SOLUCIONES RADIALMENTE SIMÉTRICAS DE UN PROBLEMA ELÍPTICO NO LINEAL CON CONDICIÓN DE FRONTERA DE NEUMANN EN UNA DIMENSIÓN.

ALFREDO YERMAN CORTÉS VERBEL

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA DE INDIAS, COLOMBIA
2018

SOLUCIONES RADIALMENTE SIMÉTRICAS DE UN PROBLEMA ELÍPTICO NO LINEAL CON CONDICIÓN DE FRONTERA DE NEUMANN EN UNA DIMENSIÓN.

ALFREDO YERMAN CORTÉS VERBEL

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

PhD. RUBÉN DARÍO ORTIZ ORTIZ
DIRECTOR

PhD. ANA MAGNOLIA MARÍN RAMIREZ
CODIRECTORA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA DE INDIAS, COLOMBIA
2018

1827 ¡Siempre a la altura de los tiempos!	UNIVERSIDAD DE CARTAGENA	CÓDIGO: FO-GR-011
	RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN	VERSIÓN: 00
	CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	PAGINA: 1

FECHA		
DD	MM	AAAA
22	10	2018

1. Presentación del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).					
Código	Documento de Identidad		Apellidos	Nombres	Correo electrónico
	Tipo	número			
1711110002	C.C.	3811580	Cortés Verbel	Alfredo Yerman	alfredoyerman@gmail.com

Programa	Maestría en Matemáticas
Facultad	Ciencias Exactas y Natutarales
Título al que opta	Magister en Matemáticas
Asesor	PhD Rubén Darío Ortiz Ortiz

Título de la obra: SOLUCIONES RADIALMENTE SIMÉTRICAS DE UN PROBLEMA ELÍPTICO NO LINEAL CON CONDICIÓN DE FRONTERA DE NEUMANN EN UNA DIMENSIÓN.

Palabras claves (materias):

Principio del máximo, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Interpolación de VanderMonde, radialmente simétrica

2. Autorización de publicación de versión electronica del trabajo (trabajo de grado, investigación o tesis).

Con esta autorización hago entrega del trabajo de grado (investigación o tesis) y de sus anexos (si existen), de forma gratuita en forma digital o electrónica (CD-ROM, DVD) y doy plena autorización a la Universidad de Cartagena, de forma indefinida, para que en los terminos establecidos en la ley 23 de 1982, la Ley 44 de 1993, leyes y jurisprudencia vigente al respecto, haga la publicación de éste, con fines educativos. Esta autorización, es válida sobre la obra en formato o soporte material, digital, electrónico o virtual, para usos en red, internet, intranet, biblioteca digital o cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR, expresa que el trabajo de grado (investigación o tesis) objeto de la presente autorización, es original y la elaboró sin quebrantar ni suplantar los derechos de autor de terceros, de tal forma que el Trabajo es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre éste. En caso de queja o acción por parte de un tercero referente a los derechos de autor sobre el trabajo de grado en cuestión EL AUTOR, asumirá la responsabilidad total, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos, la Universidad de Cartagena actúa como un tercero de buena fe.

Toda persona que consulte ya sea la biblioteca o en medio electrónico podrá copiar apartes del texto **citando** siempre la fuentes, es decir el título del trabajo, autor y año.

Esta autorización no implica renunciar a la facultad que tengo de publicar total o parcialmente la obra. La autorización debe estar respaldada por las firmas de todos los autores del trabajo de grado.

Si autorizo

4. Firma	
Firma Autor 1 ____	Firma Autor 2 ____
Firma Autor 3 ____	Firma Autor 4 ____

Dedicado a:
Isaac, el campeón de Papá,
Diana, la niña de mis sueños.

Índice general

Agradecimientos

A Dios; toda sabiduria provine de Él.
A mi familia; apoyo y motivo para este trabajo,
A Francisco Javier Cabeza Paz (Q.E.P.D), quien fue mi profesor de matemáticas durante la secundaria.
A mis profesores tutores durante la maestría: Rubén Darío Ortiz y Ana Magnolia Marín; por su paciencia, consideración y apoyo.

Resumen

En este trabajo se estudiará la solución de una ecuación diferencial elíptica no lineal con problema de frontera de Neumann, para un operador elíptico

$$L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x). \tag{1}$$

en el intervalo $(-1, 1)$. Es decir, a partir de lo expuesto en [2] sobre las soluciones simétricas del problema elíptico con condición de Neumann

$$a\Delta u + b\sum_{i=1}^{n} u_i = f(u) \text{ en } B. \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{u}} = g(u) \text{ sobre } \partial B. \tag{3}$$

donde $\bar{B}$ es una bola cerrada, se aplicará la técnica usada por Marín A.M. y Ortiz. R.D. a problemas elípticos no lineales sobre el operador definido en la ecuación (1). Se verán las condiciones de las soluciones del problema elíptico con condición de Neumann (5) y (6), suponiendo $a(x)$, $c(x)$ funciones acotadas y simétricas respecto al origen definidas de $[-1, 1]$ a $\mathbb{R}$, y $c(x) \leq 0$ para todo punto del intervalo $[-1, 1]$, $b(x)$ acotada y par y $f(x)$ estrictamente creciente.

Introducción

Un interesante problema en la geometría diferencial y las ecuaciones diferenciales elípticas es el estudio del comportamiento de las soluciones de

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) \text{ en } B. \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{u}} = g(u) \text{ sobre } \partial B. \end{cases}$$

Donde B es una bola unitaria en $\mathbb{R}^+$, es la derivada normal exterior de ∂B , y f, g son funciones definidas en $\mathbb{R}$. Para $n \geq 3$ el problema anterior aparece en el estudio de deformaciones conformes de la métrica estándar sobre la bola unitaria $\overline{B}$ que tiene curvatura escalar en B y curvatura media sobre ∂B preescritas. El profesor José Escobar estudió completamente tales métricas; además probó que las soluciones son simétricas con respecto a algún punto (Escobar, 1990). Ahora el Principio del Máximo nos permite obtener la unicidad de la solución de ciertos problemas con condiciones de frontera de tipo Dirichlet y Neumann. Esta y otras razones hacen muy interesante el estudio del Principio del Máximo de diferentes formas, sus generalizaciones y el lema de Hopf. Este principio junto con el de reflexión de Alexandrov, se han usado muchas veces para probar simetrías con respecto a un punto o un plano y para determinar el comportamiento simétrico - asintótico de soluciones de algunos problemas elípticos. La primera persona en documentar esta técnica fue J. Serrin, (1971) quien probó que “Si u es una solución positiva del problema

$$\Delta u = -1 \text{ en } \Omega$$

con

$$u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial v} = \text{ Constante sobre } \partial\Omega,$$

entonces Ω es una bola y u es radialmente simétrica con respecto al centro de Ω. Luego prueba que: Si Ω esta en una bola, $f \in C^1(\mathbb{R})$ y u es una solución positiva de el problema

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ en } \Omega, \tag{4}$$

el cual se anula en la frontera, entonces u es radialmente simétrica con respecto al centro de la bola; finalmente usando el método de reflexión de Alexandrov y una versión del Principio del Máximo para dominios delgados, Beresticky y Nirenberg hacen una generalización.

