SOBRE LA EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

Trabajo de Tesis
Presentado al
Programa de Matemáticas

por

LIZETH DEL CARMEN OROZCO FERNÁNDEZ

Como requisito parcial para optar al Título de
Matemático

Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Cartagena
Junio 2010

SOBRE LA EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

Aprobado por:

Bernardo Orozco

Ph.D Ana Magnolia Marín ,Asesor.

A mis padres

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El cálculo de la exponencial de una matriz es sencillo cuando se apoya en el conocimiento de sus valores propios (ver por ejemplo las secciones 7.10 a 7.15 de Apostol [1] o Putzer [6]). Sin embargo, este tipo de cálculo hace difícil abordar preguntas tales como: ¿ Cuál es la derivada de la función $X \longrightarrow e^X$? ¿ Cuál es el conjunto solución de la ecuación $e^X = A$? ¿ Qué se requiere para que $e^X \cdot e^Y = e^Y \cdot e^X$?.
Este trabajo responde estas cuestiones al menos para matrices reales 2×2, lo cual ilustra lo complejo de las respuestas en general. El trabajo está organizado como sigue. En el capitulo 1 introducimos dos funciones matriciales y dos funciones reales que serán las herramientas básicas para el desarrollo del resto del trabajo. En el capitulo 2 definimos la función exponencial y damos una expresión para e^X en términos de la traza y el determinanate de X. El capitulo 3 se dedica a la derivada de la función $X \longrightarrow e^X$ y a dar condiciones necesarias y suficientes para que $e^X \cdot e^Y = e^Y \cdot e^X$. Finalmente, analizamos la ecuación $e^X = A$.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Definiciones matematicas

Definición 1.1 Dada una matriz cualquiera A en $M_{n\times n}(R)$ o $M_{n\times n}(C)$, definimos la ***exponecial*** e^A como la matriz $n \times n$ dada por la serie convergente

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Definición 1.2 Una **norma** $||\Delta||$ en un espacio lineal V sobre un campo F (F es típicamente R o C) es una función $||\Delta|| : V \times V \longrightarrow R$ que cumple lo siguiente:

1. $||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$ para toda $x \in V$.
2. $||tx|| = |t|||x||$ para $x \in V$ y $t \in F$.
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para $x, y \in V$.

Definición 1.3 La **norma de una matriz** cualquiera A en $M_{n\times n}(R)$ o $M_{n\times n}(C)$, designada por $||A||$, se define como el número no negativo dado por la fórmula

$$||A|| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Es decir la norma de A es la suma de los valores absolutos de todos sus elementos.

Definición 1.4 La **traza** de una matriz $A = [a_{ij}]$, es una función

$$tr : M_{n\times n}(R) \longrightarrow R$$
$$A \longmapsto tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definición 1.5 El ***determinante*** de una matriz A en $M_{2\times 2}(R)$, es

$$det(A) = ad - bc$$

donde A es la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definición 1.6 Sea $A = [a_{ij}]$ donde $a_{ij} \in R$ ó C, se define la ***traspuesta*** de A como la matriz

$$A := [a_{ji}]$$

Definición 1.7 La ***norma de Fröbenius*** de unas matriz $A \in M_{n\times n}(R)$, está dada por

$$\|A\|_F =< A, A >_F^{1/2}= \left(\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Definición 1.8 Dada una sucesión $\{C_k\}$ de matrices $m \times n$ cuyos elementos son números reales o complejos, designemos el elemento ij de C_k por $c_{ij}^{(k)}$ si todas las mn series

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \;\; (i = 1, 2, ..., m; \;\; j = 1, 2, ..., n) \qquad\qquad (*)$$

son convergentes, decimos entonces que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ es ***convergente*** y su suma esta definida por la matriz $m \times n$ cuyo elemento ij es la serie $(*)$.

Definición 1.9 Un espacio de ***Banach*** es un espacio vectorial normado y completo, con la métrica inducida por la norma, es decir; un espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy converge en él.

Sea $\pounds(E, F)$ el espacio de Banach de la aplicaciones lineales y continuas de un espacio normado E en un espacio de Banach F.

Definición 1.10 Sean E, F espacio de Banach con la norma notada en ambos por $\|\|$ y $A \subsetneq E$ abierto, $f : A \longrightarrow F; a \in A$. f se dice ***diferencial*** en a si existe una aplicación lineal y continua $L(a, \cdot) = L \in \pounds(E, F)$ y una aplicación $r(a, h) = r(h)$.

tales que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h), \text{ donde } \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

$L(a,h)$ es llamada ***la diferencial de Fréchet*** de la función f en el punto a con incremento h.

