1

CARACTERIZACIÓN DE MATRICES NORMALES USANDO VALORES PROPIOS

HEIDY LORENA GONZÁLEZ MANJARRÉS

MONOGRAFIA PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ASESOR
PEDRO PABLO ORTEGA PALENCIA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
CARTAGENA D. T. Y C.

2008

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mis padres Carlos González y Jacqueline Manjarres dándoles gracias por su amor incondicional y a mi hija Heidy Lucía Montes González, diciéndole, con la ayuda de Dios, esfuerzo y perseverancia alcanzarás todas tus metas.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a mi Padre Celestial JEHOVÁ, por haberme dado el entendimiento, sabiduría, inteligencia y sobre todo por permitirme la realización de este trabajo.

Agradezco a mis padres, Jaquelin Manjarrés y Carlos Gonzáles, y a mi esposo Walberto Montes por su amor, apoyo, compresión y paciencia en todos estos años de estudio.

Agradezco a mis profesores y en especial al profesor Pedro Ortega por su ayuda y disposición en los momentos más importantes de mi carrera.

Mi gratitud a todas aquellas personas, en especial, mis compañeros de universidad y demás familiares que de un modo u otro hicieron posible la realización de este trabajo.

Gracias y que Dios los bendiga.

4

Índice

1. *INTRODUCCIÓN*

Desde que la definición formal de matriz normal fue dada por O. Toeplitz en [9], se han descubierto cerca de noventa caracterizaciones de este tipo de matrices.
Existen caractrizaciones interesantes que permiten relacionar los valores propios de la matriz, con los valores propios de sus partes hermitiana y antihermitiana, o con los valores propios de su descomposición polar. Estas y algunas otras caracterizaciones más, serán planteadas posteriormente en este trabajo.
Este trabajo se divide en dos secciones; en la primera sección, se enunciarán y demostrarán algunos de los resultados de la teoría de matrices, como el teorema de Schur, algunas caracterizaciones de matrices normales entre otros.
En la segunda sección se demostrarán algunas caracterizaciones donde interfieren permutaciones y los resultados de la sección anterior, para finalmente demostrar una nueva caracterización de matrices normales usando sus valores propios.

2. *DEFINICIONES Y TEOREMAS BÁSICOS*

En esta sección, se introducen las definiciones generales pertinentes al desarrollo de este trabajo. Además, se presentarán algunos resultados básicos de la teoría de matrices.

***Definición* 2.1.** $M_n(\mathbb{C})$: *Es el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño n con entradas en el campo de los complejos.*

***Definición* 2.2.** *Se dice que el valor propio λ y el vector propio X de una matriz A son asociados si $AX = \lambda X$.*

***Definición* 2.3.** *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, un subconjunto $W \subseteq \mathbb{C}^n$ se dice que es un conjunto A-invariante, si $Aw \in W$, para todo $w \in W$.*

***Definición* 2.4.** *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$, se define el núcleo de A como*

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{C}^n | AX = \Theta\},$$

donde Θ es el vector cero.

***Definición* 2.5.** *MATRIZ CONJUGADA: Sea $A = [a_{ij}]$, se define la conjugada de A como la matriz $\overline{A} := [\overline{a_{ij}}]$*

***Definición* 2.6.** *MATRIZ TRASPUESTA: Sea $A = [a_{ij}]$, se define la traspuesta A como la matriz $A^t := [a_{ji}]$.*

***Definición* 2.7.** *MATRIZ ADJUNTA: Sea A una matriz, se define la adjunta de A como la matriz $A^* := \overline{A^t}$.*

***Definición* 2.8.** *MATRIZ NORMAL: Una matriz A, se denomina normal si $AA^* = A^*A$.*

***Definición* 2.9.** *MATRIZ HERMITIANA: Una matriz A es hermitiana si $A^* = A$.*

***Definición* 2.10.** *MATRIZ ANTIHERMITIANA: Una matriz A es antihermitiana si $A^* = -A$.*

Toda matriz A puede descomponerse de manera única, como la suma de una matriz hermitiana H y una antihermitiana K , donde

$$H = \tfrac{1}{2}(A + A^*) \text{ y } K = \tfrac{1}{2}(A - A^*).$$

***Definición* 2.11.** *MATRIZ HERMITIANA SEMIDEFINIDA POSITIVA: Una matriz hermitiana es semidefinida positiva, si todos sus valores propios son no negativos.*

