EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN CON TÉRMINO FUERZA POR MEDIO DE UN TEOREMA DE PUNTO FIJO

JULIO JAIME CISNEROS LORDUY

Universidad de Cartagena
Facultad de Ciencias Exactas.
Maestría en Matemáticas
Cartagena, Colombia
2018

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN CON TÉRMINO FUERZA POR MEDIO DE UN TEOREMA DE PUNTO FIJO

Julio Jaime Cisneros Lorduy

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Matemáticas

Director:

Rafael Galeano Andrade

Línea de Investigación:

Ecuaciones de tipo cinético

Grupo de Investigación:

Ecuaciones diferenciales parciales

Universidad de Cartagena

Facultad de Ciencias Exactas.

Maestría en Matemáticas.

Cartagena, Colombia

2018

Las matemáticas son tan antiguas

como el hombre.

Stefan Banach

Agradecimientos

Gracias a Dios por la inspiración.

Para todos los docentes de la maestría mis sinceros agradecimientos, en especial al profesor Rafael Galeano Andrade, por sus contribuciones y aportes al presente trabajo. Su gestión ha sido muy importante en la creación y el desarrollo de la *Maestría en Matemáticas* de la Universidad de Cartagena.

Al grupo de compañeros de la maestría, que compartieron momentos enriquecedores y me enseñaron diversos temas.

A mi familia por el ánimo que me dan para seguir con esta labor.

Y a todos mis amigos.

Resumen

El presente trabajo de grado se divide en tres secciones principales. La primera parte describe el problema a desarrollar, citando algunos resultados importantes y recientes relacionados con el tema, mencionando los objetivos alcanzados. En la segunda parte se analiza la ecuación de Boltzmann sin término fuerza y se demuestra la existencia de solución basado en el Teorema de la Aplicación Contractiva. En la última parte se extiende el análisis de la ecuación añadiendo un término fuerza, haciendo consideraciones que guardan relación con el Análisis Funcional y la Teoría de Operadores.

El propósito principal de este trabajo es mostrar existencia de solución para la ecuación de Boltzmann con término fuerza. Se formula un Problema de Cauchy planteado en forma integral y se recurre a un teorema de punto fijo.

Palabras clave: Ecuación de Boltzmann, fuerza externa, punto fijo, teoría cinética.

Abstract

Grade work is divided into three major sections. The first part describes the problem to be developed, some important and recent results related to the topic and the objectives are mentioned. In the second part the Boltzmann equation is analyzed with no force term and its solution based on the Contraction Application Theorem is shown. In the latter part we extend the analysis of the equation by adding a term force, making considerations that relate to Functional Analysis and Operator Theory.

The main goal of this work is to show existence of solution for the Boltzmann equation with term force. We formulate a Cauchy Problem that is integrally rethought and a fixed point theorem is used.

Keywords: Boltzmann equation. External force. Fixed point. Kinetic theory.

Contenido

Lista de Símbolos y abreviaturas

La mayoría de símbolos y notaciones usadas en el presente trabajo se detallan a continuación.

Símbolos usados

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
f	Función de densidad	Kg.s/m	$f(t,x,v)=f(v)$
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial con respecto al tiempo	s^{-1}	EB
v	velocidad	$^{m}/_{s}$	EB
$v\cdot\nabla_x$	Operador de transporte		EB
F	Fuerza externa	N	EBTF
∇_v	Gradiente de velocidad		EB
$Q(f,f)$	Operador de colisión		EB
β	Parámetro positivo		
σ	Constante de proporcionalidad	1	
$\rho(x,v)$	Función de peso		$\exp\{\beta(\lvert x\rvert^2+\lvert v\rvert^2)\}$
ω	Vector unitario paralelo al segmento que une los centros de las esferas en el instante de la colisión		
$f^{\#}(t,x,v)$	Función de densidad redefinida	Kg.s/m	$f(t,x+vt,v+Ft)$
$\lVert f\rVert_X$	Norma de f en el espacio normado X		
S_+^2	Semiesfera unitaria		$\iint dS$
$\mathcal{B}$	Operador continuo y compacto		Cap. 3
$\mathcal{A}$	Operador contractivo		Cap. 3

Abreviaturas

Abreviatura	Término
EB	Ecuación de Boltzmann
EBTF	Ecuación de Boltzmann con término fuerza

Introducción

La ecuación de Boltzmann (EB) es una de las ecuaciones más importantes de la física matemática y es fundamental en la teoría cinética de los gases. Ludwig Boltzmann la dedujo en 1872, se trata de una ecuación integro-diferencial no-lineal que describe cómo evoluciona un gas hacia un estado de equilibrio. A pesar de los esfuerzos, no hubo una demostración rigurosa de la existencia de soluciones. Pasaron 140 años antes de que alguien pudiera resolverla. Dos matemáticos de la Universidad de Pennsylvania, Gressman y Strain, hallaron la solución en el año 2010 [13]. Adicionalmente, si se considera una fuerza externa ejercida sobre las partículas, se llega a la ecuación general. A partir de un modelo simplificado, se supone que las moléculas son esferas rígidas que colisionan de manera elástica y que la energía cinética del sistema se conserva.

La teoría cinética es un modelo en el cual un gas es representado como una colección de moléculas cuyo movimiento en el espacio de fase es analizado, dicho espacio es el producto cartesiano de la posición y la velocidad en tres dimensiones. La función de distribución de la velocidad contiene una cantidad de información que puede ser utilizada para describir las propiedades del gas a nivel macroscópico [11]. Lo que se espera es poder encontrar una función f positiva que tienda a cero conforme la rapidez de las moléculas aumente. El problema de existencia y unicidad de dicha solución no está, en general, plenamente resuelto.

El objetivo del presente trabajo es mostrar existencia de solución al problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann no lineal con término fuerza, vía Teorema del Punto Fijo de Krasnoselskii [4]. Una limitante del teorema es que no asegura unicidad de solución.

En este desarrollo, primero se definen espacios adecuados donde las soluciones tienen lugar, dentro del espacio de funciones continuas para luego extenderlas al espacio de Lebesgue L_1, con una norma apropiada, esto es, unos espacios normados completos. Luego se debilita el problema planteándolo en forma integral lo que conduce a identificar un operador en una ecuación cuya solución es un punto fijo del mismo. Finalmente se logra establecer que ese punto fijo existe dado que se cumplen las premisas de un teorema que lo garantiza, denominado Teorema del Punto Fijo de Krasnoselkii. Esto implica que el operador inicial sea expresado como la suma de dos operadores: uno de los cuales es contractivo y el otro continuo y compacto.

Las primeras pruebas de existencia datan de la década de los ochenta con Shinbrot, Kaniel y Cercignani [5] que se basaron en esquemas iterativos encontrando sucesiones monótonas que convergen a un límite que satisface la ecuación de Boltzmann. El presente trabajo aborda este mismo problema usando teoremas de punto fijo, como un método alternativo.

Se espera que este aporte sirva como motivación para futuros análisis de sistemas dinámicos en diferentes entornos de aplicación que se extienden más allá de la física estadística y las teorías estocásticas.

1. Generalidades

La experiencia ha demostrado lo difícil que es obtener teorías matemáticas acerca de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales tanto lineales como no lineales. Una primera aproximación cuando se quiere resolver un problema consiste en mostrar la existencia de su correspondiente solución. Este arduo camino conlleva generalmente al uso de lemas y teoremas que terminan enriqueciendo a dichas teorías.

En la actualidad se dispone de una serie de técnicas para mostrar existencia, una de las cuales se denomina *Técnica de Punto Fijo*, la cual es usada aquí para obtener los resultados.

A lo largo del trabajo consideraremos el siguiente espacio solución: Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida de Lebesgue donde $\Omega = ([0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

La ecuación de Boltzmann con término fuerza es una ecuación diferencial parcial no lineal, cuya solución es una función $f = f(t, x, v) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ que satisface

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}.\nabla_x f + \vec{F}.\nabla_v f = Q(f, f)$$

y dato inicial

$$f(0, x, v) = f_0(x, v)$$

Siendo $\vec{F} = \vec{F}(t, x, v)$ un campo de fuerza externo.

El propósito principal de este trabajo es determinar algunas condiciones que permitan asegurar que este problema de valor inicial es resoluble. Se quiere mostrar existencia con dato pequeño, esto es, cerca al vacío [11]. Cuando son pocas moléculas, la distancia promedio entre ellas es mucho mayor que su tamaño. El gas es eléctricamente neutro y se consideran sólo las colisiones binarias. En ausencia de fuerzas externas, el movimiento de las moléculas es rectilíneo uniforme.

El operador de colisión Q es no lineal, local en (t, x) y actúa sobre las velocidades:

$$Q(f,f)(t,x,v) = Q(f,f) =$$

$$= \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot (v - u) \, [f(t,x,v')f(t,x,u') - f(t,x,v)f(t,x,u)] du \, d\omega$$

Es usual expresar de manera abreviada $Q(f,f)(t,x,v)$ como $Q(f,f)$.