En lo que sigue $M_{2\times 2}(R)$ será dotado con la norma de Fröbenius. Consideremos las funciones $\eta, \xi : M_{2\times 2}(R) \longmapsto R$ definida por :

$$\eta(X) = \frac{Tr(X)}{2} \qquad \xi(X) = \eta^2(X) - \det(X)$$

Teorema 1.1 La función η es lineal.

Demostración: Sean X, Y en $M_{2\times 2}(R)$ y c e un número real cualesquiera.

$$\begin{aligned}\eta(cX+Y) = \frac{Tr(cX+Y)}{2} &= \frac{Tr(cX)+Tr(Y)}{2} \\ &= \frac{Tr(cX)}{2} + \frac{Tr(Y)}{2} = \frac{cTr(X)}{2} + \frac{Tr(Y)}{2} \\ &= c\,\eta(X) + \eta(Y).\end{aligned}$$

por tanto,la función η es lineal.

Teorema 1.2: Para la función ξ se cumple que:

$$\xi(tX) = t^2 \xi(X) \qquad (1)$$

$$\xi(X)I = (X - \eta(X)I)^2 \qquad (2)$$

Demostración: (1) Sea X en $M_{2\times 2}(R)$ y t un número real cualesquiera, entonces

$$\xi(tX) = \eta^2(tX) - det(tX) = \left(\frac{Tr(tX)}{2}\right)^2 - t^2\det(X) = \left(\frac{tTr(X)}{2}\right)^2 - t^2\det(X)$$

$$= t^2\left(\frac{Tr(X)}{2}\right)^2 - t^2\det(X) = t^2(\eta^2(X) - \det(X)) = t^2(\xi(X)).$$

Para demostrar la parte (2), sea $X \in M_{2x2}(R)$

Así, sea $X \in M_{2\times 2}(R)$, definida de la siguiente manera

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ademas, las funciones $\eta(X)$ y $\xi(X)$ son iguales a

$$\eta(X) = \frac{Tr(X)}{2} = \frac{a+d}{2} \quad \text{y,} \quad \xi(X) = \eta^2(X) - \det(X) = \frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)$$
$$= \frac{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad}{4} + bc = \frac{(a-d)^2}{4} + bc.$$

Luego

$$\mathbf{X} - \eta(\mathbf{X})\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a - \dfrac{a+d}{2} & c \\ b & d - \dfrac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & c \\ b & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

Así,

$$(\mathbf{X} - \eta(\mathbf{X})\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & c \\ b & \dfrac{d-a}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & c \\ b & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a-d)^2}{4} + bc & \frac{c(a-d)}{2} + \frac{c(d-a)}{2} \\ \frac{b(a-d)}{2} + \frac{b(d-a)}{2} & \frac{(a-d)^2}{4} + bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(a-d)^2}{4} + bc & 0 \\ 0 & \frac{(a-d)^2}{4} + bc \end{pmatrix} = \left(\frac{(a-d)^2}{4} + bc\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \xi(X)I$$

Por lo tanto se ha demostrado la parte (2).

De otra parte, es bien conocido que las funciones $Tr(X)$ y $\det(X)$ son Fréchet diferenciables y que para $H \in M_{2\times 2}(R)$ se cumple las igualdades

$$[DTr(X)](H) = Tr(H) \qquad (3)$$

$$[Ddet(X)](H) = Tr(adj(X)H) \qquad (4)$$

Observemos que la igualdad (3) se cumple

$$[DTr(X)](H) = \lim_{t\to 0}\frac{Tr(X+tH)-Tr(X)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{Tr(X)+Tr(tH)-Tr(X)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tTr(H)}{t} = Tr(H).$$

Vamos a demostrar (4), sea $X, H \in M_{2\times 2}(R)$, definidas de la siguiente manera

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix}$$

$$[Ddet(X)](H) = \lim_{t\to 0}\frac{\det(X+tH)-\det(X)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\det\begin{bmatrix} a+th_1 & c+th_3 \\ b+th_2 & d+th_4 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{[[(a+th_1)(d+th_4)-(c+th_3)(b+th_2)]-[ad-bc]]}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{ad+tah_4+th_1d+t^2h_1h_4-bc-tch_2-th_3b-t^2h_3h_2-ad+bc}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} ah_4+h_1d+th_1h_4-ch_2-h_3b-th_3h_2 = dh_1-ch_2-bh_3+ah_4.$$

Asi,
$$[Ddet(X)](H) = dh_1 - ch_2 - bh_3 + ah_4 \qquad \text{(4a)}$$

Por otra parte, la adjunta de la matriz X es

$$\mathbf{Adj(X)} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

luego, $Adj(X)H = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_2 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dh_1-ch_2 & dh_3-ch_4 \\ -bh_1+ah_2 & -bh_3+ah_4 \end{pmatrix}$

Por consiguiente,

$$Tr(Adj(X)H) = dh_1 - ch_2 - bh_3 + ah_4 \qquad \text{(4b)}$$

de (4a) y (4b) se deduce la parte (4).