***Definición* 2.12.** *MATRIZ UNITARIA: Una matriz U es unitaria si $UU^* = U^*U = I$ siendo I la matriz identidad.*

***Definición* 2.13.** *MATRIZ DIAGONAL: Una matriz $D = [d_{ij}]$ en $M_n(\mathbb{C})$ es diagonal si $d_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.*

***Definición* 2.14.** *MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR. Una matriz $D = [d_{ij}]$ en $M_n(\mathbb{C})$ es triangular superior si $d_{ij} = 0$ siempre que $i > j$.*

***Definición* 2.15.** *MATRIZ UNITARIAMENTE DIAGONALIZABLE: Una matriz A es unitariamente diagonalizable, si existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal D en $M_n(\mathbb{C})$, tal que $D = UAU^*$.*

Proposición 2.1. *(Teorema de Schur): Para toda matriz A con valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$, existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior T_A, tales que*

$$U^*AU = T_A = [t_{ij}],$$

donde $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, ..., n$.

Demostración. La demostración de este teorema se hace por inducción en el orden de la matriz A.
Si $n = 1$ es obvio. Supuesto cierto para n se probará para una matriz de orden $n+1$.
Sea $A \in M_{n+1}(\mathbb{C})$, λ un valor propio de A y X un vector propio asociado a λ normalizado. Mediante un proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se obtiene una base ortonormal $\{X, e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Denotemos $P = (Xe_1e_2...e_n)$ que es una matris unitaria y α_{1j} una matriz fila,

$$P^*AP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \alpha_{1j} \\ \hline \Theta & A_n \end{array}\right).$$

Sea

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Theta \\ \hline \Theta & U_n \end{array}\right),$$

en donde U_n es la matriz unitaria que, por hipótesis de inducción, verifica que $U_n^*A_nU_n$ es triangular superior cuya diagonal está formada por los valores propios de A_n.
Sea la matriz $U = PQ$,

$$U^*AU = Q^*P^*APQ = Q^* \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \alpha_{1j} \\ \hline \Theta & A_n \end{array}\right) Q = Q^* \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline \Theta & A_nU_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline \Theta & U_n^*A_nU_n \end{array}\right),$$

así U^*AU es una matriz triangular superior y es fácil comprobar que su diagonal está formada por los valores propios de A.

■

***Definición* 2.16.** *MATRIZ ORTOGONAL: Una matriz A es ortogonal si es unitaria y $A^tA = AA^t = I$.*

***Definición* 2.17.** *FAMILIA CONMUTANTE DE MATRICES: Una colección no vacía $\mathfrak{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ es una familia conmutante de matrices, si para todo par de matrices $A, B \in \mathfrak{F}$, $AB = BA$.*

A continuación se enuncia una particularización del teorema de Schur.

***Corolario* 2.2.** *Si $\mathfrak{F} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ es una familia conmutante de matricez, existe una matriz unitaria U tal que U^*AU es triangular superior para toda $A \in \mathfrak{F}$.*

Demostración. Sean A, B en $\mathfrak{F}$ y λ un valor propio de A, luego $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ es B-invariante. En efecto;
Sea $X \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$

$$(A - \lambda I)BX = ABX - \lambda BX = BAX - B\lambda X = B(AX - \lambda X) = B\Theta = \Theta,$$

luego $BX \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$.

Como $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ tiene dimensión 1, entonces una base está constituida por un único vector $v \neq \Theta$, luego cualquier $X \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$ y distinto de Θ puede expresarse de la forma $X = \alpha v$ con $\alpha \neq 0$, por lo tanto $BX = \beta v$ para algun β, entonces

$$BX = B\alpha v = \alpha Bv = \beta v,$$

de aquí

$$Bv = \frac{\beta}{\alpha} v = \lambda v$$
$$Bv = \lambda v,$$

luego se puede tomar el mismo vector propio X de la matriz A (demostración del teorema de Schur) para construir la misma matriz unitaria U que triangulariza a A para que triangularice B, aunque no se sabe cúal de los autovalores de B pueden elegirse. Por lo tanto existe una matriz U que triangulariza A y B.

■

Definición 2.18. *POLINOMIO CARACTERÍSTICO: Sea A una matriz cuadrada, el determinante*

$$det(A - \lambda I) = f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda)$$

se denomina polinomio característico de A.

