de esperarse que, mientras tanto, toda tentativa de confusión o identificación prosperara naturalmente. Para nosotros el teorema de Gödel tiene en la lógica (no sólo en matemáticas) el efecto análogo que tuvo la crisis del 5to postulado en geometría.

Hemos definido a la logística a través de su ideal de formalización, sin embargo, este ideal corre de forma autónoma a ella y aparece mucho antes de la presencia efectiva del concepto de sistema formal, como un limite del pensamiento racionalista.

La prehistoria de la logística corresponde a nuestro previo recorrido por la historia de la geometría y la lógica: Inicia con Euclides, quien con sus elementos colocó en el centro de la discusión la idea de un sistema de derivación de verdades geométricas riguroso y exacto. Mucho después Leibniz dió el próximo paso al ser el primero en vislumbrar la posibilidad de una *lengua característica* a la manera de calculo algebráico y es, a la vez, quien dicta muchas de las propiedades y usos posibles de los sistemas formales que mucho después se mostrarán fructíferos, de ahí partirá Frege quien muestra el primer sistema rigurosamente formalizado y completamente autónomo (el cálculo de predicados), el primer sistema logístico para la lógica, después Hilbert retomará los estudios sobre la independencia del quinto postulado y conseguirá trazar la línea divisoria entre lo lógico formal y sus diferentes interpretaciones o contenidos, ordenará las características formales de aquellos sistemas fundando, al mismo tiempo, su metateoría. Luego, Gödel iniciará un largo recorrido de limitaciones inherentes a los formalismos, con la consecuencia de la supresión de la idea de que es posible identificar sistemas formales con aquello a su base. De esta manera, para nosotros la logística, entendida como la *identificación* del estudio de los sistemas formales y el estudio de la sintaxis lingüística y las inferencias (la lógica) queda eliminada revocada. Debe ser redirigida hacia su *ideal* formal: los sistemas formales.

---

[19] Cfr Ibid, 180 y ss

Bien circunscrita a su objeto, la logística se identifica con lo que Hilbert consideraba *teoría de la deducción*[20], y desde este punto de vista adquiere todo su valor. La logística pretende explorar todo el conjunto de esa idealización matemática que son los cálculos formales, sus propiedades y, sobre todo, sus limitaciones.

El papel de la logística también esta en la creación de nuevos instrumentos, estructuras formales que puedan servir a ciencias como la cibernética, la geometría y, en general, todas las matemáticas, hasta la misma lógica, como veremos más adelante. Su radio de acción práctica es más amplio que el de la lógica en el sentido que la logística no se restringe al análisis de los sistemas que pretenden formalizar los patrones inferenciales en el lenguaje sino que investiga la posibilidad de los sistemas formales en general con independencia de sus aplicaciones o interpretaciones previas.

El diálogo entre lógica y logística está permitido, no es nuestra intención trazar límites precisos. La logística sigue manteniendo una conexión *practica* con la lógica, pues los axiomas o principios formales indemostrados de sus cálculos, deben someterse a elección no formal a partir de los diferentes usos posibles. En general, esta es una conexión que guarda la logística con toda las ciencias y con toda la experiencia humana.

Este dialogo, sin embargo, es viciado cuando no se adquiere clara conciencia de la distinción entre la pura formalidad y la lógica como ciencia de la inferencia, no de la deducción.

La lógica para nosotros es, simplemente, la ciencia de estudio de las inferencias en el lenguaje ordinario, es la ciencia de la racionalidad por excelencia desde e punto de vista que su objetivo es *describir*, *expandir* y, más adelante, *perfeccionar* esa racionalidad, en tanto es expresada en el discurso. En cambio, la historia de la logística ha sido una historia de la *limitación* y *liberación* de su objeto. Más

[20]Cfr, capítulo II. Sin embargo hay una sutil diferencia entre la teoría de la demostración y la logística. Para Hilbert la "teoría de la deducción" pretende estudiar los sistemas formales y sus propiedades en lo que concierne al discurso matemático. La logística tal como la entendemos no se restringe a la relación entre sistemas formales y matemáticas. Esta es la razón por la que no hemos utilizado el término "metamatemática" con el que Hilbert bautizaria a esta ciencia posteriormente.

adelante intentaremos justificar las afirmaciones hechas con respecto a la lógica, lo importante por ahora es diferenciarla de la logística.

Desde esta perspectiva, existe por lo menos un sentido en que los sistemas formales y la ciencia que los estudia van primero: En que nos deben mostrar qué no son. Esta capacidad formal de marcar sus propios límites es quizás lo que nos motiva a sostener de la logística que "ella misma escenifica en su propio seno la tensión entre lo puramente formal y lo que no lo es, entre lo que su análisis captura y aquello que por principio se le escapa"[21], palabras con las que Alfredo. Deaño desea describir a la lógica, pero que a nosotros nos parecen más adecuadas al espíritu de la logística.

3. sobre la logica como ciencia racional.

Consideraciones sobre la forma lógica.

Después de lo anterior no pensamos que sean necesarias sendas explicaciones para considerar lo que entendemos por lógica. La lógica nació de la necesidad de estudiar el proceso discursivo que llamamos inferencia o prueba, es decir el hecho de que sentadas ciertas cosas se puede, por medio de estas, derivar o asentar la "verdad" de otras.

Expusimos con anterioridad nuestro deseo de perseguir una comprensión de la lógica que fuera subsidiaria de la idea de lógica no formal de Perelman. Una lógica abierta tanto al lenguaje, como a los procesos pragmáticos entre sus usuarios. Que tratara igualmente de lo justo, lo verdadero y lo eficaz y que no intentara aislar el razonamiento en su formalidad desconociendo sus relaciones con la *praxis* y, en general, con la realidad contingente. Pero, es aquí donde hacemos valer nuestra interpretación cruzada de los textos de Perelman y Lefébvre, pues no pensamos que la idea general de lógica *formal* deba sacrificarse por entero.

La lógica es el estudio de la inferencia a secas. El atributo de lo formal, entendido como la reducción de la lógica a lenguaje formalizado, es restrictivo y sume a los estudios lógicos en el inmovilismo. Pero de esto no debe hacerse la idea que la "forma" deja de ser importante en lógica.

La lógica no puede desvanecerse en los procesos "informes" y efectivos del razonar, ignorando la forma, la estructura de éste. En este punto el papel de la lógica sigue siendo abstraer formas, "la lógica formal(...) carece de sentido si se toma fuera del contenido, pero adquiere todo su sentido y todo su alcance cuando nuestro pensamiento *descuida expresamente una gran parte de su contenido* y se mueve en el límite; en el punto exacto en el que el contenido se desvanece y en él solo queda la *forma*"[22]

Estas consideraciones de Lefébvre no se alejan para nada de la idea general de Perelman. Es útil recordar que, entre los diversos caminos metodológicos, Perelman elige la vía análoga a la del lógico que ordena "formas" del razonamiento al "caracterizar las diferentes estructuras argumentativas"[23].

El término "técnica" utilizado por Perelman para describir las estructuras argumentativas quizás ayude a ocultar el hecho que estas estructuras son también "formas", en ellas hay más que la pura eficacia argumentativa que el orador puede encontrar en su uso.

En la medida en que las formas deductivas de los lógicos formales son casos límite de argumentaciones, valdría la pena sostener también que las argumentaciones son "*formas lógicas*" cuyo enlace con los contenidos del lenguaje y la experiencia les impide encerrarse en cercos formalísticos absolutos.

Preciso esto para recordar (y sostener) la evidente idea de que también las técnicas argumentativas tienen un valor como principios racionales que legitiman el discurso, aunque ya no lo hagan con necesidad, pues su racionalidad ya no es intrínseca, no depende de ellos.

La técnica argumentativa no sólo es una técnica utilizada por el orador sino una estructura, una forma que habla, (al igual que, por dar un ejemplo, Kant suponía en su lógica) sobre una racionalidad que manifiesta. Son principios de

---

[21] Deaño, Alfredo, *introducción a la lógica formal,* Madrid, Alianza, 1986. Pg. 349.
[22] Lefébvre, 94.
[23] Perelman, Pág 41.
[24] Op cit, 153.

racionalidad del mismo modo que lo eran los principios formales de identidad y de no contradicción.