De las anteriores igualdades se deduce el siguiente teorema.

Teorema 1.3
las funciones $\eta(X)$ y $\xi(X)$ son Fréchet diferenciables y para $H \in M^{2\times 2}$ se cumplen las siguientes igualdades.

$$[D\eta(X)](H) = \eta(H) \qquad (5)$$

$$[D\xi(X)](H) = 2\eta(X)\eta(H) - Tr(adj(X)H) \qquad (6)$$

Demostración: En efecto, sea $H \in M^{2\times 2}$, Las funciones $\eta(X)$ y $\xi(X)$ son Fréchet diferenciables, por que dependen de las funciones $Tr(X)$ y $\det(X)$ las cuales lo son.

$$[D\eta(X)](H) = \left[D\frac{Tr(X)}{2}\right] H = \frac{1}{2}(DTr(X))H = \frac{Tr(H)}{2} = \eta(H).$$

Para demostrar la parte (6), por la definición de la función ξ obtenemos

$$[D\xi(X)](H) = [D(\eta^2(X) - \det(X))](H) = [D\eta^2(X)](H) - [D\det(X)](H)$$

Luego, aplicando la regla de la cadena sobre función $\eta(X)$ y sustituyendo las igualdades (4)y (5), obtenemos

$$[D\eta^2(X)](H) - [D\det(X)](H) = 2\eta(X)[D\eta(X)](H) - [D\det(X)](H)$$

$$= 2\eta(X)\eta(H) - Tr(adj(X)H).$$

Por tanto, las funciones $\eta(X)$ y $\xi(X)$ son Fréchet diferenciables.

También, de la ecuación (2) se obtiene

$$[D\xi(X)I](H) = [D\xi(X)](H)I = [D((X-\eta(X))I)^2](H)I$$
$$= [D[(X-\eta(X))I)(X-\eta(X))I)]](H)I$$
$$= (X-\eta(X))I)[D(X-\eta(X))I)](H)I + [D(X-\eta(X))I)](H)I(X-\eta(X))I)$$
$$= (X-\eta(X)I)(H-\eta(H)I) + (H-\eta(H)I)(X-\eta(X)I).$$

Consideremos ahora las funciones $\alpha, \beta : R \longrightarrow R$ definidas por

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n!} = \begin{cases} cosh(\sqrt{x}) & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ cos(\sqrt{-x}) & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} \dfrac{senh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 1, & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ \dfrac{sen(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

La convergencia de estas series, esta determinada por la aproximación de las funciones cosh(x), cos(x), senh(x) y sen(x) por polinomios de Taylor. Ver[5].
Directamente se comprueban las identidades

$$2\alpha'(x) = \beta(x) \qquad \alpha^2(x) - x\beta^2(x) = 1 \tag{7}$$

$$4x\alpha''(x) + 2\alpha'(x) = \alpha(x) \tag{8}$$

Vamos a demostrar la parte (7), $2\alpha'(x) = \beta(x)$;

Puesto que $\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(2n)!}$, entonces

$$2\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{(2n+1)!} = \beta(x).$$

Para la propiedad $\alpha^2(x) - x\beta^2(x) = 1$, tenemos;
Primero, cuando $x > 0$, $\alpha(x) = \cosh(\sqrt{x})$ y $\beta(x) = \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Luego

$$\begin{aligned}\alpha^2(x) - x\beta^2(x) &= \cosh^2(\sqrt{x}) - x\left(\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \cosh^2(\sqrt{x}) - x\left(\frac{\operatorname{senh}^2(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}\right)\\ &= \cosh^2(\sqrt{x}) - \operatorname{senh}(\sqrt{x}) = 1\end{aligned}$$

Segundo, cuando $x = 0$, $\alpha(x) = \cos(\sqrt{x}) = 1$ y $\beta(x) = 1$

$$\alpha^2(x) - x\beta^2(x) = 1^2 - 0(1) = 1.$$

Tercero, cuando $x < 0$, $\alpha(x) = \cos(\sqrt{-x})$ y $\beta(x) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$

$$\alpha^2(x) - x\beta^2(x) = \cos^2(\sqrt{-x}) - x\left(\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\right)^2 = \cos^2(\sqrt{-x}) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{(-x)}) = 1.$$

Teorema 1.4 Criterio de convergencia para series de matrices.
Si $\{C_k\}$ es una sucesión de matrices $m \times n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} ||C_k||$ converge, entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ también converge.