Por otra parte, el principio del máximo es una herramienta útil para el estudio de las ecuaciones diferenciales debido a que permite obtener información de la solución de una ecuación diferencial sin conocerla explícitamente; este nos permite obtener cotas o aproximaciones de soluciones (Cerón Gómez, 2008). Así mismo aparece en un sinnúmero de aplicaciones a las ecuaciones diferenciales. Este principio no es más que la generalización del siguiente hecho elemental del cálculo: Dada cualquier función f la cual satisface la desigualdad $f'' > 0$ sobre un intervalo (a, b), esta alcanza su valor máximo en los extremos del intervalo, o de forma más general diremos que una función f satisface el principio del máximo si ésta satisface una desigualdad diferencial en un dominio D y alcanza su máximo en la frontera de D. Presentaremos la definición básica de este principio y su aplicabilidad a las ecuaciones diferenciales elípticas.

Para conseguir el objetivo expuesto, en primer lugar consideraremos algunos preliminares tales como el Principio del Máximo y el Mínimo en una dimensión para la función $u(x)$ que satisface las desigualdades diferenciales $a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) < 0$ y $a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) > 0$ en el intervalo $[-1, 1]$; el problema (2) será reducido a una dimensión y se aplicará al operador $L(u)$ definido en (1). Es decir se demostrará el principio del máximo y del mínimo para el operador $L(u)$ definido en (2) para después aplicarlo en la demostración de la simetría de $u(x)$ en los problemas de ecuaciones diferenciales elípticas de la forma $L(u) = f(u)$ y $L(u) = uf(u)$ con condición de frontera de Neumann; luego se verificará que la función $u(x)$ es constante si alcanza un máximo no negativo en un punto interior del intervalo $(-1, 1)$ y satisface $a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \geq 0$ en $(-1, 1)$ con $c(x) \leq 0$ y a y c acotadas. Finalmente se resolverá de forma numérica el problema expuesto en las ecuaciones (5) y (6) y se verificará las condiciones de la solución $u(x)$; es decir, se aplicarán las diferencias finitas centrales al problema definido en (5) y se utilizará la interpolación de Vandermonde para hallar el polinomio interpolador que aproxima la solución del problema, en los casos posible se contrastará la solución numérica con la solución analítica.

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(u). \\ u'(1) = -u'(-1). \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = uf(u). \\ u'(1) = -u'(-1). \end{cases} \tag{6}$$

El contenido del trabajo es como se describe a continuación. El capítulo 1 presentamos los conceptos preliminares que guardan relación con los cálculos y conceptos utilizados a lo largo del trabajo, en primer lugar definimos el principio del máximo y algunos teoremas relevantes. En el capitulo 2 se estudiarán las soluciones simétricas para una ecuación elíptica no lineal con condiciones de frontera de Newmann; luego en el capítulo 3 se darán aproximaciones numéricas al problema dado en las ecuaciones 5 y 6.

Finalmente el capítulo 4 correponde a las conclusiones alrededor del cumplimiento del objetivo trazado.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Consideraciones Generales

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) involucran derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente y tienen algunas aplicaciones en el campo científico. Con el uso de las EDO para resolver problemas aplicados es simplificado mucho el modelo de la realidad física que conduce a tales problemas. Todo ello se debe a que en muchas fórmulas matemáticas aparece una sola variable independiente sobre la que dependen todas las otras variables pertinentes. Las EDO son útiles aunque limitan la clase de problemas que podamos investigar, ya que en algunos casos se necesitan varias variables independientes. Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático en el que se haga intervenir dos o más variables independientes conduce a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP). Estas las podríamos clasificar en tres grandes grupos

- *Ecuaciones de tipo Hiperbólico*: Problemas que refieren fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas.
- *Ecuaciones de tipo Parabólico*: Problemas que se presentan al estudiar los procesos de conductibilidad térmica y difusión.
- *Ecuaciones de tipo Elíptico*: Problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, o sea que no cambian con el tiempo.

Definición 1.1.1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP))**.** *Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:*

$$F\left(x_1, x_2, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., , \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}\right) = 0, \tag{1.1}$$

que permite relacionar las variables independientes $x_i, \forall i = 1, , 2, ...n$, la función que se busca y sus derivadas parciales. Se cumple que: $k_i, \forall i = 1, 2, ..., n$ son enteros no negativos tales que:

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = m. \tag{1.2}$$

Definición 1.1.2 (Orden de una EDP)**.** *Llamamos al valor m dado por la ecuación (1.2) orden de una EDP. Este es el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación (1.1).*

Definición 1.1.3 (Solución de EDP)**.** *Para la ecuación definida en (1.1) de orden m dado por (1.2) se llama solución de dicha EDP en cierta región D de variación de las x_i,$\forall i = 1, 2, ...n$, a una función cualquiera $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^m(D)$ tal que al sustituir u, y sus derivadas en (1.1) la última se convierte en la identidad respecto a x_1,$\forall i = 1, 2, ..., n$ en la región D.*

Definición 1.1.4 (EDP Lineal)**.** *La ecuación en derivadas parciales se llama lineal, si ésta es lineal respecto a la función buscada y todas sus derivadas que forman parte de la ecuación. En caso contrario se llama no lineal.*

Definición 1.1.5. *La EDP de segundo orden para la función de dos variables independientes x e y en el caso general tiene la forma*

$$\begin{aligned} A(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} & \\ +a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + c(x,y)u(x,y) &= f(x,y). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Siendo $A(x,y), B(x,y), C(x,y), a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ funciones de las variables x e y en una región $D \subset \mathbb{R}^2$, y la función incógnita $u = u(x,y)$. Si $f(x,y) = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^2$, la ecuación (1.3) se llama homogénea (EDPH). Si designamos el primer miembro de (1.3) por $L(u)$ tenemos: $L[u] = f(x,y)$ y su correspondiente homogénea $L[u] = 0$. El operador L es el operador diferencial definido en todo caso en el espacio lineal $C^2(D)$.

Definición 1.1.6. *Sea la EDP de segundo orden dada en (1.3) en una cierta región, se dice:*

a) Hiperbólica *en Ω, si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en Ω.*

b) Parabólica *en Ω, si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en Ω.*

c) Elíptica *en Ω, si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en Ω.*

Los procesos a ciclo fijo, cuando la función buscada no depende del tiempo, se determinan por las ecuaciones de tipo elíptico.
Para describir completamente uno u otro proceso físico es insuficiente sólo la ecuación diferencial del proceso, hace falta plantear el estado inicial de este proceso (*Condiciones iniciales*) y el régimen en la frontera S de aquella región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, en la cual tiene lugar el proceso (*Condiciones de frontera*). Esto se debe a la no unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales . Se distinguen tres tipos principales de problemas para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

- El problema de Cauchy para las ecuaciones de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales, la región Ω coincide con todo el espacio $\mathbb{R}^n$, las condiciones de frontera se omiten.
- El problema de contorno para las ecuaciones de tipo elíptico: se plantean las condiciones de la frontera S de la región Ω, las condiciones iniciales se omiten.
- El problema mixto para las ecuaciones de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales y las de frontera, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Las condiciones de frontera determinan la interacción del objeto con el medio que lo rodea, luego solo tienen sentido cuando el objeto estudiado tiene frontera. Se consideran los tres tipos de condiciones de frontera.