En efecto, en ambos casos el papel de la forma bien entendida es claro, la forma lógica permite al pensamiento establecer una coherencia consigo mismo. El pensamiento "no debe destruirse *en tanto que pensamiento,* es decir, transformarse en una serie de sucesión de afirmaciones sin ligazón, de sentimientos o de imágenes o de sensaciones, en una serie de *contraindicaciones inadvertidas*"[24]. El pensamiento debe permanecer *coherente* frente a las contradicciones e incompatibilidades, para esto se apoya en patrones, esquemas que lo alejen de la incompatibilidad, que le disminuyan su valor, la eliminen, la evadan o que la ignoren. Así, las técnicas argumentativas, entendidas como esas formas lógicas que ofrecen una apertura a la experiencia, a esos contenidos dialécticos de la *praxis,* siguen siendo, como sostiene Lefébvre, el comienzo metodológico del pensamiento y la razón[25].

Sin embargo, para nosotros, el estudio de las estructuras argumentativas ya no puede permitirse *normativizar* la razón, transformarse en un "canon" del entendimiento o brindar un substrato último del conocimiento racional[26]. Más en especial, ya no puede tomar un juicio normativo *a priori* sobre la conveniencia de las formas del razonamiento.

A la lógica no le compete ya dictar qué es lo racional en el discurso sino describir cómo se manifiesta esta racionalidad. Esto no nos debe indicar que la lógica como ciencia se deberia limitar a hacer una mera notación de las técnicas argumentativas sino que, muy al contrario, debe verlas como señales, *indicios* de algo que se encuentra a más profundidad.

La tarea de la lógica está en brindar una "historia de las formas, métodos e instrumentos generales del conocimiento"[27]. La lógica, según Lefébvre, es aquella que hace una descripción de las diferentes formas de razonamiento por medio de las cuales la ciencia construye sus conocimientos.

---

[25] Ibid,190.
[26] Cfr, Ibid, 38.
[27] Ibid, 63.

Pero el papel asignado a la lógica no es, únicamente, el de hacer una descripción histórica del conocimiento. La lógica en su sentido no formalista debe organizar esas formas o esquemas lógicos y mostrar sus enlaces más profundos, sus jerarquías implícitas, "La lógica concreta encontrará en las diferentes ciencias- es decir, en diferentes contenidos- unos movimientos del pensamiento y unas *formas* comparables, ya que no idénticas. [La lógica concreta debe] elucidar esos métodos, insertarlos en una perspectiva de conjunto del trabajo del pensamiento y de la actividad humanos"[28].

Este punto de vista debe esclarecer qué formas son utilizadas para fundamentar los diferentes discursos (políticos, jurídicos, filosóficos o científicos) y, a la vez, encontrar patrones comunes que muestren las maneras como el pensamiento humano construye su saber. Esta tarea no se limitará a observar la técnica, la mera forma argumentativa; eso sería dar un paso atrás a lo ya adelantado. La verdadera tarea es mostrar cómo esas formas se entrelazan con los contenidos de las diferentes ciencias y se transforman en *patrones jerarquizados*.

Las técnicas o formas argumentativas solas ya no tienen el orden estructurado de los sistemas, se colocan bajo el mismo plano del pensamiento. Solo los contenidos colocan estas nuevas formas lógicas en un *orden* analizable.

Con el mismo Lefébvre hemos analizado la posibilidad de una lógica que tenga como inicio lo concreto de la argumentación y a partir de allí vaya extendiendo gradualmente su análisis hasta procesos más abstractos, que no tiene por qué identificarse con la idea de formalismo.

Lo formal sólo ya es un salto sobre lo abstracto, es el limite de la abstracción tomada metafisicamente, independiente de lo concreto y de sus conexiones. Esto puede identificarse plenamente con la idea de Perelman de que la deducción es un caso especial idealizado de la argumentación. Lo que se afirma, puede que en ambos casos, no es tanto la destrucción de la forma en la lógica sino, que la eliminación del contenido en las estructuras lógicas no puede ser total so pena de caer en metafisica.

La idea de *forma* lógica en Lefébvre es rehabilitada como la ascensión *gradual* del entendimiento hacia estratos mas elevados de abstracción más o menos mezcladas con contenidos. Por lo que nuestro análisis lógico puede ir más allá del mero estudio de técnicas, o mejor, puede encontrar procesos de abstracción que, al introducir contenidos, permita jerarquías al interior de las técnicas, formas lógicas más elevadas que organicen la estructura misma como adquirimos o fundamentamos nuestros conocimientos. Cada estrato superior englobaría al anterior y permitiría una imagen más completa de un sistema de cosas, de un campo del pensamiento o una ciencia.

Sobre las posibilidades de la formalización.

Puede parecer paradójico que después de dedicarle sendas páginas a una crítica a la formalización en lógica nos permitamos ahora hablar sobre las posibilidades de la formalización.

Al iniciar los estudios lógicos que nos llevaron a proponer la realización de este trabajo teníamos una visión del formalismo que lo reducía a una configuración atípica y *patológica* de la racionalidad, un tumor simbólico que amenazaba con suprimir todo aquello de sano que existe en nuestra manera de pensar y argumentar. De hecho, esa era la manera como pretendíamos presentar el asunto en este trabajo. Pero, a medida que continuábamos pensando el tema, fuimos poco a poco cayendo en cuenta que el formalismo es también un producto del pensamiento, y que bien administrado y comprendido puede ayudar a nuestro propio entendimiento sobre lo lógico.

Para no entrar en incompatibilidades con la idea de formalización llamaré *esquematización* al proceso conjetural por el cual se intentaría acercar los argumentos a formalizaciones, teniendo en cuenta en el proceso los detalles que hacen cualitativamente diferentes a los argumentos del puro formalismo: vaguedad del lenguaje ordinario, interacción contenido/forma, temporalidad, entre muchos otros. La esquematización no tendría como objetivo servir de marco

[28] Ibid, 96.

racional para la escogencia pasiva de los mejores argumentos sino proporcionar un *instrumento* de análisis y *organización* de los mismos.

Puede sostenerse que la misma TA de Perelman parte de tesis incompatibles con el formalismo, por lo que nuestra conjetura estaria invalidada en principio. Trataremos de esbozar este pensamiento, resumir estas tesis de incompatibilidad para tratar de probar que esto no es totalmente así. Se pueden resumir estas tesis como sigue[29]:

1) El formalismo es un constructo artificial que es históricamente posterior al arte de argumentar. Es más, en la construcción de formalismos se debe justificar la escogencia de los axiomas indemostrados, y se tienen en cuenta otros argumentos no formales de tipo estético y pragmático. Jamás podremos liberarnos del lenguaje ordinario que es primero histórica y lógicamente. Él es el que escoge e interpreta al formalismo, y permite manipularlo. El lenguaje ordinario es el metalenguaje de metalenguajes, incluido él mismo.
2) De la regla de justicia, según la cual hay que tratar a los seres de la misma categoría esencial de manera análoga, puede derivarse el principio de identidad de los indiscernibles de Leibniz. Este último puramente formal, mientras que el otro genera ambigüedad en lo que respecta a qué es esencial en los objetos y cómo hay que tratarlos. Por lo que la identidad formal es el caso límite de la semejanza argumentativa: aquella semejanza totalmente determinada. Sin embargo, el paso del principio de identidad formal a la regla de justicia es imposible ya que no se tiene criterios extralógicos para detallar la semejanza. No hay pues manera de pasar del formalismo a la argumentación.
3) Los argumentos se juzgan con base no sólo en criterios formales sino también en lo que respecta al contenido. Una ley lógica en cambio es o no *válida universalmente* sin tener en cuenta el contenido, pero olvida que ciertos razonamientos pueden estar justificados según criterios contextuales o del objeto argumentado.

---

[29] Véase, por ejemplo, Gomez Adolfo L. ¿Se pueden formalizar los argumentos?. Conferencia.

4) Uno de los factores más importantes de la argumentación es el tiempo. Hasta ahora no hay ninguna lógica que pueda dar cuenta del tiempo de forma satisfactoria. Lo que hacen las lógicas temporales es cercar el tiempo en marcos formales tan rígidos como las lógicas que no tienen esa intención. Así mismo las lógicas deónticas y parecidas lo único que hacen es insertar ciertos ordenadores deónticos sujetos a reglas de transformación pero no nos ayudan a la *escogencia* de reglas y valores particulares.