Demostración: Designemos el elemento ij de C_k por $c_{ij}^{(k)}$. Puesto que $|c_{ij}^{(k)}| \leq ||C_k||$, la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} ||C_k||$ implica la convergencia absoluta de cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$. Luego cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ es convergente, por lo que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ es convergente.

Capítulo 2

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Teorema 1.5 La serie matricial $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ existe para todo A fijado un valor cualquiera de t, y para todo t si se ha fijado un valor cualquiera de A. Y converge uniformemente en cualquier región finita del plano complejo t.

Demostración: Definamos la sucesión de matrices $\{S_n\}$ como sigue:

$$S_0 = I$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k t^k}{k!} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$S_{n+1} = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{A^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces

$$||S_n|| = ||\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k t^k}{k!}|| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{||A^k t^k||}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{||A^k|||t^k|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{||A||^k |t|^k}{k!} \leq e^{||A|||t|}, \quad (||A|||t| \in R),$$

deducimos que

$$||S_{n+1} - S_n|| = ||\frac{A^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}|| \leq \frac{||A^k|||t^k|}{k!} \leq \frac{||A||^k |t|^k}{k!}$$

Puesto que la serie $\sum \frac{a^k}{k!}$ converge para todo número real a, el teorema 1.4 implica que la serie $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ converge para toda matriz cuadrada A.

Del teorema anterior se tiene que:

La función exponencial $X \longrightarrow e^X$ se define por la serie absolutamente convergente

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

De esta definición se sigue el siguiente teorema.

Teorema 1.6 Si $XY = YX$, entonces $e^X e^Y = e^{X+Y} = e^Y e^X$.

Antes de demostrar el teorema 1.6 demostraremos el siguiente lema.

Lema 1 Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes en R al menos una de la cuales converge absolutamente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Demostración: Supongamos que la serie que converge absolutamente es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y definamos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \; C = \textstyle\sum_{k=0}^{n} c_k$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Ahora,
$C_n = c_0 + ... + c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ... + (a_0b_n + ... + a_nb_0)$
$.... = a_0B_n + ... + a_nB_0 = a_0(B + \beta_n) + ... + a_n(B + \beta_0)$
$.... = A_nB + (a_0\beta_n + ... + a_n\beta_0)$

El lema quedara probado si vemos que $a_0\beta_n + ... + a_n\beta_0$ tiende a 0.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Sea $M = \sup |\beta_n| : n \geq 0$ (la sucesión β_n tiende a cero, luego está acotada.)

Existe un número natural n_0 tal que si $n \leq n_0$, entonces $|\beta_n| < \epsilon/2K$ y si $k \geq n_0$, entonces $\sum_{k=n_0+1}^{q} |a_k| < \epsilon/2M$. En consecuencia, si $n \geq 2n_0$,

$$|a_0\beta_n + ... + a_n\beta_0| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n_0} |a_k b_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k b_{n-k}|$$

$$< \frac{\epsilon}{2K}\sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + M \sum_{k=n0+1}^{n} |a_k| \leq \frac{\epsilon}{2K}K + \frac{\epsilon}{2M}M = \epsilon.$$

Por lo tanto se tiene que el lema es cierto.

Demostración (Teorema 1.6): En efecto,

$$e^X e^Y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{Y^i}{i!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}\frac{Y^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{X^k Y^{n-k}}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^n}{n!} = e^{X+Y}.$$

Por lo tanto, escribiendo $X = \eta(X) + (X - \eta(X)I)$, obtenemos

$$e^X = e^{\eta(X)} e^{X-\eta(X)I}.$$

Puesto que la identidad (2) establece $(X - \eta(X))^2 = \xi(X)I$, entonces podemos escribir

$$e^X = e^{\eta(X)+(X-\eta(X)I)} = e^{\eta(X)} e^{(X-\eta(X)I)}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\eta(X)}\left[I + (X-\eta(X)I) + \frac{(X-\eta(X)I)^2}{2!} + \frac{(X-\eta(X)I)^3}{3!} + ...\right] \\
&= e^{\eta(X)}\left[I + (X-\eta(X)I) + \frac{\xi(X)}{2!}I + \frac{\xi(X)}{3!}(X-\eta(X)I) + \frac{\xi(X)^2}{4!}I + ...\right] \\
&= e^{\eta(X)}\left[I + \frac{\xi(X)}{2!}I + \frac{\xi^2(X)}{4!}I + \frac{\xi^3(X)}{6!}I + ... + (X-\eta(X)I) + \frac{\xi(X)}{3!}(X-\eta(X)I) + ...\right] \\
&= e^{\eta(X)}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi(X)^n}{2n!}\right)I + \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi(X)^n}{(2n+1)!}\right](X-\eta(X)I)\right] \\
&= e^{\eta(X)}\left[\alpha(\xi(X))I + [\beta(\xi(X))](X-\eta(X)I)\right] \qquad (9)
\end{aligned}$$

