GEODESICAS Y CURVATURAS EN GRUPOS DE LIE

HECTOR JOSÉ CABARCAS URRIOLA

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE MATEMÁTICA

CARTAGENA, D. T y

2001

GEODESICAS Y CURVATURAS EN GRUPOS DE LIE

HECTOR JOSÉ CABARCAS URRIOLA

Trabajo de grado

Asesor
RUBEN DARIO ORTIZ
Matemático
Profesor
Universidad De Cartagena

UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CARTAGENA, D. T y
2001

Nota de Aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Ciudad y Fecha (día, mes, año)

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Esta monografía desarrollada con base en el artículo llamado GEODESICAS Y CURVATURA EN GRUPOS DE LIE tomado de la REVISTA MATEMÁTICAS ENSEÑANZA UNIVERSITARIA VOL. VI,1997 estudia las geodésicas de los grupos de Lie con métrica Riemanniana bi-invariante como subgrupo a 1-parámetro, y presenta el tensor de curvatura y la curvatura seccional de manera muy simple.

En el Capítulo 1 se da todas las herramientas necesarias para el desarrollo de la idea planteada en el párrafo anterior, la cual es expuesta en el Capítulo 2.

La teoría sustentada en estas páginas es dada de manera sistemática. En tal manera que cada definición, teorema, lema, etc. sea lo más clara posible.

En la sección 1.1 se trata los conceptos de variedad diferenciable , funciones de valor real diferenciables definida sobre una variedad diferenciable y aplicaciones diferenciables de una variedad diferenciable en otra. Posteriormente en la sección 1.2 damos las nociones de lo que es un vector tangente sobre una variedad diferenciable como un operador, y definiendo el espacio de estos operadores como el espacio tangente. Por qué esto es importante? Porque se necesitan, en la sección 1.3, para darle consistencia a la definición de campo vectorial sobre una variedad diferenciable, que es a su vez fundamental, por que de aquí se desprende el concepto de álgebra de Lie; desde luego, antes se define lo que es un grupo de Lie, sección 1.5.

En la sección 1.6 se trata las nociones de conexión afín y la derivada covariante, que nos permite tomar la derivada de campos vectoriales a lo largo de curvas diferenciables. Además, estos dos conceptos entre lazados nos lleva a la definición de conexión Riemanniana.

En la sección 1.7 se dan tres conceptos basados en la secciones anteriores como lo son, las geodésicas, el tensor de curvatura y la curvatura seccional.

En el Capítulo 2 se demuestra la existencia de un subgrupo a 1-parámetro en cada punto p de un grupo de Lie G. Después se da la definición de métrica Riemanniana bi-invariante sobre un grupo Lie y se muestran algunas relaciones que existen entre esta métrica con la conexión, la curvatura y la geodésica.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Variedades Diferenciables.

Definición 1. Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \Re^n \to M$ de conjuntos abiertos U_α de $\Re^n$ en M, α perteneciente a un conjunto indizado, tal que :

1) los $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ cubren a M, esto es, $\bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2) Para cualquier par de números reales α, β con $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, los conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en $\Re^n$ y las aplicaciones $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ y $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta$ son diferenciables.
3) La familia $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ es maximal relativa a la condición 1) y 2).

El par $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ con $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ es llamado un sistema de coordenadas de M en p; $\boldsymbol{x}_\alpha$ es llamado una parametrización de M en p. $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ es llamada una vecindad coordenada en p. A la familia $\mathcal{U}$ satisfaciendo 1) y 2) es llamada estructura diferenciable sobre M.

Teorema 2. Una estructura diferenciable sobre un conjunto M induce una topología $\mathcal{T}$ sobre M definida así: $A \subseteq M$ es un conjunto abierto en M si y solo si $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ es un conjunto abierto en $\Re^n$ para todo α.

Demostración. i) $\phi \in \mathcal{T}$. En efecto, $\phi = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(\phi \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ para todo α y como $\Re^n$ es un espacio topológico, ϕ es abierto en $\Re^n$. Además, $M \in \mathcal{T}$ porque $U_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)) = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(M \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ es una conjunto abierto en $\Re^n$ para todo α.

ii) sea $\{(A_\beta)\}$ una colección cualquiera de elementos en $\mathcal{T}$ y sea $A = \bigcup_\beta A_\beta$, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)) &= \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left(\left[\bigcup_\beta A_\beta\right] \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left(\bigcup_\beta [A_\beta \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)]\right)\\ &= \bigcup_\beta \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_\beta \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))\end{aligned}$$

como cada $A_\beta \in \mathcal{T}$, entonces $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_\beta \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ es un abierto en $\Re^n$ para todo α y como la unión cualquiera de abiertos en $\Re^n$ es de nuevo un abierto, tenemos que $A \in \mathcal{T}$.

iii) sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n elementos en $\mathcal{T}$, entonces

$$\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}\left(\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right] \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)\right) = \bigcap_{i=1}^n \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A_i \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$$

es una abierto en $\Re^n$ para todo α. Por lo tanto la intersección de los A_i está en $\mathscr{T}$.

Obsérvese que con esta topología los $x_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos en M y que las aplicaciones x_α y x_α^{-1} son continuas. En consecuencia, los x_α son homeomorfismos de los conjuntos abiertos U_α en M.

Teorema 3. Sea M y N variedades diferenciales y $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, y_\beta)\}$ estructuras diferenciables sobre M y N respectivamente. Consideremos el producto cartesiano $M \times N$ y las aplicaciones $Z_{\alpha\beta}(p,q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$, $p \in U_\alpha, q \in V_\beta$. Entonces $\{U_\alpha \times V_\beta, Z_{\alpha\beta}\}$ es una estructura diferenciable sobre $M \times N$

Definición 4. Sea $f : M \to \Re$ una función definida sobre una variedad diferenciable M. Entonces f es diferenciable en $p \in M$ si para alguna parametrización $x_\alpha : U_\alpha \subset \Re^n \to M$ con $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, la composición $\hat{f} = f \circ x_\alpha : U_\alpha \subset \Re^n \to \Re$ es diferenciable en $x_\alpha^{-1}(p)$. Una función f es diferenciable en un conjunto abierto A de M si lo es en todo punto de A.

Se sigue inmediatamente de la condición 2) de la Definición 1) que la definición dada no depende de la escogencia de la parametrización x. En efecto, si $y : V \subset \Re^n \to M$ es otra parametrización con $p \in y(V)$, tenemos que $h = x_\alpha^{-1} \circ y$ es diferenciable, entonces $f \circ y = f \circ x \circ h$ es también diferenciable.