- *Dirichlet*: Consisten en fijar el valor de la función u en los puntos de la frontera,$u(x,y) = f_1(P)$, $P \in S$
- *Neumann:* Consisten en fijar el valor de la derivada en la dirección normal exterior $\frac{\partial u}{\partial n}$ en los puntos de la frontera, $\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_S = f_2(P)$, $P \in S$ En el caso de una dimensión $\frac{\partial u}{\partial n} = u_x$ en el extremo derecho y $\frac{\partial u}{\partial n} = -u_x$ en el extremo izquierdo.
- Mixtas: Consisten en considerar una condición de tipo Dirichlet en un extremo y una condición de tipo Neumann en el otro, $\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} + hu(x,y)\right|_S = f_3(P)$, $P \in S$,

  Donde f_1, f_2, f_3 y h son funciones dadas.

Definición 1.1.7 (Función Radial)**.** *Una función $\Phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ es llamada radial si existe una función univariada $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\Phi(x) = \phi(r).$$

Donde $r = \|x\|$, y $\| * \|$ es alguna norma sobre $\mathbb{R}^s$, usualmente la norma euclidiana.

Definición 1.1.8 (Función Radialmente Simétrica)**.** *Dada una función radial Φ y un par de puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^s$, si $\|x_1\| = \|x_2\|$ implica que $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, entonces Φ es radialmente simétrica respecto de su centro; el valor de la función radial es constante para puntos a la misma distancia del origen o del centro fijo elegido.*

1.2. Principio del Máximo

Sea $u \in C^2((-1,1)) \cup C^0([-1,1])$ una solución de

$$L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(u(x)),$$

sobre $(-1,1)$ con $u'(1) = -u'(-1)$; donde $a(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ y $b(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas y simétricas con respecto al origen tal que $a(x) > 0$ y $c(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [-1,1]$, y además

$$Lu(x) > 0, \forall x \in [-1,1], \tag{1.4}$$

u no puede alcanzar su valor máximo en un punto interior al intervalo $[-1,1]$; esto es, si la anterior expresión (1.4) se verifica, entonces la función u alcanza su máximo en los extremos del intervalo, pues si suponemos que la función u alcanza su valor máximo en $d \in (-1,1)$, entonces tenemos por la *anulación de la derivada en un extremo interior*[1] que $u'(d) = 0$ y además por el *criterio de la derivada segunda para extremos en un punto critico*[2] queda que $u''(d) \leqslant 0$; pero no cumplirá la desigualdad en (1.4) dado que $u(d) > 0$. Teniendo presente lo anterior, y a partir de la expuesto por Marín A.M. en [11] tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1. *Supóngase que $u(x)$ es una función no constante que satisface la desigualdad diferencial*

$$L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \geq 0,$$

en $(-1,1)$ y tiene derivada laterales en -1 y 1. Supongamos $a(x), c(x)$ son acotadas en cada subintervalo cerrado de $(-1,1)$ con $a(x) > 0$ y $c(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [-1,1]$,

a) Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = -1$ y $b(x)$ esta acotada a la izquierda de $x = -1$ entonces $u'(-1) < 0$.

b) Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = 1$ y $b(x)$ esta acotada a la derecha de $x = 1$ entonces $u'(1) > 0$.

Corolario 1.2.2. *Supóngase que u satisface la desigualdad*

$$L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \geq 0.$$

Para $-1 \leq x \leq 1$ donde $b(x)$ es una función acotada, u alcanza un máximo no negativo M en un punto interior de $(-1,1)$, con $c(x) \leq 0$, entonces u es constante, es decir $u = M$.

Demostración. Razonemos por contradición; supongamos que u es una función que no es constante y que toma su máximo M en un punto $c \in (-1,1)$, entonces tenemos que $u'(c) = 0$; aplicando la primera parte del teorema (1.2.1) al intervalo $(c,1)$, entonces $u'(c) < 0$. De forma análoga aplicando la segunda parte del teorema (1.2.1) al intervalo $(-1,c)$ obtenemos que $u'(c) > 0$. Una contradicción, por lo tanto la función u no puede alcanzar su máximo en un punto interior al intervalo (a,b) □

Corolario 1.2.3. *Supóngase que u satisface la desigualdad*

$$L(u) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \leq 0.$$

Para $-1 \leq x \leq 1$ donde $b(x)$ es una función acotada, u alcanza un minino m en un punto interior de $(-1,1)$, con $c(x) \leq 0$, entonces u es constante, es decir $u = m$.

---

[1] Apostol, T. M. (1998). Cálculo Diferencial. En T. M. Apostol, Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal (2ª Edición ed., pág. 223). Santa Fe de Bogotá D.C., Cundinamarca, Colombia: Editorial Reverté Colombia S.A.

[2] Idem, pág:230

Demostración. Sea $g = -u$ entonces $g' = -u'$, $g'' = -u''$, luego

$$\begin{aligned} L(g) &= a(x)g''(x) + b(x)g'(x) + c(x)g(x). \\ &= -a(x)u''(x) - b(x)u'(x) - c(x)u(x). \\ &= -[a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)]. \\ &= -L(u) \geq 0. \end{aligned}$$

Por ser $L(u) \leq 0$. Ahora, si el minino m de u se alcanza en $c \in (-1,1)$ entonces $m \leq u(x), \forall x \in (-1,1)$ es decir $M = -m \geq -u(x), \forall x \in (-1,1)$; de aquí que M sea el máximo de la función $g = -u$ en el interior del intervalo $(-1,1)$; por el teorema (1.2.2) g es constante, esto es $g = -u$ es constante, de donde u es constante. □

Capítulo 2

Soluciones Simétricas para una Ecuación Elíptica No Lineal con Condiciones de Frontera de Neumann.

En el siguiente apartado se estudiará las soluciones simétricas para una ecuación elíptica no lineal con condiciones de frontera de Newmann. Un interesante problema desde el punto de vista geométrico y las ecuaciones diferenciales elípticas es el estudio del comportamiento de las soluciones sin poseer la solución de forma explícita. Por ejemplo Al Mahameed presenta el principio máximo para algunas ecuaciones elípticas semilineales sujetas a condiciones de frontera mixtas (M.M. Al-Mahameed 2007); Marín A.M. y Ortiz. R.D estudian las soluciones simétricas para un problema elíptico semilineal con condición límite de Neumann para los operadores elípticos más generales que el Laplaciano en la bola unitaria en el espacio euclidiano $n-$dimensional con $n \geq 3$ (Marín A.M. y Ortiz. R.D 2013). Por otro lado 2.1 puede ser expresado como un problema no homogéneos de valor de frontera usando el operador de Sturm-Liouville. Boyce & DiPrima, (1992) en [12] dan una demostración de la existencia y unicidad de las soluciones.