Proposición 2.3. *El determinante de una matriz $A = [a_{ij}]$ es el valor*

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Demostración. Se tiene que

$$det(A - \lambda I) = f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda)$$

haciendo $\lambda = 0$ se tiene que

$$det(A) = \lambda_1 ... \lambda_n$$

luego

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

■

***Definición* 2.19.** *LA TRAZA DE UNA MATRIZ: La traza de una matriz $A = [a_{ij}]$ es el valor*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

***Definición* 2.20.** *PRODUCTO INTERIOR DE FRÕBENIUS: El producto interior de Fröbenius está definido por la igualdad*

$$\langle A, B\rangle_F = Tr(B^* A).$$

Nótese que $\langle AC, B\rangle_F = \langle C, A^* B\rangle_F$

A continuación se verificará que el producto interior de Fröbenius está bien definido como un producto interior, es decir que cumple con la simetría, linealidad, homogenidad y positividad. En efecto;
Sea A, B y C matrices y sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\langle A, B\rangle_F = Tr(B^* A) = \sum_{j,i=1}^{n} \alpha_{ij},$$

donde $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ y $B^* A = [\alpha_{ij}]$ siendo $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ki} a_{kj}$, luego

$$\langle A, B\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ki} a_{ki},$$

nótese que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{ki} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \bar{b}_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{b}_{ik},$$

así

$$\langle A, B\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bar{b}_{ik} = Tr(AB^*) = \langle B^*, A^*\rangle_F,$$

por lo tanto $\langle , \rangle_F$ es simetrico.

$$\langle A, B+C\rangle_F = Tr\Big((B+C)^*A\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{b}_{ki}+\bar{c}_{ki})a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{b}_{ki}a_{ki}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_{ki}a_{ki},$$

luego

$$\langle A, B+C\rangle_F = Tr(B^*A) + Tr(C^*A) = \langle A, B\rangle_F + \langle A, C\rangle_F$$

es aditiva.

$$\langle A, \lambda B\rangle_F = Tr(\bar{\lambda}B^*A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda b}_{ki}a_{ki} = \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{b}_{ki}a_{ki} = \lambda\langle A, B\rangle_F,$$

por lo tanto $\langle,\rangle_F$ *es lineal.*

$$\langle A, A\rangle_F = Tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{ki}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2 > 0$$

si $A \neq \Theta$. *Luego* $\langle,\rangle_F$ *positivo.*

***Definición* 2.21.** *NORMA DE FRÕBENIUS: La norma de Fröbenius ó norma euclidiana de una matriz A, está definida por*

$$\|A\|_F = \langle A, A\rangle_F^{1/2} = \left[\sum_{j,i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{1/2}.$$

***Definición* 2.22.** *ESPECTRO DE UNA MATRIZ: El conjunto de los valores propios de una matriz A, se denota mediante* $\delta(A)$ *y se denomina el espectro de A.*

***Definición* 2.23.** *Sea* $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}$, $Re(\mathcal{T})$, $Im(\mathcal{T})$ *y* $|\mathcal{T}| = (\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}$, *denotan los conjuntos conformados por las partes real, imaginaria y los módulos de los elementos de* $\mathcal{T}$, *respectivamente.*

***Definición* 2.24.** *S_n denota el conjunto de las permutaciones sobre $\{1, 2, ..., n\}$.*

***Definición* 2.25.** *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Para un entero $m > 1$, una matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ es llamada raiz m-ésima de A si $B^m = A$.*

***Corolario* 2.4.** *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ con*

$$\sigma(A) \cap (-\infty, 0] = \emptyset.$$

Entonces A tiene una unica raíz cuadrada B tal que

$$\sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} : Rez > o\}.$$

La demostración de este corolario está en [4].

***Teorema* 2.5.** *(Teorema de descomposicón polar): Para toda matriz A, existe una matriz semidefínida positiva P y una matriz unitaria V, tales que $A = PV$.*