Definición 5. Sea M y N variedades diferenciables de dimensión m y n, respectivamente. Una aplicación $\varphi : M \to N$ es diferenciable en $p \in M$, si dado una parametrización $y : V \subset \Re^n \to N$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $x : U \subset \Re^m \to M$ en p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ y la aplicación

$$\hat{\varphi} = y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \Re^m \to \Re^n \qquad (1)$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$. φ es diferenciable sobre un conjunto abierto de M si es diferenciable en todo punto de este conjunto abierto.

Nuevamente usando la condición 2) de la Definición1, observemos que esta definición es independiente de la parametrización escogida.
De aquí en adelante no haremos distinción en f y φ de las correspondientes expresiones en coordenadas locales $\hat{f}$ y $\hat{\varphi}$, respectivamente.

1.2 Espacio Tangente

Definición 6. Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es llamada una curva (diferenciable) en M. supóngase que $\alpha(0) = p$, y sea D el conjunto de funciones $f : M \to \Re$ que son diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en t = 0 es una aplicación $\alpha'(0) : D \to \Re$ dado por

8

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0} \quad , f \in D.$$

Un vector tangente en p es el vector tangente en $t=0$ de alguna curva $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ con $\alpha(0)=p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se indicará por $T_p(M)$.

Si escogemos una parametrización $\boldsymbol{x} : U \to M$ en $p=\boldsymbol{x}(0)$, podemos expresar f y la curva α en esta parametrización por

$$f\circ \boldsymbol{x}(q) = f(x_1,\ldots,x_n), \qquad p=(x_1,\ldots,x_n)\in U,$$

y

$$\boldsymbol{x}^{-1}\circ\alpha(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$

respectivamente, por lo tanto, restringiendo f a α, obtenemos

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}f(x_1(t),\ldots,x_n(t))\right|_{t=o}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_i x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)f.$$

En otras palabras, el vector $\alpha'(0)$ puede ser expresado en la parametrización $\boldsymbol{x}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0. \qquad (2)$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente en p de la curva

$$x_i \to \boldsymbol{x}(0,\ldots 0, x_i,\ldots,0).$$

Si α' y β' son vectores tangentes en p, entonces se sigue de (2) que

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad y \quad \beta'(0)f = \sum_{i=0}^{n} y_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Luego para $c\in\Re$, tenemos que bajo las operaciones usuales de funciones

$$c\alpha'(0)f + \beta'(0)f = \sum_{i=1}^{n}(cx_i'(0)+y_i'(0))\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

por lo tanto, el conjunto $T_p(M)$ forma un espacio vectorial de dimensión n cuya base asociada a $\boldsymbol{x}: U \to M$ es $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$. El espacio vectorial $T_p(M)$ es llamado el espacio tangente de M en p.

También de la Definición 6 podemos deducir fácilmente que

$$\alpha'(0)(f+g) = \alpha'(0)f + \alpha'(0)g, \tag{3}$$

$$\alpha'(0)(fg)(p) = f(p)\alpha'(0)g + g(p)\alpha'(0)f, \tag{4}$$

Proposición 7. Sea M y N variedades diferenciables de dimensión n y m, respectivamente y sea $\varphi: M \to N$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in M$ y para cada $v \in T_p(M)$, escogemos una curva diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Tome $\beta = \varphi \circ \alpha$. La aplicación $d\varphi_p: T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ es una aplicación lineal que no depende de la escogencia de α.

Demostración. sea $\boldsymbol{x}: U \to M$ y $\boldsymbol{y}: V \to N$ parametrizaciones en p y $\varphi(p)$, respectivamente. Expresando φ en las parametrizaciones, podemos escribir

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$$

$$q = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \ \ (y_1, \ldots, y_m) \in V.$$

Por otro lado, expresando α en las parametrizaciones $\boldsymbol{x}$, obtenemos

$$\boldsymbol{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, y_m(x_1(t), \ldots x_n(t))).$$

Se sigue que la expresión para $\beta'(0)$ con respecto a la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_0\right\}$ de $T_{\varphi(p)}(M)$, asociada a la parametrización $\boldsymbol{y}$, es dado por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} x_i'(0), \ldots, \sum_{i=}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0)\right) \tag{5}$$

La relación (5) muestra inmediatamente que $\beta'(0)$ no depende de la elección de α. Además, (5) puede ser escrita como

$$\beta(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) x_j'(0) \ \ i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$$

donde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ denota la matriz $m \times n$ y $(x_j'(0))$ denota una matriz columna $n \times 1$. Por tanto, $d\varphi_p$ es una aplicación lineal de $T_p(M)$ en $T_{\varphi(p)}(N)$ cuya matriz en la base asociada obtenida de las parametrizaciones $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ es precisamente la matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

Definición 8. La aplicación lineal $d\varphi_p$ definida por la Proposición 7 es llamada el diferencial de φ en p.

Definición 9. Sean M y N variedades diferenciables. Una aplicación $\varphi : M \to N$ es un difeomorfismo si es diferenciable, biyectiva y su inversa φ^{-1} es diferenciable. φ es llamado difeomorfismo en $p \in M$ si existen vecindades U de p y V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.

Sea $\boldsymbol{x}$ una parametrización de un punto p en una variedad M, entonces de la condición 2) de la Definición 1 y la Definición 5 concluimos que $\boldsymbol{x}$ es un difeomorfismo

1.3 Campos Vectoriales

Definición 10. Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ con un vector $X(p) \in T_p(M)$.

Consideremos una parametrización $\boldsymbol{x} : U \subset \Re^n \to M$ podemos escribir usando la identidad (2)

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (6)$$

donde cada $a_i : U \to \Re$ es una función sobre U y $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ es una base asociada a $\boldsymbol{x}$, $i = 1,\ldots,n$.

Definición 11. Un campo vectorial X es llamado diferenciable si las funciones a_i son diferenciables para alguna parametrización.

Ocasionalmente, es conveniente usar la idea sugerida por (6) y pensar en un campo vectorial como una aplicación $X : D \to F$ del conjunto D de las funciones de valor real diferenciables sobre M en el conjunto de las funciones de valor real sobre M definida de la siguiente manera

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \qquad (7)$$

donde f denota por abuso de notación, la expresión de f en la parametrización $\boldsymbol{x}$. Es inmediato ver que X es diferenciable si, y solo si, $X : D \to D$, esto es, $Xf \in D$ para todo $f \in D$.

Proposición 12. Si $\varphi : M \to M$ es un difeomorfismo, entonces

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = v(f \circ \varphi)(p)$$

para todo $v \in T_p(M)$ y toda función f diferenciable en una vecindad de $\varphi(p)$.

Demostración. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curve diferenciable con $\alpha'(0) = v$, $\alpha(0) = p$. Entonces, usando la Proposición 7 y la Definición 6, obtenemos

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = v(f \circ \varphi)(p).$$

Si X y Y son campos diferenciables sobre M y $f :\to \Re$ es una función diferenciable, podemos considerar $X(Yf) = XYf$ y $Y(Xf) = YXf$.