En donde

$$S_+^2 = \{\omega \in S^2 : \omega \cdot v \geq \omega \cdot u\}$$

$\sigma =$ constante proporcional al área de las esferas

Las velocidades u' y v' quedan determinadas por u y v mediante:

$$u' = u + a\omega$$

$$v' = v - a\omega$$

$$a = \omega \cdot (v - u)$$

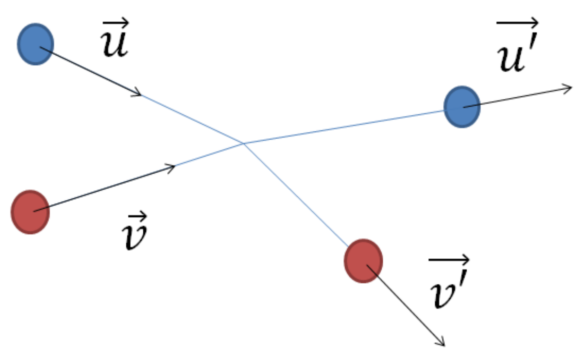
La cantidad de movimiento se conserva. La figura 1-1 muestra el choque de dos moléculas con velocidades u y v que, tras la colisión, adquieren nuevas velocidades u' y v', respectivamente.

$$u' + v' = u + v$$

y la energía también es conservada:

$$|u'|^2 + |v'|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

Figura 1-1: Colisión binaria



El siguiente ejemplo muestra a nivel macroscópico, el cambio de velocidades tras una colisión, y se ilustra el *Principio de Conservación de la Energía*.

Ejemplo. Dos esferas metálicas de masa m y el mismo radio, chocan con velocidades $\vec{u} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 3\hat{\jmath}$ de forma tal que en el instante del impacto sus centros quedan alineados sobre la vertical. Determine las velocidades finales y compare la energía cinética del sistema.

Solución. El vector unitario que une sus centros $\vec{\omega} = \hat{\jmath}$, por tanto

$$a = \omega \cdot (v - u) = \hat{\jmath} \cdot (-2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}) = 5$$

$$u' = u + a\omega = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{\jmath} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

$$v' = v - a\omega = 3\hat{\jmath} - 5\hat{\jmath} = -2\hat{\jmath}$$

En cuanto a la energía:

$$|u|^2 = 8;\ |v|^2 = 9;\ |u'|^2 = 13;\ |v'|^2 = 4$$

Se mantiene constante

$$|u'|^2 + |v'|^2 = 17 = |u|^2 + |v|^2$$

Si se tiene en cuenta la acción de la gravedad, las esferas se moverán bajo el efecto de la fuerza gravitacional describiendo, en general, trayectorias curvilíneas; La evolución de las velocidades de todas las partículas en un gas es determinada por cierta función $f(t, x, v)$ la cual existirá en algún espacio lineal.

Definición. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Una aplicación $T: X \to X$ es una contracción en X si existe un número real positivo $0 \leq \alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha. d(x, y)$$

La noción de espacio métrico es más general. Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues basta con definir $d(x, y) = \|x - y\|$. Todas las nociones de los espacios métricos son heredadas por los espacios normados.

Definimos los siguientes espacios para hallar la solución $f(t, x, v)$. Denotamos el conjunto $C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ como el conjunto de funciones continuas en el espacio $([0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Dado $\beta > 0$, sea

$$M = \left\{f \in C^0([0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3): existe\ c > 0\ tal\ que\ |f(t,x,v)| \leq ce^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\}$$

Con su norma

$$\|f\| = \sup_{t,x,v} e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\, |f(t,x,v)|$$

Y el espacio

$$X = \left\{f\colon f\ medible\ y\ existe\ c > 0\ tal\ que\ |f(t,x,v)| \leq ce^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\}$$

con la misma norma.

A pesar de que hasta el momento se sabe de la existencia y unicidad para dicho problema usando *Esquemas Iterativos* [15], no se ha hecho una investigación de las propiedades que goza dicha solución mediante el Teorema de Punto Fijo de Krasnoselskii.

La ecuación de Boltzmann (EB) ha sido estudiada durante décadas y ha dado origen a varios problemas, algunos de los cuales se encuentran actualmente abiertos, entre los cuales se destaca la existencia de solución para la EB relativista [7].

Se ha mostrado en [6] la existencia y estabilidad global débil en el problema de Cauchy para EB con kernels de colisiones generales, probando que las sucesiones acotadas de soluciones, convergen débilmente a una solución en L^1. Usan un método con base en los resultados de compacidad para obtener los promedios de velocidad, una nueva formulación de EB con normalización no lineal. Posteriormente, Galeano [8] prueba un teorema de existencia y unicidad de la solución de la EB con término fuerza y dato inicial, cerca al vacío. Enuncia otro teorema de existencia y unicidad local para la ecuación de Boltzmann homogénea con término fuerza integrable con respecto al tiempo [9]. Y obtiene los puntos críticos de un funcional definido sobre L^2, que coinciden con las soluciones estacionarias de EB [2].

A su vez, Gamba y colaboradores [3] usan la interacción Kaniel-Shinbrot con el fin de establecer la existencia de soluciones para EB sobre un dominio espacial en $\mathbb{R}^n$ para ciertos datos iniciales. Cuando estas soluciones son globales en el tiempo, se consiguen resultados sobre sus asintóticas en un tiempo largo.

Finalmente, en [11] se aborda el problema de Cauchy para EB con moléculas de Maxwell, mostrando que cumple el efecto regularizador Gelfand-Shilov, haciendo que la solución satisfaga la regularidad fuerte en la clase Gevrey aplicando el método de descomposición espectral del operador no lineal.

Uno de los principales objetivos de la teoría cinética es describir las propiedades macroscópicas de los gases, como presión, temperatura, conductividad térmica y difusión, a partir de cantidades microscópicas de las moléculas que componen el gas, como la masa, velocidad, energía cinética y las interacciones o colisiones que ocurren a lo largo del tiempo [12].

Cuando hablamos de un gas rarificado, entendemos que su densidad es muy baja (dato pequeño) y a su vez la presión interna es mucho menor que la presión atmosférica (cercana al vacío). Esto significa que la distancia promedio entre las moléculas es mucho mayor que sus tamaños. Se consideran sólo las colisiones binarias. El gas es eléctricamente neutro y se descartan las fuerzas intermoleculares.

El estado de un gas cambia a lo largo del tiempo debido a un sin número de colisiones entre las moléculas. Como parte del modelo suponemos que las partículas que conforman el gas son esferas rígidas que no se deforman con el impacto, que los choques son elásticos, y que la cantidad de movimiento se conserva así como la energía. Para cada posición en tres dimensiones tenemos una distribución de velocidades en tres componentes, esto exige trabajar en un espacio de seis dimensiones denominado espacio de fase. La evolución temporal de estos estados los describe la función de densidad $f = f(t, x, v)$ con $t \geq 0$; $x, v \in \mathbb{R}^3$. La diferencia entre las funciones de distribución en un lapso infinitesimal δt determina el operador de colisión Q:

$$f(t + \delta t, x + v\delta t, v + F\delta t) - f(t, x, v) = Q(f, f)\delta t$$

Por lo que se escribe en notación diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x + F \cdot \nabla_v\right) f(t, x, v) = Q(f, f)$$

Se conoce como ecuación de Boltzmann con término fuerza

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f + F.\nabla_v f = Q(f, f)$$

Diferentes consideraciones se han venido haciendo desde que la ecuación se propuso en 1872. Un importante investigador fue Carlo Cercignani [5] quien demostró el Teorema H para gases poliatómicos, lo que significa que la entropía del sistema siempre aumenta hasta el equilibrio. La pregunta de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación espacialmente homogénea sin término fuerza fue abordada por

Carleman. Finalmente, Gressman y Strain hallan la solución a la ecuación sin término fuerza para potenciales suaves pero sólo cuando el gas ha alcanzado un estado de equilibrio perfecto [13]. La ecuación con término fuerza ha sido poco estudiada. Una idea más precisa se puede encontrar en los trabajos de Polewczac [14].

Muchas de las demostraciones de existencia de solución se basan en los teoremas de punto fijo, donde la ecuación diferencial es expresada en forma integral

$$f(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q(f,f)ds = T(f)$$

Siendo T un operador y f un elemento del espacio de funciones donde la solución existe. Decimos de f es un punto fijo de T si $f = T(f)$. No toda transformación tiene un punto fijo. Pero si la transformación es contractiva siempre tiene uno. Stefan Banach lo enunció en su teorema: ”Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f\colon X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva en X. Entonces existe un único punto fijo de f.” (ver [1]).

Hay una versión local del Principio de Contracción de Banach para espacios normados que será útil para mostrar existencia de solución local al problema débil.