Demostración. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Se tiene que AA^* es semidefinida positiva. En efecto;*

$$X^*AA^*X = (A^*X)^*A^*X = |A^*X|^2 \geq 0.$$

Se denotara por P la raiz de A^*A, de manera que

$$P^2 = A^*A,$$

y

$$(P^*)^2 = P^*P^* = A^*A$$

así

$$P^* = P, \quad \text{ver [4]}.$$

Para todo $X \in \mathbb{C}^n$ se tiene que:

$$\langle AX, AX\rangle_F = \langle X, A^*AX\rangle_F = \langle X, P^2X\rangle_F = \langle P^*X, PX\rangle_F = \langle PX, PX\rangle_F$$

$$\|AX\|_F^2 = \|PX\|_F^2$$

$$\|AX\|_F = \|PX\|_F,$$

luego las matrices A y P alteran la longitud de los vectores de la misma manera, así

$$\|A\|_F = \|P\|_F,$$

es decir, existe una matriz unitaria V tal que

$$A = PV.$$

■

En la siguiente proposición se enuncian y demuestran algunas caracterizaciones, que muestran la relación existente entre A, H, K, P y V, donde P y V son las matrices que aparecen en el teorema 1.3, y donde H y K son las partes hermitiana y antihermitiana de la matriz A cuando$A$ es normal.

***Proposición* 2.6.** *Sea A una matriz, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A es normal.

(b) A es unitariamente diagonalizable.

(c) $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$, donde $\delta(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

(d) $AV = VA$.

(e) $AP = PA$.

(f) $VP = PV$.

(g) $AH = HA$.

(h) $AK = KA$.

(i) $HK = KH$.

Demostración. *(a)⇒(b). Supongamos que A es normal, por el teorema de Schur existe una matriz unitaria U tal que $U^*AU = T$, siendo T una matriz triangular superior. Entonces T es normal ya que*

$$TT^* = U^*AUU^*A^*U = U^*A^*AU = U^*A^*UU^*AU = T^*T.$$

Sea $T =: [t_{ij}]$. Entonces

$$(T^*T)_{11} = |t_{11}|^2$$

y

$$(TT^*)_{11} = \sum_{k=1}^{n} |t_{1k}|^2$$

se concluye que $t_{1k} = 0,\ k = 2, ..., n$. En general

$$(T^*T)_{ii} = |t_{ii}|^2$$

y

$$(TT^*)_{ii} = \sum_{k=i}^{n} |t_{ik}|^2$$

se concluye que $t_{ik} = 0,\ k = i+1, ..., n,\ i = 1, ..., n-1$ *lo que prueba que* T *es diagonal.*

(b)$\Rightarrow$*(a).Sea* A *unitariamente diagonizable, entonces existe una matriz unitaria* U *tal que* $U^*AU = D$, *siendo* D *una matriz diagonal, luego dado que* D *es normal,*

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* = UD^*U^*UD^*DU^* = A^*A,$$

se concluye que A *es normal.*

(b)$\Rightarrow$*(c).Sea* A *una matriz unitariamente diagonizable, luego existe una matriz unitara* U *tal que* $U^*AU = D$ *donde* D *es una matriz diagonal. Entonces, por el teorema de Schur* $D = [\lambda_i]$ *donde* $\delta(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *, por lo tanto*

$$\|A\|_F^2 = \|U^*AU\|_F^2 = \|D\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

(c)$\Rightarrow$*(b).Sea* $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$, *donde* $\delta(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. *Por el teorema de Schur existe una matriz unitaria* U *tal que* $U^*AU = T = [t_{ij}]$ *donde* T *una matriz triangular superior y* $t_{ii} = \lambda_i$, *entonces*

$$\|U^*AU\|_F^2 = \|T\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2,$$

así T *es una matriz diogonal, por tanto,* A *es unitariamente diagonalizable.*

(a)$\Rightarrow$*(f).Si* A *es normal, entonces*

$$AA^* = VPP^*V^*$$

$$A^*A = P^*V^*VP = P^*P,$$

como P *es hermitiana,* $P^*P = PP^* = P^2$. *Luego*

$$VP^2V^* = P^2$$

Nótese que tanto VP^2V^*, como P^2 son matrices cuadradas semidefinidas positivas, su raíz cuadrada es única por el corolario 2.4, por lo tanto

$$VPV^* = P$$

o lo que es lo mismo $VP = PV$.

(f)⇒(a).Sea $VP = PV$, *entonces*

$$AA^* = VPP^*V^* = VP^2V^* = P^2VV^* = P^2 = P^*V^*VP = A^*A,$$

se concluye que A es normal.

(f)⇒(d). Sea $VP = PV$, *entonces*

$$VAV^* = VPVV^* = VP = PV = A,$$

es decir, $VA = AV$.

(d)⇒(f). Sea $AV = VA$, *entonces*

$$VPV^* = VAV^*V^* = AVV^*V^* = AV^* = PVV^* = P,$$

es decir, $VP = PV$.