Lema 13. Sea X y Y campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable M. Entonces existe un campo vectorial tal que para todo, $f \in D$, $Zf = (XY - YX)f$.

Demostración. primero, probaremos que si existe Z, entonces es único. Suponga la existencia de tal Z. Sea $p \in M$ y sea $\boldsymbol{x} : U \to M$ una parametrización en p, y sea

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

la expresión para X y Y en estas parametrizaciones. Entonces para todo $f \in D$,

$$XYf = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Por lo tanto, Z es dado en parametrizaciones $\boldsymbol{x}$, por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

que prueba la unicidad de Z.

Para mostrar la existencia, defina Z_α en cada vecindad coordenada $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ de una estructura diferenciable $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ sobre M por la expresiones previas. Por la unicidad, $Z_\alpha = Z_\beta$ sobre $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) \neq \phi$, que nos permite definir Z sobre la variedad completa M. (ver Do Carmo, pag. 26)

Definición 14. El campo vectorial dado por el Lema 13 es llamado el bracket $[X,Y]=XY-YX$ de X y Y.

Es claro que Z es diferenciable, debido a que, tanto los a_i como los b_j son diferenciables.

Proposición 15. Si X, Y y Z son campos vectoriales difenrenciables sobre M, a, b son números reales, y f, g son funciones diferenciables, entonces:

(a) $[X,Y]=-[Y,X]$ (anticonmutativa),
(b) $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$ (linealidad),
(c) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (identidad de Jacobi),
(d) $[fX,gY]=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$.

Demostración. (a) $[X,Y]=XY-YX=-(YX-XY)=-[YX]$.

(b) Sea f una función diferenciable sobre M y sean a y b números reales, entonces

$$\begin{aligned}[aX+bY,Z]f &= (aX+bY)Zf-Z(aX+bY)f=(aX)(Zf)+(bY)(Zf)-Z(aXf)-Z(bYf)\\ &= aXZf+bYZf-aZXf-bZYf=a(XZ-ZX)f+b(YZ-ZY)f\\ &= a[X,Z]f+b[Y,Z]f\end{aligned}$$

(c) Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z]f &= [X,Y]Zf-Z[X,Y]f=XY(Zf)-YX(Zf)-Z(XYf-YXf)\\ &= XYZf-YXZf-Z(XYf)+Z(YXf)=XYZf-YXZf-ZXYf+ZYXf.\end{aligned}$$

Luego, haciendo esto para $[[Y,Z],X]$ y $[[Z,X],Y]$, y después sumando las conseguimos (c).

(d) Utilizando las identidades (3) y (4) calculemos

$$\begin{aligned}[fX,gY] &= fX(gY)-gY(fX)=f(gXY+X(g)Y)-g(fXY+Y(f)X)\\ &= fg(XY-YX)+fX(g)Y-gY(f)X=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X.\end{aligned}$$

Teorema 16. Sea X un campo vectorial diferenciable sobre una variedad diferenciable M y sea $p\in M$. Entonces existe una vecindad $U\subset M$ de p, un intervalo $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, y una aplicación $\varphi:(-\delta,\delta)\to M$ tal que la curva $t\to\varphi(t,q)$, $t\in(-\delta,\delta)$, $q\in U$, es la única curva que satisface $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=X(\varphi(t,q))$ y $\varphi(0,q)=q$ para todo $q\in U$.

Este teorema es una reafirmación del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones de primer orden, gracias al difeomorfismo local que existe entre la variedad M y $\Re^n$.

Definición 17. Usemos la notación $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$ y llamamos $\varphi_t : U \to M$ el flujo local de X.

Definición 18. Una curva $\alpha : (-\delta,\delta) \to M$ que satisface la condición $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ y $\alpha(0) = q$ es llamada una trayectoria del campo X que pasa por q para $t = 0$.

Lema 19. Sea $h : (-\delta,\delta) \times U \to \Re$ una aplicación diferenciable con $h(0,q) = 0$ para todo $q \in U$. Entonces existe una aplicación diferenciable $g : (-\delta,\delta) \times U \to \Re$ con $h(t,q) = tg(t,q)$, en particular,

$$g(0,q) = \left.\frac{\partial h(t,q)}{\partial t}\right|_{t=0}. \qquad (8)$$

Demostración. Es suficiente definir, para t fijo,

$$g(t,q) = \int_0^1 \frac{\partial(ts,q)}{\partial(ts)} ds.$$

Si $u = ts$, entonces $du = tds$, luego

$$tg(t,q) = \int_0^t \frac{\partial h(u,q)}{\partial u} du = h(t,q) - h(0,q) = h(t,q).$$

Diferenciando $h(t,q) = tg(t,q)$ con respecto a t y haciendo $t = 0$ obtenemos (8).

Proposición 20. Sea X, Y campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable M, sea $p \in M$ y sea φ_t el flujo local de X en una vecindad U de p. Entonces

$$[X,Y](p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[Y - d\varphi_y(Y)](\varphi_t(p)).$$

Demostración. Sea $f : M \to \Re$ una función diferenciable en una vecindad de p. Considerando

$$h(t,q) = f(\varphi_t(q)) - f(q)$$

se tiene que,

$$h(0,q) = f(\varphi_0(q)) - f(q) = f(q) - f(q) = 0.$$

Aplicando el Lema 19 obtenemos una función $g(t,q)$ tal que

$$f \circ \varphi_t(q) = f(q) + tg(t,q) \text{ y } g(0,q) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t,q)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(q)) - f(q)}{t} = Xf(q)$$

como consecuencia de la proposición 12

$$((d\varphi_t Y)f)(\varphi_t(p)) = (Y(f \circ \varphi_t))(p) = Yf(p) + t(Yg(t,p))|$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y - d\varphi_t Y]f(\varphi_t(p)) = \lim_{t\to 0}\frac{(Yf)(\varphi_t(p)) - Yf(p)}{t} - (Yg(0,p))$$
$$= (X(Yf)(p)) - (Y(Xf))(p) = ((XY - YX)f)(p) = ([X,Y]f)(p)$$

1.4 Métrica Riemanniana

Vimos que en el conjunto M que usamos para definir una variedad diferenciable, se puede definir un topología, por lo tanto M es un espacio topológico. Ahora, puede suceder que M con esta topología no sea Hausdorff o no tenga una base contable de abiertos. Por esto, para lo que sigue de este trabajo consideraremos variedades diferenciables que son Hausdorff con una base contable de abiertos.

Definición 21. Una métrica Riemanniana sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto p de M un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ sobre el espacio tangente $T_p(M)$, que es diferenciable en el sentido siguiente: si (U, x) es un sistema de coordenadas en p, con $x(x_1,\dots,x_n) = q \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\,x_q(0,\dots,1,\dots,0)$, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right\rangle_q = g_{ij}(x_1,\dots,x_n)$ es una función diferenciable sobre U.