Teorema 2.0.1. *Sea $u \in C^2((-1,1)) \cup C^0([-1,1])$ una solución no negativa del problema elíptico no lineal con condición de frontera de Neumann*

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(u(x)). \\ u'(1) = -u'(-1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Donde $a, c : [-1,1] \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas y simétricas con respecto al origen tal que $a(x) > 0$ y $c(x) \leq 0$ para todo x en el intervalo $[-1,1]$. La función $b : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es acotada e impar. Supongamos que f es estrictamente creciente, entonces u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Sea $v(x) = u(-x), \forall \in [-1,1]$, $-x$ denota la reflexión de x con respecto al eje $x = 0$. entonces

$$\begin{aligned} v'(x) &= -u'(-x). \\ v''(x) &= u''(-x). \end{aligned}$$

Como $a(x) = a(-x)$, $c(x) = c(-x)$ por ser simétricas respecto al origen y $b(-x) = -b(x)$ por ser b impar; entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} L(v) &= a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x). \\ &= a(-x)u''(-x) + b(-x)u'(-x) + c(-x)u(-x). \\ &= f\left(u(-x)\right). \\ &= f\left(v(x)\right). \end{aligned}$$

Sobre $(-1, 1)$ y $v'(1) = -u'(-1) = u'(1) = -v'(-1)$. Sea w definida por

$$w(x) = u(x) - v(x).$$

Para todo x en $[-1, 1]$, en consecuencia w satisface

$$\begin{aligned} L(w) &= a(x)w''(x) + b(x)w'(x) + c(x)w(x). \\ &= a(x)\left[u''(x) - v''(x)\right] + b(x)\left[u'(x) - v'(x)\right] + c(x)\left[u(x) - v(x)\right]. \\ &= a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) - \left[a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x)\right]. \\ &= L(u) - L(v). \\ &= f(u) - f(v), \end{aligned}$$

sobre (-1,1). Además

$$\begin{aligned} w'(1) &= u'(1) - v'(1). \\ &= -u'(-1) - \left(-u'(-1)\right). \\ &= -u'(-1) + u'(-1). \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

también tenemos que

$$\begin{aligned} w'(-1) &= u'(-1) - v'(-1). \\ &= -u'(1) - \left(-u'(1)\right). \\ &= -u'(1) + u'(1). \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

y

$$\begin{aligned} w(0) &= u(0) - v(0). \\ &= u(0) - v(-0). \\ &= u(0) - u(0). \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como w es continua en $[-1, 1]$ por ser u continua en $[-1, 1]$ entonces por el teorema de Weierstrass, existen puntos x_m y x_M en $[-1, 1]$ tal que:

$$w(x_m) = \underset{[-1,1]}{min}\, w \text{ y } w(x_M) = \underset{[-1,1]}{max}\, w,$$

x_m y x_M no pueden pertenecer a $\{-1, 1\}$. En efecto, si $x_M \in \{-1, 1\}$, entonces satisface $w(x_M) > w(x), \forall x \in (-1, 1)$. Por el principio de máximo (teorema 1.2.1)

$$w'(x_M) = w'(-1) < 0 \text{ y } w'(x_M) = w'(1) > 0.$$

Lo cual es una contradicción con lo expuesto en (2.2), (2.3) y (2.4). De forma análoga, si $x_m \in \{-1, 1\}$ y satisface $w(x_m) < w(x), \forall x \in (-1, 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} w(x_m) &< w(x). \\ -w(-x_m) &< -w(-x). \\ w(-x_m) &> w(-x), \end{aligned}$$

para todo $x \in (-1, 1)$; es decir $w(-x_m)$ es el valor máximo de w en $\{-1, 1\}$, por el teorema (1.2.1)

$$\begin{aligned} w'(-x_m) &= -w'(x_m) < 0. \\ &= -w'(-1) < 0. \\ &= w'(-1) > 0, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} w'(-x_m) &= -w'(x_m) < 0. \\ &= -w'(1) < 0. \\ &= w'(1) > 0. \end{aligned}$$

Lo cual contradice nuevamente (2.2), (2.3) y (2.4)
Si $x_M \in (-1, 1)$ entonces

$$w(x_M) \geq 0, \tag{2.5}$$

ya que $w(0) = 0$ y además $w'(x_M) = 0$ y $w''(x_M) \leq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(u(x_M)) - f(v(x_M)) &= a(x_M)w''(x_M) + b(x_M)w'(x_M) + c(x_M)w(x_M). \\ &= a(x_M)w''(x_M) + c(x_M)w(x_M) \leq 0. \end{aligned}$$

de aquí

$$f(u(x_M)) \leq f(v(x_M)).$$

Como f es estrictamente creciente, $u(x_M) \leq v(x_M)$ es decir

$$w(x_M) = u(x_M) - v(x_M) \leq 0, \tag{2.6}$$

entonces por (2.5) y (2.6) nos queda que $w(x_M) = 0$. Por lo tanto

$$w(x) \leq 0 \text{ para } x \in [-1, 1]. \tag{2.7}$$

Ahora, de igual forma si $x_m \in (-1,1)$ entonces

$$w(x_m) \leq 0, \tag{2.8}$$

ya que $w(0) = 0$ y además $w'(x_m) = 0$ y $w''(x_m) \geq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f\left(u(x_m)\right) - f\left(v(x_m)\right) &= a(x_m)w''(x_m) - b(x_M)w'(x_m) + \alpha(x_m)w(x_m). \\ &= a(x_m)w''(x_m) + \alpha(x_m)w(x_m) \geq 0. \\ f\left(u(x_m)\right) &\geq f\left(v(x_m)\right). \end{aligned}$$

Como f es estrictamente creciente $u(x_m) \geq v(x_m)$ es decir

$$w(x_m) = u(x_m) - v(x_m) \geq 0, \tag{2.9}$$

entonces por (2.8) y (2.9) nos queda que $w(x_m) = 0$ para $x \in [-1,1]$. Por lo tanto,

$$w(x) \geq 0 \text{ , } \forall x \in [-1,1] \tag{2.10}$$

Finalmente, por (2.7) y (2.5) nos queda que $w(x) = 0$ par todo $x \in [-1,1]$, esto es

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x). \\ u(x) &= u(-x). \end{aligned}$$

Es decir u es simétrica respecto al origen.

□

Teorema 2.0.2. *Sea $u \in C^2((-1,1)) \cap C^0([-1,1])$ una solución positiva en $[-1,1]$ del problema*

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(u(x))u(x). \\ u'(1) = -u'(-1). \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es estrictamente creciente entonces u es radialmente simétrica con respecto al origen.