(f)⇒(e). Sea $VP = PV$, *entonces*

$$PA = AV^*A = AV^*PV = AV^*VP = AP,$$

(e)⇒(f). Sea $PA = AP$, *entonces*

$$VP = VAV^* = AV^*V = A = PV.$$

(a)⇒(g). Sea A normal.

$$AH = A\frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(AA + AA^*) = \frac{1}{2}(AA + A^*A) = \frac{1}{2}(A + A^*)A = HA$$

(g)⇒(a). *Sea* $AH = HA$, *luego*

$$A\frac{1}{2}(A+A^*) = \frac{1}{2}(A+A^*)A$$

$$AA + AA^* = AA + A^*A$$

$$AA^* = A^*A.$$

A *es normal.*

(a)⇒ (h). Sea A normal.

$$AK = A\frac{1}{2}(A-A^*) = \frac{1}{2}(AA - AA^*) = \frac{1}{2}(AA - A^*A) = \frac{1}{2}(A-A^*)A = KA$$

(h)⇒ (a). Sea $AK = KA$, *luego*

$$A\frac{1}{2}(A-A^*) = \frac{1}{2}(A-A^*)A$$

$$AA - AA^* = AA - A^*A$$

$$-AA^* = -A^*A.$$

$$AA^* = A^*A.$$

A *es normal.*

(a)⇒ (i). Sea A normal.

$$HK = \frac{1}{2}(A+A^*)\frac{1}{2}(A-A^*) = \frac{1}{4}(AA - AA^* + A^*A - A^*A^*)$$

$$= \frac{1}{4}(AA - A^*A + AA^* - A^*A^*)\frac{1}{4}(AA + AA^* - A^*A - A^*A^*)$$

$$= \frac{1}{4}(A-A^*)(A+A^*) = \frac{1}{2}(A-A^*)\frac{1}{2}(A+A^*) = KH$$

(i)⇒ (a). Sea $HK = KH$, luego

$$AA^* = (H+K)(H^*+K^*) = HH^* + HK^* + KH^* + KK^*$$

$$= H^*H - HK + KH + K^*K = H^*H - KH + HK + K^*K$$

$$= H^*H + K^*H + H^*K + K^*K = H^*H + H^*K + K^*H + K^*K$$

$$(H^* + K^*)(H+K) = A^*A.$$

■

La siguiente proposición muestra una relación pitagórica entre una matriz y sus partes hermitiana y antihermitiana.

***Proposición* 2.7.** *Para toda matriz A*

$$\|A\|_F^2 = \|H\|_F^2 + \|K\|_F^2$$

Demostración.

$\|A\|_F^2 = \langle H+K, H+K\rangle_F = \langle H,H\rangle_F + \langle H,K\rangle_F + \langle K,H\rangle_F + \langle K,K\rangle_F$

$= \langle H,H\rangle_F + Tr(K^*H) + Tr(H^*K) + \langle K,K\rangle_F$

$=\langle H,H\rangle_F - Tr(KH) + Tr(HK) + \langle K,K\rangle_F$

$= \langle H,H\rangle_F + \langle K,K\rangle_F$

$= \|H\|_F^2 + \|K\|_F^2.$

■

***Proposición* 2.8.** *$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2$, donde $\delta(H) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\delta(K) = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, para cada $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Se tiene que $HH^* = H^*H$ por ser H hermitiana y ademas

$$KK^* = K(-K) = -KK = K^*K,$$

por ser K antihermitiana, por lo tanto H y K son normales. Aplicando la proposición 2.6 se obtiene que
$\|H\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$ y $\|K\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2$
y por la proposición 1.2
$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2$.

■

3. *CARACTERIZACIÓN DE MATRICES NORMALES*

En esta sección se mostrarán algunas caracterizaciones de matrices normales y se mostrará el teorema principal, que es una nueva caracterizacón de matrices normales

.

***Proposición* 3.1.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) A *es normal.*
(b) $Re(\delta(A)) = \delta(H)$.
(c) $Im(\delta(A)) = \delta(K)$.
(d) $\delta(A) = \{\alpha_i + \hat{\imath}\beta_{\sigma(i)} \mid i = 1, ..., n\}$, *para alguna permutación* σ *de* S_n.