Una manera de expresar la diferenciabilidad de la métrica Riemanniana es diciendo que para cualquier par de campos vectoriales X y Y, que son diferenciables en una vecindad V de M, la función $\langle X, Y\rangle$ es diferenciable sobre V.

Definición 22. Una variedad diferenciable con una métrica Riemanniana dada será llamada una variedad Riemanniana.

Definición 23. Sea M y N variedades Riemanniana. Un difeomorfismo $f : M \to N$ es llamada una isometría si :

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \qquad (9)$$

para todo $p \in M$, $v, u \in T_p(M)$. Una isometría es local en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ es una isometría.

1.5 Grupos de Lie

Definición 24 . Sea G un grupo y al mismo tiempo una variedad diferenciable, donde para $x, y \in G$, sea xy su producto y x^{-1} la inversa de x. Entonces, decimos que G es un grupo de Lie si la aplicación $G \times G \to G$ definida por $(x, y) \to xy$ y la aplicación $G \to G$ definida por $x \to x^{-1}$ son ambas diferenciables.

Una consecuencia de la Definición, es que la traslación izquierda $L_a(x)=ax$ y la traslación derecha $R_a(x)=xa$ y las inversas $(L_a)^{-1}=L_{a^{-1}}$ y $(R_a)^{-1}=R_{a^{-1}}$ son también diferenciables. Por tanto, L_a y R_a son difeomorfismos.

Definición 25. Decimos que un campo vectorial diferenciable X sobre un grupo de Lie G es invariante a izquierda si $dL_aX=X$ para todo $a\in G$.

Teorema 26. Sea G un grupo de Lie y $T_e(G)$ el espacio tangente en la identidad. Entonces cada $X_e\in T_e(G)$ determina un campo vectorial diferenciable X sobre G que es invariante a traslaciones izquierdas.

Demostración. Para cada $g\in G$ le corresponde exactamente una traslación izquierda L_g. Por lo tanto, si existe X, es únicamente determinado por la fórmula $X_g=dL_g(X_e)$. Excepto por diferenciabilidad, esta fórmula define un campo vectorial invariante, debido a que para $a\in G$, tenemos

$$dL_a(X_g)=dL_a\circ dL_g(X_e)=d(L_a\circ L_g)(X_e)=dL_{ag}(X_e)=X_{ag}.$$

Debemos demostrar que X, así determinada, es diferenciable. Sea (U,x)un sistema coordenado de e tal que $x(0,\ldots,0)=e$ y sea V una vecindad de e que satisface $V\subset X(U)$. Sea g, $h\in V$ con coordenadas $x=(x_1,\ldots x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$, respectivamente, y sea $z=(z_1,\ldots,z_n)$ la coordenada del producto gh. Entonces $z_i=f_i(x,y), i=1,\ldots n$ son diferenciables sobre $x^{-1}(V)\times x^{-1}(V)$,por la Definición 24. Si escribimos $X(e)=\sum_{i=1}^{n}a_i(e)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), a_1,\ldots a_n$ son números reales, ahora

$$X_g=dL_g\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(e)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{(0,\ldots 0)}\right]\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_g$$

como las coordenadas de L_g son dadas por $z_i=f_i(x,y), i=1,\ldots n$ con las coordenadas x de g fijas. Se sigue que sobre V las componentes X_g son funciones diferenciables en las coordenadas locales.

Teorema 27. Si X, Y son campos vectoriales diferenciables invariantes a izquierda sobre un grupo de Lie G, el bracket $[X,Y]$ es invariante a izquierda.

Demostración. Sea $a\in G$ y sea f una función diferenciable sobre G

$$\begin{aligned}dL_a[X,Y]f&=[X,Y](f\circ L_a)=(XY-YX)(f\circ L_a)=X(Yf\circ L_a)-Y(Xf\circ L_a)\\&=X(dL_aY)f-Y(dL_aX)f=XYf-YXf=[X,Y]f.\end{aligned}$$

Definición 28. El álgebra de Lie $\boldsymbol{G}$ de un grupo de Lie G es el espacio tangente $T_e(G)$ con la operación $[X_e,Y_e]=[X,Y]_e$ para todo $X_e,Y_e\in T_e(G)$.

De ahora en adelante, los elementos del álgebra de Lie serán vistos como vectores en $T_e(G)$ o como campos vectoriales invariante a izquierda sobre G.

Hagamos una observación. Para cualquier $a \in G$, sea $R_{a^{-1}}L_a : G \to G$ el automorfismo interno de G determinado por a. Tal aplicación es un difeomorfismo que deja fijo a e, esto es, $R_{a^{-1}}L_a(e) = e$. Así, el diferencial $d(R_{a^{-1}}L_a) = Ad(a) : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ la aplicación lineal. Explícitamente,

$$Ad(a)Y = dR_{a^{-1}}L_a Y = dR_{a^{-1}}dL_a Y = dR_{a^{-1}}Y, \text{ para todo } Y \in \mathbf{G}.$$

Por otro lado, sea x_t el flujo de $X \in \mathbf{G}$, entonces por la Proposición 20

$$[Y, X] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(dx_y(Y) - Y\right).$$

Como X es invariante a izquierda, $L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$, donde

$$x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = yx_t(e) = R_{x_t(e)}(y).$$

Por lo tanto, $dx_t = dR_{x_t(e)}$ y

$$[Y, X] = \lim_{t \leftarrow 0} \frac{1}{t}\left(dR_{x_t(e)}(Y) - Y\right) = \lim_{t \to o} \frac{1}{t}\left(Ad\left(x_t^{-1}(e)\right)Y - Y\right). \quad (10)$$

1.6 Conexión Riemanniana

Denotemos por $\aleph(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre M y por $D(M)$ el anillo de las funciones diferenciables de valor real sobre M.

Definición 29. Una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \aleph(M) \times \aleph(M) \to \aleph(M)$$

que es denotado por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ y que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

en el cual $X, Y, Z \in \aleph(M)$ y $f, g \in D(M)$.

Definición 30. Una aplicación diferenciable $c : I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \Re$ en una variedad diferenciable M es llamada curva diferenciable.

Definición 31. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c: I \to M$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $t \in I$ un vector tangente $V(t) \in T_{c(t)}(M)$. Decir, que V es diferenciable significa que para cualquier función diferenciable f sobre M, la función $t \to V(t)f$ es una función diferenciable sobre I. El campo vectorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, es denotado por $\frac{dc}{dt}$.