Para nosotros ninguna de estas tesis es incompatible con la esquematización tal y como nosotros la planteamos. Estas tesis sólo afirma que *ningún formalismo puede reemplazar al lenguaje ordinario en lo que concierne a la producción de argumentaciones efectivas.* En últimas sólo van en contra de la forma en su aspecto metafísico tal y como lo entiende Lefébvre. Pero de lo anterior no se sigue que la traducción a la forma no sea posible en algunos casos.
Es posible derivar de lo argumentativo lo formal ya que no hay más en la formalización sino menos, lo formal es una reducción de indeterminación, un extracto, una eliminación de ambigüedad, una ascensión en la jerarquía de abstracciones. Puede objetarse que si bien esto es posible, el paso de lo formal a lo argumentativo ya no lo es, pues se olvidan diferencias en lo que respecta al contenido y a la situación argumentativa. Esto sería aceptable si quisiéramos reemplazar con lo formal lo argumentativo, pero éste, como ya sostuvimos, no sería nuestro objetivo, no queremos que lo formal *escoja* lógicamente por nosotros de manera pasiva en todas las posibilidades de nuestro discurso racional. No queremos reinstaurar la racionalidad formal en sus aspiraciones de dominación.

Estamos interesados más bien en buscar maneras de conciliar la forma con el contenido. Es decir, buscar, para cada contenido, estructuras formales que den cuenta de él. No nos preocupamos si las formas así encontradas son universalizables como principios lógicos.
Puede que la Argumentación, así en genérico, sea irreductible a lo formal, pero si los argumentos son o no reducible no parece tan evidente. Nuestra tesis en este punto es: Siempre hay alguna forma de reducir, por lo menos hasta cierto límite

una argumentación *particular* a un esquema de carácter formal. De esta forma se le aísla, se le diseca, pero se le puede estudiar en su relación *con el sistema de pensamiento que lo enuncia.*

Esto implica por lo menos el aceptar:

- Que el formalismo no es el espejo de la racionalidad, sino un simple instrumento de análisis y organización lógicos.
- Que ningún sistema formal puede dar cuenta de todos los procesos inferenciales de la razón, y tampoco de todos los detalles específicos de las argumentaciones. No hay un único sistema lógico que reduzca en su totalidad y para siempre todas las posibilidades de la argumentación racional humana. Sólo existen sistemas particulares que sirven de marco para inferencias tan formales como cerrado se pretenda el sistema de pensamiento en el cual ella está inserta.
- La esquematización es organizadora, no crea ni es una explicación epistémica del argumento esquematizado, pero permite organizar lo creado y desgranar descriptivamente sus conexiones epistémicas con otros sistemas o argumentos que quizás estén ocultos.
- En la medida en que la lógica como instrumento de prueba es puramente formalista no es racional, y en la medida que el formalismo es racional es simple ayuda de clasificación y de apertura de posibilidades de comprensión para la lógica.

Para llegar a concebir esta idea hemos partimos de la presunción que los nuevos métodos de formalización que existen en la actualidad pueden mostrar maneras más flexibles para organizar o entramar las estructuras argumentativas.

Un ejemplo muy llamativo de lo anterior puede ser la llamada *fuzzy set theory* de Lofti Zadeh[30] que, al analizar lo que los lingüistas llaman cercas semánticas, permite la creación de sistemas lógicos con valores de verdad graduales y con "inclusión de la vaguedad"[31]. Al parecer un sistema como el descrito ha sido ya propuesto por Georg Lakoff a partir de los trabajos de Zadeh. Según Deaño "en estos sistemas se reconoce la posibilidad de que haya enunciados que no tengan

[30] Deaño, 344 y ss.
[31] Ibid, 313.

un único valor de verdad, es decir, que haya enunciados que sean verdaderos en cierto sentido –en cierto contexto- y falsos en otro"[32].

Un enunciado de los anteriores sería "Francia es hexagonal". ¿Es este un enunciado falso o verdadero?. La respuesta esta ligada al contexto en el que se lo enuncia, si lo hacemos frente a un grupo de escolares poco versados en geografía el enunciado tendrá un valor aproximado a la verdad. Si lo hacemos frente a un grupo de expertos no sólo sería falso sino que caeríamos en el ridículo. Sin embargo la línea de demarcación entre lo razonable y el ridículo es gradual y depende de un contexto.

Un sistema de esta naturaleza, si es que en realidad es posible, tendría la doble ventaja de permitir la gradualidad formal que Lefébvre desea aplicar a la lógica y, a la vez, permitiría un diálogo más directo entre la forma lógica y uno de los elementos que parece ser, y en lo que a nuestra opinión se refiere es, más renuente a la formalización en la Teoría de la Argumentación: la idea de la situación argumentativa (todo argumento esta situado en un contexto sin el cual es imposible su evaluación).

Un estudio en este sentido no tendría que ser comprehensivo sino que puede limitarse a ciertas áreas de la argumentación. Sobre todo nos parece provocativo un estudio de la analogía a partir de una estructura que permita formalizar las llamadas cercas semánticas. Estos estudios tendrían el objetivo paralelo de exponer qué es describible en formas o esquemas argumentativos y qué no.

Pero aún queda la dimensión temporal como un obstáculo. Sólo cuando entra el tiempo encarnado en nuevas situaciones, nuevos argumentos y como modificador de sentidos estamos ante un cambio de fondo formal que invalida la traducción. El tiempo parece ser uno de los factores más reacios a la formalización, pero no pensamos que esto sea irremediable. Pensamos que pueden existir formas de instaurar el tiempo en algún tipo de sistema semiformal. Aunque no podríamos mostrar ningún ejemplo o esperanza en este sentido.

Sin embargo, pensamos que el desarrollo de sistemas Ng de estratificación interna puede ayudar a este propósito, sólo hay que diseñar un sistema que permita

[32] Ibid, 313.

contradicciones en el seno de dos sistemas inferiores, y que esta contradicción pueda ser eliminada en un sistema superior a través de distintos y *nuevos* procedimientos de implicación no existentes en los sistemas inferiores.

Por otro lado, se presenta el problema de la vaguedad de las nociones en el lenguaje ordinario.
En este sentido, la posibilidad de esquematizar argumentos concretos y circunscritos se da en la medida en que el argumento esté inscrito en un sistema de pensamiento que permita cierto límite a esta vaguedad.
La esquematización, entonces, no está pensada para ser aplicada a argumentos demasiado contextuales o cotidianos. Nos estamos dirigiendo a argumentos que se encuentran insertos en sistemas de pensamientos más o menos definidos y , en últimas su objetivo fina no es el argumento mismo sino la estructuración de sistema, su análisis y su relación con nuevos argumentos exteriores que lo confirman o tratan de invalidarlo.

El asunto de los nuevos argumentos es extremadamente delicado. En el momento que un nuevo razonamiento entra en juego nuestra lógica debería darnos la posibilidad de incluirlo en el sistema y sopesarlo, no para ayudarnos a la elección entre la aceptación o no del nuevo argumento, sino para analizarlo en su totalidad y permitirnos a nosotros examinar su coherencia con el sistema.
Esto supone también que argumentos contrarios o incompatibles deben poder, en algún momento, coexistir sin anular todo el sistema.

Los sistema semiformales creados de esta manera pueden servir, entre otras cosas, en la medida que muestran qué premisas están implícitas, cuáles de ellas se oponen entre sí y qué tesis son más coherentes con un sistema de pensamiento antes aceptado.
Así se entablaría un diálogo entre lo forma y lo argumentativo: la argumentación lógico retórica se encargaría de crear argumentos y someterlos a la adherencia de auditorios, la esquematización estaría encargada de una labor de análisis de las decisiones ya admitidas en el seno de los sistemas de pensamiento más o menos

aceptados. Bajo este marco se verá que se necesita una lógica semiformalizada que acepte que, de ciertas premisas se puede llegar a varias conclusiones, pero que sea capaz de identificar y precisar *a posteriori* qué presupuestos argumentativos inclinan, cada vez, la balanza a uno y otro favor. La elección que cada uno haga se haga conectaría lo lógico (el esquema o forma de argumentación) con la situación argumentativa de cada caso.

Los sistemas de pensamiento, ya sean jurídicos, filosóficos o científicos son necesarios para definir, concretizar, fortalecer socialmente; hacer tradición. Los sistemas de pensamiento son sólo tradición encarnada, y aquello que se le opone tiene la carga de la prueba. La tensión entre lo formal, lo sistemático, y lo argumentativo se encuentra así inserta en nuestros propios modos de pensamiento y organización sociales. Lo *formal* también esta en nuestro interior, por lo que ello debe volverse un instrumento más para una racionalidad que nosotros administramos.