Teorema 2.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo y sea la bola abierta en el espacio X definida como $B(x_0, r) = \{x \in X \colon \|x - x_0\| < r\}$, donde $x_0 \in X$ y $r > 0$. Supongamos que $T\colon B(x_0\,, r) \to X$ es una contracción tal que

$$\|Tx_0 - x_0\| < (1-L)r$$

Entonces, T tiene un único punto fijo en $B(x_0\,, r)$.

Prueba. Sea $r_0 \in [0, r)$ tal que $\|Tx_0 - x_0\| \leq (1 - L)r_0$, y sea $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$. Entonces,

$$\|Tx - x_0\| \leq \|Tx - Tx_0\| + \|Tx_0 - x_0\| \leq L\|x - x_0\| + (1 - L)r_0$$

Como $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$, se puede afirmar que $\|x - x_0\| \leq r_0$

Así

$$L\|x - x_0\| + (1 - L)r_0 \leq Lr_0 + r_0 - Lr_0 = r_0$$

Luego

$$\|Tx - x_0\| \leq r_0$$

Entonces $Tx \in \overline{B(x_0, r_0)}$, lo que equivale a decir que $T: \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$ y dado que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset X$$

la bola $B(x_0, r_0)$ es completa, y por el Principio de Contracción de Banach, existe un único $u \in \overline{B(x_0, r_0)}$ tal que $Tu = u$. Puesto que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \overline{B(x_0, r)}$ se concluye que T tiene un único punto fijo en $B(x_0 , r)$.

1.1 Estado actual del problema

El término EB se refiere a cualquier ecuación cinética que describe la evolución de un sistema termodinámico. Puede tratarse de un gas, un fluido o incluso una galaxia. Resolver la EB equivale a obtener una función que permita explicar las propiedades macroscópicas de un fluido como la viscosidad, la conductividad eléctrica o la conductividad térmica.

Se ha mostrado existencia de solución para la ecuación de Boltzmann sin término fuerza, usando el Teorema de Punto Fijo de Banach [12]. También se ha probado un teorema de existencia, unicidad y positividad de la solución de la ecuación de Boltzmann con término fuerza y dato inicial cerca al vacío, sin hacer uso hasta ahora de la teoría del punto fijo de Krasnoselskii [8], que es una extensión del Teorema de Schauder.

Teorema 1.1. Teorema de Schauder. Sea X un espacio vectorial localmente convexo, y sea $K \subset X$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Entonces cualquier aplicación continua $f: K \to K$ tiene un punto fijo.

El procedimiento usual para mostrar existencia de solución en ecuaciones no lineales, consiste en debilitar el problema, convirtiendo la ecuación diferencial no lineal en una ecuación integral y diseñar un esquema iterativo para mostrar convergencia de una sucesión de Cauchy en un espacio de Banach. Esto significa solucionar el problema débil. Luego se mira si esa solución es diferenciable con respecto al tiempo, conformando así la solución fuerte.

El aporte principal del presente trabajo es demostrar existencia de solución al problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann no lineal, con término fuerza y dato pequeño, cuando se conoce una condición inicial, usando el Teorema del punto fijo de Krasnoselskii. Esta técnica consiste en plantear el problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann con término fuerza como un problema equivalente a la existencia de un punto fijo de un operador. A su vez se analizan algunos tópicos pertinentes al problema de Cauchy de la ecuación de Boltzmann no lineal, con el fin de aclarar la terminología y contextualización del problema en las ecuaciones diferenciales, la teoría de operadores y el análisis funcional. En el capítulo 3 se transforma el problema de Cauchy de la ecuación de Boltzmann no lineal de forma que éste cumpla las hipótesis del teorema del punto fijo de Krasnoselskii y se muestra que ese operador se puede descomponer en la suma de un operador continuo y compacto, y otro contractivo. Básicamente el trabajo consiste en adaptar el problema inicial a las condiciones que impone el teorema principal.

2. Ecuación de Boltzmann

El objetivo principal de este capítulo es probar existencia global de solución para el siguiente problema de Cauchy, en el caso de esferas rígidas y cerca del vacío, esto significa que la distancia promedio entre las moléculas es mucho mayor que su tamaño (dato pequeño), sin considerar ninguna fuerza externa que actúa sobre un gas. Adicionalmente se verifica la unicidad de solución.

Resolver el problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann significa encontrar una función $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaga

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \qquad (2.1)$$

Suponemos que la condición inicial $f_0(x,v)$ es una función acotada. Como la ecuación es no lineal, planteamos el anterior problema como un problema de punto fijo, para esto se definen los siguientes espacios.

Para $\beta > 0$, sea

$$M = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)\ tal\ que\ existe\ c > 0, |f(t,x,v)| \leq c.\, e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \right\}$$

Con norma

$$\|f\|_M = \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$

Y de forma similar

$$X = \left\{f : f \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)\ tal\ que\ existe\ c > 0, |f(t,x,v)| \leq c.e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\}$$

en casi toda parte.

El conjunto X es distinto de vacío pues al menos contiene la función idénticamente nula $f(t,x,v) = 0$.

Definimos una norma en el espacio X

$$\|f\|_X = \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$

Esta norma está bien definida. Para toda $f \in X$ se tiene que

$$|f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \leq c$$

Y todo conjunto acotado tiene supremo.

Luego existe

$$\operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$

Esta norma satisface:

1. No negatividad. Para toda f de X la norma es positiva. Además la norma es cero, si y sólo si $f = 0$.

2. Homogeneidad. Para todo real α se satisface $\|\alpha f\|_X = |\alpha|\|f\|_X$

3. Desigualdad triangular. Sean $f, g \in X$ entonces

$$\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$$

Prueba:

$$\|f+g\|_X = \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v) + g(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$
$$\leq \operatorname*{Sup}_{t,x,v} [|f(t,x,v)| + |g(t,x,v)|]\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$

$$= \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} + \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |g(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}$$

$$= \|f\|_X + \|g\|_X$$

Se concluye que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio normado.

Nota. Una norma siempre induce una métrica en X: $d(f,g) = \|f-g\|_X$

Definición. A una sucesión $\{f_n\}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ se le denomina *sucesión de Cauchy*, si se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_X < \varepsilon$$

Lema 2.1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.

Prueba. Existe un elemento f tal que $\{f_n\} \to f$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n > N \quad \|f_n - f\|_X < \varepsilon/2$$

$$\forall m > N \quad \|f_m - f\|_X < \varepsilon/2$$

$$\|f_n - f_m\|_X = \|f_n - f + f - f_m\|_X \leq \|f_n - f\|_X + \|f_m - f\|_X < \varepsilon$$

Luego $\|f_n - f_m\|_X < \varepsilon$ para todo $n, m > N$. La sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy.

Definición. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ se llama completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Lema 2.2. El espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ es de Banach.

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Esto es, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$

$$\|f_n - f_m\|_X < \varepsilon$$

Así,

$$\|f_n - f_m\|_X = \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)|\, e^{\beta(|x|^2 + |v|^2)} \leq \varepsilon$$

Entonces,

$$|f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)| \leq \varepsilon . e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

Para cada (t,x,v) fijo en $\Omega = [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ se tiene que $\{f_n(t,x,v)\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, para $n,m > N$

$$|f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)| \leq \varepsilon . e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

Por tanto, para cada (t,x,v) la sucesión $\{f_n(t,x,v)\}$ tiene límite en $\mathbb{R}$.

Dado que para cada $(t,x,v) \in \Omega$ existe un número real que es el límite de dicha sucesión, existirá una función definida puntualmente en el dominio de forma que para todo $(t,x,v) \in \Omega$ existe un único $f(t,x,v) \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t,x,v) = \lim_{n\to\infty} f_n(t,x,v)$$

Dado que todas las f_n están en $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ entonces $f(t,x,v) \in L^1$.

Veamos ahora que $f = f(t,x,v) \in X$. En efecto, si $m \to \infty$ en

$$\operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f_n(t,x,v) - f_m(t,x,v)|\, e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$$

Tenemos que

$$\operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f_n(t,x,v) - f(t,x,v)|\, e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon$$

Lo que implica que $|f_n(t,x,v) - f(t,x,v)| \leq \varepsilon$

Para cada elemento $f_n(t,x,v) \in X$ existirá alguna constante C_n tal que

$$|f_n(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq C_n$$

Como toda sucesión de Cauchy es acotada, existirá el supremo C:

Sea $C = Sup\{C_1, C_2, \dots C_n, \dots\}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

Por la desigualdad triangular:

$$|f(t,x,v)| = |f(t,x,v) - f_n(t,x,v) + f_n(t,x,v)| \leq |f(t,x,v) - f_n(t,x,v)| + |f_n(t,x,v)|$$

Así,

$$|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq |f(t,x,v) - f_n(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} + \left|f_n(t,x,v)\right|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq \varepsilon + C = C_0$$

Esto es,

$$|f(t,x,v)|e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \leq C_0$$

Entonces se puede concluir que $\{f_n\}$ converge a f, un elemento de X.