Proposición 32. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Existe una correspondencia que asocia a un vector V a lo largo de la curva diferenciable $c: I \to M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c, llamada la derivada covariante de V a lo largo de c, tal que:

a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde V es un campo vectorial a lo largo de c y f es una función diferenciable sobre I.

c) si V es inducido por un campo vectorial $Y \in \aleph(M)$, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Demostración. Supongamos inicialmente que existe una correspondencia que satisface a), b) y c). Sea $x: U \subset \Re^n \to M$ una parametrización con $c(I) \cap x(U) \neq \phi$ y sea $(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ una expresión local de $c(t), t \in I$. Sea $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces podemos expresar el campo V localmente como $\sum_j v_j X_j$, $j = 1,\ldots,n$, donde $v_j = v_j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.

Por a) y b), tenemos

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_j v_j X_j\right) = \sum_j \frac{D}{dt}(v_j X_j) = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_j v_j \frac{DX_j}{dt}$$

por c) y i) de la Definición 29,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{\left(\sum (dx_i/dt) X_i\right)} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Por tanto

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j . \qquad (11)$$

La expresión (11) muestra que si hay una correspondencia que satisface las condiciones de la Proposición, entonces tal correspondencia es única.

Para mostrar la existencia, defina $\frac{DV}{dt}$ en $x(U)$ por (11). Es fácil verificar que (11) posee las propiedades consideradas. Si $y(W)$ es otra vecindad coordenada, con $y(W) \cap x(U) \neq \phi$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ en $y(W)$ por (11), la definición coincide en $y(W) \cap x(U)$, por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $x(U)$. Se sigue que la definición puede ser extendida sobre todo M, y esto concluye la prueba.

Definición 33. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva $c : I \to M$ es llamado paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposición 34. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sea $c : I \to M$ una curva diferenciable en M y sea V_0 un vector tangente a M en $c(t_0), t_0 \in I$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo V a lo largo de c, tal que $V(t_0) = V_0$.($V(t)$ es llamado el transporte paralelo de V_0 a lo largo de c)

Demostración. Supóngase que el Teorema fue probado para el caso en que $c(I)$ está contenido en una vecindad coordenada local. Por la compacidad, para cualquier $t_1 \in I$, el segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$ puede ser cubierto por un número finito de vecindades coordenadas, en cada una de las cuales V puede ser definida, por hipótesis. Por la unicidad, las definiciones coinciden cuando la intersección es no vacío, permitiendo la definición de V a lo largo de todo $[t_0, t_1]$.

Tenemos solo que probar, por tanto, el Teorema cuando $c(I)$ está contenido en una vecindad coordenado $x(U)$ de un sistema de coordenadas (U, x). Sea $x^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ una expresión local para $c(t)$ y sea $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$, donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.

Supóngase que existe un campo vectorial V en $x(U)$ que es paralelo a lo largo de c con $V(t_0) = V_0$. Entonces $V = \sum_j v_j X_j$ satisface

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j .$$

Poniendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, y reemplazando j con k en la primera suma, obtenemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,i} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k = 0 .$$

El sistema de n ecuaciones diferenciables en $v_k(t)$,

$$0 = \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1,\ldots,n ,$$

posee una solución única que satisface la condición inicial $v_k(t_0) = v_0^k$. Entonces se sigue que, si V existe, es único. Además, como el sistema es lineal, cualquier solución es definida para todo $t \in I$, que prueba la existencia de V con las propiedades consideradas.

Definición 35. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ y una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Una conexión es llamada compatible con la métrica $\langle\ ,\ \rangle$, cuando para cualquier curva suave c y cualquier par de campos vectoriales paralelos P y P' a lo largo de c, tenemos $\langle P, P' \rangle =$constante.

Proposición 36. Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ sobre M es compatible con la métrica si y solo si para cualquier campos vectoriales V y W a lo largo de una curva $c : I \to M$ tenemos

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I . \qquad (12)$$

Demostración. Es obvio que (12) implica que ∇ es compatible con $\langle\ ,\ \rangle$. Por tanto, probemos la inversa. Escoja una base ortonormal $\{P_1(t_0),\ldots,P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}(M), t_0 \in I$. Usando la Proposición 34, podemos extender los vectores $P_i(t_0), i = 1,\ldots n$ a lo largo de c por un transporte paralelo. Porque ∇ es compatible con la métrica, $\{P_1(t),\ldots,P_n(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{c(t)}(M), t \in I$. En efecto, $\langle P_i(t), P_j(t) \rangle =$ constante, si $t = t_0$, entonces $\langle P_i(t_0), P_j(t_0) \rangle = 0$ por lo tanto $\langle P_i(t), P_j(t) \rangle = 0$ para todo t.

Luego podemos escribir

$$V = \sum_i v_i P_i, \qquad W = \sum_i w_i P_i, \qquad i = 1,\ldots n$$

donde v_i y w_i son funciones diferenciables sobre I. Se sigue que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt} P_i .$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i \right\} = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_i v_i w_i \right\} = \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle .$$

Colorario 37. Una conexión ∇ sobre una variedad Riemanniana M es compatible con la métrica si y solo si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \aleph(M). \quad (13)$$

Demostración. Supóngase que ∇ es compatible con la métrica. Sea $p \in M$ y sea $c : I \to M$ una curva diferenciable con $c(t_0) = p, t_0 \in I$, y con $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} X(p)$. Entonces usando las Proposiciones 32 y 36

$$X(p)\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle\bigg|_{t=t_0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle_p = \left\langle \nabla_{X(p)}, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \nabla_{X(p)} Z \right\rangle_p$$

como p es arbitrario, (13) se tiene. La inversa es obvia.

Definición 38. Una conexión afín ∇ sobre una variedad suave M es llamada simétrica cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (14)$$

para todo $X, Y \in \aleph(M)$.

Teorema 39. Dado una variedad Riemanniana M, existe una única conexión afín ∇ sobre M que satisface las condiciones:

a) ∇ es simétrica.

b) ∇ es compatible con la métrica Riemanniana.

Demostración. Supóngase que existe tal ∇. Entonces

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad (15)$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \quad (16)$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle . \quad (17)$$

Sumando (15) y (16) y restando (17), tenemos, usando la simetría de ∇, que

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle .$$

Por tanto

$$\langle Z,\nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}.(18)$$

la expresión (18) muestra que ∇ es determinado únicamente de la métrica $\langle , \rangle$. En consecuencia, si existe, será única.

Para probar la existencia, defina ∇ por (18). Es fácil verificar que ∇ está bien definido y que satisface las condiciones considerados.

Definición 40. Una conexión afín ∇ es llamada conexión Riemanniana si satisface las condiciones a) y b) del Teorema.

1.7 Geodésicas y Curvatura

Definición 41. Una curva parametrizada $\gamma : I \to M$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ en el punto t_0. Si γ es una geodésica en t, para todo $t \in I$, decimos que γ es una geodésica.

Definición 42. La curvatura R de una variedad Riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X,Y \in \aleph(M)$ una aplicación $R(X,Y)Z : \aleph(M) \to \aleph(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \aleph(M),$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana de M.