Demostración. Sea $v(x) = u(-x)$ definida como antes, y definamos la función

$$w(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, x \in [-1,1],$$

entonces

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ w''(x) &= \frac{u''(x)}{v(x)} - \frac{2u'(x)v'(x)}{v^2(x)} - \frac{u(x)v''(x)}{v^2(x)} + \frac{2u(x)[v'(x)]^2}{v^3(x)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
L(w) &= a(x)w''(x) + b(x)w'(x) + c(x)w(x) \\
&= \frac{a(x)u''(x)}{v(x)} - \frac{2a(x)u'(x)v'(x)}{v^2(x)} - \frac{a(x)xu(x)v''(x)}{v^2(x)} + \frac{2a(x)u(x)[v'(x)]^2}{v^3(x)}. \\
&+ \frac{b(x)u'(x)}{v'(x)} - \frac{b(x)u(x)v'(x)}{v^2(x)} + \frac{c(x)u(x)}{v(x)} \\
&= \frac{1}{v(x)}\left[a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)\right] - \frac{2a(x)}{v(x)}\left[\frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v'(x)}{v^2(x)}\right]v'(x). \\
&- \frac{u(x)}{v^2(x)}\left[a(x)v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x)\right] + \frac{2c(x)u(x)}{v(x)},
\end{aligned}$$

es decir

$$L(w) \;=\; \frac{1}{v(x)}f(u)u(x) - \frac{2a(x)}{v(x)}w'(x)v'(x) - \frac{u(x)}{v^2(x)}f(v)v(x) + \frac{2c(x)u(x)}{v(x)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
L(w) + \frac{2a(x)}{v(x)}w'(x)v'(x) - 2c(x)w(x) &= \frac{u(x)}{v(x)}f(u) - \frac{u(x)}{v(x)}f(v) \\
&= \frac{u(x)}{v(x)}\left[f(u) - f(v)\right] \\
&= w(x)\left[f(u) - f(v)\right]
\end{aligned}$$

Por otro lado de (2.11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
w'(1) &= \frac{u'(1)}{v'(1)} - \frac{u(1)v'(1)}{v^2(1)}. \\
&= \frac{u'(1)}{u'(-1)} + \frac{u(1)u'(-1)}{u^2(-1)}. \\
&= \frac{u'(1)u(-1) + u(1)u'(-1)}{u^2(-1)},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

y

$$\begin{aligned}
w'(-1) &= \frac{u'(-1)}{v'(-1)} - \frac{u(-1)v'(-1)}{v^2(-1)}, \\
&= \frac{u'(-1)}{u(1)} + \frac{u(-1)u'(1)}{u^2(1)}, \\
&= \frac{u'(-1)u(1) + u(-1)u'(1)}{u^2(1)},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

de (2.12) y (2.13) nos queda que

$$w'(1)u^2(-1) = w'(-1)u^2(1), \tag{2.14}$$

como u es continua en $[-1,1]$ entonces por el Teorema de Weierstras existen x_m y x_M en $[-1,1]$ tal que

$$w(x_m) = \underset{[-1,1]}{min}\, w \text{ y } w(x_M) = \underset{[-1,1]}{max}\, w.$$

Afirmamos que $1 \neq x_m \neq -1$ y $1 \neq x_M \neq -1$, en efecto; si $x_M \in \{-1,1\}$ y satisface $w(x_M) > w(x)$ para todo $x \in (-1,1)$ entonces por el teorema (1.2.1), $w'(x_M) = w'(-1) < 0$ y $w'(x_M) = w'(1) > 0$; lo cual contradice (2.14).
Tenemos que

$$\begin{aligned} w(-x) &= \frac{u(-x)}{v(-x)} = \frac{u(-x)}{u(x)}. \\ w(-x_m) &= \frac{u(-x_m)}{v(-x_m)} = \frac{u(-x_m)}{u(x_m)}. \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)}{u(-x)} = \frac{1}{\frac{u(-x)}{u(x)}} = \frac{1}{w(-x)}. \\ w(x_m) &= \frac{u(x_m)}{v(x_m)} = \frac{u(x_m)}{u(-x_m)} = \frac{1}{\frac{u(-x_m)}{u(x_m)}} = \frac{1}{w(-x_m)}. \end{aligned}$$

Si suponemos ahora que $x_m \in \{-1,1\}$ y satisface $w(x_m) < w(x)$ para todo $x \in (-1,1)$ nos queda que

$$\begin{aligned} w(x_m) &< w(x). \\ \frac{1}{w(-x_m)} &< \frac{1}{w(-x)}. \\ w(-x_m) &> w(-x). \end{aligned}$$

Para todo $x \in (-1,1)$. Es decir $w(-x_m)$ es el valor máximo de w en $(-1,1)$; por el teorema (1.2.1), $w'(-x_m) = w'(1) < 0$ y $w'(-x_m) = w'(-1) > 0$; lo cual nuevamente contradice (2.14). Sea $x_m, x_M \in (-1,1)$, entonces $0 = u'(x_m) = u'(x_M) = v'(x_m) = v'(x_M)$; y $w'(x_M) = 0 = w'(x_m)$; como w es positiva nos queda que $w(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = 1$ en $(-1,1)$; es decir $u(x) = v(x)$ para todo $x \in [-1,1]$, en conclusión u es radialemente simétrica con respecto al origen. □

Capítulo 3

Desarrollo Numérico

3.1. Expansión en Series de Taylor

Sea $f(x)$ una función definida en (a, b) que tiene hasta la $k-$ ésima derivada, entonces la expansión de $f(x)$ usando series de Taylor alrededor del punto x_i contenido en el intervalo (a, b) será

$$f(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{1!} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_i} + \cdots + \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{\epsilon} \tag{3.1}$$

donde $\epsilon = x_i + \theta(x - x_i)$ y $0 < \theta < 1$.

3.1.1. Aproximación de la Primera Derivada

Existen distintas formas de generar la aproximación a la primera derivada, nos interesa una que nos de la mejor precisión posible con el menor esfuerzo computacional.

3.1.1.1. Diferencias Progresivas

Considerando la ecuación (3.1) con $k = 2$ y $x = x_i + \Delta x$, tenemos

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\epsilon_p}, \tag{3.2}$$

de esta ecuación obtenemos la siguiente expresión para la aproximación de la primera derivada

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\epsilon_p}, \tag{3.3}$$

en este caso la aproximación de $f'(x)$ mediante diferencias progresivas es de primer orden, es decir $O(\Delta x)$. Siendo $O_p(\Delta x)$, el error local de truncamiento, definido como

$$O_p(\Delta x) = -\left.\frac{\Delta x}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\epsilon_p}. \tag{3.4}$$

Es común escribir la expresión anterior como

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - O_p(\Delta x), \tag{3.5}$$

o

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \tag{3.6}$$

para simplificar la notación.
De forma análoga se construyen aproximaciones en diferencias finitas de orden mayor, desarrollaremos la forma de calcular la derivada de orden dos en diferencias centradas. Partiendo del desarrollo de Taylor

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_p), \tag{3.7}$$

y

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f^{(4)}(\xi_r), \tag{3.8}$$

eliminando las primeras derivadas, sumando las ecuaciones anteriores y despejando se encuentra que

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f^{(4)}(\xi_c), \tag{3.9}$$

así, la aproximación a la segunda derivada usando diferencias centradas con un error de truncamiento $O_c(\Delta x^2)$ es

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i + \Delta x)}{\Delta x^2}. \tag{3.10}$$