Luego X es completo.

Se puede mostrar que la ecuación (2.1) admite una solución.

Definición. Un punto fijo de un operador $T: X \to X$ es un elemento $x \in X$ tal que $Tx = x$.

Definición. $f^{\#}(t,x,v) = f(t,x+vt,v)$ con $f \in X$, $f^{\#}: \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{3} \times \mathbb{R}^{3} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$

Por medio de un cambio de variables, si $\tau = t,\ \eta = x + vt,\ \nu = v$ entonces la matriz jacobiana J satistace

$$\det J = \left|\frac{\partial(\tau,\eta,\nu)}{\partial(t,x,v)}\right| = 1$$

El jacobiano del cambio de variables es igual a la unidad.

La ecuación de Boltzmann (2.1) puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} f^{\#}(t,x,v) = Q^{\#}(f,f)(t,x,v)$$

En efecto,

$$\frac{d}{dt} f^{\#}(t,x,v) = \frac{\partial f^{\#}}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^{\#} = Q^{\#}(f,f)(t,x,v)$$

De manera que la ecuación diferencial se expresa en forma integral así:

$$f^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Se define el operador $\mathcal{F}$ en el espacio M como

$$\mathcal{F} f^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Que a su vez se traduce en un problema de punto fijo

$$\mathcal{F}f^{\#} = f^{\#}$$

El Teorema del punto fijo de Banach garantiza la existencia de un único punto fijo del operador $\mathcal{F}$, siempre y cuando $\mathcal{F}$ sea una contracción.

Teorema 2.1. Consideremos un espacio métrico (X, d) distinto de vacío. Supongamos que X es completo y sea $T: X \to X$ una contracción en X. Entonces, T tiene un único punto fijo.

Idea: Construir una sucesión (x_n) y probar que es de Cauchy, luego converge en X que es completo. Tomamos el límite $(x_n) \to x$ siendo x un punto fijo y mostrar que ese x es único. Ver libro de R. Agarwal [1]

Demostración. Por hipótesis $d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha. d(x_m, x_{m-1})$

Elijamos un $x_0 \in X$ arbitrario y formemos la sucesión $x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots$ luego $x_n = T^n x_0$.

Dado que $Tx_n = x_{n+1}$, entonces

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

$$\leq \alpha. d(x_m, x_{m-1})$$

$$= \alpha. d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2. d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\ldots \leq \alpha^m. d(x_1, x_0)$$

Se concluye que $d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m . d(x_1, x_0)$

Debido a la desigualdad triangular para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq [\alpha^m + \alpha^{m+1} + \alpha^{m+2} + \cdots + \alpha^{n-1}] d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1} + \alpha^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Resulta así

$$\begin{aligned} \alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1} &= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1}) - \alpha^n \\ &= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} - \alpha^n = \frac{1 - \alpha^{n+1} - (1 - \alpha^m)}{1 - \alpha} - \alpha^n \\ &= \frac{1 - \alpha^{n+1} - (1 - \alpha^m) - \alpha^n (1 - \alpha)}{1 - \alpha} = \frac{1 - \alpha^{n+1} - 1 + \alpha^m - \alpha^n + \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \\ &= \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Entonces

$$d(x_m, x_n) \leq \left(\frac{\alpha^m - \alpha^n}{1 - \alpha} \right) d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} (1 - \alpha^{n-m}) d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

$$d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

Como $d(x_0, x_1) = L$, conforme $m \to \infty$ va a ocurrir que

$$d(x_m, x_n) < \frac{L}{1-\alpha}\alpha^m < \varepsilon$$

Por lo tanto (x_m) es una sucesión de Cauchy, y al ser X completo, $x_m \to x \in X$

Así $Tx_m \to x$

Luego

$$Tx = x$$

En efecto,

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha. d(x_{m-1}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Se concluye que $d(x, Tx) = 0$. Esto es, x es un punto fijo de T.

Ahora se muestra que dicho punto es único:

Supongamos que x y $\tilde{x}$ son ambos puntos fijos de T, esto es $Tx = x$ y $T\tilde{x} = \tilde{x}$. Luego $d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leq \alpha. d(x, \tilde{x})$ y debido a que $\alpha = 1$, debe ser que $d(x, \tilde{x}) = 0$. En consecuencia $x = \tilde{x}$. El teorema está probado.

Se puede analizar ahora el siguiente operador integral con la intención de mostrar que es contractivo localmente.

Definamos $\mathcal{F}: M \to M$ siendo

$$M = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)\ tal\ que\ existe\ c > 0, |f(t,x,v)| \leq c.\, e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \right\}$$

De la siguiente manera:

$$\mathcal{F}f^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Lema 2.3. Sea $f_0(x,v) \in M$. Si $f^{\#} \in M$ entonces el operador $\mathcal{F}$ satisface:

1. $\mathcal{F}f^{\#} \in M$.

2. $\mathcal{F}$ es una contracción.

Prueba.

La idea es mostrar que para todo $\beta > 0$, existe una constante c tal que

$$|\mathcal{F}f^{\#}|e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \leq c$$

En efecto, $f_0(x.v)$ tiene su norma y la integral de $Q^{\#}$ es acotada.

A partir del operador de colisión:

$$Q(f,f) = \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot (v-u)\,[f(t,x,v')f(t,x,u') - f(t,x,v)f(t,x,u)]du\, d\omega$$

Luego

$$Q^{\#}(f,f) = \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot (v-u)\,[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)]du\, d\omega$$

$$= \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)]du$$

Por la desigualdad triangular:

$$\left|Q^{\#}(f,f)\right| \leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left[\left|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')\right| + \left|f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right|\right] du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')\right| du + \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\right| du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(t,x,v')\right|\left|f^{\#}(t,x,u')\right| du + \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(t,x,v)\right|\left|f^{\#}(t,x,u)\right| du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(v')\right| e^{\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2)} \left|f^{\#}(u')\right| e^{\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u')|^2+|u'|^2)} du$$

$$+\pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|\left|f^{\#}(t,x,v)\right| e^{\beta(|x)|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \left|f^{\#}(u)\right| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+\left|u'\right|^2\right)} du$$

$$+ \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+\left|u'\right|^2\right)} du$$

$$+ \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+\left|v'\right|^2+\left|x+t(v-u')\right|^2+\left|u'\right|^2\right)} du$$

$$+ \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(\left|(x+tv)-tv'\right|^2+\left|v'\right|^2+\left|(x+tv)-tu'\right|^2+\left|u'\right|^2\right)} du$$

$$+ \pi\sigma \left\|f^{\#}\right\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left((x+tv)^2-2(x+tv)tv'+t^2|v'|^2+|v'|^2+(x+tv)^2-2(x+tv)tu'+t^2|u'|^2+|u'|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(2(x+tv)^2-2(x+tv)t(v'+u')+t^2\left(|v'|^2+|u'|^2\right)+|v'|^2+|u'|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

Por hipótesis: $v'+u'=v+u$ y además $|v'|^2+ |u'|^2=|v|^2+|u|^2$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(2(x+tv)^2-2(x+tv)t(v+u)+t^2\left(|v|^2+|u|^2\right)+|v|^2+|u|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left((x+tv)^2-2(x+tv)tv+t^2|v|^2+(x+tv)^2-2(x+tv)tu+t^2|u|^2+|v|^2+|u|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x+tv-tv|^2+|x+tv-tu|^2+|v|^2+|u|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq \pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2\right)} du$$

$$+\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq 2\pi\sigma\|f^{\#}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta\left(|x|^2+|x+t(v-u)|^2+|v|^2+|u|^2\right)} du$$

$$\leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^{3}} |v-u| e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^{2}+|u|^{2}\right)} du$$

Entonces,

$$\left|Q^{\#}(f,f)\right| \leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^{3}} |v-u| e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^{2}\right)} e^{-\beta|u|^{2}} du$$

E integrando a lado y lado de la desigualdad:

$$\int_{0}^{t} \left|Q^{\#}(f,f)\right| d\tau \leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^{3}} |v-u| \left[\int_{0}^{t} e^{-\beta\left(|x+\tau(v-u)|^{2}\right)} d\tau\right] e^{-\beta|u|^{2}} du$$

$$\leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^{3}} |v-u| \left[\int_{0}^{\infty} e^{-\beta\left(|x+\tau(v-u)|^{2}\right)} d\tau\right] e^{-\beta|u|^{2}} du$$

$$\leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \int_{\mathbb{R}^{3}} |v-u| e^{-\beta|u|^{2}} du$$

$$\leq 2\pi\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right)^{3} \leq 2\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \frac{\pi^{3}}{\beta^{2}}$$

La integral de $Q^{\#}$ es acotada. Por lo tanto,

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right| = \left|f_{0}(x,v) + \int_{0}^{t} Q^{\#}(f,f) d\tau\right| \leq |f_{0}(x,v)| + \int_{0}^{t} \left|Q^{\#}(f,f)\right| d\tau$$

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right| \leq |f_{0}(x,v)| e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} + \int_{0}^{t} \left|Q^{\#}(f,f)\right| d\tau$$

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right| \leq |f_{0}(x,v)| e^{\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} + 2\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \frac{\pi^{3}}{\beta^{2}}$$

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right| \leq \|f_{0}\| e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} + 2\sigma\left\|f^{\#}\right\|^{2} e^{-\beta\left(|x|^{2}+|v|^{2}\right)} \frac{\pi^{3}}{\beta^{2}}$$

En consecuencia,

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right|e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \leq \|f_0\| + 2\sigma\left\|f^{\#}\right\|^2\frac{\pi^3}{\beta^2}$$

$$\left|\mathcal{F}f^{\#}\right|e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \leq c$$

Conclusión: $\mathcal{F}f^{\#} \in M$ siempre que $f^{\#} \in M$. O sea, $\mathcal{F} : M \to M$

Teorema 2.2. El operador $\mathcal{F}: M \to M$ es contractivo localmente.