En adelante describo los elementos que creo necesitan los formalismos y su estudio para llevar a cabo un programa de esta naturaleza: el diálogo entre forma y lógica ampliada:

1. No deben ser enteramente formalismos, deben estar en capacidad de articularse con estructuras y premisas de naturaleza semántica o pragmática.
2. Deben tratar *sea o no posible* de articular herramientas que puedan llegar a indicar sucesiones temporales, sobre todo en lo que concierne a la asimilación de nuevas inferencias incompatibles con las anteriores de sistema.
3. Su articulación interna debe ser *multivalente* (en sistemas de lógica difusa) y *multideductivo* (en sistemas de lógia paraconsistente)para que estén en la posibilidad de evaluar diversas graduaciones de verdad y diversos niveles de inferencias en distintos argumentos aunque estos puedan conducir a enunciados contradictorios.
4. Que haya un modo de estratificación y jerarquización entre los diversos estratos deductivos de los sistemas (en sistemas no gödelianos). Esto, tal vez,

ayude a buscar soluciones alternas al problema de articular sucesiones temporales.

5. Deben poder someterse en un momento dado a modificaciones *a posteriori* en lo que concierne a sus reglas de inferencias o a sus premisas, cada modificación representará la aparición de una nueva situación.

6. No hay un sistema pseudo formal que sea el resumen de la lógica o de la racionalidad, por lo que se deberán tratar con diversos sistemas según el caso particular.

7. Estos puntos suponen, por decirlo así, que la carga de la prueba está en los sistemas formales, éstos son lo que deben mostrarse como marcos adecuados para la formalización de argumentos. Por lo tanto, la ciencia de los sistemas formales debe separarse del análisis de los razonamientos matemáticos para acoger el estudio de las inferencias en el lenguaje por medio de un método abstractivo más que apriorístico.

8. A partir del hecho de que lo anterior sea posible (ya que esto no es más que la enunciación de un programa), implicaría eso un cambio de estatuto en la labor del lógico. Este no puede tener sus estudios como neutrales u objetivos, su labor desde ahora es activa, ya que el análisis de las argumentaciones y la escogencia de los sistemas y esquemas implica una elección que lo marca con el sello de la responsabilidad social sobre sus resultados.

Hay, todavía, un papel de la lógica en Lefébvre que no hemos analizado y que, sin embargo es muy importante. Después que la lógica ha descrito la historia de las formas, y las ha organizado y jerarquizado en el contexto del conocimiento humano, debe generar, en un segundo momento, una *teoría general de las formas* cuyo papel es "buscar el enlace entre las formas abstractas y las concretas, entre lo mental y lo social. Y la critica de todo metalenguaje. Incluido el que quiere pasar por filosofía, por desciframiento absoluto, por hermenéutica soberana"[33]. Hemos querido dejar nuestra interpretación de esta nueva labor para el final de nuestro texto.

lógica y racionalidad.

Manifestamos más atrás que los principios de la lógica siguen siendo principios racionales. Intencionalmente hemos postergado la explicación de esta afirmación para este momento. ¿De qué tipo de "racionalidad" hablamos?

Mas atrás hicimos una analogía entre los principios lógicos tradicionales y las técnicas argumentativas a la manera de Perelman, a partir de la tesis según la cual los principios deductivos son casos límite de argumentaciones. De nuevo apelaremos a esta analogía:

La lógica *formal* extraía su fuente de racionalidad de su apodicticidad, de la necesidad del juicio analítico que obliga a "todo ser de razón" a rendirse sin más ante la evidencia formal. Sin embargo, la lógica, entendida por fuera de su atadura con el formalismo aislado, no puede ya apelar a esa fuerza racional de lo necesario, a esa coacción de lo inevitable.

Esta nueva lógica se encuentra desacralizada. Ya no puede "guiar por buen camino a la razón", por lo menos no directamente, como lo hacia en tiempos pasados cuando el movimiento del pensamiento quedaba anulado por sus rígidos principios. Suponemos por tanto que hay una reubicación de esa racionalidad al interior de esta nueva lógica.

Valores?

El proyecto filosófico de Perelman inició con la posibilidad de una lógica de los fines, sin embargo, su estudio lo condujo no a una lógica de fines sino a una rehabilitación de la retórica antigua. En su característica ajena al formalismo, esta nueva teoría lógica no formal fundamentada en el arte retórico antiguo, no coloca criterios lógicos de qué fines son los correctos o incorrectos. Esto ocurre así pues las técnicas argumentativas se enmarcan en la normatividad fáctica de situaciones contingentes, contextos mas o menos difusos e inanalizables, donde la triple interacción pragmática de orador, argumento y auditorio destruyen toda objetividad, y donde lo emotivo y lo racional están entremezclados hasta el punto de hacerlos casi indistinguibles uno de otro.

[33] Lefébvre, 39.

Sin embargo, las formas lógicas, los esquemas argumentativos, deben tener una fuente de donde extraerían su aceptancia y su racionalidad. Sólo eso legitimaría un estudio como el descrito anteriormente fundamentado en los trabajos de Lefébvre, donde la lógica tiene una función en la descripción y organización del conocimiento humano, tanto en las ciencias particulares como en toda su generalidad.

¿Cómo es que la lógica puede darnos una descripción de lo racional a través del estudio de sus formas?. ¿ De dónde obtienen esta racionalidad las formas lógicas y qué permite llevar a las puertas de lo posible el estudio de la nueva forma lógica?. Aunque pensamos que la respuesta a esta pregunta de antemano no necesita ningún desvío, hemos preferido dar un rodeo explicativo sobre las posibles respuestas que se le pueden dar a ella desde el punto de vista de la T. A..

La racionalidad de las formas lógicas, como hemos dicho, no puede escudarse ya en la apelación a los juicios analíticos. Sin embargo, es posible que esa racionalidad se halle todavía al interior de las formas. De hecho, la lógica no puede, sino, analizar estas formas o esquemas. Ese es su ámbito de acción y su objeto.

Así, es posible que el argumento mismo siga considerándose racional por él mismo. Habría argumentos mas o menos racionales según la situación o el objeto a tratar, y esta racionalidad no vendría de nada excepto de estos.

Pero es premisa de la teoría de la argumentación de Perelman que, en principio toda argumentación es controvertible, que todo argumento tiene su contraargumento. Esto es también prueba de que, entre otras cosas, las solas técnicas argumentativas están sumidas como sistema en la total contradicción e incompatibilidad, y no es posible organizarlas a la manera de los viejos dispositivos axiomáticos formales.

Un argumento no se sostiene solo y las técnicas aisladas vuelven a ser de nuevo pasto verde para los catalogadores de herbario. Así, parece que, aunque las técnicas argumentativas son racionales en el sentido de ser algunas de ellas y en ciertos casos, legitimas para fundamentar la verdad, la adhesión, la elección o la acción (como se quiera), esta racionalidad no está en ellas mismas como objetos aislados. Un estudio lógico de la forma, como hemos dicho, tiene que tener en cuenta que, para organizarlas en sistema, se hace necesario entre otras cosas, insertarlas en los contenidos que pretenden fundamentar.

La otra posibilidad, aun más extraña, esta en que las formas lógicas obtengan su racionalidad, de los *motivos* del orador o en alguna intención moral de no utilizar sus argumentos a la medida de la erística, en su intención de no engañar al auditorio con ideas que él mismo no comparte, con "falsas" ideas o con vistas a una acción reprobable en la que no se siente realmente comprometido.

Para nosotros tratar de buscar algún tipo cualquiera de racionalidad *lógica* desde punto de vista del orador, en sus motivos o compromiso, es apelar a una instancia psíquica que no es analizable por esta ciencia, o por lo menos, no es objeto de la lógica hacerlo[34]

El orador siempre puede elegir tanto observar su argumento como una argumentación *eficaz* que persuadió a su auditorio sólo con vistas a moverlo hacia determinada acción, o ver sus argumentos como una descripción fiel de la verdad. Esto concierne a la imagen que el orador tenga de su propio argumento. En último término la pregunta por la *eficacia* de las argumentaciones, solo se puede responder, y con un nivel elevado aleatoriedad, desde la perspectiva de los objetivos del orador[35], cosa que ya presupone una interioridad psicológica privada. Nuestra idea al respecto es que la solución a la pregunta debe buscarse desde otra perspectiva. Como indicador de lo que buscamos hemos pensado en uno de los supuesto filosóficos de la teoría de Perelman.

La pregunta que nos hacemos es por la *novedad pragmática* que se efectúa en la lógica, a partir de la imposibilidad de apelar a la necesidad de las inferencias deductivas que aseguraban la racionalidad apodíctica de las lógicas basadas en

---

[34] Sobre si el compromiso del orador es cierto o no, o si tiene buenas intenciones o no, esto no puede ser objeto de la lógica sino de una ética ajena, por lo menos en sus objetivos, con la lógica. En este sentido, lo más cercano a la lógica seria, probablemente, una ética argumentativa de tipo procedimental, pero no nos ocupamos aquí del análisis de esta idea.