Proposición 43. Dado $p \in M$, existen un conjunto abierto $V \subset M$, $p \in M$, los números $\delta > 0$ y $\in > 0$ y una aplicación diferenciable $\gamma : (-\delta,\delta) \times V \to M$ tal que la curva $t \to \gamma(t,q)$, $t \in (-\delta,\delta)$, es la única geodésica de M que, en el instante $t = 0$, pasa a través de q con vector tangente v.(Ver Do Carmo, pag. 64)

Definición 44. Dado un punto $p \in M$ y un espacio dos dimensional $\sigma \subset T_p(M)$, el número real definido como

$$K(\sigma) = K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X \times Y|^2},$$

donde $|X \times Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2$ y $\{X,Y\}$ es una base cualquiera de σ, es llamado la curvatura seccional de σ en p.

CAPÍTULO 2

GEODÉSICAS Y CURVATURAS EN GRUPOS DE LIE

2.1 Subgrupo a 1-parámetro

Teorema 1. Sea G un grupo de Lie, G su álgebra de Lie y sea $X \in \boldsymbol{G}$. Las trayectorias de X determinan una aplicación $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$ con $\varphi(0) = e, \varphi'(t) = X(\varphi(t))$, con la propiedad que $\varphi(t)$ es definida para todo $t \in \Re$ y, además $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$.

Demostración. El Teorema 16 garantiza la existencia y unicidad de la función diferenciable $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to G$ para todo $p \in U$, U abierto de G y $\varepsilon > 0$, tal que $\varphi(p,0) = p$ y $\dfrac{d\varphi}{dt}(p,t) = X(\varphi(t,p))$. Si adoptamos la siguiente notación $\varphi(t,e) = \varphi(t)$. Lo que nos muestra que X determina la aplicación φ.
Ahora, sea $\varphi(t_0) = y$, $t_o \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. De la invarianza a izquierda, tenemos que $t \to y^{-1}\varphi(t)$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ cumple que es también una trayectoria de X que pasa por e para $t = t_0$. Por la unicidad, $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t-t_0)$, por tanto φ puede ser extendido a $\Re$. además $\varphi(t_0)^{-1} = \varphi(-t_0)$ y como t_0 es arbitrario, obtenemos $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$.

Definición 2. La aplicación $\varphi : \Re \to G$ del Teorema 1 es llamado un subgrupo a 1-parámetro del campo vectorial X.

Observación: El Teorema 1 me garantiza la existencia de un subgrupo a 1-parámetro.

2.2 Métrica Riemanniana Bi-invariante

Definición 3. Sea G un grupo de Lie. Se dice que una métrica Riemanniana en G es invariante a izquierda si

$$\langle u,v\rangle_b = \langle (dL_a)_b(u), (dL_a)_b(v)\rangle$$

para todo a, $b \in G$ y todo u, $v \in T_b(G)$. Donde L_a es la traslación izquierda en G. Si usamos la traslación derecha R_a en vez de la traslación izquierda la métrica se recibe el nombre de métrica Riemanniana invariante a derecha. Se llamará bi-invariante si es invariante a izquierda y a derecha.

Nota: Que G sea un grupo de Lie con métrica Riemanniana invariante a derecha es equivalente a decir que la traslación derecha es una isometría. (ver Definición 23, Capítulo 1)

Teorema 4. Sea G un grupo de Lie con métrica Riemanniana bi-invariante, entonces

1. El producto interno que la métrica determina en el álgebra de Lie $\boldsymbol{G}$ (asociada con G) satisface:

$$\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle$$

para todo X, Y, Z en $\boldsymbol{G}$. $[\cdot,\cdot]$ indica el corchete de Lie.

23

2. Si una forma bilineal definida en ***G*** satisface (1) y G es conexo entonces la métrica Riemanniana definida en G por

$$\langle u,v\rangle_a = \left\langle \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(u), \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(v)\right\rangle_e$$

para todo $a \in G$ y todo $u, v \in T_a(G)$ es bi-invariante.

2.3 Métrica bi-invariante y conexión.

Teorema 5. Sea G un grupo de Lie con métrica Riemanniana a izquierda. Sea ***G*** el álgebra de Lie de G. Entonces son equivalentes

1. $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle$, $\forall X, Y, Z \in \boldsymbol{G}$.

2. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$, $\forall X, Y \in \boldsymbol{G}$.

donde ∇ indica la conexión Riemanniana de G.

Demostración. Supóngase por hipótesis que $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle$ para todo X, Y, Z en ***G***. Entonces, por la identidad (18) del Capítulo 1

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= Y\langle X,Y\rangle + X\langle Z,Y\rangle - Z\langle Y,X\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,X],Z\rangle \\ &= Y\langle X,Z\rangle + X\langle Z,Y\rangle - Z\langle Y,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,X],Z\rangle. \end{aligned}$$

Si X, $Y \in \boldsymbol{G}$ entonces X, Y son invariantes a izquierda, luego

$$\langle X(a), Y(a)\rangle_a = \langle (dL_a)_a(X(e)), (dL_a)_a(X(e))\rangle_a = \langle X(e), X(e)\rangle_a$$

para todo $a \in G$, ya que la métrica es bi-invariante a izquierda. por lo tanto $\langle X,Y\rangle$ es una función constante, y así

$$Y\langle X,Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle = Z\langle Y,X\rangle = 0.$$

usando esto y la hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= -\langle X,[Y,Z]\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,X],Z\rangle \\ &= -\langle [X,Z],Y\rangle = \langle [Z,X],Y\rangle = \langle Z,[X,Y]\rangle \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

Recíprocamente, supóngase que para todo X, $Y \in \boldsymbol{G}$, $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ y se debe demostrar que $\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle$, $\forall X, Y, Z \in \boldsymbol{G}$.

En efecto, como $\langle X,Y\rangle$ es constante, $Y\langle X,Z\rangle = 0$ y por lo tanto

$$0 = Y\langle X,Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle$$

de lo que se tiene

$$\langle X, \nabla_Y Z\rangle = -\langle \nabla_Y X, Z.\rangle$$

luego

$$\langle X,[Y,Z]\rangle = \langle X, 2\nabla_Y Z\rangle = \langle X, \nabla_Y Z\rangle = -2\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\langle [Y,X], Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle$$

para todo X, Y, $Z \in$ $\boldsymbol{G}$.