Prueba. Sean $f^{\#}$ y $g^{\#}$ dos elementos del espacio M. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{F}f^{\#} - \mathcal{F}g^{\#}\right| = \left|\mathcal{F}(f^{\#} - g^{\#})\right| &= \left|\int_0^t [Q^{\#}(f,f) - Q^{\#}(g,g)]d\tau\right| \\
&= \Bigg|\pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u) \\
&\quad - g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') + g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u)]du\Bigg| \\
&\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\big|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') \\
&\quad + g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u) - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\big|du
\end{aligned}$$

Sumando y restando $f^{\#}g^{\#}$, la integral queda así:

$$\begin{aligned}
\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\big[\big|&f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') + f^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u') \\
&- g^{\#}(t,x,v')g^{\#}(t,x,u')\big| \\
&+ \big|g^{\#}(t,x,v)g^{\#}(t,x,u) - g^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u) + g^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u) \\
&- f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)\big|\big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\big[\big|&f^{\#}(t,x,v')[f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')] + g^{\#}(t,x,u')[f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')]\big| \\
&+ \big|g^{\#}(t,x,v)[g^{\#}(t,x,u) - f^{\#}(t,x,u)] + f^{\#}(t,x,u)[g^{\#}(t,x,v) - f^{\#}(t,x,v)]\big|\big]du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \pi\sigma\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\big[&f^{\#}(t,x,v')\big|f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')\big| + g^{\#}(t,x,u')\big|f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')\big| \\
&+ g^{\#}(t,x,v)\big|g^{\#}(t,x,u) - f^{\#}(t,x,u)\big| + f^{\#}(t,x,u)\big|g^{\#}(t,x,v) - f^{\#}(t,x,v)\big|\big]du
\end{aligned}$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \big[\left|f^{\#}(t,x,v')\right| \left|f^{\#}(t,x,u') - g^{\#}(t,x,u')\right| + \left|g^{\#}(t,x,u')\right| \left|f^{\#}(t,x,v') - g^{\#}(t,x,v')\right| + \left|g^{\#}(t,x,v)\right| \left|g^{\#}(t,x,u) - f^{\#}(t,x,u)\right| + \left|f^{\#}(t,x,u)\right| \left|g^{\#}(t,x,v) - f^{\#}(t,x,v)\right| \big] du$$

Para relacionar cada término con la norma en el espacio, se multiplica por $e^{\beta}.e^{-\beta}$ adecuado. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[& \left|f^{\#}(t,x,v')\right| e^{\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \Big|f^{\#}(t,x,u') \\
& - g^{\#}(t,x,u')\Big| e^{\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \\
& + \left|g^{\#}(t,x,u')\right| e^{\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \Big|f^{\#}(t,x,v') \\
& - g^{\#}(t,x,v')\Big| e^{\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \\
& + \left|g^{\#}(t,x,v)\right| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \Big|g^{\#}(t,x,u) \\
& - f^{\#}(t,x,u)\Big| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \\
& + \left|f^{\#}(t,x,u)\right| e^{\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \Big|g^{\#}(t,x,v) \\
& - f^{\#}(t,x,v)\Big| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \Big] du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[& \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \left\|f^{\#}-g^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \\
& + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \left\|f^{\#}-g^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \\
& + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \left\|g^{\#}-f^{\#}\right\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \\
& + \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \left\|g^{\#}-f^{\#}\right\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \Big] du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \pi\sigma \left\|f^{\#}-g^{\#}\right\| \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[& \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \\
& + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2\right)} \\
& + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} + \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \Big] du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \pi\sigma \left\|f^{\#}-g^{\#}\right\| \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[& \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v\prime|^2+\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \\
& + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta\left(\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2+\left|x+t(v-v')\right|^2+|v'|^2\right)} + \left\|g^{\#}\right\| e^{-\beta(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2)} \\
& + \left\|f^{\#}\right\| e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)} \Big] du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \pi\sigma \left\|f^{\#}-g^{\#}\right\| \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \Big[& \left(\left\|f^{\#}\right\| + \left\|g^{\#}\right\|\right) e^{-\beta\left(\left|x+t(v-v')\right|^2+|v'|^2+\left|x+t(v-u')\right|^2+|u\prime|^2\right)} \\
& + \left(\left\|f^{\#}\right\| + \left\|g^{\#}\right\|\right) e^{-\beta(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2)} \Big] du
\end{aligned}$$

$$= \pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(|x+t(v-v')|^2+|v'|^2+|x+t(v-u')|^2+|u'|^2\right)} + e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2\right)}\right]du$$

$$= \pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(|(x+tv)-tv'|^2+|v'|^2+|(x+tv)-tu')|^2+|u'|^2\right)} + e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2\right)}\right]du =$$

$$\pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(2|x+tv|^2-2t(x+tv)(v'+u')+t^2\left(|v'|^2+|u'|^2\right)+|u'|^2+|v'|^2\right)} + e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2\right)}\right]du$$

Suponemos que los choques son elásticos: $|u|^2 + |v|^2 = |u'|^2 + |v'|^2$ y que la cantidad de movimiento se conserva: $v + u = v' + u'$; al simplificar resulta

$$= \pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(2|x+tv|^2-2t(x+tv)(v+u)+t^2\left(|v|^2+|u|^2\right)+|u|^2+|v|^2\right)} + e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2\right)}\right]du$$

$$= \pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2+|x+t(v-u)|^2+|u|^2\right)} + e^{-\beta\left(|x+t(v-u)|^2+|u|^2+|x|^2+|v|^2\right)}\right]du$$

$$= \pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2} + e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right]du$$

$$= 2\pi\sigma\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|\left[e^{-\beta|x+t(v-u)|^2}e^{-\beta|u|^2}\right]du$$

Esta integral es acotada por ser de tipo gaussiana

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Se concluye que

$$|\mathcal{F}f^\# - \mathcal{F}g^\#| \leq 2\pi\sigma e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\int_{\mathbb{R}^3}|v-u|e^{-\beta|u|^2}du$$

$$|\mathcal{F}f^\# - \mathcal{F}g^\#| \leq 2\frac{\pi^3}{\beta^2}\sigma e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\|f^\# - g^\#\|(\|f^\#\| + \|g^\#\|)$$

$$\left|\mathcal{F}f^{\#} - \mathcal{F}g^{\#}\right|e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \leq 2\frac{\pi^3}{\beta^2}\sigma\left\|f^{\#} - g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\| + \left\|g^{\#}\right\|\right)$$

$$\left\|\mathcal{F}f^{\#} - \mathcal{F}g^{\#}\right\| \leq 2\frac{\pi^3}{\beta^2}\sigma\left\|f^{\#} - g^{\#}\right\|\left(\left\|f^{\#}\right\| + \left\|g^{\#}\right\|\right)$$

Definición. El conjunto de funciones con norma menor o igual a R se denomina M_R y representa una bola cerrada en el espacio X.

Se expresa así:

$$M_R = \{f \in M : \|f\| \leq R\}$$

De manera que si $f^{\#}$ y $g^{\#} \in M_R$ entonces $\|f^{\#}\| + \|g^{\#}\| \leq 2R$

$$\|\mathcal{F}f^{\#} - \mathcal{F}g^{\#}\| \leq 4\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}R\|f^{\#} - g^{\#}\|$$

Para todo $\beta > 0$ existe $R < \frac{\beta^2}{4\pi^3\sigma}$ de forma tal que $4\frac{\pi^3\sigma}{\beta^2}R < 1$

Con lo que se concluye que el operador $\mathcal{F}$ es una contracción siempre que R sea lo suficientemente pequeño.