[35] Perelman, 97.

sistemas formales. Esta novedad no es otra que el *principio de responsabilidad.* Principio de la filosofia dialéctica de F. Gonseth al que Perelman se adhiere[36].

Según este principio la aceptación de una tesis por medio de la adhesión a sus argumentos implica que nos hemos comprometido en nuestro ser. Junto con ella estamos aceptando que no hay una relación causa-efecto que nos haga aceptarla pasivamente, sino que nuestra aceptancia de ella es consecuencia de nuestra responsabilidad.

Este principio sólo, para nosotros, no es fuente de racionalidad[37] (es sólo una implicación pragmática de aceptar la racionalidad de muestras decisiones sobre juicios no constrictivos), pero es un buen indicador de dónde debemos buscarla. Este es un principio racional que se encarna, no tanto en el orador, sino en los auditorios a los que éste se dirige y que deben tomar las decisiones con base en los criterios que creen correctos.

De hecho, pensamos que las formas lógicas sólo pueden ser medidas en su racionalidad de acuerdo al juicio que de ellas hacen los auditorios, su *adherencia* a ellas.

En este punto es adecuado recordar que Perelman construye su teoría de la argumentación de acuerdo al modelo de argumentación jurídica que él cree paradigmático. En este modelo el auditorio hace el papel análogo al del *juez.*

Desde este punto de vista es posible sostener que la racionalidad de los diferentes argumentos esta dada por el juzgamiento que de ellos hacen los diferentes auditorios, por lo que sólo a través de la adhesión (juicio) del auditorio podemos hacernos a una idea de la racionalidad (del lugar que ocupan en la "estructura del pensamiento" de una sociedad o de un grupo científico o filosófico) de las formas argumentativas. A la vez, sólo a través de las estructuras argumentativas aceptadas por tal o cual auditorio nos podemos hacer a una idea de aquello que éstos tienen por racional.

---

36 Gonzales Bedoya J. Prólogo al "Tratado de la argumentación" de Perelman. Pág 23.

37 Pues, ¿no puede decirse acaso que, de hecho, también algunas de las *argumentaciones* que rechazamos también las rechazamos con el argumento de no cargar con la responsabilidad de nuestros juicios al respecto?.

Esto, que es tanto, y tan poco a la vez, en contraste con el pasado racional de la lógica, es todo lo que creemos que nos queda. El problema del formalismo lógico fue el pretender hacer estudio normativo y aislado de la forma lógica. Con la bandera de la forma analítica como marca registrada de lo racional se eliminó de plano toda apelación al, y no digamos hasta el concepto de, auditorio[38].

La técnica argumentativa, su forma aislada, entonces quedaba suelta por allí, libre de jueces que se le opusieran y transformada en una pura técnica para fundamentar cualquier noción o propósito al defenderlo con apodicticidad, validez infinita y eficacia *a priori*, imponiendo y liberando a la vez a la acción.

Sólo con la apelación al auditorio como *juez activo* se puede introducir de nuevo un artículo de racionalidad en la lógica.

Esta idea a nosotros nos parece manifiesta en los resultados de Perelman. Sin embargo, aunque Perelman no desfallece sosteniendo al auditorio como punto de llegada (y de partida en la medida que debe existir una adaptación previa, un contacto intelectual con él) de cualquier argumentación, pensamos que el estilo y metodología con el que elaboró su Tratado favorece la perspectiva del orador sobre la del auditorio, lo que vela, aunque no oculta, la importancia de este como regulador normativo de la argumentación.

Nuestra visión implica, alejarnos de la preeminencia del orador y ver a los auditorios no como una simple construcción de éste, sino como verdaderamente son: auditorios efectivos circunscritos en contextos evaluativos existentes.

La tarea de la lógica seria entonces tomar los discursos a los que se adhieren las diferentes ciencias y analizarlos tratando de buscar estructuras o formas argumentativas que sostengan el discurso racional de las ciencias, patrones de argumentación (interacciones de formas y contenidos) que sean favorecidos por los diferentes auditorios, para así establecer jerarquías entre las formas, y *patrones* de generalidad formal que enlacen los diferentes discursos de las ciencias. La interacción entre formas y contenidos es gradual, por lo que se esperaría cada vez

[38] Lo que, en últimas, solo se logra con la identificación del argumento formal con el argumento eficaz o válido para el del Auditorio Universal: la abstracción de todos los hombres dotados de razón en un momento histórico concreto.

más ascender en grados de formalidad mas elevados y generales que permitan reconstruir una racionalidad que se está haciendo explícita a través del discurso. La teoria de los lugares y su relación con los espíritus clásico y romantico, que Perelman describe en capítulo I de la segunda parte del Tratado es, para nosotros, un ejemplo "en bruto" de lo anterior. Es, en especial, en esta parte del tratado donde Perelman deja abierta la posibilidad de un estudio de este tipo.

Desde este punto de vista, el mayor obstáculo que encontramos para estas consideraciones es la oposición inserta en el "Tratado" de Perelman entre *eficacia* y *validez*. Entre una argumentación eficaz que persuade estratégicamente, y una argumentación valida de manera racional. Esta pareja de términos no permite apreciar en su nitidez el estatuto del auditorio como ente activo en el juzgamiento de los argumentos. Nuestra idea aquí es que ninguna de las dos nociones puede sostenerse, y menos aun su oposición.

En efecto, Perelman retoma la idea de *evidencia racional*, la cual aparece "al mismo tiempo, como la fuerza ante la cual todo espíritu normal *no puede menos que ceder* y como *signo de verdad* de lo que se impone porque es obvio"[39] y efectúa sobre ella una disociación que escinde el término en dos nociones separadas, lo *eficaz* (psicológico) aquello que causa adhesión y lo *valido* (racional) aquello que debe causarla. Pues, "nada nos permite juzgar *a priori* que son proporcionales los grados de adhesión [eficacia] a una tesis con su probabilidad [validez], ni tampoco identificar evidencia y verdad"[40].

Mientras que Pascal piensa que la evidencia enlaza lo psicológico con lo lógico, lo que hace Leibniz, en últimas, al pensar que todo razonamiento de nuestro espíritu es un calculo, es eliminar lo psicológico, en favor de lo lógico, asi "no habrá ya necesidad de mas disputas entre dos filósofos que entre dos contabilistas. Bastará que tengan con qué escribir, que se sienten frente a sus máquinas de calculo, que tengan la colaboración de un amigo si lo desean y que se digan <calculemos> "[41].

Esta disociación no se da a gratuidad sino que, para Perelman, determina la misma posibilidad del estudio de la argumentación: "lo evidente es

[39] Ibid, 33- 34. Subrayado nuestro.
[40] Ibid, 35.

simultáneamente eficaz y valido, convence porque debe convencer. En nombre de lo evidente, convertido en el criterio de la válido, se descalificará *toda argumentación*, puesto que se revela eficaz sin proporcionar, sin embargo, una autentica prueba y, por tanto, sólo puede depender de la psicología y no de la lógica, ni siquiera en un sentido amplio de la palabra"[42].

Perelman, al romper esta asociación vuelve a colocar en la arena filosófica la perspectiva psicologista en la lógica, pero al caro precio de oponer o separar, de nuevo, metodológicamente (y en lo que a cuestión de las nociones descritas se refiere), lo psicológico de lo epistemológico.

Pese a esta técnica tan "eficaz" pensamos que esta oposición es un presupuesto metodológico innecesario en la elaboración de una teoría *filosófica* de la de la lógica. De hecho, y limitándonos al Tratado, no encontramos ninguna prueba de que, en realidad, Perelman la sostuviera filosóficamente, sólo aparece como una técnica mas utilizada por el juicio del auditorio para descalificar un discurso que, de hecho, no ha cumplido su cometido[43], o cuando se duda de la integridad moral del orador (en el caso de la descalificación por procedimiento).

Al describir Perelman, como ya hemos expresado, las estructuras argumentativas como "*técnicas*" o como "*medios* discursivos" [44] pensamos que posibilita y confirma de antemano, tal vez sin querer, al interior de su teoría, la oposición entre eficacia y validez. Puede que esto sea un residuo nocional de su anterior adhesión al positivismo jurídico.