Teorema 6. Sea G un grupo de lie con una métrica Riemanniana invariante a izquierda. Entonces son equivalentes

1. La métrica de G es bi-invariante,
2. La función $r : G \to G$ tal que $r(g) = g^{-1}$ es una isometría de G.

Demostración. Sea φ_t un subgrupo a 1- parámetro cualquiera de G con $\varphi(0) = e$ y $\varphi'(0) = v$. Se tiene que $r(\varphi_t) = (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ entonces $(dr)_{\varphi_t}(\varphi_t') = -\varphi_{-t}'$. Tomando $t = 0$ se obtiene $(dr)_e(v) = -v$. Luego $(dr)_e$ = -identidad en la tangente.
También se tiene que

$$R_{a^{-1}} \circ r \circ L_{a^{-1}}(g) = R_{a^{-1}}\left(r\left(a^{-1}g\right)\right) = R_{a^{-1}}\left(g^{-1}a\right) = g^{-1}aa^{-1} = g^{-1}.$$

Por lo tanto $R_{a^{-1}} \circ r \circ L_{a^{-1}} = r$; obsérvese que $(dr)_a : T_aG \to T_{a^{-1}}G$ y que

$$(dr)_a = d\left(R_{a^{-1}} \circ r \circ L_{a^{-1}}\right)_a = \left(dR_{a^{-1}}\right)_e (dr)_e \left(dL_{a^{-1}}\right)_a.$$

ahora, se puede mostrar que (1) implica (2). En efecto, la bi-invarianza de la métrica muestra que

$$\begin{aligned}
\langle (dr)_a(u), (dr)_a(v)\rangle_{r(a)} &= \left\langle \left(dR_{a^{-1}}\right)_e (dr)_e \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(u), \left(dR_{a^{-1}}\right)_e (dr)_e \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(v)\right\rangle_{a^{-1}} \\
&= \left\langle (dr)_e \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(u), (dr)_e \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(v)\right\rangle_{a^{-1}} = \left\langle -\left(dL_{a^{-1}}\right)_a(u), -\left(dL_{a^{-1}}\right)_a(v)\right\rangle_e \\
&= \left\langle \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(u), \left(dL_{a^{-1}}\right)_a(v)\right\rangle_e = \langle u, v\rangle_e
\end{aligned}$$

Lo que demuestra lo deseado.

Recíprocamente, se desea demostrar (2) implica (1). Supóngase que $r : G \to G$ con $r(g) = g^{-1}$ es una isometría de G. Se desea demostrar que la métrica $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es invariante a la derecha, ya que por hipótesis tenemos que es invariante a izquierda. Como

$$r \circ L_{a^{-1}} \circ r(g) = r\left(a^{-1}g^{-1}\right) = ga = R_a(g).$$

Esto es, R_a es una compuesta de isometrías y por lo tanto una isometría. De donde se concluye que la métrica es invariante a derecha.(Ver nota de la Definición 3)

2.4 Conexión y geodésicas

Lema 7. Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n, $\zeta : M \to M$ una isometría y ∇ la conexión Riemannian de M. Entonces ζ preserva la conexión, esto es, dados dos campos X, Y en M y $p \in M$, se debe tener que $d\zeta(\nabla_X Y) = \nabla_{d\zeta_p(X)} d\zeta_p(Y)$.

Demostración. Dado $p \in M$, sea $\varphi(t)$ el flujo del campo X en p, o sea, $\varphi(t)$ es una curva diferenciable con $\varphi(0) = p$ y $\varphi'(0) = X(p)$. Considere $Z(p)$ un campo unitario paralelo a lo largo de $\varphi(t)$ y extendamos el campo a una vecindad suficientemente pequeña de p. Como la conexión es compatible con la métrica y ζ es una isometría

$$\frac{d}{dt}(\langle Y,Z\rangle) = \left\langle \frac{dY}{dt}, Z\right\rangle + \left\langle Y, \frac{dZ}{dt}\right\rangle = \left\langle \frac{dY}{dt}, Z\right\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle d\zeta(\nabla_X Y), d\zeta(Z)\rangle.$$

También,

$$\frac{d}{dt}(\langle Y,Z\rangle) = \frac{d}{dt}\langle d\zeta(Y), d\zeta(Z)\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}(d\zeta(Y)), d\zeta(Z)\right\rangle = \left\langle \nabla_{d\zeta(X)} d\zeta(Y), d\zeta(Z)\right\rangle.$$

Siendo $Z(p)$ cualquiera, se puede tomar $\{Z_1(p),\ldots,Z_n(p)\}$ linealmente independiente y como ζ es un difeomorfismo se tiene que $\{d\zeta_p(Z_1(p)),\ldots,d\zeta_p(Z_n(p))\}$ también será linealmente independiente, formando así una base de $T_{\zeta(p)}M$. Como todas las proyecciones de $\nabla_{d\zeta_p}(X) d\zeta(Y)$ coinciden con las proyecciones de $d\zeta_p(\nabla_X Y)$ se deduce que

$$\nabla_{d\zeta_p}(X) d\zeta(Y) = d\zeta_p(\nabla_X Y).$$

Teorema 8. Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda y $\boldsymbol{G}$ el álgebra de Lie de G. Entonces son equivalentes:

1. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y], \quad \forall X, Y \in \boldsymbol{G}$.
2. Las geodésicas de G que parten de e, elemento neutro de G, son subgrupos a 1-parámetro de G.

Demostración. Se supone (1) y se demuestra (2). Sea $X \in \boldsymbol{G}$ y sea g la geodésica de G que parte de e, que por la Proposición 43 del Capítulo 1, es única.. Ahora, por la observación de la Definición 2, sea $\varphi(t)$ un subgrupo a 1-parámetro de X. Si se demuestra que $\varphi(t)$ es una geodésica, entonces $g = \varphi$, lo que implica que g es un subgrupo a 1-parámetro. Por la hipótesis tenemos que $\nabla_X X = \frac{1}{2}[X,X] = 0$, entonces

$$\frac{D}{dt}\varphi'(t) = \nabla_{X|_{\varphi(t)}} X = 0, \quad \forall X \in \boldsymbol{G}$$

luego φ es una geodésica.

Recíprocamente, sea φ una geodésica iniciado en e, que además es un subgrupo a 1-parámetro de $X \in \boldsymbol{G}$, o sea, $\varphi(0) = e, \varphi'(0) = X(e)$, y $\left(\frac{D}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = 0$. Entonces

$$\frac{D\varphi}{dt} = \nabla_{X|_{\varphi(t)}} X, \quad \left(\frac{D}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = (\nabla_X X)(e) = 0.$$

Sea a un punto arbitrario de G y ψ un subgrupo a 1-parámetro de X con $\psi(0) = a$, y como X es invariante a izquierda, $\psi(t) = L_a \circ \varphi(t)$. Por el Lema 7 se tiene

$$\frac{D}{dt}\varphi' = \nabla_{X|_{\varphi(t)}} X = \nabla_{dL_a(X|_{\varphi(t)})} dL_a(X) = dL_a(X) = dL_a\left(\nabla_{X|_{\varphi(t)}} X\right),$$

de donde

$$\left(\frac{D}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = (\nabla_X X)(a) = dL_a\left(\frac{D}{dt}\varphi'\right)_{t=0} = 0,$$

por lo tanto $\nabla_X X = 0$ para todo $X \in \boldsymbol{G}$. Luego

$$0 = \nabla_{(X+Y)}(X+Y) = \nabla_X X + \nabla_Y X + \nabla_Y X + \nabla_Y Y,$$

entonces

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = \nabla_{(X+Y)}(X+Y) - \nabla_X X - \nabla_Y Y = 0,$$

lo que demuestra $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, pero $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, luego

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y] = -\nabla_X Y + [X,Y],$$

de lo que se observa

$$\nabla_X Y = \tfrac{1}{2}[X,Y].$$

Como consecuencia de las proposiciones anteriores se tienen los siguientes resultados:

Colorario 9. Sea G un grupo de Lie con métrica bi-invariante $\langle \cdot,\cdot \rangle$ entonces las geodésicas de G que parten de e son los subgrupos a 1-parámetro.