Definición. Se dice que $f^{\#}(t,x,v)$ es una solución suave del problema de valor inicial (2.1) si satisface

$$f^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Lema 2.4. El operador $\mathcal{F}$ tiene un único punto fijo $f^{\#}$ dentro de una bola de radio R_0 para pequeños valores de $\|f_0\|$ y de $\sigma\beta^{-2}R_0$

Prueba. Se tiene en cuenta la hipótesis de dato pequeño, de manera que $f(t,x,v)$ es acotada. En particular si $f_0 \leq R/2$ y si además $f^{\#} \in M_R$, entonces nombrando la función de peso $\rho(x,v) = e^{\beta(|x|^2+|v|^2)}$ se verifica

$$|\mathcal{F}f^{\#}| \leq \rho(x,v)^{-1}\|f_0\| + 2.\pi^3.\beta^{-2}.\sigma.\rho(x,v)^{-1}\|f\|^2 \leq \rho(x,v)^{-1}\left[\frac{R}{2} + 2.\pi^3.\beta^{-2}.\sigma.R^2\right]$$

$$\leq \rho(x,v)^{-1}\left[\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\right] = \rho(x,v)^{-1}R$$

Siempre y cuando $2.\pi^3.\beta^{-2}.\sigma.R \leq 1/2$

Con estos supuestos se puede establecer que $\mathcal{F}f^{\#} \in M_R$

Luego, para R suficientemente pequeño, $\mathcal{F}: M_R \to M_R$ es contractivo, por lo tanto existe un único $f^{\#}$ que satisface la ecuación $\mathcal{F}f^{\#} = f^{\#}$.

En otras palabras, existe solución local para la ecuación integral dentro de la bola de radio R_0

$$f^{\#} = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

3. Ecuación de Boltzmann con término fuerza

La teoría de punto fijo constituye una parte importante del análisis funcional no lineal y es de suma utilidad para probar existencia de solución tanto en ecuaciones diferenciales como de ecuaciones integro-diferenciales. En el capítulo anterior se mostró existencia de solución para la ecuación sin término fuerza, usando el Teorema de punto fijo de Banach. Surge la pregunta: ¿Qué pasa cuando el sistema de partículas es perturbado con una fuerza externa? Veremos que es necesario recurrir al Teorema del Punto fijo de Krasnoselskii [4].

La ecuación de Boltzmann con término fuerza define el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \vec{F} \cdot \nabla_v f = Q(f,f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{3.1}$$

Siendo $\vec{F}$ un campo de fuerza externo.

$$\vec{F}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t,x,v) \longrightarrow \vec{F}(t,x,v) = \big(F_1(t,x,v), F_2(t,x,v), F_3(t,x,v)\big)$$

El operador de colisión $Q(f,f) = Q(f,f)(t,x,v)$ está determinado, para el caso esferas rígidas, como:

$$Q(f,f) = \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot (v-u) \left[f(t,x,v')f(t,x,u') - f(t,x,v)f(t,x,u) \right] du\, d\omega$$

El objetivo es mostrar existencia de la solución $f = f(t,x,v)$ con $t \geq 0$; $x, v \in \mathbb{R}^3$, por medio de un teorema de punto fijo en el siguiente espacio lineal:

Para $\beta > 0$, sea

$$X = \left\{ f : f \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)\ tal\ que\ existe\ c > 0, |f(t,x,v)| \leq c.e^{-\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \right\}$$

en casi toda parte.

Con norma:

$$\|f\| = máx \left\{ \operatorname*{Sup}_{t,x,v} |f(t,x,v)|\, e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}, \operatorname*{Sup}_{t,x,v} \left| \frac{\partial f(t,x,v)}{\partial v_i} \right| e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)} \right\}$$

El espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Extendiendo la definición de $f^{\#}$ vista anteriormente, se redefine

$$f^{\#}(t,x,v) = f(t, x+vt, v+Ft)$$

Para calcular la derivada de $f^{\#}$ con respecto al tiempo, introducimos las variables

$$\eta = x + vt$$

$$\xi = v + Ft$$

Así,

$$\frac{df^{\#}(t,x,v)}{dt} = \frac{df(t,x+vt,v+Ft)}{dt} = \frac{d}{dt}f(t,\eta,\xi) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\left(F + t\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + \left(F + t\frac{\partial F}{\partial t}\right)\cdot\nabla_v f$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f + F\cdot\nabla_v f + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v f$$

$$= \left(Q(f,f) + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v f\right)(t,x+vt,v+Ft) = Q^{\#}(f,f) + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v f^{\#}$$

Conclusión:

$$\frac{df^{\#}(t,x,v)}{dt} = Q^{\#}(f,f) + t\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\nabla_v f^{\#}$$

Nótese que si la fuerza externa $\vec{F}$ es independiente del tiempo, el último término se anula.

En forma integral

$$f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau + \int_0^t \tau\frac{\partial F}{\partial \tau}\cdot\nabla_v f^{\#}d\tau$$

Se definen entonces dos operadores $\mathcal{A},\mathcal{B}: X \to X$

$$f^{\#}(t,x,v) = \mathcal{B}(f^{\#}) + \mathcal{A}(f^{\#}) = \mathcal{P}(f^{\#})$$

Donde

$$\mathcal{B}(f^{\#}) = (\mathcal{B}f^{\#})(t,x,v) = \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Y

$$\mathcal{A}(f^{\#}) = (\mathcal{A}f^{\#})(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t \tau\frac{\partial F}{\partial \tau}\cdot \nabla_v f^{\#} d\tau$$

Se mostrará entonces que el operador $\mathcal{A}$ es contractivo mientras que el operador $\mathcal{B}$ es completamente continuo. La suma $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ define un operador $\mathcal{P}$, el cual satisface las hipótesis del Teorema de Krasnoselskii, por lo tanto admite un punto fijo.

3.1 Conjunto convexo

Definición. El conjunto M en un espacio lineal se llama *convexo* si, y sólo si, para todo $u, v \in M$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ implica que $\alpha u + (1-\alpha)v \in M$.

Proposición. Sea X un espacio normado, y sea $u_0 \in X$, $r \geq 0$ dado. Entonces, la bola $B_r = \{u \in X : \|u - u_0\| \leq r\}$ es convexa.

Prueba. Si $u, v \in B$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces

$$\|\alpha u + (1-\alpha)v - u_0\| = \|\alpha(u-u_0) + (1-\alpha)(v-u_0)\|$$

$$\leq \|\alpha(u-u_0)\| + \|(1-\alpha)(v-u_0)\|$$

$$= \alpha\|(u-u_0)\| + (1-\alpha)\|(v-u_0)\| \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r$$

Por lo tanto $\|\alpha u + (1-\alpha)v - u_0\| \leq r$. Luego $\alpha u + (1-\alpha)v \in B_r$.

3.2 Operador continuo

Sean X e Y dos espacios lineales normados sobre el mismo campo escalar $\mathbb{R}$.

Se dice que un operador lineal T es continuo en un punto $x_0 \in X$ si existe una sucesión (x_n) en X tal que $\|x_n - x_0\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ implica que $\|Tx_n - Tx_0\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto es, $x_n \to x_0$ en X cuando $n \to \infty$ implica que $Tx_n \to Tx_0$ en Y cuando $n \to \infty$. Lo que es equivalente a la idea que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$, siempre que $\|x - x_0\| < \delta$.

Definición. Sean X e Y dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal. Entonces, T es continuo si, y sólo si, existe una constante $M \geq 0$ tal que $\forall x \in X$: $\|Tx\| \leq M. \|x\|$.

Lema 3.1. El operador $\mathcal{B}$ cumple que $\mathcal{B}: X \to X$

Prueba. Sea $f^{\#} \in X$

$$|\mathcal{B}f^{\#}| = \left|\int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau\right| \leq \int_0^t |Q^{\#}(f,f)|d\tau$$

Por definición

$$Q^{\#}(f,f) = \sigma \int_{S_+^2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot (v-u)\, [f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)]du\, d\omega$$

$$= \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|[f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u') - f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)]du$$

Por la desigualdad triangular:

$$|Q^{\#}(f,f)| \leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u|[|f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')| + |f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)|]du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u||f^{\#}(t,x,v')f^{\#}(t,x,u')|du + \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u||f^{\#}(t,x,v)f^{\#}(t,x,u)|du$$

$$\leq \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u||f^{\#}(t,x,v')||f^{\#}(t,x,u')|du + \pi\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |v-u||f^{\#}(t,x,v)||f^{\#}(t,x,u)|du$$

El lema 2.3 del capítulo anterior muestra el cálculo detallado que dicho operador es acotado.