De acuerdo con las definiciones de las funciones α y β, e^X esta dada por la expresión

$$= \begin{cases} e^{\eta(X)}\left[cosh\left(\sqrt{\xi(X)}\right)I + senh\left(\sqrt{\xi(X)}\right)\left(\dfrac{X-\eta(X)I}{\sqrt{\xi(X)}}\right)\right], & \text{si} \quad \xi(X) > 0 \\ e^{\eta(X)}\left[I + (X-\eta(X)I)\right], & \text{si} \quad \xi(X) = 0 \\ e^{\eta(X)}\left[cos\left(\sqrt{-\xi(X)}\right)I + sen\left(\sqrt{-\xi(X)}\right)\left(\dfrac{X-\eta(X)I}{\sqrt{-\xi(X)}}\right)\right], & \text{si} \quad \xi(X) < 0. \end{cases}$$

En relación con la inversa, la transpuesta, la adjunta, la traza y el determinante de e^X, $X \in M_{2\times 2}(R)$, tenemos

$$e^{-X} = e^{-\eta(X)}\left[\alpha(\xi(X))I - [\beta(\xi(X))]\,(X-\eta(X)I)\right],$$

$$Tr(e^X) = 2e^{\eta(X)}\alpha(\xi(X)), \;\; det(e^X) = e^{\eta(X)}, \text{ en virtud de (7) y (9).}$$

Capítulo 3

LA DERIVADA DE UNA EXPONENCIAL

En este capitulo se estudiará el comportamiento de la derivada de la función exponencial.

Teorema 1.7 Para $H \in M_{2\times 2}(R)$

$$[De^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}M(X,H) \tag{11}$$

donde $M(X,H) = M$ esta dada por

$$M = \alpha'(\xi(X))[(X-\eta(X)I)(H-\eta(H)I) + (H-\eta(H)I)(X-\eta(X)I)]$$

$$+\beta'(\xi(X))[(X-\eta(X)I)(H-\eta(H)I) + (H-\eta(H)I)(X-\eta(X)I)](X-\eta(X)I)$$

$$+\beta(\xi(X))(X-\eta(X)I).$$

Demostración: En efecto, puesto que

$$D[e^X](H) = D[e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X)) + \beta(\xi(X))(X-\eta(X))]](H)$$

$$= D[e^{\eta(X)}](H)[\alpha(\xi(X) + \beta(\xi(X))(X-\eta(X))]]$$

$$+ e^{\eta(X)}D[\alpha(\xi(X)) + \beta(\xi(X))(X-\eta(X))](H)$$

$$= D[\eta(X)](H)e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X)) + \beta(\xi(X))(X-\eta(X))]$$
$$+ e^{\eta(X)}D[\alpha(\xi(X)) + \beta(\xi(X))(X-\eta(X))](H)$$

$$= D[\eta(X)](H)e^X + e^{\eta(X)}D[\alpha(\xi(X))](H) + D[\beta(\xi(X))(X-\eta(X))](H)$$

$$= D[\eta(X)](H)e^X + e^{\eta(X)}D[\alpha(\xi(X))](H) + D[\beta(\xi(X))](H)(X-\eta(X))$$
$$+ \beta(\xi(X))D[(X-\eta(X)I)](H).$$

Luego aplicando el teorema 1.3 y la regla de la cadena, obtenemos

$$D[e^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}\alpha'(\xi(X))[D\xi(X)I](H)$$
$$+ e^{\eta(X)}\beta'(\xi(X)[D\xi(X)I](H)(X - \eta(X)) + e^{\eta(X)}\beta(\xi(X))(H - \eta(H)I).$$

$$D[e^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}\alpha'(\xi(X))[D\xi(X)](H)I$$
$$+ e^{\eta(X)}\beta'(\xi(X)[D\xi(X)](H)I(X - \eta(X)) + e^{\eta(X)}\beta(\xi(X))(H - \eta(H)I).$$

$$D[e^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}\alpha'(\xi(X))[(X - \eta(X)I)(H - \eta(H)I)$$
$$+(H - \eta(H)I)(X - \eta(X)I)] + e^{\eta(X)}\beta'(\xi(X)[(X - \eta(X)I)(H - \eta(H)I)$$
$$+(H - \eta(H)I)(X - \eta(X)I)](X - \eta(X)) + e^{\eta(X)}\beta(\xi(X))(H - \eta(H)I).$$

Por lo tanto hemos demostrado el teorema propuesto.