Demostración. si G tiene métrica bi-invariante entonces el producto interno que la métrica determina en $\boldsymbol{G}$ satisface la relación

$$\langle X, [Y,Z] \rangle = \langle [X,Y], Z \rangle \quad \forall\, X, Y \in \boldsymbol{G}$$

que es equivalente a la condición

$$\nabla_X Y = \tfrac{1}{2}[X,Y] \quad \forall\, X,\ Y \in \boldsymbol{G}$$

y por el Teorema 8 las geodésicas de G que parten de e son subgrupos a 1-parámetro.

Colorario 10. Sea G un grupo de Lie conexo y suponga que los subgrupos a 1-parámetro que parten de e son geodésicas. Entonces la métrica bi-invariante a izquierda de g dada por

$$\langle u,v\rangle_a = \left\langle (dL_{a^{-1}})_a(u),(dL_{a^{-1}})_a(v)\right\rangle_e$$

$\forall\, a \in G$, $\forall\, u, v \in T_a(G)$ es una métrica bi-invariante.

Demostración. Por el Teorema 8 $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$, $\forall X,\ Y \in \boldsymbol{G}$ que se sabe es equivalente a $\langle X,[Y,Z]\rangle = \langle [X,Y],Z\rangle$ $\forall X,Y \in \boldsymbol{G}$ como G es conexo la métrica es bi-invariante

2.5 Curvatura y métrica bi-invariante

Lema 11. Sea G un grupo de Lie abeliano y X, Y elemento del álgebra de Lie de G entonces $[X,Y]=0$.

Demostración. Sea un grupo abeliano, entonces $R_{a^{-1}} \circ L_a = id$. Por tanto $Ad(a) = d(R_{a^{-1}} \circ L_a) = id$. Sea $\varphi(t)$ el flujo de $X \in \boldsymbol{G}$, entonces usando la identidad (10)

$$[X,Y] = \boldsymbol{lim}_{t\to 0}\frac{1}{t}[Ad(\varphi_{-t}(e))Y - Y] = 0.$$

Teorema 12. Sea G un grupo de Lie con un métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bi-invariante y sea $\boldsymbol{G}$ el álgebra de Lie de G. Entonces

$$R(X,Y)Z = \tfrac{1}{4}[[X,Y],Z] \qquad \forall X,\ Y,\ Z \in \boldsymbol{G}.$$

Demostración. Sean X, Y, $Z \in \boldsymbol{G}$, entonces

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

Como la métrica de G es bi-invariante $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$, $\forall X,\ Y \in \boldsymbol{G}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y\left(\tfrac{1}{2}[X,Z]\right) - \nabla_X\left(\tfrac{1}{2}[Y,Z]\right) + \tfrac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \tfrac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \tfrac{1}{4}[X,[Y,Z]] + \tfrac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \tfrac{1}{4}[Y,[Z,X]] - \tfrac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \tfrac{1}{2}[Z,[X,Y]]. \end{aligned}$$

De la identidad de Jacobi concluimos que

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = -[Z,[X,Y]],$$

$$R(X,Y)Z = \tfrac{1}{4}[Z,[X,Y]] - \tfrac{1}{2}[Z,[X,Y]] = -\tfrac{1}{4}[Z,[X,Y]] = \tfrac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

Colorario 13. Sea G un grupo de Lie abeliano con métrica Riemanniana bi-invariante, entonces

$$R(X,Y)Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \boldsymbol{G}.$$

Demostración. Es una aplicación directa del Lema 11 y del teorema 12.

Teorema 14. Sean G un grupo de Lie con métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bi-invariante, y X, Y en $\boldsymbol{G}$. Si X, Y son ortogonales, la curvatura seccional $K(\sigma)$ en G según el plano σ generado por X e Y es dado por

$$K(\sigma) = \tfrac{1}{4}\|[X,Y]\|^2.$$

Demostración. Se sabe que

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X\times Y|^2}$$

y como X, Y son ortonormales, $|X\times Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 = 1$, de esto,

$$K(\sigma) = \langle R(X,Y)X,Y\rangle = \langle \tfrac{1}{4}[[X,Y],X],Y\rangle = \tfrac{1}{4}\langle [X,Y],[X,Y]\rangle = \tfrac{1}{4}\|[X,Y]\|^2.$$

Obsérvese que $K(\sigma) \geq 0$.

Corolario 15. Si G es un grupo de Lie abeliano con métrica Riemanniana bi-invariante, entonces la curvatura seccional $K(\sigma) = 0$, donde σ es el plano generado por campos ortogonales X, $Y \in \boldsymbol{G}$.

Demostración. Por el Lema 11 y el Teorema 14 tenemos que

$$K(\sigma) = \tfrac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 = \tfrac{1}{4}\|0\|^2 = 0.$$

CONCLUSIONES

Después de culminar con esta monografía podemos concluir que:

- Dado un campo vectorial X en el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G, en el cual hay una métrica Riemanniana bi-invariante definida $\langle\,,\rangle$, existe en el elemento neutro e, del grupo de Lie G una única geodésica que es un subgrupo a 1-parámetro.

- El cálculo del tensor curvatura sobre un grupo de Lie G se puede reducir a encontrar una métrica Riemanniana bi-invariante y demostrar que la operación de grupo de G es abeliano.

- Los cálculo de la curvatura seccional sobre un grupo de Lie puede hacerse mirando que cumple unas condiciones mínimas como por ejemplo la ortogonalidad de los campos vectoriales empleados en el cálculo y también que el grupo sea abeliano.

BIBLIOGRAFÍA

Arrieta J., Matemáticas Enseñanzas Universitarias Vol. VI, n 1 y 2, 1997

Boothy William m., An Introduction To Differentiable Manifold And Riemannian Geometry, Academic Press, Inc.

Do Carmo Manfredo P., Riemannian Geometry. Birkhaser.

Simmos George F., Introduction To Topology And Modern Analisis. Mc Graw- Hill.