Demostración. *(a)⇒(b). Como* A *es normal, por la proposición 2.6,* $\{A, H, K\}$ *es una familia conmutante y del corolario 2.2,* A, H *y* K *son simultáneamente triangularizables, esto es, existe* U *unitaria tal que*

$$A = U^*T_AU, \;\; H = U^*T_HU, \;\; K = U^*T_kU,$$

luego como $A = H + K$, *entonces* $U^*T_AU = U^*T_HU + U^*T_kU$.
Así, $T_A = T_H + T_K$, *con lo cual,* $\lambda_j = \alpha_j + \hat{\imath}\beta_{\sigma(j)}$ *para alguna permutación* σ *en* Sn *donde se puede observar que* $Re(\lambda_j) = \alpha_j$, *por tanto* $Re(\delta(A)) = \delta(H)$.
(a)⇒(c).Demanera de manera análoga se concluye que $Im(\delta(A)) = \delta(K)$.
(b)⇒(a). Por el teorema de Schur, existe una matriz unitaria U *tal que* $T_A = U^*AU = [t_{ij}]$ *es una matriz triangular superior. Entonces,*

$$T_A = U^*HU + U^*KU = \hat{H} + \hat{K},$$

en donde, $\hat{H} = U^*HU =: [\hat{h}_{ij}]$ *y* $\hat{K} = U^*KU =: [\hat{k}_{ij}]$.

Dado que

$$\|T_A\|_F^2 = \|\hat{H}\|_F^2 + \|\hat{K}\|_F^2, \tag{1}$$

donde

$$\|T_A\|_F^2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |t_{ij}|^2$$

y

$$\|\hat{H}\|_F = \|U^*\|_F\|H\|_F\|U\|_F = \|H\|_F$$

y como H es normal, por la proposición 2.6, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 + \|\hat{K}\|_F^2$$

Esta igualdad junto con la hipótesis conduce a

$$\sum_{i=1}^{n}[Re(\lambda_i)]^2 + \sum_{i=1}^{n}[Im(\lambda_i)]^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}[Re(\lambda_i)]^2 + \|\hat{K}\|_F^2$$

así

$$\sum_{i=1}^{n}[Im(\lambda_i)]^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |t_{ij}|^2 = \|\hat{K}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{k}_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j} |\hat{k}_{ij}|^2. \tag{2}$$

Por otro lado, $\hat{h}_{ii}$ *es real y* $\hat{k}_{ii}$ *es imaginario puro, entonces* $|t_{ij}|^2 = |\hat{h}_{ii}|^2 + |\hat{k}_{ii}|^2$. *De lo anterior se obtiene*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |t_{ij}|^2 = \sum_{i\neq j} |\hat{h}_{ij}|^2 + \sum_{i\neq j} |\hat{k}_{ij}|^2$$

De aquí y (2) *se sigue que*

$$\sum_{i=1}^{n}[Im(\lambda_i)]^2 + \sum_{i\neq j} |\hat{h}_{ij}|^2 + \sum_{i\neq j} |\hat{k}_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{k}_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j} |\hat{k}_{ij}|^2.$$

Con lo cual,

$$\sum_{i=1}^{n}[Im(\lambda_i)]^2 + \sum_{i\neq j}|\hat{h_{ij}}|^2 = \sum_{i=1}|\hat{k_{ii}}|^2. \qquad (3)$$

Como

$$\hat{\imath}Im(\lambda_i) = \hat{k_{ii}},$$

de (3) *se sigue que*

$$\sum_{i\neq j}|\hat{h_{ij}}|^2 = 0,$$

luego $\hat{h_{ij}} = 0$ *para cada* $i \neq j$. *Por otro lado,* T_A *es triangular superior, en consecuencia* $\hat{h_{ij}} = -\hat{k_{ij}}$ *para todo* $i > j$ *y como* $\hat{K}$ *es normal entonces* $\hat{k_{ij}} = 0$ *para cada* $i \neq j$. *Se obtiene que* $\hat{K}$ *y* $\hat{H}$ *son matrices diagonales por lo tanto* T_A *es una matriz diagonal y por la proposición 2.6* A *es normal.*

(c)⇒(a).La demostración es análoga a la anterior.

La equivalencia (a)⇔(d), se sigue inmediatamente de cualquiera de las equivalencias antriormente probadas.

■

En lo que sigue, $\delta(P) = \{\rho_1, ..., \rho_n\}$ *y* $\delta(V) = \{u_1, ..., u_n\}$.

Proposición 3.2. *Si* A *es una matriz, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\delta(A) = \{u_j\rho_{\sigma(j)} | j = 1, ..., n\}$, *para alguna permutación* σ *de* S_n.