Es común escribir la expresión anterior como

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}, \tag{3.11}$$

para simplificar la notación.
A partir de las ecuaciones (3.6) y (3.11) podemos expresar las diferencias finitas por

$$\begin{aligned} \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x_1} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta} \\ \left.\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right|_{x_1} &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta^2} \end{aligned}$$

remplazando en la primera ecuación de (5) obtenemos

$$\begin{aligned} a(x_i)\left[\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta^2}\right]+b(x_i)\left[\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta}\right]+c(x_i)u_i &= f(u_i) \\ \left[2a(x_i)-b(x_i)\Delta\right]u_{i-1}+\left[2\Delta^2 c(x_i)-4a(x_i)\right]u_i+\left[2a(x_i)+b(x_i)\Delta\right]u_{i+1} &= 2\Delta^2 f(u_i) \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} A_{1i} &= 2a\left(x_i\right)-b\left(x_i\right)\Delta \\ A_{2i} &= 2\Delta^2 c\left(x_i\right)-4a\left(x_i\right) \\ A_{3i} &= 2a\left(x_i\right)+b\left(x_i\right)\Delta \end{aligned}$$

Entonces la anterior ecuación se convierte en:

$$A_{1i}u_{i-1}+A_{2i}u_i+A_{3i}u_{i+1}=2\Delta^2 f\left(u_i\right) \tag{3.12}$$

Para distintos valores de $i=1,2,3,...,n$ donde n es el número de particiones del intervalo $(-1,1)$ tenemos que:

$$\begin{array}{rclccc} i &=& 1, & A_{11}u_0+A_{21}u_1+A_{31}u_2 &=& 2\Delta^2 f\left(u_1\right) \\ i &=& 2, & A_{12}u_1+A_{22}u_2+A_{32}u_3 &=& 2\Delta^2 f\left(u_2\right) \\ i &=& 3, & A_{13}u_2+A_{23}u_3+A_{33}u_4 &=& 2\Delta^2 f\left(u_3\right) \\ i &=& 4, & A_{14}u_3+A_{24}u_4+A_{34}u_5 &=& 2\Delta^2 f\left(u_4\right) \\ \vdots &=& \vdots & \vdots &=& \vdots \\ i &=& n-1, & A_{1(n-1)}u_{n-2}+A_{2(n-1)}u_{n-1}+A_{3(n-1)}u_n &=& 2\Delta^2 f\left(u_{n-1}\right) \\ i &=& n, & A_{1n}u_{(n-1)}+A_{2n}u_n+A_{3n}u_{(n+1)} &=& 2\Delta^2 f\left(u_n\right) \end{array} \tag{3.13}$$

En la primera ecuación para $i=1$ desconocemos el valor de u_0 pero conocemos el de su primera derivada. Sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{u_1-u_{-1}}{2\Delta} &= u'(-1) \\ u_{-1} &= u_1-2\Delta u'(-1) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Añadiendo una nueva ecuación. Para $i=0$ en la ecuación (3.12) nos queda

$$A_{10}u_{-1}+A_{20}u_0+A_{30}u_1=2\Delta^2 f\left(u_0\right) \tag{3.15}$$

Sustituyendo la ecuación (3.14) en la ecuación (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} A_{10}\left[u_1-2\Delta u'(-1)\right]+A_{20}u_0+A_{30}u_1 &= 2\Delta^2 f(u_0) \\ A_{20}u_0+(A_{10}+A_{30})u_1 &= 2\Delta^2 f(u_0)+2\Delta u'(-1)A_{10} \end{aligned} \tag{3.16}$$

De forma análoga para $i = n$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta} &= u'(1) \\ u_{n+1} &= u_{n-1} + 2\Delta u'(1) \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Remplazando la ecuación (3.17) en la ultima de las ecuaciones de (3.13)

$$\begin{aligned}A_{1n}u_{(n-1)} + A_{2n}u_n + A_{3n}u_{(n+1)} &= 2\Delta^2 f(u_n) \\ A_{1n}u_{(n-1)} + A_{2n}u_n + A_{3n}\left[u_{n-1} + 2\Delta u'(1)\right] &= 2\Delta^2 f(u_n) \\ \left[A_{1n} + A_{3n}\right]u_{(n-1)} + A_{2n}u_n &= 2\Delta^2 f(u_n) - 2\Delta u'(1)A_{3n} \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Ahora de las ecuaciones (3.13),(3.16) y (3.18) nos queda el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}A_{20}u_0 + \left[A_{10} + A_{30}\right]u_1 &= 2\Delta^2 f(u_0) + 2\Delta u'(-1)A_{10} \\ A_{11}u_0 + A_{21}u_1 + A_{31}u_2 &= 2\Delta^2 f(u_1) \\ A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 &= 2\Delta^2 f(u_2) \\ \vdots &= \vdots \\ \left[A_{1n} + A_{3n}\right]u_{(n-1)} + A_{2n}u_n &= 2\Delta^2 f(u_n) - 2\Delta u'(1)A_{3n}\end{aligned}$$

Si denotamos por

$$A = \begin{bmatrix} A_{20} & [A_{10} + A_{30}] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{11} & A_{21} & A_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{13} & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left[A_{1(n)} + A_{3(n)}\right] & A_{2(n)} \end{bmatrix}$$

y por $\Phi(u) : R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$ tal que

$$\Phi(u_i) = \begin{bmatrix} f(u_0) + \dfrac{u'(-1)A_{10}}{\Delta} \\ f(u_1) \\ f(u_2) \\ \vdots \\ f(u_n) - \dfrac{u'(1)A_{3(n)}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Reducimos el problema de condiciones de frontera Neumann (5) a un sistema de ecuaciones no lineales:

$$Au = 2\Delta^2\Phi(u) \tag{3.19}$$

con $u = (u_0, u_1, u_2, ..., u_n)^t$. En general,un problema de frontera no lineal puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{cases} g(x, u, u', u'') & = & 0 \\ u'(1) & = & -u'(-1) \end{cases}$$

Mediante un proceso de discretización análogo a lo anteriormente expuesto, es posible obtener un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución es también la del problema de frontera.
Por otro lado vemos que las ecuaciones de (3.19) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} A_{20}u_0 + [A_{10} + A_{30}]\, u_1 - 2\Delta^2 f(u_0) - 2\Delta u'(-1)A_{10} &= 0 \\ A_{11}u_0 + A_{21}u_1 + A_{31}u_2 - 2\Delta^2 f(u_1) &= 0 \\ A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{31}u_3 - 2\Delta^2 f(u_2) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ [A_{1n} + A_{3n}]\, u_{(n-1)} + A_{2n}u_n - 2\Delta^2 f\,(u_n) + 2\Delta u'(1)A_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $u = (u_0, u_1, u_2, .., u_n)$ y $F\,(u) = (f_0, f_1, f_2, ..., f_n)$ con

$$\begin{aligned} f_0 &= A_{20}u_0 + [A_{10} + A_{30}]\, u_1 - 2\Delta^2 f(u_0) - 2\Delta u'(-1)A_{10} \\ f_1 &= A_{11}u_0 + A_{21}u_1 + A_{31}u_2 - 2\Delta^2 f(u_1) \\ f_2 &= A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 - 2\Delta^2 f(u_2) \\ \vdots &= \vdots \\ f_n &= [A_{1n} + A_{3n}]\, u_{n-1} + A_{2n}u_n - 2\Delta^2 f(u_n) + 2\Delta u'(1)A_{3n} \end{aligned}$$

nos queda que (3.19) es equivalente a hallar u tal que

$$F\,(u) = 0 \tag{3.20}$$

Una vez hallados u en (3.20) a partir de la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, aproximamos los puntos por una función polinómica; para ello utilizamos la interpolación de VanderMonde.