Cuando $HX = XH$; utilizando (2), (7) y (8) simplificamos $M(X; H)$ para llegar a

$$M = [2\alpha'(\xi(X))(X - \eta(X)I) + 4\xi(X)\alpha''(\xi)I + 2\alpha'(\xi(X))I]\,(H - \eta(H)I)$$
$$= [\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi((X))(X - \eta(X)I)](H - \eta(H)I)$$
$$= e^{-\eta(X)}e^X(H - \eta(H)I)$$

en cuyo caso $[De^X](H) = \eta(H)e^X + e^{\eta(X)}M(X, H)$ se reduce a

$$[De^X](H) = e^X H = He^X.$$

◇ La conmutatividad de exponenciales

Veamos lo que sucede en general, puesto que

$e^X = e^{\eta(X)}\left[\alpha(\xi(X))I + [\beta(\xi(X))]\,(X - \eta(X)I)\right]$

y

$e^Y = e^{\eta(Y)}\left[\alpha(\xi(Y))I + [\beta(\xi(Y))]\,(Y - \eta(Y)I)\right]$

entonces

$$\begin{aligned} e^Xe^Y - e^Ye^X &= e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X))I + [\beta(\xi(X))](X - \eta(X)I)]e^{\eta(Y)}[\alpha(\xi(Y))I \\ &\quad +[\beta(\xi(Y))](Y - \eta(Y)I)] - e^{\eta(Y)}[\alpha(\xi(Y))I \\ &\quad +[\beta(\xi(Y))](Y - \eta(Y)I)]e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X))I + [\beta(\xi(X))](X - \eta(X)I) \\ &= e^{\eta(X+Y)}\beta(\xi(X))\beta(\xi((Y))[XY - YX] \qquad (10) \end{aligned}$$

De esto se sigue e^Y conmuta con e^Y si y sólo si X conmuta con Y o $\beta(\xi(X)) = 0$ o $\beta(\xi(Y)) = 0$.

Note que cuando $\beta(\xi(X)) = 0$ se obtiene

$$e^X = e^{\eta(X)}\alpha(\xi(X))I,$$

que es un múltiplo de la matriz idéntica. Ahora bien, de la definición de la función β tenemos que

$$\beta(\xi(X)) = 0 \text{ si y sólo si } \xi(X) = -k^2\pi^2,\ k = 1, 2, ...,$$

en cuyo caso $e^X = (-1)^k e^{\eta(X)}I$, $k = 1, 2, ...,$

El siguiente ejemplo muestra que $e^Xe^Y = e^Ye^X$ y sin embargo $e^Xe^Y \neq e^{(X+Y)}$.

Ejemplo : Si

$$\mathbf{X} = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{Y} = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\xi(X) = -\pi^2$, $\xi(Y) = \pi^2$ y $\xi(X+Y) = 0$, en efecto

$$\xi(X) = \eta^2(X) - \det(X) = \left[\frac{Tr(X)}{2}\right]^2 - \det(X) = \left[\frac{0}{2}\right]^2 - [(0)(0) - (\pi)(-\pi)] = -\pi^2$$

De la misma forma se obtiene $\xi(Y) = \pi^2$.

$$\begin{aligned} \xi(X+Y) &= \frac{\eta^2(X+Y)}{2} - \det(X+Y) = \frac{Tr^2(X+Y)}{2} - \det(X+Y) \\ &= \left[\frac{0}{2}\right]^2 - [(0)(0) - (2\pi)(0)] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X)) + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I)] = e^0[\alpha(-\pi^2) + \beta(-\pi^2)(X - 0I)] \\ &= e^0\left[\cos(-(-\pi^2)) + \frac{\operatorname{sen}(-(-\pi^2))}{\sqrt{-(\pi^2)}}(X - 0I)\right] = 1[-I] = -I. \end{aligned}$$

Además tenemos que $e^Y = e^{\eta(Y)}[\alpha(\xi(Y))I + \beta(\xi(Y))(Y - \eta(y)I)]$