(b) $|(\delta(A)| = \{\rho_1, ..., \rho_n\}$.

(c) A *es normal.*

Demostración. (a)⇒ (b). Si existe una permutación $\sigma \in S_n$ *tal que*

$$\delta(A) = \{u_j\rho_{\sigma(j)} | j = 1, ..., n\}$$

entonces,

$$\lambda_i = u_i\rho_{\sigma(i)},\ |\lambda_i| = |u_i||\rho_{\sigma(i)}| = |\rho_{\sigma(i)}| = \rho_{\sigma(i)}$$

puesto que P es semidefinida positiva, sus valores propios son no negativos, luego $|\delta(A)| = \{\rho_1, ..., \rho_n\}$

(b)$\Rightarrow$ (c). Como

$$\|A\|_F^2 = \|VP\|_F^2 = \|P\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2$$

y dado que $\rho_i^2 = |\lambda_i|^2$, para i=1,...,n *entonces*

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2$$

por la proposición 2.6, tenemos que A es normal.

(c)$\Rightarrow$ (a). Si A es normal por la proposición 2.6, $\{A, V, P\}$ es una familia conmutante. Nótese que P es una matriz normal puesto que $P = AV^*$, luego

$$PP^* = AV^*VA^* = AA^* = A^*A = A^*VV^*A = P^*P,$$

además por ser V una matriz unitaria entonces es normal, luego A, V y P son matrices normales, entonces $\{A, V, P\}$ (por el teorema de Schur) es una familia simultaneamente diagonalizable , así, existe una matriz unitaria U tal que;

$$T_A = U^*AU = U^*VUU^*PU$$

con $T_A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $U^*VU = diag(u_1, ..., u_n)$ y $U^*PU = diag(\rho_{\sigma(1)}, ..., \rho_{\sigma(n)})$ por lo tanto

$$\lambda_i = u_i\rho_{\sigma(i)},\ i = 1, ..., n.$$

Esto es, existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\delta(A) = \{u_i\rho_{\sigma(i)} | i = 1, ..., n\}$.

■

A continuación se demostrará el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.3. Una matriz A es normal, si y sólo si, existe una permutación σ de S_n tal que

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_j\overline{\lambda_{\sigma(j)}} | j = 1, ..., n\}$$

Demostración. $\Rightarrow$ *Si A es normal, entonces existe una matriz unitaria U tal que $A = U^*DU$ donde $D = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, luego $A^*A = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU$. Ahora, $DD^* = diag\{\lambda_1\overline{\lambda_1}, ..., \lambda_n\overline{\lambda_n}\}$, se sigue que*

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_i\overline{\lambda_i} | i = 1, .., n\}.$$

$\Leftarrow$ *Por el Teorema de Schur, para alguna matriz unitaria U, $A = U^*TU$ con T triangular superior, así $A^*A = U^*T^*TU$. Haciendo $\hat{T} = T^*T =: [\hat{t}_{ij}]$, luego $\hat{T}$ es una matriz hermitiana puesto que $\hat{T}^* = T^*T = \hat{T}$, se tiene que $\hat{t}_{ij} = \hat{t}_{ji}$, $i < j$ y $\hat{t}_{ii} = \lambda_i\overline{\lambda_i} + \alpha_i$ donde $\alpha_i = \sum_{k=1}^{i-1} \bar{t}_{ki}t_{ki}$. Nótese que α_i, $\hat{t}_{ii} \geq 0$ para $i = 1, ..., n$. Ahora bien,*

$$\|\hat{T}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\overline{\lambda_i}\lambda_i + \alpha_i|^2 + \sum_{i<j} 2|\hat{t}_{ij}|^2.$$

Por otra parte, como $\hat{T}$ es normal y $\delta(A^*A) = \delta(\hat{T})$, entonces

$$\|\hat{T}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}}|^2.$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i\overline{\lambda_i} + \alpha_i), \tag{4}$$

en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}} \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_i}. \tag{5}$$

Haciendo $\lambda_i = a_i + \imath b_i$, *con* a_i *y* b_i *reales, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n}[(a_i - a_{\sigma(i)})^2 + (b_i - b_{\sigma(i)})^2] \geq 0,$$

reescribiendo

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + a_{\sigma(i)}^2 + b_i^2 + b_{\sigma(i)}^2) \geq \sum_{i=1}^{n} 2(a_i a_{\sigma(i)} + b_i b_{\sigma(i)}). \tag{6}$$