3.2. Interpolación de VanderMonde

Dados los puntos $(x_0, u_0), (x_1, u_1), (x_2, u_2), ..., (x_n, u_n)$ todos con abscisas distintas (por como se escogen los x_i para la discretización, estos son distintos); y sea

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{3.21}$$

el polinomio interpolador. Imponiendo las $n+1$ condiciones

$$P(x_j) = u_j, j = 0, 1, 2, ..., n,$$

Resulta un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n &= u_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n &= u_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n &= u_n \end{cases}$$

El sistema puede escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Después de resolver el sistema anterior tenemos que el polinomio de interpolación que aproxima la solución del problema (2.1) es el polinomio (3.21)

3.3. Cálculos Numéricos

En general, la búsqueda de raíces de un sistema de ecuaciones no lineales es un problema numérico difícil pero para ello existen diferentes técnicas dependiendo del problema a tratar. A continuación, se esbozaran algunas posibilidades de solución en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando el software de calculo numérico **Scilab** en su versión 6.0.1. Supongamos que tenemos (3.20) cuya solución u, es desconocida, y se parte de una aproximación u_0. Los métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales tienen, en general, un radio de convergencia pequeño y es necesario partir de una solución inicial adecuada para que converjan. En la solución de nuestro problema utilizaremos las funciones de Scilab: ***fsolve*** que usa el método de Newton y ***makematrix-vandermonde(x)***.
Una vez encontrados los valores de u que resuelven la ecuación (3.20) se procederá a hallar el polinomio que interpole los valores solución. Para ello se utilizara la Interpolación de Vandermonde.
La precisión de tolerancia de *fsolve* ocurre cuando el algoritmo estima que el error relativo entre x y la solución es como máximo 10^{-10}, donde x es el valor final del argumento de la función, cero estimado. La función makematrix_ vandermonde retorna la matriz de vandermonde de n lados hecha con las entradas de x. Para $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ y $j = 1, 2, 3, \cdots n$ tenemos que $A(i, j) = x(i)^{j-1}$ el determinante de la matriz de vendermonde es

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

3.4. Algunos resultados

1. Solución de $u''(x) = u(x), u'(1) = 1 = -u'(1)$ Figura 3.1 . (Ver Anexo A para el código script de Scilab)

   - Polinomio de Interpolación de Vandermonde

$$\begin{aligned} u(x) &= 1{,}307717 + 1{,}1338713x + 1{,}0053805x^2 \\ &+ 0{,}9171049x^3 + 0{,}8655135x^4 + 0{,}8485427x^5 \\ &+ 0{,}8655135x^6 + 0{,}9171049x^7 + 1{,}0053805x^8 \\ &+ 1{,}1338713x^9 + 1{,}307717x^10 \end{aligned}$$

   - Solución Analitica

$$u(x) = \frac{(e^{2x} + 1)\, e^{1-x}}{e^2 - 1}$$

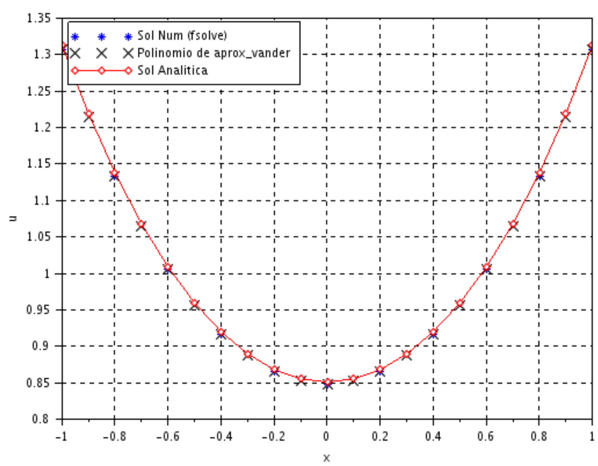

Figura 3.1: Soluciones de $u''(x) = u(x), u'(1) = 1$

2. Solución de $sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) u'' - u(x) = u(x)^3$. Figura 3.2

   - Polinomio de Interpolación de Vandermonde

$$\begin{aligned} u(x) &= 0{,}6443184 + 0{,}4671798x + 0{,}3182686x^2 \\ &+ 0{,}1942788x^3 + 0{,}0889549x^4 - 0{,}0020237x^5 \\ &+ 0{,}0574501x^6 + 0{,}1400067x^7 + 0{,}2696357x^8 \\ &+ 0{,}4452342x^9 + 0{,}6543699x^10 \end{aligned}$$

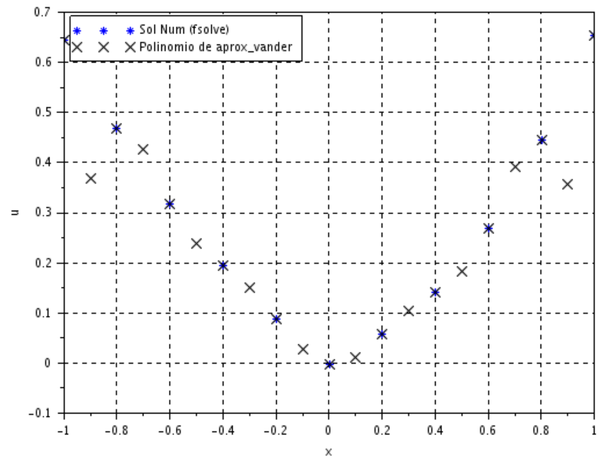

Figura 3.2: Solución de $(x^5 - 3x^2 + 4)u'' + (x^3 - x)u' + (3x^3 - x - 2)u(x) = u(x)^3$

3. Solución de $u'' + (x^3 - x)\, u' - u(x) = e^x - e^{-x}$. Figura 3.3

   - Polinomio de Interpolación de Vandermonde

$$\begin{aligned} u(x) &= 0{,}5658676 + 0{,}4010471x + 0{,}2930757x^2 \\ &+ 0{,}227283x^3 + 0{,}192307x^4 + 0{,}1813841x^5 \\ &+ 0{,}192307x^6 + 0{,}227283x^7 + 0{,}2930757x^8 \\ &+ 0{,}4010471x^9 + 0{,}5658676x^{10} \end{aligned}$$