Ahora puesto que $\xi(Y) = \pi^2$ y $\eta(Y) = 0$,

$$e^Y = e^0\left[cosh\pi I + \frac{1}{\pi}senh\pi \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}\right] = 1\left[\begin{pmatrix} cosh\pi & 0 \\ 0 & cosh\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & senh\pi \\ senh\pi & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} cosh\pi & senh\pi \\ senh\pi & cosh\pi \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} e^{X+Y} &= e^{\eta(X+Y)}[\alpha(\xi(X+Y)I + \beta(\xi(X+Y))(X+Y-\eta(X+Y)I] \\ &= e^0[\alpha(0)I + \beta(0)\left[\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 0I\right] = 1\left[cos(0)I + 1\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación: Dado que $\eta(XY) = \eta(YX)$ y $\xi(XY) = \xi(YX)$, a partir de (9) obtenemos la siguiente relación análoga a (10)

$$e^{XY} - e^{YX} = e^{\eta(XY)}\beta(\xi(XY))[XY - YX]$$

LA ECUACIÓN EXPONENCIAL

Teorema 1.8

Para cualquier matriz $M \in M_{2\times 2}(R)$ con $Tr(M) = 0$ y $\det(M) = 1$

la función $t \longmapsto f(t) = e^{tM}$, con $t \in [0, \infty)$ es 2π-periódica.

Demostración: En efecto, por (1) se tiene $\xi((t+2\pi)M) = -(t+2\pi)^2$, Además

$\eta((t+2\pi)M) = \dfrac{Tr((t+2\pi)M)}{2} = \dfrac{(t+2\pi)Tr(M)}{2} = \dfrac{(t+2\pi)\cdot 0}{2} = 0.$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(t+2\pi) &= e^{(t+2\pi)M} \\
&= e^{\eta((t+2\pi)M)}[\alpha(\xi(t+2\pi)M)I \\
&\quad + [\beta(\xi(t+2\pi)M)]((t+2\pi)M - \eta((t+2\pi)M)I)] \\
&= e^0[\alpha(-(t+2\pi)^2)I + [\beta(-(t+2\pi)^2)]((t+2\pi)M - 0I)] \\
&= e^0\left[\cos(\sqrt{-(-(t+2\pi)^2)})I + \left[\frac{\operatorname{sen}\sqrt{-(-(t+2\pi)^2)}}{\sqrt{-(-(t+2\pi)^2)}}\right]((t+2\pi)M - 0I)\right] \\
&= cos(t+2\pi)I + sen(t+2\pi)M = cos(t)I + sen(t)M = e^{tM} = f(t).
\end{aligned}$$

Por tanto, la función $f(t) = e^{tM}$ con $t \in [0, \infty)$ es 2π-periódica.

En particular, del teorema enterior se deduce; para $t = k\pi$; $k = 0, 1, 2, 3, ...$ se obtiene

$$f(k\pi) = e^{(k\pi)M} = cos(k\pi)I + sen(k\pi)M = (-1)^k I.$$

lo que muestra que las ecuaciones $e^X = I$ y $e^X = -I$ tienen infinitas soluciones.

Ahora, si $e^X = A$, entonces por (10) se debe obtener las relaciones

$$e^{2\eta(X)} = \det(e^X) = \det(A) \ \text{ y } \ \alpha(\xi(X)) = \frac{\eta(e^X)}{e^{\eta(X)}} = \frac{\eta(e^X)}{\sqrt{\det(e^X)}} = \frac{\eta(A)}{\sqrt{\det((A)}} \quad (13)$$

De esto se sigue que cuando $\det(A) \le 0$ la ecuación $e^X = A$ no tiene solución.

62458.

También, dado que $\alpha \geq -1$, la ecuación sólo puede tener solución cuando

$\frac{\eta(A)}{\sqrt{\det((A)}} \geq -1$. Por ésto, en lo que se sigue suponemos que $\det(A) > 0$ y que $\frac{\eta(A)}{\sqrt{\det((A)}} \geq -1$. También, en lo que sigue haremos $\delta(A) = \frac{\eta(A)}{\sqrt{\det((A)}} \geq -1$.

El comportamiento de las funciones α y β sugiere analizar los casos

$$\delta(A) > 1, \ |\delta(A)| < 1, \text{ y } \delta(A) = \pm 1.$$

Caso $\delta(A) > 1$

En este caso las relaciones (13) se reducen a

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \qquad \cosh(\sqrt{\xi(X)}) = \delta(A), \quad \xi(X) > 0.$$

De aqui obtenemos

$\sqrt{\xi(X)} = cosh^{-1}((\delta(A))) = \ln\left(\frac{\eta(A)+\sqrt{\xi(A)}}{\sqrt{\det(A)}}\right)$

y

$$\beta(\xi(X)) = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{\xi(X)}}{\sqrt{\xi(X)}} = \frac{\sqrt{\xi(X)}}{\cos^{-1}(\delta(A))\sqrt{\det(A)}}.$$