El uso de estas disociaciones desencantadoras genera una tensión entre la descalificación (y visión) de los argumentos como meros procedimientos erísticos, eficaces para mover a la acción a un auditorio *pasivo*, y la idea filosófica del poder epistemológico de los mismos al poder ser juzgados en acuerdo por los auditorios.

Si nos despojamos de ese lastre, si vemos la oposición como *superada* (esto no quiere decir, identificadas de nuevo las nociones) y reconocemos, como principio, la racionalidad de los procesos argumentación, podemos empezar a observar estas técnicas en su valor como "formas" lógicas, en el sentido descrito con anterioridad.

[41] la logique de Leibniz, p 98, Citado por Campos. pág 674.
[42] Ibid, 705.
[43] Cfr Ibid, 703.
[44] Ibid, 39.

En general, la idea sostenida aquí es que el auditorio es el que causa la ruptura de todos los conceptos que amenazan con la disolución en la irracionalidad a las técnicas argumentativas. El auditorio es el que rompe la relatividad propia de la idea de los *dissoi logoi*: Todo es argumentable, en principio, pero no todo argumento o tesis convence al "juicio estricto" del auditorio. Por otro lado, el que se "inmuniza" no es el argumento contrario, sino el auditorio al que se intenta dirigir una réplica sobre algo que ya ha aceptado con anterioridad. Esa inmunización, es cierto, se sostiene argumentativamente en la medida en que los argumentos se insertan en un sistema que los consolida, pero igual, es el sujeto el que juzga a solidez de sistema con base en sus propios juicios.

Situar la medida de racionalidad de las formas lógicas en el juicio del auditorio puede parecer trivial e incluso se puede sostener que si la fuente de racionalidad se encuentra en los auditorios no se trata, de ninguna manera, de racionalidad alguna. Pero no pensamos que la lógica deba preocuparse por esto. La lógica no debe, para nosotros personalmente, dictar lo racional sino explicarlo, organizarlo, volverlo sistema (aunque no en el sentido formal del término) y esto sólo lo logra cuando estructura los discursos a los que se adhieren los distintos auditorios, las distintas ciencias, colocando en interacción las diferentes formas o estructuras argumentativas y tratando de encontrar cómo se encadenan y jerarquizan entre ellos cuando se los dota de los contenidos de las ciencias o teorías[45].

A la luz de un estudio como el descrito con anterioridad, es que entendemos la importancia de la teoría de la *fuerza de los argumentos* que Perelman postula

[45] Esta idea no esta determinada como en psicologia o sociologia experimental en donde "se pondrian a prueba diferentes argumentaciones ante auditorios, lo suficientemente bien conocidos para que se pudiera, a partir de estas experiencias, sacar conclusiones de cierta generalidad" [Ibid, 41], conclusiones que servirian, en ultimo término, para el estudio psicosocial de los auditorios y el modo en que son afectados por los argumentos. Esto seria, sin duda, diluir completamente la lógica en la sociología.
La lógica como ciencia tiene unos objetos más específicos que son las estructuras argumentativas expresadas en el discurso y a ellas debe limitarse. El objetivo, en cambio, sería tomar los argumentos admitidos como medida cualitativa de racionalidad de los auditorios a los que están adheridos y, a partir de esta premisa, organizar y estructurar en "sistema" los presupuestos del conocimiento humano en un momento o lugar determinados.

como instrumento del orador para medir la eficacia de éstos. Nosotros, en cambio, vemos la importancia de esta teoría como un estudio indicativo de qué tipos de formas argumentativas están en un nivel más abstracto en el encadenamiento de los discursos de las ciencias[46].

El contenido normativo que Perelman describe que es atribuible a la noción de fuerza de un argumento, se encuentra según él, en el principio de justicia, el cual, a su vez, no es mas que una vestidura normativa del principio de inercia psicológica y social.

Recordemos que este principio sirve de umbral estabilizador que regula el horizonte de lo admitido y lo racional en un momento histórico de una tradición o de una sociedad y de los argumentos que son "paradigma" del acuerdo en las diferentes ciencias: los principios axiomáticos de las teorías y los principios primeros de toda ciencia son sólo encarnaciones rígidas de aquel[47]. Así, por medio de un estudio de la fuerza de los argumentos es posible el análisis sistemático de los diferentes argumentos y cuáles de ellos son motivo de racionalidad en la adhesión de los diferentes auditorios (políticos, jurídicos, científicos o filosóficos).

Por ultimo, una analogía mas entre el estudio de Perelman y el de Lefèbvre, que puede ampliar metafóricamente el análisis efectuado hasta ahora, es la siguiente: la relación entre esta fuerza de inercia de los argumentos admitidos y los argumentos que incitan al cambio es una relación de oposición, una oposición que se da, igualmente, a través de otras estructuras argumentativas, una relación de oposición que por tanto es argumentativa ella misma, d*ialéctica*. Aunque, también encontramos esa fuerza que intenta salvar la contradicción (incompatibilidad) de los argumentos por medio de un acuerdo (*superación*[48]).

[46] La teoría de las fuerzas de los argumentos cobra importancia cuando se entiende, también, que la adhesión de los auditorios es variable e imposible de "medir" directamente. Aquí vale recordar que la lógica ve los argumentos como *señales* de una racionalidad presente en los auditorios que se adhieren efectivamente a ellas, pero nunca podrá analizar la adhesión misma del auditorio, cuestión que se le escapa para ser motivo de preguntas psicológicas, no lógicas.

[47] Ibid, 177-178.

[48] Cfr, Lefébvre 265 y ss.

Al analizar los dos o, más bien, los tres: el empuje argumentativo de la inercia, el del cambio social y el del acuerdo que supera, podemos tal vez darnos una imagen más amplia y compleja de la racionalidad que incluya también la negación de lo racional, el desacuerdo y la falsedad.

la lógica como ciencia critica.

Hasta aquí nos hemos limitado a sostener que el principal papel de la lógica es descriptivo. Esto no debe entenderse como si lo descriptivo y lo valorativo estuvieran para nosotros escindidos.

También en lo descriptivo esta lo valorativo, y lo normativo. La lógica esta hecha por los lógicos, y cada cual es medida de todas sus cosas. Cada uno y cada época con distintos compromisos intelectuales o, inclusive, compromisos más profundos. Pero esto nunca ha sido dificultad para ninguna ciencia, sea cual sea su terreno. Si es cierto que no hay una línea divisoria entre los juicios de hecho y los de valor, también es cierto que estos dos juicios no coinciden en su totalidad en nuestras pretensiones discursivas.

Sin embargo, no hay que despreciar el papel de la lógica como fuente de riquezas normativas, es aquí donde recordamos que para Lefébvre la ultima labor de la lógica es constituir una *teoría general de las formas* que buscará "el enlace entre las formas abstractas y las concretas, entre lo mental y lo social. Y la critica de todo metalenguaje. Incluido el que quiere pasar por filosofía, por desciframiento absoluto, por hermenéutica soberana"[49]

El papel de la lógica esta entonces en transformarse en una ciencia *critica*. Es aquí, en segundo lugar, donde la labor de la lógica se vuelve normativa. Esto es precisamente lo que realiza Perelman desde un punto de vista filosófico al criticar el concepto de razón cartesiana[50] que imperó en lógica y filosofía por tantos siglos, o lo que podemos hacer nosotros cuando tomamos la imagen de lo racional presente en la lógica de Perelman para criticar los axiomas racionales de las diferentes filosofías (tanto las fundacionistas como las regresivas, para utilizar

[49] Ibid, 39.
[50] Op cit, 33.

216

terminología del propio Perelman), por no estar a punto con nuestro nuevo concepto de razón.

Pero aun esta labor se vuelve incomprensible sino parte de un análisis previo de la racionalidad. Solo así se puede mostrar cuándo no hay un "enlace entre las formas abstractas y las formas concretas", cuándo el encadenamiento de formas no esta sostenido por un verdadero acuerdo (filosófico o político), es decir, por el juicio de un auditorio que le dicte sentido racional a la forma.

Esto nos lleva a pensar que el papel normativo de la lógica puede (y, quizás, debe) ser entendido como una revisión de aquello que se *tenia* por racional, pero que ya no da cuenta de los verdaderos enlaces lógicos encontrados entre *forma* argumentativa y *contenido social*: los auditorios de las ciencias, filosofías y políticas, y su adhesión gradual[51]

Desde esta perspectiva, afirmamos que sólo es posible cambiar de lógica, cuando ya previamente, en algún lugar, se ha efectuado un cambio de racionalidad, un cambio de acuerdo de lo que ha de significar lo racional.