Se integra en $[0,t]$

$$\int_0^t |Q^{\#}(f,f)|\, d\tau \leq 2\pi\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\int_0^t e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} d\tau\right] e^{-\beta|u|^2} du$$

$$\leq 2\pi\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| \left[\int_0^\infty e^{-\beta(|x+\tau(v-u)|^2)} d\tau\right] e^{-\beta|u|^2} du$$

$$\leq 2\pi\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \int_{\mathbb{R}^3} |v-u| e^{-\beta|u|^2} du$$

$$\leq 2\pi\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\right)^3 \leq 2\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \frac{\pi^3}{\beta^2}$$

De donde

$$\int_0^t |Q^{\#}(f,f)|\, d\tau \leq 2\sigma \|f^{\#}\|^2 e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \frac{\pi^3}{\beta^2}$$

Así

$$\operatorname*{Sup}_{t,x,v}\left\{\left|\int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau\right| e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\} \leq 2\sigma\|f^{\#}\|^2\frac{\pi^3}{\beta^2}$$

Se concluye que

$$\int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau \in X$$

Esto prueba que $\mathcal{B}f^{\#} \in X$, luego $\mathcal{B}: X \to X$

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{B}: X_R \to X$ un operador definido por

$$\mathcal{B}f^{\#} = (\mathcal{B}f^{\#})(t,x,v) = \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Entonces $\mathcal{B}$ es continuo.

Prueba. Del lema anterior se desprende que

$$\operatorname*{Sup}_{t,x,v}\left\{\left|\int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau\right| e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\} = \operatorname*{Sup}_{t,x,v}\left\{|\mathcal{B}f^{\#}|e^{\beta\left(|x|^2+|v|^2\right)}\right\} = \|\mathcal{B}f^{\#}\| \leq 2\sigma\|f^{\#}\|^2\frac{\pi^3}{\beta^2}$$

$$= \left(2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}\|f^{\#}\|\right)\|f^{\#}\| = M.\|f^{\#}\|$$

$$\|\mathcal{B}f^{\#}\| \leq M.\|f^{\#}\|$$

Siendo la constante

$$M = 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}\|f^{\#}\|$$

3.3 Operador compacto

En el espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ de operadores lineales, se encuentra el espacio formado por los operadores acotados $\mathfrak{B}(X,Y)$ siendo X e Y espacios normados. Un subconjunto importante son los llamados operadores compactos debido a sus propiedades y a las relaciones que guarda con las sucesiones.

Un operador compacto implica que para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{T(x_n)\}$ tiene una sub-sucesión convergente en Y, y viceversa.

Definición. Un conjunto M se dice que es compacto (secuencialmente compacto) si, y sólo si, cualquier sucesión $\{u_n\}$ tiene una sub-sucesión convergente a un elemento u que pertenece a M. En caso de que u no pertenezca a M, el conjunto se denomina relativamente compacto. El conjunto M es compacto si, y sólo si, es relativamente compacto y cerrado.

Todo conjunto que sea relativamente compacto es acotado.

Definición. Sea (X,Ω,μ) un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{M}$ un subconjunto de $L^1(\mu)$. Decimos que $\mathcal{M}$ es equi-integrable si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para cualquier $A \in \Omega$ con $\mu(\mathrm{A}) \leq \delta$ y para toda $f \in \mathcal{M}$,

$$\int_{\mathrm{A}} |f|\, d\mu < \varepsilon$$

Teorema de Dunford-Pettis. Sea $\mathcal{M}$ un conjunto acotado de $L^1(\Omega)$. Entonces $\mathcal{M}$ tiene clausura compacta en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$ si, y sólo si, $\mathcal{M}$ es equi-integrable, esto es,

$$(a) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ tal\ que \\ \int_A |f| < \varepsilon \quad \forall A \subset \Omega, medible\ con\ |A| < \delta, \forall f \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Y

$$(b) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists \omega \subset \Omega, medible\ con\ |\omega| < \infty\ tal\ que \\ \int_{\Omega/\omega} |f| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Otra forma de mostrar que un conjunto sea relativamente compacto es probando que es acotado y además equi-integrable.

Definición. El conjunto de funciones integrables con norma menor o igual a R se denomina $X_R = \{f \in X \colon \|f\| \le R\}$

Teorema 3.2. Sea $\mathcal{B}\colon X_R \to X$ un operador definido por

$$\mathcal{B}f^{\#} = (\mathcal{B}f^{\#})(t,x,v) = \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau$$

Entonces $\mathcal{B}$ es compacto.

Prueba.

Sea $A \subset \Sigma$ medible, tal que $m(A) < \delta$ y $f^{\#} \in X_R$.

$$\int_E |\mathcal{B}f^{\#}|\, d\mu \le \int_E \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau \le 2\sigma \frac{\pi^3}{\beta^2} \|f^{\#}\|^2 m(A)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{2\sigma\frac{\pi^3 R^2}{\beta^2}}$ tal que

$$\int_E |\mathcal{B}f^{\#}|\,d\mu \leq 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}\|f^{\#}\|^2 m(A) \leq 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2 m(A) \leq 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2 \leq \frac{\varepsilon'}{2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2} = \varepsilon$$

De otra parte, se elige un conjunto cerrado F con $\Omega - F = G$ tal que

$$m(\Omega - F) < \frac{\varepsilon}{2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2}$$

Luego

$$\int_G |\mathcal{B}f^{\#}|\,d\mu \leq \int_G \int_0^t |Q^{\#}(f,f)|d\tau d\mu \leq \int_G 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}\|f^{\#}\|^2 d\mu \leq \int_G 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2 d\mu \leq 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2 m(G)$$
$$\leq 2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2\frac{\varepsilon'}{2\sigma\frac{\pi^3}{\beta^2}R^2} = \varepsilon$$

Finalmente, el conjunto $X_f = \{\mathcal{B}f^{\#}: f^{\#} \in X_R\}$, $X_f \subset X$ es acotado, a la vez que $\mathcal{B}$ es un operador continuo y X_R es acotado.

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F, $F \subset \Omega$ tal que la medida exterior $m^*(\Omega - F) < \varepsilon$

El operador $\mathcal{B}$ es compacto en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.

3.4 Operador contractivo

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Un mapeo $F: X \to X$ se dice Lipschitziano si existe una constante $\alpha \geq 0$ que satisface para todo $x, y \in X$

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq \alpha d(x, y)$$

La mínima α para la cual la desigualdad es verdadera, se denomina constante de Lipschitz para F y se denota por L. Si $L < 1$ decimos que F es una contracción. En el caso que $L = 1$ se dice que F es no expansiva.

En la situación particular que simplemente se cumpla para todo $x, y \in X$

$$d\big(F(x), F(y)\big) < d(x, y)$$

diremos que F es una pseudo-contracción.

Una pseudo-contracción F podría no tener ningún punto fijo aunque X sea completo. Por ejemplo, $X = [0, \infty)$ con $f(x) = x + e^{-x}$. No obstante, es suficiente con que X sea compacto para que exista un único punto fijo.

Teorema 3.3. Si X es un espacio métrico compacto y el operador $T: X \to X$ satisface para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, que

$$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$$

Entonces T tiene un único punto fijo en X.

Prueba. La aplicación $x \longmapsto \|Tx - x\|$ es continua en X; como X es compacto dicha aplicación alcanza su valor mínimo en un punto $x_0 \in X$, por lo que x_0 es un punto fijo de T, porque de otra forma se tendría que $\|T(Tx_0) - Tx_0\| < \|Tx_0 - x_0\|$, lo cual es una contradicción.

Para la unicidad suponemos que T tiene dos puntos fijos diferentes: $Tx = x$ y $Ty = y$. Entonces $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$, así que $\|x - y\| < \|x - y\|$ lo cual es absurdo, por lo que $x = y$. El punto fijo es único.

Lema 3.2. Sea $\mathcal{A}: X_R \to X$ un operador definido por

$$\mathcal{A}f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v f^{\#} d\tau$$

Siendo $\vec{F}$ un campo vectorial diferenciable Lipschitz continuo. Entonces $\mathcal{A}$ es contractivo.

Prueba. Sean $f^{\#}(t,x,v)$ y $g^{\#}(t,x,v)$ dos elementos del espacio solución X:

$$|\mathcal{A}f^{\#} - \mathcal{A}g^{\#}| = \left| \int_0^t \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v (f^{\#} - g^{\#}) d\tau \right| \leq \int_0^t |\tau| \left| \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v (f^{\#} - g^{\#}) \right| d\tau$$

$$= \int_0^t \tau \left| \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v (f^{\#} - g^{\#}) \right| d\tau = \int_0^t \tau \left| \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial \tau} \frac{\partial (f^{\#} - g^{\#})}{\partial v_i} \right| d\tau$$

Por el *Teorema del Valor Medio* las componentes F_τ son acotadas por $M_i > 0$, entonces para todo $i = 1,2,3$ se tiene que

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial F_1}{\partial \tau}\right| \le M_1 \\ \left|\dfrac{\partial F_2}{\partial \tau}\right| \le M_2 \\ \left|\dfrac{\partial F_3}{\partial \tau}\right| \le M_3 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial \tau}\right| \le M' = \max\{M_1, M_2, M_3\}$$

Luego

$$|\mathcal{A}f^{\#} - \mathcal{A}g^{\#}| \le \int_0^t \tau \left|\sum_{i=1}^{3} M' \frac{\partial (f^{\#} - g^{\#})}{\partial v_i}\right| d\tau \le \int_0^t \tau M' \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial (f^{\#} - g^{\#})}{\partial v_i}\right| d\tau$$

$$\le \sup_{t,x,v} e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_0^t \tau M' \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial (f^{\#} - g^{\#})}{\partial v_i}\right| d\tau$$

$$\le e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \int_0^t 3\tau M' \|f^{\#} - g^{\#}\| d\tau \le e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \left(\int_0^T 3\tau M' d\tau \right) \|f^{\#} - g^{\#}\|$$

$$= e^{-\beta(|x|^2+|v|^2)} \frac{3}{2} T^2 M'. \|f^{\#} - g^{\#}\|$$

Finalmente,

$$\sup_{t,x,v} |\mathcal{A}f^{\#} - \mathcal{A}g| e^{\beta(|x|^2+|v|^2)} = \|\mathcal{A}f^{\#} - \mathcal{A}g^{\#}\| \le K \|f^{\#} - g^{\#}\|$$

Para cierto intervalo $[0, T]$ en donde $3T^2M' < 2$

De manera que existe una constante K contractiva de $\mathcal{A}$, $1 > K > 0$ tal que $\|\mathcal{A}f^{\#} - \mathcal{A}g^{\#}\| \le K\|f^{\#} - g^{\#}\|$.