Ahora la expresión

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I)] \\ &= \sqrt{\det(A)}\left[\delta(A)I + \left(\frac{\sqrt{\xi(A)}}{\cosh^{-1}(\delta(A))}\right)\left(\frac{X - ln(\sqrt{\det(A)}I)}{\sqrt{\det(A)}}\right)\right] \\ &= A \end{aligned}$$

Despejamos X para obtener la única solución

$$X = ln(\sqrt{\det(A)})I + cosh^{-1}(\delta(A))\left(\frac{A - \eta(A)I}{\sqrt{\xi(A)}}\right).$$

Caso $-1 < \delta(A) < 1$

En este caso las relaciones (13) se convierten en

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \qquad cos(\sqrt{-\xi(X)}) = \delta(A), \qquad \xi(X) < 0.$$

De esto se sigue que $\sqrt{-\xi(X)}$ peretenece al conjunto

$$\{(\theta(A) + 2\kappa\pi) \quad, (2(\kappa+1)\pi - \theta(A)); \quad \kappa = 0, 1, ...\},$$

donde $\theta(A) = cos^{-1}(\delta(A))$, y que

$$\beta(\xi(X)) = \frac{sen\left(\sqrt{-\xi(X)}\right)}{\sqrt{-\xi(X)}} = \frac{\sqrt{-\xi(A)}}{\sqrt{-\xi(X)}\sqrt{\det(A)}} \neq 0$$

Ahora para cada valor de $\sqrt{-\xi(X)}$ despejamos X de la expresión

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\eta(X)}[\alpha(\xi(X))I + \beta(\xi(X))(X - \eta(X)I)] \\ &= \sqrt{\det(A)}\left[\delta(A)I + \frac{\sqrt{-\xi(A)}}{\sqrt{-\xi(X)}}\left(\frac{X - ln(\sqrt{\det(A)})I}{\det(A)}\right)\right] \\ &= A \end{aligned}$$

Para obtener

$$X = ln(\sqrt{\det(A)}I + \sqrt{-\xi(X)}\left(\frac{A - \eta(A)I}{\sqrt{-\xi(A)}}\right)$$

Lo que indica que hay infinitas soluciones.

Caso $\delta(A) = \pm 1$

En este caso las relaciones (13) estan dadas por

$$e^{2\eta(X)} = \det(A), \quad cos(\sqrt{-\xi(X)}) = \pm 1, \quad \xi(X) \leq 0.$$

De aquí obtenemos $\xi(X) \in \{-\kappa^2\pi^2; \kappa = 0, 1, 2, ...\}$ y que

Cuando $\delta(A) = 1$ y escogemos X tal que $\xi(X) = 0$, la igualdad $e^X = A$ se reduce a

$$e^X = e^{\eta(X)}[I + (X - \eta(X)I)]$$
$$= \sqrt{\det(A)}[I + (X - ln(\sqrt{\det(A)})I)]$$
$$= A,$$

que conduce a

$$X = \left[ln(\sqrt{\det(A)}) - 1\right] I + \frac{A}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Cuando $\delta(A) = \pm 1$ y escogemos X tal que $\xi(X) < 0$ la igualdad $e^X = A$ se reduce a

$$e^X = e^{\eta(X)} cos(\sqrt{-\xi(X)}) = A,$$

o que conduce a $\pm\sqrt{\det(A)} I = A$. Así cualquier matriz X tal que $\eta(X) = ln(\det(A))$ y $\xi(X) \in \{-\kappa^2\pi^2; \kappa = 1, 2, ...\}$ satiface la correspondiente ecuación $e^X = \pm \det(A) I$.

$$Sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad x < 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ 1, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] APOSTOL T. M., *Calculus* Volumen II, segunda edición.
Editoral Reverté, S.A., 1980.

[2] BELLMAN R., *Introducción al análisis matricial* Volumen II, segunda edición.
Editoral Reverté, S.A.,1965.

[3] DOLLARD J. D. & FRIEDMAN C. N. *Product integration with applications to diferential equations. Encyclopedia of mathematics and its applications* Volumen II, segunda edición.

[4] MARMOLEJO M. A. Y ESPINOSA A., *Matrices simétricas con dos valores propios. Matemáticas: Enseñanza Universitaria* Vol 4, N.1,2, (Pag 85-98), 1995.

[5] APOSTOL T. M., *Calculus* Volumen I, segunda edición. (Pag 338-339) Editoral Reverté, S.A., 1980.

[6] PUTZER E. J., Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constan coeficients. American Mathematical Monthly. Vol 73, N. 1, (Pag 2-7), 1996.

[7] CAICEDO J. F., Cálculo avanzado, primera edición. (Pag 155-186) Universidad Nacional de Colombia, S.A., 2005.