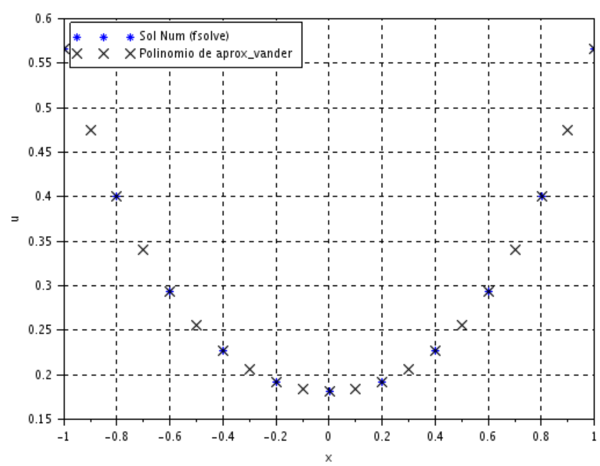

Figura 3.3: Solución de $(x^5 - 3x^3 + 4)u'' + (e^x - e^{-x})\, u' = (u\,(x) + 1)^2$

Capítulo 4

Conclusiones

El principio del máximo para operadores elípticos se usa frecuentemente para demostrar que las soluciones de algunos problemas elípticos con condición de Dirichlet sobre la frontera son radialmente simétricos con respecto al origen. En el presente trabajo mostramos como esta técnica se puede usar con éxito para demostrar que las soluciones de algunos problemas elípticos no lineales con condición de Neumann en la frontera del intervalo $[-1, 1]$ son radialmente simétricas con respecto al origen. Pudimos ver las características que tiene la función solución $u(x)$ dadas las ecuaciones (4.1) y (4.2).

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(u) \\ u'(1) = -u'(-1) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = uf(u) \\ u'(1) = -u'(-1) \end{cases} \tag{4.2}$$

Así mismo se verifico la simetría de la solución de forma numérica.

Apéndice A

Anexos

```
clear
clc
//Este programa resuelve la EDP eliptica en 1D a(x)u!!(x)+b(x)u!(x)+c(x)u(x)=f(u(x)) con la restricción u!(1)=-u!(-1),
deff('[y]=funcion_a(x)','y=1');//Definir la función a(x) del problema
deff('[y]=funcion_b(x)','y=0');//Definir la función b(x) del problema
deff('[y]=funcion_c(x)','y=-1');//Definir la función c(x) del problema
deff('[y]=funcion_f(u)','y=0');//Definir la función f(u) del problema
deff('[y]=funcion_solana(x)','y=(exp(1-x)+exp(x+1))./(exp(2)-1)')//Definir la funcion solución analitica del problema (si la tiene)
n=10;//Numero de particiones en el intervalo [-1,1]
a=-1;//Limite Inferior del intervalo.
b=1;//Limite superior del intervalo.
k=1;//Valor de la derivada en los extremos k=u!(1)=-u!(-1).
delta=(b-a)/(n);
for i=1:n+1
    x(i)=a+(i-1).*delta;
    A_1(i)=(2.*funcion_a(x(i))-funcion_b(x(i)).*delta);
    A_2(i)=(2.*delta.^2.*funcion_c(x(i))-4.*funcion_a(x(i)))
    A_3(i)=(2.*funcion_a(x(i))+funcion_b(x(i)).*delta)
end
function [F]=FNL(u)
    for i=2:n
        F(i)=A_1(i)*u(i-1)+A_2(i)*u(i)+A_3(i)*u(i+1)-2*delta.^2.*funcion_f(u(i));
    end
    F(1)=A_2(1)*u(1)+(A_1(1)+A_3(1))*u(2)-2*delta.^2.*funcion_f(u(1))-2.*delta*(-k)*A_1(1);
    F(n+1)=(A_1(n+1)+A_3(n+1))*u(n)+A_2(n+1)*u(n+1)-2*delta.^2.*funcion_f(u(n+1))+2*delta*(k)*A_3(n+1);
endfunction
for i=1:n+1
    z(i)=0.1;
end
[u,v]=fsolve(z,FNL);
A = makematrix_vandermonde (x);//Matriz de Vandemormonde
coef=A\u;
// graficacion polinomio aproximación
xp=a:0.1:b;
yp=zeros(xp);
nn=length(x)-1
for k=1:nn+1
    yp=yp+coef(k)*xp.^(k-1);
end
plot(x,u,'b*',xp,yp,'kx',xp,funcion_solana,'rd-')
pol=poly(u,"x","coeff")
xgrid()
xlabel('x')
ylabel('u')
legend(['Sol Num (fsolve)','Polinomio de aprox_vander','Sol Analitica'],2)
```

Figura A.1: Script de la solución de $u''(x) = u(x), u'(1) = 1$ en SciLab

Bibliografía

[1] Marin Ramirez, A. M., Ortiz Ortiz, R. D., & Rodriguez, J. A. (2012). A Semilinear Elliptic Problem with Neumann Condition on the Boundary. International Mathematical Forum , 8 (6), 283-288.

[2] Ortiz Ortiz, R. D., Marin Ramirez, A. M., & Rodriguez, J. A. (2012). Symmetric Solutions Of A Nonlinear Elliptic Problem. (P. P. House, Ed.) Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) , 70 (2), 283-287.

[3] Escobar, J. (1990). Uniquennes theorems on conformal deformations of metrics, Sobolev Inequalities, and a Eigenvalue Estimate. Comm. Pure. Math , 437, 857-883.

[4] Quintero H, J. R. (1993). Soluciones Simetricas a Algunos Problemas Elípticos . (U. N. Colombia, Ed.) revista colombiana de Matématicas , XXVII, 95-109.

[5] Cerón Gomez, M. (2008). El Principio del Máximo. (U. d. Nariño, Ed.) Revista Sigma , VIII, 28-34.

[6] Urroz Gilberto E. (2008). Solving Non-linear Equations with SCILAB. (Distributed by infoClearinghouse.com, Ed.) All Rights Reserved

[7] Manoj Kumar, Garima Mishra (2011). An Introduction to Numerical Methods for the Solutions of Partial Differential Equations. (Applied Mathematics, 2011, 2, 1327-1338, Ed.) Published Online November 2011 (http://www.SciRP.org/journal/am)

[8] M.M. Al-Mahameed (2007). Maximum Principles For Some Elliptic Problems. SCIENTIA Series A: Mathematical Sciences, Vol. 15 (2007), 17–22 Universidad Técnica Federico Santa María Valparaíso, Chile ISSN 0716-8446

[9] Hu, K., & Tang, C.-l. (2011). Existence and multiplicity of positive solutions of semilinear elliptic equations in unbounded domains. Journal of Differential Equations, 611-629.

[10] Lions, P.-l. (1998). On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains. Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States II, 85-122.

[11] Marín Ramírez, A. (1994). Principio del máximo y simetría (Maestría en Matemáticas). Biblioteca Mario Carvajal - Melendez - Cali. Univalle.

[12] Boyce, W., & DiPrima, R. (1992). Elementary differential equations and boundary value problems. In W. Boyce, & R. C. DiPrima, Elementary differential equations and boundary value problems (pp. 603-606). New York, United State of America: Jhon Wiley & Songs, Inc.