La tarea que se propuso Perelman fue "comprender el *mecanismo* del pensamiento"[52]. La tarea de la lógica sería ahora mostrar *cómo se organizan los objetos y contenidos del pensamiento* a partir de ese mecanismo previamente ilustrado.

De hecho, la idea de Lefébvre, y la de Perelman por lo que creemos, es que esta racionalidad humana no puede comprenderse en su totalidad sin apelar a aquellos contenidos. Por ahora, nuestra conclusión es que la lógica debe brindar la imagen de la racionalidad de una época o ciencia.

La verdadera comprensión está en descubrir que, de hecho, la lógica nunca ha dejado de cumplir únicamente con esta modesta labor. Aunque cambie en la

[51] Por dar un ejemplo, un proyecto de racionalidad comunicativa como el de Jürgen Habermas no es más que una reevaluación, una "puesta a punto" de una racionalidad que, ya en la práxis social y filosófica, y a partir de los nuevos conocimientos adquiridos, se ha vuelto caduca e inefectiva).
[52] Ibid, 37. Subrayado nuestro.

medida en que cambia también la racionalidad que existe en nosotros. Racionalidad que, a su vez, vuelve a cerrar el círculo utilizando como instrumento la lógica para autocorregirse a sí misma.

Al final de todo queremos hacer claridad sobre este último capítulo que pretende marcar las pautas de un programa apenas en gestación.

Como primera medida, hemos utilizado a lefébvre para redirigir la lógica de Perelman hacia un fin como ciencia, enmarcándola en un proyecto filosófico de extensiones considerables. Pero hemos renunciado a adherirnos a os presupuestos filosóficos a la base de los planteamientos del propio Lefébvre. En especial, pensamos que éste puede aportar mucho más de lo antes expuesto, pero una extensión mayor de nuestro proyecto presupone un estudio más amplio y acentuado de la lógica dialéctica en general y de sus presupuestos lógicos y sociológicos tal como los entiende Lefébvre. Sólo hemos utilizado al precedente como una manera de, al establecer *analogías*, potencializar un proyecto de lógica que creemos presente en la Teoria de la Argumentación de Perelman.

Por último, hemos intencionalmente desistido de dar una *definición* de lo racional, tanto a partir de la lógica como de manera general. Esto por dos razones. La primera es que pensamos que una respuesta a tal pregunta está por fuera de toda consideración posible por nosotros en este momento. Segundo porque hemos despojado de manera consciente a la lógica de todo carácter normativo explícito, como el papel de la lógica desde nuestra visión es *describir* lo racional, se hace imposible definirla *a priori*.

La lógica entonces es una ciencia que se acerca más a una sociología que a una ética o a una epistemología (aunque esta más cerca de la segunda que de la primera).

Puede esto ser refutable, pero no esperamos haber dado una visión correcta (ni la única correcta), de una nueva idea de lógica a partir de los planteamientos de

Chaïm Perelman. Aunque sí hemos esperado exponer nuestro punto de vista de manera consistente y sólida.

Ofrecemos una visión de racionalidad fragmentada y disuelta en los diferentes "nosotros", a lo largo del tiempo o el espacio, difusa también, pero no escindida, completamente libre. Eso, pensamos, es colocar la responsabilidad acerca de lo racional absolutamente en nuestras manos. Cuándo expresamos la analogía existente entre los movimientos dialécticos y la razón argumentativa, sostuvimos que hay tres términos (la inercia de la razón, lo que se opone a esta razón, y lo que trata de superar esta incompatibilidad)... ¿Quizás debimos mencionar *cuatro,* si incluimos lo no argumentable, las creencias que nos sostienen en la pasión o la violencia?.

O esto, acaso, ¿no debe ser incluido en nuestro estudio?. No lo sabemos.

Quizás lo mejor sea apostarle a esa razón que se encuentra en nosotros, preguntarnos cómo podemos perfeccionarla para el futuro, sea lo que sea que esto signifique. Lo cierto es que la lógica no ha sido nunca tabla de salvación racional de época alguna, incluyendo a ésta donde nos encontramos.

APENDICE

1

A. SISTEMA FORMAL AXIOMÁTICO DEL CÁLCULO LÓGICO PROPOSICIONAL.

Describo en lo que sigue el cálculo lógico proposicional axiomatizado a la manera de Russell Whitehead(Principia Mathematica, 1910, 1913), tal y como aparece reseñado en la obra de Alfredo Deaño:

SIMBOLOS DEL SISTEMA:

Signos de puntuación: (,)

conectivas o constantes: $\vee$, $\neg$

variables proposicionales:

p, q, r, s, t, p´, q´, r´, s´, t´, p´´ q´´ r´´ s´´ t´´...,

Símbolos definidos:

$(\wedge) : x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$

$(\rightarrow) : x \rightarrow y = \neg x \vee y$

Reglas de formación:

1. **Una variable proposicional sola es una expresión bien formada (ebf) del cálculo.**
2. **Si** x **es una ebf, entonces** $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \rightarrow y$, **tambien lo son.**
3. **La lista de reglas de formación es completa.**

Axiomas

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $q \rightarrow (p \vee q)$

3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

4. $(p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$

5. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Reglas de transformación:

1. Dada una tesis del cálculo, el resultado de sustituir una , algunas o todas las variables de enunciado por fórmulas bien formadas del cálculo, será tambien una tesis del cálculo. Con la única restricción de que cada variable ha de ser sustituida en todas sus apariciones por el mismo sustituto.
2. Si "x" es una tesis del sistema, y lo es tambien la expresión "x → y", entonces "y" es una tesis del sistema.

B. SISTEMA AXIOMÁTICO FORMAL DEL CÁLCULO DE PREDICADOS ORDEN 2. EL SISTEMA Pm.

SÍMBOLOS DEL SISTEMA:

Signos de puntuación: (,)

conectivas o constantes:

$\forall$: Para todo...
$\exists$: Existe algún...
$\rightarrow$: si... entonces...
$\neg$: se niega que...
$\wedge$: y...conjunción
$\vee$: o...disyunción
$=$: igual a
$+$: más
$\times$: veces

Numerales: los numerales son signos que ofrecen una manera de referirse a los números naturales al interior de Pm

0 = cero

s0 = uno

ss0 = dos

sss0 = tres

...

Variables: el sistema Pm incluye la teoría de los tipos, por lo que debemos asegurar una diferenciación de tipos para las variables:

Para las variables que denotan individuos o números (numerales):

p, q, r, s, t,... x, y, z...p´, q´...

para las variables que denotan proposiciones

p^1, q^1, r^1, s^1, t^1, ...x^1, y^1 , z^1...

para las que denotan clases o propiedades

p^2, q^2, r^2, s^2, t^2,... x^2, y^2, z^2...

para las que denotan clases de clases o propiedades de propiedades

p^3, q^3, r^3, s^3, t^3,... x^3, y^3, z^3...

Así hasta donde sea necesario y suponiendo que tenemos para cada tipo una cantidad infinita y numerable de signos.

Reglas de formación:

1. **Una variable proposicional sola de cualquier tipo es una expresión bien formada (ebf) del cálculo.**
2. **Si x es una variable de cuaquier tipo y R es una ebf donde x es libre entonces** $\forall x(xR)$, $\exists x(xR)$, **son ebf.**
3. **Si a y b son ebf entonces,** $\neg a$, $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \rightarrow b$, **y** $a = b$, $a + b$, $a \times b$, **tambien lo son.**
4. **Si f es un símbolo predicado n-adico y a, b, c, d son símbolos individuales, entonces** f (a, b, c, d) **es una ebf**
5. **La lista de reglas de formación es completa.**

Axiomas: se incluyen los axiomas proposicionales de cálculo proposicional más los siguientes:

Axiomas de Peano:

1. $\forall x \ (\neg \ sx = 0)$
2. $\forall x \ (x + 0 = x)$
3. $\forall x, \forall y \ (x + sy) = s(x+y)$
4. $\forall x, (x \times 0 = 0)$
5. $\forall x, \forall y \ (x \times \ sy) = ((x \times y) + x)$

Reglas de transformación:

1. **Dada una tesis del cálculo, el resultado de sustituir una , algunas o todas las variables de enunciado por fórmulas bien formadas del cálculo, será tambien una tesis del cálculo. Con la única restricción de que cada variable ha de ser sustituida en todas sus apariciones por el mismo sustituto.**
2. **Si "x" es una tesis del sistema, y lo es tambien la expresión "$x \rightarrow y$", entonces** "y" **es una tesis del sistema.**
3. **Si "$\forall x$ (xR)" es una tesis, entonces** "aR" **es una tesis, donde "a" es cuaquier símbolo individual. La inversa vale.**
4. **Si "aR" es una tesis de sistema, entonces** "$\exists x$ (xR)" **es una tesis de sistema. La inversa vale sólo en el sentido que se sustituya en " $\exists x$ (xR) " a "x" por una constante individual desconocida "b"**
5. **Si "$\forall x$ (xR)" es una tesis, entonces "$\neg \ \exists x$ (xR) " es una tesis de sistema, y son intercambiables en cualquier lugar.**
6. **Si "x= y" son tesis, entonces** "y = x" **es una tesis.**

7. Si "x = y" y "y = z" son tesis, entonces "x = y" **es una tesis.**

8. Si x = y es una tesis, entonces sx = sy **es una tesis. La inversa vale.**

Bibliografia general

Aristóteles	***Metafísica***	
Aristóteles	***Organon***	
Bell E. T.	***Historia de las matermáticas***	México, F.C.E., 1995
Blanché Robert	***La axiomática***	México, U.A.M. 1965
Bobenrieth	***Inconsistencias ¿Por qué no?***	Bogotá, Tercer Mundo, 1996
Bobenrieth	**Razón y contradicción: ¿Una union ahora viable?**	XXXXXX
Bochenski I. M.	***Historia de la lógica formal***	Madrid, Gredos, 1985
Borges Jorge luis	***Ficciones***	Barcelona, Alianza, 1985
Boole George	***Análisis matemático de la lógica***	*
Campos Alberto	***Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides***	Bogotá, universidad nacional de Colombia, 1994
Campos Alberto	***Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki***	Bogotá, universidad nacional de Colombia, 1994
Clifford William K.	**Postulados de la ciencia del espacio**	*
Cohen Morris, Nagel Ernest	***Introducción a la lógica y al método científico***	Buenos Aires, Amorrortu, 1979
Cohen Morris	***Introducción a la lógica***	México, FCE, 1993
Rodriguez Francisco C.	**La vía negativa hacia el concepto de consecuencia lógica**	(El velo y la trenza) Bogotá, E.U.N. 1997
Copi Irving	***Lógica simbólica***	México, C.E.C., 1979
Copi Irving	***Introducción a la lógica***	Mexico, Limusa, 1995
Crossley J. N. y otros	***¿Qué es lógica matematica?***	Madrid, tecnos, 1988
De lorenzo Javier	**Aportes epistemológicos del hacer matemático**	Ideas y valores 92-93 Bogotá, Dic 1993
De morgan A.	**Colección de paradojas**	*
Deaño Alfredo	***Introducción a la lógica formal***	Madrid, Alianza, 1986
Dummett Michael	***La verdad y otros enigmas***	México, FCE, 1990
Garcia Luis E.	**La verdad como probabilidad**	XXXXX
Eco Umberto	***La búsqueda de la lengua perfecta***	Barcelona, Grijalbo Mondarori, 1994
Frege Gottlob	**Fundamentos de la Aritmética**	Barcelona, Laia, 1972
Gödel Kurt	***Obras completas***	Madrid, Alianza, 1981
Gödel Kurt	**The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy**	Documento electrónico
Gomez Adolfo L.	***El primado de la razón práctica***	Cali, Universidad del valle, 1998.
Gomez Adolfo L.	***Argumentos y falacias***	Cali, Univ del Valle, 1993
Gomez Adolfo L.	**¿Se pueden formalizar los argumentos?**	Conferencia
Gomez Adolfo león	***Lenguaje comunicación y verdad***	Cali, Univ del Valle, 1994
Gomez Adolfo L	***Seis conferencias sobre teoría de la argumentación***	Cali, AC Editores, 2000
Gomez Adolfo L	**El argumento por el contraejempo. Entre la lógica y la teoría de la argumentación.**	(Argumentación, actos lingüisticos, y lógica jurídica). Santiago de Cali, Univ del Valle. 1998.
Hahn Hans	**Crisis de la intuición**	*
Hahn Hans	**El infinito**	*

Helmholtz Hermann	**Sobre el origen y significación de los axiomas geométricos**	*
Hempel Carl G.	**Sobre la naturaleza de la verdad matemática**	*
Hempel Carl G.	**La geometría y la ciencia empírica**	*
Hintikka Jaakko	***Lógica, juegos de lenguaje e información***	Madrid, Tecnos, 1976
Hofstadter Douglas	***Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle***	Barcelona, Tusquets, 1987
Kant Immanuel	***Lógica***	Documento electrónico
Kline morris	***Matemáticas para estudiantes de humanidades***	México, F.C.E., 1992
Ladriére Jean	***Limitaciones internas de los formalismos***	Madrid, Tecnos, 1969
Lakatos Imre	***Matemáticas, ciencia y epistemología***	Madrid, Alianza, 1981
Lefebvre Henri	***Lógica formal, lógica dialéctica***	México, Siglo veintiuno, 1984
Leibniz Gottfried W.	***Monadologia***	*Tres textos metafísicos,* Bogotá, Norma, 1996
Leibniz Gottfried W.	***Nuevo tratado sobre el entendimiento humano***	México, Porrúa, 1977
Leibniz Gottfried W.	***Disertatio de arte combinatoria***	Santiago de Chile, Univ Católica de Chile, 1989
Lewis C. I. Langford C. H.	**Historia de la lógica simbólica**	*
Mises Richard	**Los postulados de la matemática y el entendimiento humano**	*
Mitchell david	**Introducción a la lógica**	Barcelona, Labor, 1968
Mosterín, j.	***Teoría axiomática de conjuntos***	Ariel, Barcelona, 1971
Nagel Ernest	**La notación simbólica, los ojos de Haddock y la ordenanza sobre los perros**	*
Nagel Ernest Newman James R.	***El teorema de Gödel***	Madrid, Tecnos, 1994
Neumann Jhon V.	**Teoría general y lógica de los dispositivos automáticos**	*
Nidditch, L.	***Desarrollo de la lógica matemática***	Catedra, Madrid, 1983
Palau Gladys	***Introducción filosófica a las lógicas no clásicas***	Barcelona, Gedisa, 2002
Peirce Charles S.	**La esencia de la matemática**	*
Penrose Roger	***La nueva mente del emperador***	Barcelona, Grijalbo Mondarori, 1999
Perelmen chaim	***De la justicia***	México, U.N.A.M., 1964
Perelmen chaim	***Tratado de la argumentacion***	Madrid, Gredos, 1994
Perelmen chaim	***El imperio retórico***	Bogotá, Norma, 1997
Piaget Jean	***Ensayos sobre lógica y psicología***	Barcelona, Altaya, 1993
Platón	***Diálogos***	México, Porrúa, 1997
Popper Karl	***Conjeturas y refutaciones***	Barcelona, Paidós, 1994
Quine Willard van Orman	***Two dogmas of empiricism***	Documento electrónico
Realle Giovanni	***Introdución a Aristóteles***	Barcelona, Herder, 1985
Ross W. D.	***Aristóteles***	Buenos Aires, Charcas, 1981
Russell Bertrand	***Obras completas, Tomo 2***	Bilbao, Aguilar, 1973
Russell Bertrand	***Los principios de la matemática***	Madrid, Espasa calpe, 1977
Seiffert, Helmut,	***introduccion a la matemática***	Barcelona, Herder, 1978
Singh Simon	***El último teorema de Fermat***	Bogotá, norma, 1999
Swift Jonathan	***Los viajes de Gulliver***	Navarra, Salvat, 1970
Tarski Alfred	**Lógica simbólica**	*

Tarski Alfred	***The semantic conception of truth and the foundations of semantics***	WWW.episteme links.com
Trakhtenbrot B. A.	***Algoritmos y computadoras***	México, limusa, 1985
Tugendhat Ernst Woolf Virginia	***Propedéutica lógico-semántica***	XXXXXX
Turing A. M.	**¿Puede pensar una máquina?**	*
Turing A. M.	**On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem**	Documento electronico
Vega Luis	**Matemáticas y demostración**	(El velo y la trenza) XXX, E.U.N., 1997
Wang Hao	***Reflexiones sobre Kurt Gödel***	Madrid, Alianza, 1991
Whitehead Alfred N.	**La matemática como elemento en la historia del pensamiento**	*
Wilder Raymond	**El método axiomático**	*
Wildgen Wolfgang	**From Lullus to Cognitive Semantics**	*Wildgen@linguistik.uni-bremen.de*

Los artículos indicados con asterisco pueden encontrarse en la Enciclopedia Sigma *El mundo de las Matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1968