El operador $\mathcal{A}$ es contractivo.

3.5 Teorema de Krasnoselskii

Para mostrar el teorema principal, se debe disponer de un conjunto convexo y de un operador $\mathcal{P}$, que sea expresado como la suma de un operador $\mathcal{A}$ contractivo, con otro operador $\mathcal{B}$ continuo y compacto.

Lema 3.3. Si $\mathcal{A}$ es una contracción $\mathcal{A}: \mathcal{M} \to X$ entonces $I - \mathcal{A}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{M}$ hacia $(I - \mathcal{A}\,)\,\mathcal{M}$.

Teorema 3.4. Sea $\mathcal{M}$ un conjunto convexo no-vacío y una aplicación

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{B}(f) + \mathcal{A}(f)$$

Con las siguientes condiciones:

i) $\mathcal{A}(g) + \mathcal{B}(h) \in \mathcal{M}.\, (\forall\, g, h\ \in \mathcal{M})$

ii) $\mathcal{A}$ es una contracción.

iii) $\mathcal{B}$ es continuo y compacto.

Entonces, $\mathcal{P}$ tiene un punto fijo.

Prueba. Para cada $h \in \mathcal{M}$, la ecuación: $g = \mathcal{A}(g) + \mathcal{B}(h)$ tiene una única solución g en $\mathcal{M}$ debido a que la correspondencia $g \to \mathcal{A}(g) + \mathcal{B}(h)$ define una aplicación contractiva de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$. Luego $g = (I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}h$ está en $\mathcal{M}$. Del lema 3.3 se desprende que el operador $(I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ es continuo y compacto de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$. Por el Teorema de Schauder, Teorema 1.1, se desprende que $(I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ tiene un punto fijo en $\mathcal{M}$.

Una prueba detallada puede ser consultada en las *notas de clase*: Análisis Funcional No Lineal, de R. Galeano. [14]

El Teorema anterior puede ser reformulado de la siguiente manera:

Teorema 3.5. Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X y sean dos operadores $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathcal{M} \rightarrow X$ tales que

i) $\mathcal{A}(f) + \mathcal{B}(f) \in \mathcal{M}. (\forall f \in \mathcal{M})$

ii) $\mathcal{A}$ es una contracción, y

iii) $\mathcal{B}$ es completamente continuo.

Entonces la ecuación $\mathcal{A}(f) + \mathcal{B}(f) = f$ tiene una solución.

Sea el subconjunto $\mathcal{M}$ definido como $\mathcal{M} = M_R = \{f \in M: \|f\| \leq R\}$ el conjunto de funciones con norma menor o igual a R. Según se probó en la sección 3.1 toda bola de radio R es convexa. Además $\mathcal{M}$ es cerrado y acotado.

Para todo $f \in \mathcal{M}$ se cumple que

$$f_0(x, v) + \int_0^t Q^{\#}(f, f) d\tau + \int_0^t \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v f^{\#} d\tau \in \mathcal{M}$$

El operador $\mathcal{A}: \mathcal{M} \rightarrow X$

$$\mathcal{A}(f) = f_0(x, v) + \int_0^t \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v f d\tau$$

es un operador contractivo.

El operador $\mathcal{B}: \mathcal{M} \to X$

$$\mathcal{B}(f) = \int_0^t Q(f,f)(\tau, x + v\tau, v + F\tau)d\tau$$

es compacto.

Luego se puede establecer que la ecuación

$$f^{\#}(t,x,v) = f_0(x,v) + \int_0^t Q^{\#}(f,f)d\tau + \int_0^t \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \nabla_v f^{\#} d\tau$$

admite una solución. Lo que asegura que el problema de Cauchy inicialmente planteado, es resoluble:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \vec{F} \cdot \nabla_v f = Q(f,f) \\ f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases}$$

Este resultado ha sido el aporte principal del presente trabajo.

4. Consideraciones finales

El resultado principal de este trabajo establece que el problema de Cauchy para la ecuación de Boltzmann, caso esferas rígidas, cuando el dato inicial tiende a cero, es resoluble. El método usado es la técnica de Punto Fijo, tanto en ausencia como en presencia de una fuerza externa. Cuando un sistema de partículas alcanza su estado de equilibrio y es perturbado por algún agente externo, durante un tiempo finito, el comportamiento cambia transitoriamente, pero el estado anterior se restablece. De esta manera se puede concluir que una fuerza externa no altera la existencia de la función de distribución $f(t, x, v)$.

La existencia y unicidad de la solución fue probada cuando la fuerza externa es constante, mientras que para el caso de fuerza externa variable se alcanzó a probar la mera existencia. Para abordar la unicidad se debe recurrir a otras técnicas.

El caso de las colisiones elásticas es ideal y sirve como punto de partida para analizar choques reales. Lo que sigue es abordar el caso de colisiones inelásticas, con un coeficiente de restitución. Otros modelos se siguen investigando entre los que se cuentan el caso relativista, y la ecuación de Vlasov en física del plasma.

El uso de la teoría de punto fijo a la resolución de ecuaciones diferenciales e integrales no lineales y depende de una plausible elección de los teoremas en cuestión y de la forma en que se eligen los operadores al momento de ser sumados.

De un operador contractivo se garantiza existencia y unicidad de solución; de la suma de dos operadores contractivos no puede concluirse nada; y de un operador contractivo con otro compacto se asegura existencia solamente. El camino sigue abierto.

Bibliografía

[1] Agarwal,R., Meehan, M., & O´Regan, D. (2001). Fixed point theory and applications. (Vol. 141). Cambridge university press.

[2] Almanza, M., Galeano, R. & Ortega, P. (2012). Stationary Boltzmann equation with boundary data depending on the Maxwellian. Boletín de Matemáticas. 20(2).

[3] Bardos, C., Gamba, I., Golse, F. (2014). Global solutions of the Boltzmann equation over $\mathbb{R}^n$ near Global Maxwellians with small Mass. arXiv preprint arXiv: 1409-1430.

[4] Burton, T.A. (1998). A fixed-point theorem of Krasnoselskii. Applied Mathematics Letters, 11(1), 85-88.

[5] *Cercignani, C. (1988).The Boltzmann equation and its applications. Applied Mathematical Sciences 67. New York: Springer-Verlag.*

[6] DiPerna, R.J., & Lions, P.L. (1989). Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. Communications on Pure and Applied Mathematics, 42(6), 729-757.

[7] Galeano, R., Orozco B. & Vásquez O. (2005). Ecuación Relativística de Boltzmann cerca al vacío. Boletín de Matemáticas, 5(1), 53-61

[8] Galeano, R. (2007). *The Boltzmann equation with Force Term near the Vacuum*. Revista de la Unión Matemática Argentina, 48(1), 55-63.

[9] Galeano, R. (2012). *Ecuación homogénea de Boltzmann con término fuerza*. Boletín de Matemáticas, 15(2), 84-91.

[10] Galeano, R. (2017). *Análisis Funcional No Lineal*. Notas de clase.

[11] Glangetas, L., Li, H. (2015). Sharp regularity properties for the non-cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation.

[12] Glassey, R. T. (1996). *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*. SIAM.

[13] Gressman, P. & Strain, R. (2010). *Global Classical Solutions of the Boltzmann equation with long-range interactions and soft potentials*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 107(13), 5744-2749.

[14] Polewczak, J. (1988).*Classical solution of the Nonlinear Boltzmann equation in all* $\mathbb{R}^3$*: Asymptotic Behavior of Solutions*, J. Stat. Phys., 50 (3&4), 611-632.

[15] Shinbrot, M and Kaniel, S. (1978).*The Boltzmann equation: Uniqueness and local existence*, Comm. Math. Phys. 58, 65-84.