Como A^*A *es hermitiana,* $\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}}$ *es un número real, entonces*

$$\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}} = a_i a_{\sigma(i)} b_i + b_{\sigma(i)}.$$

$$\lambda_i\overline{\lambda_i} = (a_i + \imath b_i)(a_i - \imath b_i) = a_i^2 + b_i^2$$

Sustituyendo en (6)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + a_{\sigma(i)}^2 + b_i^2 + b_{\sigma(i)}^2) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\overline{\lambda_i} + \lambda_{\sigma(i)}\overline{\lambda_{\sigma(i)}}) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}}.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{\lambda_{\sigma(i)}}. \tag{7}$$

De (5) y (7) tenemos que $\alpha_i = 0$ *para todo* i=1,...,n. *Ahora, sea* $t_{ki} = e + id$, *luego* $\overline{t_{ki}}t_{ki} = e^2 + d^2$, *se concluye que* $t_{ki} = 0$, *para todo* i,*y para todo* $k = 1, ..., i-1$. *Por lo tanto,* T *es una matriz diagonal y así* A *es necesariamente normal.*

■

***Ejemplo* 3.1.** *Sea la matriz* $A \in M_2(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{pmatrix},$$

27

luego

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & -2i \end{pmatrix}.$$

Ahora

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} i-\lambda & 1+i \\ -1+i & 2i-\lambda \end{pmatrix} = -3i\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 3i),$$

así $\delta(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ *con* $\lambda_1 = 0$ *y* $\lambda_2 = -3i$.

Analogamente

$$A^*A = \begin{pmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{pmatrix}$$

$$det(A^*A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 6-\lambda \end{pmatrix} = -9\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 9),$$

sea la permutación σ *la idéntica, luego*

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_j\overline{\lambda}_{\sigma(j)} | j = 1,2\} = \{(0)(0), (-3i)(3i)\} = \{0, 9\}.$$

Como se puede observar, existe la permutación σ *tal que*

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_j\overline{\lambda}_{\sigma(j)} | j = 1,2\},$$

luego por el teorema 3.3, A es normal.

4. CONCLUSIONES

Despúes del desarrollo de este trabajo se concluye:

- *Una matriz A es normal, si y sólo si, existe una permutación σ de S_n tal que*

$$\delta(A^*A) = \{\lambda_j\overline{\lambda_{\sigma(j)}} | j = 1, ..., n\}$$

- *Toda matriz A es triangularizable.*
- *Si A y B son matrices conmutantes entonces las triangulariza la misma matriz unitaria.*
- *Para toda matriz A se tiene que A^*A y AA^* son normales, semidefinidas positivas y hermitianas.*

Referencias

[1] *A. Cuida, Caracterización De Matrices Normales Usando Valores Propios, Boletin de Matemática Nueva Serie, Vol. XIII No*1*, pp.* $57-65$*, 2006.*

[2] *A. Cuida, de Matrices Normales. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2007).*

[3] *A. Gómez P., F Cala V. y J. Ramos C.,Matrices normales y topologia de* $\Re^{2n^2}$*, artículo (2007)*

[4] *A. Paternina, Sobre las raices M-ésima de una matriz compleja, tesis (2004).*

[5] *Drazin, M. P. On diagonable and normal matrices, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) 2 (1951) 189-198.*

[6] *Elsner, L. and Paardekooper, M. H. C., On measures of nonnormality of matrices, Linear Algebra Appl. 92 (1987) 107-124.*

[7] *Huhtanen, M.,(1999), A stratification of the set of normal matrices. En: Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports A414,3-15p*

[8] *L. Elsner, K.H. Ikramov, Normal Matrices: An update, Linear Algebra Appl. 285, 291-303 (1998).*

[9] *O. Toeplitz, Der Algebraische Analogon zu einen Satze von Fejer, Math. Z. 2, 187-197(1918).*

[10] *P. Lancaster, The Theory of Matrices, Academic Press, 1985.*

[11] *R. Grone, R. Johnson, E. M de Sa, H. Wolkovicz, Normal matrices, Linear Algebra Appl. 87 (1987) 213-225.*

[12] *R. Horn, C. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge U.P., 1985.*

[13] *Tom M. Apostol, Calculo Vol.II, seginda edición, Editorial reverté S.A*

[14] *Y. Álvarez, Operadores lineales que preservan simetría y antisimetría. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia (2005).*